

۱- (آسیه اباذری) معادله  $(x^2-1)^2 + (x^2-1)^2 - 2 = 0$  را حل کنید.

پاسخ: 
$$x^2-1=t \Rightarrow t^2+t^2-2=0 \Rightarrow (t^2+2)(t^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t^2+2=0 \rightarrow t^2=-2 \quad \times \\ t^2-1=0 \rightarrow t^2=1 \rightarrow t=\pm 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$x^2-1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=1 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-1=-1 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

۲- (آسیه اباذری) جواب معادله  $x + \sqrt{x} = 6$  چند است.

پاسخ: 
$$\sqrt{x} = 6-x \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow x = 4, x = 9$$

$$\sqrt{4} = 6-4 \Rightarrow 2=2 \quad \checkmark \quad \sqrt{9} = 6-9 \Rightarrow 3=-3 \quad \times$$

۳- (امیر شهرام فصیح زاده) ثابت کنید در هر تصاعد هندسی  $\frac{s_{2n}}{s_n} = q^n + 1$ .

پاسخ: 
$$\left. \begin{aligned} s_{2n} &= \frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1} \\ s_n &= \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{s_{2n}}{s_n} = \frac{a_1(q^{2n}-1)}{a_1(q^n-1)} \Rightarrow \frac{s_{2n}}{s_n} = \frac{(q^n-1)(q^n+1)}{q^n-1} \Rightarrow \frac{s_{2n}}{s_n} = q^n + 1$$

۴- (مهديه فرجاد) برای محافظت از تابشهای مضر مواد رادیو اکتیو لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷٪ کاهش یابد؟

پاسخ: اولین لایه مواد مضر را نصف می کند دومین لایه از نیم باقیمانده نیمی را یعنی  $\frac{1}{4}$  تابش را بر طرف می کند، و ... دنباله این اعداد

به صورت  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  خواهد بود. حال  $(\frac{1}{2})^n < 0.03 \Rightarrow (\frac{1}{2})^n < \frac{3}{100} \Rightarrow (2)^n > 33/3 \Rightarrow n \geq 6$

حداقل مقدار  $n$  برابر ۶ خواهد بود پس تعداد لایه ها باید حداقل شش تا باشد.

۵- (مهديه فرجاد) می خواهیم اتاقی مکعب مستطیل شکل به ابعاد ۳۶۰ و ۴۵۰ و ۲۴۰ سانتی متر را با جعبه ای مکعب شکل با بیشترین حجم بدون این که جایی خالی بماند پر کنیم چه تعداد مکعب در این اتاق جای می گیرد؟

پاسخ: ابعاد جعبه باید عددی باشد که به هر سه بعد قابل تقسیم باشد از آنجایی که باید بزرگترین حجم را داشته باشد پس بزرگترین بعد باید در نظر گرفته شود بنابراین ب. م. م ۳ عدد داده شده را بدست می آوریم.

$$(360, 450, 240) = 2 \times 3 \times 5 \quad \text{ضلع مکعب به سانتی متر} \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \quad 450 = 2 \times 3^2 \times 5 \quad 240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$\text{تعداد جعبه} = \frac{\text{حجم اتاق}}{\text{حجم جعبه}} = \frac{360 \times 450 \times 240}{30 \times 30 \times 30} = 1440$$

۶- (فیروزه عبدالله نژاد) در یک دنباله ی حسابی  $S_{21} = 210$  جمله ی یازدهم دنباله چند است؟ پاسخ:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow a_{11} = a + 10d$$

$$S_{21} = \frac{21}{2} [2a + 20d] = 21a + 210d = 210 \Rightarrow 21(a + 10d) = 210, \Rightarrow a_{11} = a + 10d = \frac{210}{21} = 10$$

۷- (فیروزه عبدالله نژاد) در صورتی که دو چند جمله ای  $x^2 + 3x - 2$  و  $x^3 - 4x^2 + 5x + a$  در تقسیم بر  $x + 2$  هم باقیمانده باشند مقدار  $a$  تعیین کنید.

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= x^2 + 3x - 2 \\ Q(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(-2) = Q(-2) \Rightarrow (-2)^2 + 3(-2) - 2 = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 5(-2) + a$$

پاسخ:

$$4 - 6 - 2 = -8 - 16 - 10 + a \Rightarrow a = 30$$

۸- (نیره فرامرز پور) اگر باقیمانده تقسیم چند جمله ای  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2m^2 + 2$  بر  $x + 1$  بزرگتر از ۲ باشد، حدود  $m$  را بیابید.

پاسخ: باقیمانده تقسیم چند جمله ای  $p(x)$  بر  $x + 1$  برابر  $p(-1)$  است

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2m^2 + 2 = -1 - 3 + 2m^2 + 2 = 2m^2 - 2$$

$$2m^2 - 2 > 2 \Rightarrow 2m^2 > 4 \Rightarrow m^2 > 2 \Rightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases}$$

۹- (زهرا کهنوجی) در یک دنباله حسابی  $S_{12} = S_8$  مقدار  $S_{20}$  چیست؟ پاسخ:

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 6(2a_1 + 11d) = 12a_1 + 66d, S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 4(2a_1 + 7d) = 8a_1 + 28d$$

$$S_{12} = S_8 \Rightarrow 12a_1 + 66d = 8a_1 + 28d, 4a_1 + 38d = 0 \Rightarrow 4a_1 - 38d = 0$$

$$S_{20} = 10(2a_1 + 19d) \Rightarrow 2(2a_1 + 19d) = 0 \rightarrow 2a_1 + 19d = 0, S_{20} = 10 \times 0 = 0$$

۱۰- (زهرا کهنوجی) هر گاه باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x + 3$  به ترتیب ۲ و ۱- باشد باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 + 2x - 3$  را بدست آورید. پاسخ:

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)p(x) + ax + b, f(1) = 2 \Rightarrow 2 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = 2$$

$$f(-3) = -1 \Rightarrow -1 = 0 - 3a + b \Rightarrow 3a + b = -1$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$a + b = 2 \Rightarrow \frac{3}{4} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow R(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

۱۱- (ماندانا طاهری) معادله رادیکالی زیر را حل کنید. پاسخ:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+8} = 9, x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{4(x+2)} = 9 \Rightarrow \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+2} = 9$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x+2} = 9 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow x+2 = 9 \Rightarrow x = 7$$

۱۲- (وحید جعفری چترودی) مجموع چند جمله دنباله ی حسابی  $10, 12, \dots$  برابر صفر است؟ پاسخ:

$$a = \frac{3}{2}, d = -1 \rightarrow S_n = \frac{3}{2}n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = \frac{3}{2}n - \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow -6 = \frac{3}{2}n + \frac{n(n-1)}{2} n^2 - 4n - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$(n-6)(n+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 6 & \checkmark \\ n = -2 & \times \end{cases}$$

۱۳- (وحید جعفری چترودی) معادله  $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$  را حل کنید. پاسخ:

$$\sqrt[3]{x} = z \Rightarrow z + 2z^2 = 3 \Rightarrow 2z^2 + z - 3 = 0 \Rightarrow z = 1, z = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 1, x = -\frac{27}{8}$$

۱۴- (مریم میرامامی) در یک دنباله ای  $a_1 = 5$  و برای هر عدد طبیعی  $n$ ، رابطه  $2a_{n+1} - 2a_n = 0$  برقرار است مجموع پنج جمله اول این دنباله را بیابید. پاسخ:

$$2a_{n+1} - 2a_n = 0 \Rightarrow 2a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{aq^n}{aq^{n-1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}, a = 5 \Rightarrow s_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow s_5 = \frac{5((\frac{2}{3})^5 - 1)}{\frac{2}{3} - 1}$$

۱۵- (مریم میرامامی) اگر باقیمانده تقسیم چند جمله ای  $p(x)$  بر  $3x^2 - 5x - 8$  برابر  $2x + 1$  شود باقیمانده تقسیم  $p(x)$  بر  $x + 1$  بدست آورید. پاسخ:

$$3x^2 - 5x - 8 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{16}{6}$$

$$p(x) = Q(x)(3x^2 - 5x - 8) + 2x + 1 \rightarrow p(-1) = 0 + 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

۱۶- (مریم میرامامی) اگر یکی از ریشه های معادله ای  $x^2 + mx + 16 = 0$  مکعب ریشه دیگر باشد  $m$  را تعیین کنید.

$$x_1, x_2 \text{ ریشه ها} \Rightarrow x_1 = x_2^3$$

$$p = x_1 \times x_2 = x_2^3 \times x_2 = x_2^4 \Rightarrow x_2^4 = 16 \Rightarrow x_2 = \pm 2, x_1 = 2^3 = \pm 8$$

$$S = \pm 2 \pm 8 = \pm 10 \Rightarrow -\frac{b}{a} = \pm 10 \Rightarrow -m = \pm 10 \Rightarrow m = \pm 10$$

۱۷- (مریم میرامامی) پنج عدد طبیعی در نظر بگیرید مجموع مربعات ۳ تای اول با مجموع مربعات دوتای آخر برابر شده است عدد وسط را تعیین کنید. پاسخ:

$$x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$$

$$(x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 - 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 6x - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x - 12) = 0 \Rightarrow x = 12$$

۱۸- (زهره خواجویی) مقدار  $n$  را طوری بیابید که مجموع ضرایب در بسط دو جمله ای  $(a+n)^{2n}$  به اندازه ۵۶ واحد از مجموع ضرایب در بسط دو جمله ای  $(a+n)^{2n}$  بیشتر باشد.

پاسخ: مجموع ضرایب در بسط دو جمله ای  $(a+n)^{2n}$  برابر است با  $2^{2n}$  و مجموع ضرایب در بسط دو جمله ای  $(a+n)^{2n}$  برابر است با  $2^n$ . بنابراین طبق فرض باید

$$2^{2n} = 2^n + 56 \Rightarrow (2^n)^2 - 2^n - 56 = 0 \Rightarrow (2^n - 8)(2^n + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^n = 8 \Rightarrow n = 3 \\ 2^n = -7 \end{cases}$$

۱۹- (زهره خواجویی) سه عقربه یک ساعت که با ساعت های دیگر متفاوت است طراحى شده که عقربه ثانیه شمار هر ۵ دقیقه یک دور کامل و عقربه دقیقه شمار هر ۱۲ دقیقه یک دور کامل و عقربه ساعت شمار هر ۳۵ دقیقه یک دور کامل میزند کوتاهترین مدتی که سه عقربه روی عدد ۱۲ قرار میگیرند را به دست آورید.

پاسخ: دقیقه ای که سه عقربه با هم روی عدد ۱۲ هستند مضارب مشترک ۳۵، ۱۲، ۵ است یعنی کوتاهترین زمان برابر است با کوچکترین

$$5 \times 12 \times 7 = 420$$

مضرب مشترک این سه عدد

۲۰- (زهرا خواجویی) خرگوشی تالانه اش ۲۰۰ متر فاصله دارد و می خواهد به سمت لانه اش حرکت کند اگر در دقیقه اول نصف راه را طی کند و در دقیقه دوم نیز تا وسط راه باقیمانده برود و در دقیقه سوم نیز تا وسط راه باقیمانده برود و این روند تکرار شود. بعد از چند دقیقه حداقل ۱۹۰ متر طی خواهد کرد؟ پاسخ:

اگر  $a_n$  مسافت پیموده شده در دقیقه  $n$  ام باشد داریم  $a_1 = 100, a_2 = \frac{a_1}{2}, a_3 = \frac{a_1}{4}, \dots, a_n = \frac{a_1}{2^{n-1}}$  بنابراین بعد از  $n$  دقیقه کل مسافت پیموده شده برابر است با

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_1}{8} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-1}}$$

$$= a_1 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = a_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 100 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 200 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

برای اینکه حداقل ۱۹۰ متر طی شود باید

$$200 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \geq 190 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{190}{200} \Rightarrow 1 - \frac{190}{200} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$$

$$\frac{10}{200} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{20} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow 10 \log \frac{1}{20} \geq n \log \frac{1}{2} \Rightarrow n \geq \frac{\log 20}{\log 2}$$

۲۱- (مریم انجم شعاع) در یک دنباله هندسی، مجموع شش جمله اول  $\frac{19}{27}$  برابر مجموع سه جمله اول آن است قدر نسبت کدام است .

$$s_6 = \frac{19}{27} S_3 \Rightarrow a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = \frac{19}{27} \times a_1 \times \frac{q^3 - 1}{q - 1} \Rightarrow q^6 - 1 = \frac{19}{27} (q^3 - 1) \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{19}{27} (x - 1)$$

پاسخ:

$$\Rightarrow 27x^2 - 19x - 8 = 0 \Rightarrow (27x + 8)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{27} \Rightarrow q = \frac{2}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

۲۲- (طاہره اسماعیلی) در یک دنباله ی هندسی  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 243$  موجود نیست  $a_3$  را بدست آورید. پاسخ:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \Rightarrow a \times aq \times aq^2 \times aq^3 \times aq^4 = 243 \Rightarrow a^5 q^{10} = 3^5 \Rightarrow aq^2 = 3 \Rightarrow a_3 = 3$$

۲۳- (زهرا خواجویی) نامعادله  $|x| + |x - 2| + |x + 3| < 13$  را حل کنید. پاسخ:

$x$	-۳	۰	۲	
$x$	-	-	+	+
$x - 2$	-	-	-	+
$x + 3$	-	+	+	+

اگر  $x < -3$  داریم  $13 < -3x - 9 - x + 2 - x \Rightarrow 13 < -5x - 7 \Rightarrow 5x < -20 \Rightarrow x < -4$  ✓

اگر  $-3 \leq x \leq 0$  داریم  $13 < 3(x + 3) - (x - 2) - x \Rightarrow 13 < 3x + 9 - x + 2 - x \Rightarrow 13 < x + 11 \Rightarrow x > 2$  ✗

اگر  $0 < x \leq 2$  داریم  $13 < 3(x + 3) - (x - 2) + x \Rightarrow 13 < 3x + 9 - x + 2 + x \Rightarrow 13 < 3x + 11 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq 2$  ✓

اگر  $x > 2$  داریم  $13 < 3(x + 3) + (x - 2) + x \Rightarrow 13 < 3x + 9 + x - 2 + x \Rightarrow 13 < 5x + 7 \Rightarrow x > \frac{6}{5} \Rightarrow x > 2$  ✓

بنابراین کلیه جوابهای قابل قبول عبارتند از  $x < -4$  یا  $\frac{2}{3} < x$

## مسائل منتخب فصل اول کتاب حسابان

۲۴- (مریم اکبری) مجموع همه اعداد سه رقمی که باقیمانده تقسیم آن ها بر ۱۱ برابر ۷ باشد چقدر است؟ پاسخ:

$$106, 117, 128, \dots, 997 \quad n = \frac{997-106}{11} + 1 = 82 \Rightarrow S_{82} = \frac{82(106+997)}{2} = 45223$$

۲۵- (مریم اکبری) احمد و علی با هم چنین قرار داد کرده اند که احمد روز اول بهمن ماه ده تومان به علی بدهد و روز دوم ۲۰ تومان و روز سوم ۳۰ تومان و به همین ترتیب تا روز پانزدهم و علی روز شانزدهم ۱ ریال و روز هفدهم ۲ ریال و روز هیجدهم ۴ ریال و نوزدهم ۸ ریال به همین ترتیب تا روز سی ام در این معادله کدامیک سود برده اند؟

پاسخ: پول هایی که علی از احمد گرفته تشکیل تصاعد حسابی دارند  $10, 20, \dots$  با قدر  $d = 10$

پولی که احمد به علی داده  $S = \frac{15}{2} [2 \times 10 + 14 \times 10] = 1200$  پول هایی که علی به احمد داده یک تصاعد هندسی تشکیل دادند

$1, 2, 4, \dots$  پولی که علی به احمد داده  $S = \frac{1(2^{15}-1)}{2-1} = 2^{15} - 1 = 32767$  و پولی که احمد سود برده است  $32767 - 1200 = 30767$

۲۶- (مریم اکبری) مردی هفت دوست صمیمی دارد. اولی هر شب، دومی یک شب در میان، سومی دو شب در میان و ... و هفتمی شبهای هفتم با او دیدار می کنند تصادفاً یک شب همه آن ها پیش او بودند چند شب دیگر طول می کشد تا همه دوستان دور هم باشند. پاسخ:

$$[1, 2, \dots, 7] = 420 \text{ ک.م.م}$$

۲۷- (مهديه اقبالی) در یک کیسه گردو بین ۲۰۰ تا ۲۵۰ گردو وجود دارد. اگر این گردوها را چهار تا چهار تا، پنج تا پنج تا و شش تا شش تا بشمریم در هر حالت یک گردو باقی می ماند تعداد گردوها چند تا است؟ پاسخ:

۱-  $M$  بر  $6, 5, 4$  بخشپذیر است  $\Rightarrow M$  تعداد گردوها

$$[4, 5, 6] = 60 \text{ کوچکترین مضرب عدد } 60 \text{ که بین } 200 \text{ و } 250 \text{ باشد } 240 \text{ است. پس تعداد گردوها برابر } 241 \text{ است.}$$

۲۸- (اعظم ره انجام) برای نقاشی یک ساختمان یک نقاش خانه را در ۱۲ روز نقاشی می کند و نقاش دیگر خانه را در ۹ روز نقاشی می کند اگر از دو نقاش خواسته باشد که با هم خانه را رنگ بزنند کار نقاشی خانه چقدر طول می کشد؟

پاسخ: نقاش اول در یک روز  $\frac{1}{12}$  خانه و نقاش دوم در یک روز  $\frac{1}{9}$  خانه را رنگ می زند در نتیجه هر دو نقاش در یک روز  $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36}$  خانه را رنگ می زند. بنابراین هر دو در  $\frac{36}{7}$  روز کار را تمام میکنند.

۲۹- (مریم عسکری) یک شهر ۲۰۰۰۰۰ نفر جمعیت دارد. سال اول ۵۰۰۰ نفر از جمعیت این شهر کاسته می شود. هر سال کاهش جمعیت ۱۰ درصد بیشتر از کاهش سال قبل است. بعد از ۴ سال این شهر چند نفر جمعیت دارد؟

پاسخ: جمعیت کاهش یافته در هر سال یک دنباله هندسی با جمله اول  $a = 5000$  و قدر نسبت  $q = 1 + \frac{1}{10}$  است پس دنباله زیر

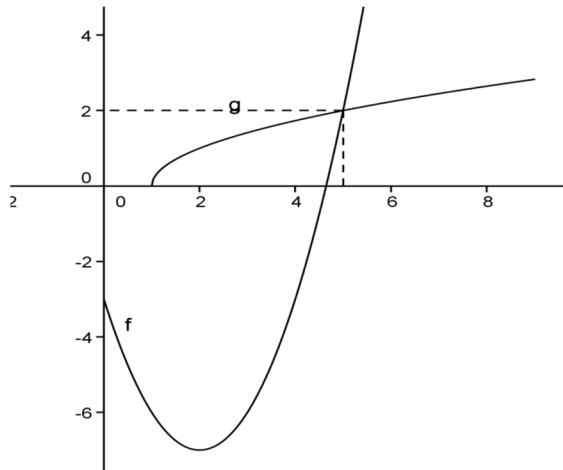
را بدست می آوریم:  $5000, 5500, 6050, 6655$

$$S_4 = 23205 \Rightarrow 200000 - 23205 = 176795 \text{ سال } 4 \text{ بعد از شهر}$$

۳۰- (طیبه آذرشین) مجموع عبارت  $(1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^2 + \dots + (1-\sqrt{2})^5$  را بدست آورید.

پاسخ: مجموع پنج جمله اول دنباله هندسی با جمله اول  $(1-\sqrt{2})$  و قدر نسبت  $(1-\sqrt{2})$  جواب است.

۳۱- (مریم عسکری) بارسم نمودار باضابطه  $g(x) = x^2 - 4x - 3$  با شرط  $g(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 0$ ، جواب نامعادله  $f(x) > g(x)$  را بدست آورید؟ پاسخ:



هر دو نمودار  $f(x)$  و  $g(x)$  را در دستگاه رسم می کنیم.  
هر دو نمودار از نقطه  $(5, 2)$  می گذرد. پس جواب  
نامعادله  $f(x) > g(x)$  همان  $x > 5$  خواهد بود.

۳۲- (مریم انجم شعاع) اگر مقدار محلول آب و الکل با غلظت ۸۰٪ الکل را به ۵ میلی لیتر محلول با غلظت ۲۰٪ الکل اضافه کنیم محلولی با غلظت ۵۰٪ الکل به دست میاید حجم محلول اولیه چقدر است؟

پاسخ: حجم محلول اولیه  $x$  میلی لیتر می باشد حجم الکل آن  $\frac{80}{100}x$  می شود حجم الکل در محلول دوم نیز  $1 = 5 \times \frac{20}{100}$  میلی لیتر است پس حجم الکل در محلول نهایی  $1 + \frac{80}{100}x$  می شود حجم کل محلول  $x + 5$  در نتیجه معادله روبرو را داریم.

$$\frac{\frac{80}{100}x + 1}{x + 5} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{8}{10}x + 2 = x + 5 \Rightarrow x = 5$$



۳۳- (مریم انجم شعاع) با استفاده از سیمی به طول ۸۰۰ سانتی متر، مستطیلی مانند شکل روبرو ساخته ایم اگر مساحت این مستطیل ۲۰۰۰۰ سانتی متر مربع باشد طول آن چقدر است؟

پاسخ:  $4x + 2y$  طول سیم و  $S = xy$  مساحت مستطیل

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x + 2y &= 800 \Rightarrow 2x + y = 400 \Rightarrow y = 400 - 2x \\ S = xy &= 2 \times 10^4 \Rightarrow x(400 - 2x) = 2 \times 10^4 \Rightarrow x(200 - x) = 10^4 \\ \Rightarrow x^2 - 2(100x) + 100^2 &= 0 \Rightarrow (x - 100)^2 = 0 \Rightarrow x = 100, y = 200 \end{aligned}$$

۳۴- (طیبه آذرشین) اگر چند جمله  $p(x) = x^4 - 3x^3 - ax^2 + bx + 4$  بر  $x^2 - 3x - 4$  بخشپذیر باشد، باقی مانده تقسیم  $p(x)$  بر  $1 - 3x$  را بدست آورید. پاسخ:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= (x + 1)(x - 4) \\ p(-1) = 0 &\Rightarrow (-1)^4 - 3(-1)^3 - a(-1)^2 + b(-1) + 4 = 0 \Rightarrow a - b = -8 \\ p(4) = 0 &\Rightarrow (4)^4 - 3(4)^3 - a(4)^2 + b(4) + 4 = 0 \Rightarrow 4a + b = -17 \\ \Rightarrow a &= -5, b = 3 \end{aligned}$$

$$p(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4 \Rightarrow p\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{28}{9}$$

۳۵- (طیبه آذرشین) دانش آموزان یک کلاس را به گروههای ۲ نفری تقسیم کرده ایم، ۱ نفر باقی می ماند، آنها به گروههای ۳ و یا ۵ نفره تقسیم کرده ایم باز هم ۱ نفر باقی می ماند. حداقل تعداد دانش آموزان چند نفرند.  
پاسخ:  $2 \times 3 \times 5 = 30$  در نتیجه  $30 + 1 = 31$  حداقل تعداد دانش آموزان

۳۶- (طیبه آذرشین) نقاطی روی محور عرض ها بدست آورید که فاصله شان از محل برخورد خط  $y = 3x - 9$  با محور طولها ۵ باشد.  
 پاسخ: محل برخورد با محور طولها  $x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow y = 0$  در نتیجه نقطه برخورد  $(3, 0)$  است.  

$$\sqrt{(3-0)^2 + (a-0)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{9+a^2} = 5 \Rightarrow 9+a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$
  
 نقطه های مورد نظر:  $(0, 4), (0, -4)$

۳۷- (صدیقه رنجبر) حاصل عبارت  $A = (1+x+x^2+\dots+x^{10})(1-x+x^2-\dots+x^{10})$  را به ازاء  $x = \sqrt{2}$  بدست آورید.  
 پاسخ: پراتر اول و دوم دنباله های هندسی با قدر نسبت  $x$  و  $-x$  هستند و تعداد جملات ۱۱ می باشند.  

$$A = \frac{(1-x^{11})}{1-x} \times \frac{(1-(-x)^{11})}{1+(-x)} = \frac{(1-x^{11})(1+x^{11})}{(1-x)(1+x)}$$
  

$$= \frac{1-x^{22}}{1-x^2} \underset{x=\sqrt{2}}{=} \frac{1-(\sqrt{2})^{22}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$

۳۸- (طاهره تقی زاده) جواب معادله  $4^{3+6+9+\dots+3x} = 8^{56}$  را بدست آورید. پاسخ:  

$$3+6+9+\dots+3x = 3(1+2+3+\dots+x) = \frac{3x(x+1)}{2} \Rightarrow$$
  

$$8^{56} = 4^{3+6+9+\dots+3x} = 2^{3x(x+1)} = (2^3)^{x(x+1)} = 8^{x(x+1)} \Rightarrow x(x+1) = 56$$
  

$$\Rightarrow x^2 + x = 56 \Rightarrow x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+8=0 \Rightarrow x=-8 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

۳۹- (طاهره تقی زاده) اگر باقیمانده تقسیم  $f(x) = x^2 - 9$  بر  $x - 1$  مساوی باشد  $2x + 3$  باقیمانده تقسیم  $f(x+2)$  بر  $x - 1$  را بدست آورید.  
 پاسخ: فرض کنید:  $g(x) = f(x+2)$  برای تعیین باقیمانده  $g$  بر  $x - 1$  باید  $g(1) = f(3)$  را پیدا کنیم.  

$$f(x) = (x^2 - 9)t(x) + 2x + 3 \Rightarrow f(3) = 0 + 9 = 9$$

۴۰- (طاهره تقی زاده) دو عدد ۱۵ و ۲۰ چند مضرب مشترک مثبت سه رقمی دارند؟  
 پاسخ:  $60 = [15, 20] \Leftarrow$  هر مضرب مشترک ۱۵ و ۲۰ مضربی از ۶۰ است  $\Leftarrow$  باید تعداد اعداد سه رقمی به شکل  $60k$  را بیابیم  

$$100 \leq 60k \leq 999 \Rightarrow \frac{100}{60} \leq k \leq \frac{999}{60} \Rightarrow \frac{5}{3} \leq k \leq \frac{333}{20} \Rightarrow 1\frac{2}{3} \leq k \leq 16\frac{13}{20} \Rightarrow 2 \leq k \leq 16 \Rightarrow k = 16 - 2 + 1 = 15$$

۴۱- (حکیمه نیک طبع) علی و امیر تصمیم گرفتند با یکدیگر مسابقه ی دوچرخه سواری بدهند علی دور پارک را در ۲۰ دقیقه و امیر همان فاصله را در ۱۶ دقیقه طی می کند اگر علی و امیر در یک زمان و یک مکان مسابقه شروع کنند در چه زمانی دوباره شانه به شانه ی یکدیگر قرار خواهند گرفت.  
 پاسخ:  $2^4 \times 5 = 80 = [16, 20]$  ک م م

۴۲- (ماریا طاهری) در معادله درجه دوم  $x^2 - 5x + k = 0$  مقدار  $k$  را چنان تعیین کنید که رابطه ی  $2x_1 - 2x_2 = 0$  بین ریشه های آن برقرار باشد. پاسخ:  

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 5 \Rightarrow 2x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 - 2(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow 5x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 2$$
  

$$\Rightarrow 2^2 - 5 \times 2 + m = 0 \Rightarrow 4 - 10 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

۴۳- (عفت سراج زاده) مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ده سانتی متر داریم وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل کنیم تا مثلث دیگری به دست آید مجدداً وسط اضلاعی مثلث جدید را به هم وصل می کنیم تا مثلث دیگری به دست آید اگر  $t_n$  اندازه ی محیط مثلث  $n$  ام باشد مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید، مجموع محیطهای این  $n$  مثلث را محاسبه کنید.

پاسخ: دنباله هندسی :  $t_1 = 30, t_2 = \frac{30}{2}, t_3 = \frac{30}{4}, t_4 = \frac{30}{8}, \dots$  با قدر نسبت  $q = \frac{1}{2}$  پس  $t_n = \frac{30}{2^{n-1}}$

$$S = \frac{30}{1 - \frac{1}{2}} = 60 \text{ می شود} \quad S_n = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_n = 30 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

۴۴- (عفت سراج زاده) اگر خارج قسمت تقسیم  $6 + ay + y^2$  بر  $y + 3$  برابر  $-by$  باشد و باقیمانده آن ۶ باشد حاصل  $a + b$  کدام است. پاسخ:

$$y^2 + ay + 6 = (y + 3)(-by) + 6 \rightarrow y^2 + ay + 6 = -by^2 - 3by + 6 \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

۴۵- (عفت سراج زاده) ثابت کنید که عدد  $1 - 3^{2n}$  بر ۱۶۸ بخش پذیر است. ( $n$  عددی طبیعی) پاسخ:

$$1 - 3^{2n} = (1 - 3^2)^n = (1 - 9)^n = (168 - 1)^n \text{ بر } 168, a = 1 \text{ پس } x - a^n \text{ بخش پذیر است.}$$

۴۶- (شهناز شکبیا) در یک بانک سالیانه ۱۰٪ سود به حساب سپرده بلند مدت تعلق می گیرد اگر حسابی با ۲۰۰۰۰۰۰ تومان در این بانک باز کنیم پس از ۱۰ سال مقدار موجودی چقدر خواهد بود.

$$x_1 = a + \frac{10}{100}a = a(1 + \frac{10}{100}) \text{ باشد.}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{10}{100}x_1 = x_1(1 + \frac{10}{100}) = a(1 + \frac{10}{100})^2 \quad x_{10} = a(1 + \frac{10}{100})^{10} = 2 \times 10^6 (\frac{11}{10})^{10} \approx 5187500$$

۴۷- (اعظم محمودی) اگر  $x = -3$  معادله محور تقارن منحنی  $y = x^2 + ax + 7$  باشد عرض نقطه مینیمم این تابع کدام است. پاسخ:

$$\text{عرض نقطه مینیمم} = -2 \Rightarrow y = 9 - 18 + 7 = -2 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = x^2 + 6x + 7 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -3 = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = 6$$

۴۸- (شهناز شکبیا) چند جمله ای درجه سومی بیابید که باقیمانده های تقسیم آن بر  $x + 1, x - 2, x + 3$  برابر ۳ باشد و بر  $x - 1$  بخشپذیر باشد.

پاسخ: اگر  $p(x) = k(x + 1)(x - 2)(x + 3) + 3$  باشد آنگاه  $p(x)$  از درجه سوم است. و در ضمن باقیمانده تقسیم

آن بر  $x + 1, x - 2, x + 3$  برابر ۳ است. اما باید بر  $x - 1$  بخشپذیر باشد پس  $p(1) = 0$  یا  $k(1 + 1)(1 - 2)(1 + 3) + 3 = 0$

$$K = \frac{3}{8} \text{ و در نتیجه } p(x) = \frac{3}{8}(x + 1)(x - 2)(x + 3) + 3$$

۴۹- (شهناز شکبیا) اگر  $a, b, c$  و عددهای حقیقی و

$$|ab + 2c| = |ab + 2a - 2a + 2c| = |a(b + 2) - 2(a - c)| \quad |a - b| \leq 2, |b + 2| \leq 6, |a| \leq 3 \text{ بیشترین مقدار}$$

$$\leq |a(b + 2)| + |2(a - c)| = |a||b + 2||a - c| \leq 3 \times 6 \times 2 = 36 \text{ کدام است. پاسخ:}$$

و این بیشترین مقدار زمانی بدست می آید که  $a = 3, b = 4, c = 5$  باشد.

۵۰- (شهناز شکبیا) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن از نصف ریشه های معادله  $x^2 + kx - 3 = 0$  به اندازه یک واحد بیشتر باشند.

پاسخ: اگر ریشه معادله مطلوب و ریشه معادله داده شده  $\alpha$  فرض شود آنگاه باید داشته باشیم  $\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$  یا  $x = 2x - 2$  یا  $\alpha = 2x - 2$  با جایگزین این مقدار در معادله داده شده خواهیم داشت.

$$(2x - 2)^2 + k(2x - 2) - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 2kx - 2k - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 + (2k - 8)x + 1 - 2k = 0$$

۵۱- (بتول سعیدی) مجموعه جواب نامعادله زیر را پیدا کنید.

$$|x\sqrt{x} + 2| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x\sqrt{x} + 2 \leq 2 \Rightarrow -4 \leq x\sqrt{x} \leq 0 \quad \text{چون } x \geq 0 \Rightarrow x\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

۵۲- (بتول سعیدی)  $a, b$  را طوری تعیین کنید که عبارت  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$  بر  $(x - 2)^2$  بخش پذیر باشد.  
پاسخ:  $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4x - 4$  در نتیجه اگر بجای  $x^2$  مقدار  $4x - 4$  را جانشین کنیم حاصل برابر صفر می شود.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \cdot x + ax^2 + bx + 2 = (4x - 4) \cdot x + a(4x - 4) + bx + 2 = 4x^2 - 4x + 4ax - 4a + bx + 2 \\ &= 4(4x - 4) - 4x + 4ax - 4a + bx + 2 = 16x - 16 - 4x + 4ax - 4a + bx + 2 = (12 + 4a + b)x - 4a - 14 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 12 + 4a + b = 0 \Rightarrow 12 - 14 + b = 0 \Rightarrow b = 2 \\ -4a - 14 = 0 \Rightarrow 4a = -14 \Rightarrow a = \frac{-14}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

۵۳- (ساره رزاقیان) معادله  $\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$  را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}}{1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} &= 1 \Rightarrow \frac{(x+1) - 2}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = 1 \\ \Rightarrow (x-1)^2 &= (\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3 \\ \frac{\sqrt{0+1}}{1} - \frac{2}{\sqrt{0+1}} &= 1 \Rightarrow -1 = 1 \quad \frac{\sqrt{3+1}}{1} - \frac{2}{\sqrt{3+1}} = 1 \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

۵۴- (مریم صعصعی) نشان دهید که معادله  $\frac{mx-1}{2x-3} = mx-2$  به ازاء تمام مقادیر غیر صفر  $m$  و نیز  $\frac{2}{3} \neq m$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد. پاسخ:

$$\begin{aligned} 2mx^2 - 3mx - 4x + 6 &= mx - 2 \Rightarrow 2mx^2 - 4(m+1)x + 8 = 0 \\ \Delta &= [-4(m+1)]^2 - 4(2m)(8) = 16m^2 - 64m + 16 = 16(2m^2 - 4m + 1) \geq 0 \end{aligned}$$

دلتای این معادله همیشه مثبت است پس به ازاء تمام مقادیر  $m$  معادله دارای دو ریشه حقیقی است.

۵۵- (حکیمه حیدری فرسنگی) اگر  $x < 0$ ، آن گاه کم ترین مقدار تابع  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  را بیابید.

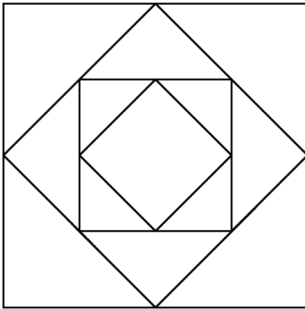
پاسخ: فرض می کنیم کم ترین مقدار تابع  $a$  باشد. پس داریم

$$f(x) \geq a \Rightarrow x + \frac{4}{x} \geq a \Rightarrow x^2 + 4 \geq ax \Rightarrow x^2 - ax + 4 \geq 0$$

به یک چند جمله ای درجه دوم رسیدیم که باید همواره بزرگترین یا مساوی صفر باشد و باید حتما یکبار صفر شود بنابراین سهمی آن بر محور  $x$  ها مماس است در نتیجه  $\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = \pm 4$  چون  $x > 0$  پس کم ترین مقدار تابع برابر  $a = 4$  است.

۵۶- (مریم پور میرزائی) وسط اضلاع یک مربع به ضلع  $a$  را به هم وصل می کنیم تا مربع جدیدی تشکیل شود. سپس وسط اضلاع مربع جدید را به هم وصل می کنیم تا مربع دیگری حاصل شود و عمل را ادامه می دهیم. اولاً حد مجموع مساحت‌های این مربع‌های را حساب کنید. ثانیاً حد مجموع محیط‌های این مربع‌ها را بیابید.

پاسخ:



$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a \rightarrow a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \dots$$

دنباله اضلاع

دنباله مساحت‌ها  $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots$

$$q = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2} \quad S = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$$

دنباله محیط‌ها  $4a, \frac{4a\sqrt{2}}{2}, 4\left(\frac{a}{2}\right), \dots \Rightarrow 4a, 2\sqrt{2}a, 2a, \dots$

$$q = \frac{2\sqrt{2}a}{4a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad S = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4a(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = 4a(2 + \sqrt{2})$$

۵۷- (مریم پور میرزائی) در دنباله‌های زیر مجموع  $n$  جمله اول را حساب کنید.

دنباله هندسی  $10^8, 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right), 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^2, \dots, 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n$  الف

$$q = \frac{1}{1 + \frac{1}{10^4}}, S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{10^8\left(\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{1 + \frac{1}{10^4}} - 1} = \frac{10^8 \cdot 10^4 \left(\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n - 1\right)}{10^4 - 1} = 10^{12} \left(\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n - 1\right)$$

دنباله هندسی  $1, \frac{1}{(2n+1)^2}, \frac{1}{(2n+1)^4}, \dots$  ب:

$$q = \frac{1}{(2n+1)^2} \quad S_n = \frac{1\left(\frac{1}{(2n+1)^{2n}} - 1\right)}{\frac{1}{(2n+1)^2} - 1} = \frac{\frac{1}{(2n+1)^{2n}} - 1}{\frac{1}{(2n+1)^2} - 1}$$

دنباله حسابی  $(a+x)^2, (a^2+x^2), (a-x)^2, \dots$  ج:

$$d = a^2 + x^2 - (a+x)^2 = -2ax \quad S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2(a+x)^2 + (n-1)(-2ax)]$$

۵۸- (الهام فلاحت نژاد) به ازای چه مقدار  $m$  معادله  $(m+1)x^2 + m(m^2-9)x - 2 = 0$  دارای دو ریشه قرینه حقیقی است؟ پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = -x_2 &\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow m(m^2-9) = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 3 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 &\Rightarrow b^2 > 4ac \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -2(m+1) < 0 \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = 0, 3$$

۵۹- (مریم پور میرزائی) معادلات رادیکالی زیر را حل کنید. پاسخ:

$$\text{الف) } \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3 = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$$

$$y + 3 = \frac{y + 7}{2y} \Rightarrow 2y^2 + 6y = y + 7$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 5y - 7 = 0 \Rightarrow y = 1, -\frac{7}{2}$$

$$y = -\frac{7}{2} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{ب) } \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

$$1 + \sqrt{x^4 - x^2} = 2x + 1$$

$$x^4 - x^2 = x^4 - 4x^2 + 4x^2$$

$$-4x^2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$-4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{4} \Rightarrow \text{ج.م} = \left\{ \frac{4}{4} \right\}$$

۶۰- (کبری افشاری پور) مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی زیر چقدر است؟

$$\frac{n^2 - 1}{n}, n, \frac{n^2 + 1}{n}, \frac{n^2 + 2}{n}, \dots$$

$$d = \frac{1}{n} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \left[ 2 \times \frac{n^2 - 1}{n} + (n - 1) \frac{1}{n} \right] = n^2 - 1 + \frac{n - 1}{2} \Rightarrow S_n = \frac{1}{2} (2n + 3)(n - 1)$$

پاسخ:

۶۱- (کبری افشاری پور) مجموعه جواب معادله  $\frac{|1-x|}{|2+x|} = \frac{1-x}{2+x}$  را پیدا کنید. پاسخ:

$$\text{داریم } \frac{|1-x|}{|2+x|} = \frac{|1-x|}{|2+x|} \Rightarrow \frac{|1-x|}{|2+x|} = \frac{1-x}{2+x} \Rightarrow \frac{1-x}{2+x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$x$	-2	1
P	-	+

$$\Rightarrow -2 < x \leq 1 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-2, 1]$$

۶۲- (کبری افشاری پور) مجموعه جواب نامعادله  $\frac{\sqrt{x}(x^4 - 1)}{x^2 + 1} < 0$  را بدست آورید.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \\ \frac{\sqrt{x}(x^4 - 1)}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow x^4 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0(-1)}{0+1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

از طرفی

۶۳- (الهام فلاح تژاد) اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله  $x^2 + 3x - 4m + 8 = 0$  و  $\alpha \neq 0$  و  $\beta \neq 0$  باشند به ازای کدام مقادیر از  $m$  نقطه  $M(\alpha, \beta)$  در ناحیه دوم یا چهارم قرار دارد؟ پاسخ:

در ناحیه دوم  $x_1 = \alpha < 0, x_2 = \beta > 0$  و در ناحیه چهارم  $x_1 = \alpha > 0, x_2 = \beta < 0$ . در هر دو حالت نامساوی

$$x_1 x_2 = \alpha \beta = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{8 - 4m}{1} < 0 \Rightarrow 8 - 4m < 0 \Rightarrow 8 < 4m \Rightarrow m > 2$$

۶۴- (الهام فلاحت نژاد) دو معادله  $x^2 + kx + 6 = 0$  و  $x^2 - kx + 6 = 0$  مفروض اند. اگر ریشه های این دو معادله را به ترتیب مناسبی بنویسیم هر یک از ریشه های معادله دوم به اندازه ۵ واحد از ریشه های نظیر معادله اول بیشتر است در این صورت  $k$  را بدست آورید. پاسخ:

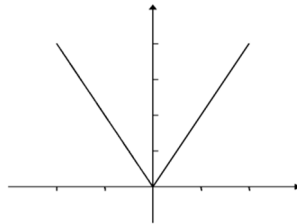
$$1 \text{ معادله } \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 = 6$$

$$2 \text{ معادله } (x_1 + 5)(x_2 + 5) = 6 \Rightarrow x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) + 25 = 6 \Rightarrow 25 - 5k = 0 \Rightarrow k = 5$$

۶۵- (ماندانا زینلی) نمودار تابع  $y = ||3x| - |x||$  را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید. پاسخ:

$$y = ||3x| - |x|| = \begin{cases} |3x - x| = |2x| & x \geq 0 \\ |-3x + x| = |-2x| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = |2x| \quad (x \in [-2, 2])$$

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	4	2	0	2	4



۶۶- (صفا رحیمی) اگر  $a < x < b$  باشد حاصل عبارت  $|x - a| + |x - b|$  را بدست آورید. پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} x > a &\rightarrow x - a > 0 \Rightarrow |x - a| = x - a \\ x < b &\rightarrow x - b < 0 \Rightarrow |x - b| = b - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x - a| + |x - b| = x - a + b - x = b - a$$

۶۷- (صدیقه فارسی نژاد) اگر مجموع ضرایب بسط  $(a + b)^n$  از مجموع ضرایب بسط  $(x^2 + 2x - 2)^{100}$ ، ۳۱ واحد بیشتر باشد تعداد جمله های بسط  $(a + b)^n$  را بدست آورید. پاسخ:

$$(a + b)^n \text{ مجموع ضرایب } = (1 + 1)^n = 2^n$$

$$(x^2 + 2x - 2)^{100} \text{ مجموع ضرایب } = (1 + 2 - 2)^{100} = (1)^{100} = 1$$

$$2^n = 1 + 31 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow (a + b)^5$$

۶۸- (صدیقه فارسی نژاد) معادله  $\frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2$  را به روش تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ: فرض کنیم  $x^2 + 4 = a$  باید داشته باشیم  $(a \geq 4)$

$$\frac{4}{a} + \frac{5}{a+1} = 2 \Rightarrow 4(a+1) + 5a = 2a(a+1) \Rightarrow 9a + 4 = 2a^2 + 2a$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2a - 9a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \Rightarrow x^2 + 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

۶۹- (مریم بهره مند) اگر  $a, b, c, d$  جمله های متوالی یک دنباله هندسی باشند، درستی رابطه  $(b - c)^2 = ac + bd - 2ad$  را ثابت کنید. پاسخ:

$$a, b, c, d \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \end{cases} \Rightarrow b^2 c^2 = acbd \Rightarrow bc = ad$$

$$(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = ac + bd - 2ad$$

۷۰- (مریم بهره مند) معادله  $x^2 + 4x - 6 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3}$  را با استفاده از تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ:  $y = x^2 + 4x - 3$  فرض می کنیم

$$y - 3 = 2\sqrt{y} \Rightarrow y^2 + 9 - 6y = 4y \Rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow (y - 9)(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$9 - 3 = 2\sqrt{9} \Rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark \quad -1 - 3 = 2\sqrt{-1} \quad \times$$

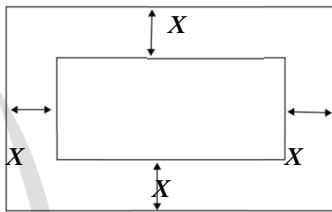
$$x^2 + 4x - 3 = 9 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

۷۱- (فاطمه علی رشیدی) چتر بازی که از هوا پیما بیرون پریده است متوجه می شود که چترش باز نمی شود. او در ثانیه اول، ۵ متر، در ثانیه دوم ۱۵ متر، در ثانیه سوم ۲۵ متر، ... سقوط می کند. او در ثانیه ی دهم چند متر سقوط می کند؟ در ده ثانیه اول چند متر سقوط می کند. پاسخ:

$$5, 15, 25, \dots \quad d=10 \quad a_{10} = 5 + 9 \times 10 = 95 \quad S_{10} = \frac{10}{2}(5 + 95) = 5 \times 100 = 500$$

۷۲- (مریم بهره مند) درازا و پهنای زمین مستطیل شکلی به ترتیب ۶۵، ۴۰ متر است. می خواهیم در چهار طرف این زمین چهار راهرو به پهنای متساوی ایجاد کنیم به قسمی که مساحت قسمت باقیمانده زمین ۲۰۰۰ متر مربع باشد. پهنای مشترک راهروها را معین کنید. پاسخ: اگر پهنای مشترک راهروها را  $x$  بگیریم

$$2x = 65 \text{ درازا و } 2x = 40 \text{ پهنای}$$



$$(65 - 2x)(40 - 2x) = 2000 \Rightarrow 2x^2 - 105x + 2600 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{105 \pm \sqrt{18625}}{4} \Rightarrow x_1 = 33/0.3, x_2 = 49/47 \text{ غ.ق.}$$

۷۳- (محسن زینلی) با رسم نمودار، نامعادله  $\sqrt{-x+2} \geq |x-3|$  را حل کنید.

پاسخ: طبق شکل و نامعادله  $\sqrt{-x+2} \geq |x-3|$  بایستی بازه ای که تابع قدر مطلق زیر نمودار تابع رادیکالی قرار می گیرد جواب باشد که طبق شکل رسم شده نمودارها، نامعادله جواب ندارد.

۷۴- (فاطمه علی رشیدی) ثابت کنید:  $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots - 171 + 173 = 87$  پاسخ:

$$\underbrace{(1 - 3 + 5 \dots + 173)}_{d=4} - (3 + 7 + 11 \dots + 171) \text{ پس } 173 = 1 + (n-1) \times 4 = -3 + 4n \Rightarrow n = \frac{176}{4} = 44$$

$$\Rightarrow (1 + 59 + \dots + 173) = \frac{44}{2} \times (1 + 173) = 44 \times 87 \text{ به طریق مشابه برای دنباله دوم داریم}$$

$$3 + 7 + \dots + 171 = \frac{43}{2} (3 + 171) = 43 \times 87 \Rightarrow 1 - 3 + 5 - 7 \dots - 171 + 173 = (44 \times 87) - (43 \times 87) = 87$$

۷۵- (فاطمه علی رشیدی) ثابت کنید به ازای هر  $x \in R$  رابطه  $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$  برقرار است. پاسخ:

با توجه به نامساوی مثلث داریم:  $2 \leq 2 + |x-2| = |x-1 - (x-3)| + |x-2| \leq |x-1| + |x-3| + |x-2|$

۷۶- (محسن زینلی) غلظت رنگ به حجم  $3/5$  لیتر بایستی به میزان ۳۰٪ کم شود چند سانتی متر مکعب تینر باید به رنگ اضافه شود؟

پاسخ:

$$\text{رنگ} \frac{70}{3500+x} = \frac{3500 \text{ cm}^3}{3500+x} \Rightarrow 245000 + 70x = 350000 \Rightarrow 70x = 105000 \Rightarrow x = 1500 \text{ cm}^3 \text{ تینر اضافه شده}$$

۷۷- (نزهت دانش) تویی از ارتفاع ۱۰ متری رها می شود توپ هر بار پس از برخورد با زمین به اندازه ۸۰٪ ارتفاع قبل بالا می رود. الف) کل مسافتی که توپ پس از ۲۰ بار برخورد با زمین طی می کند چقدر است؟ ب) نشان دهید که مسافت طی شده توسط توپ هیچ گاه بیش تر از ۹۰ متر نمی شود.

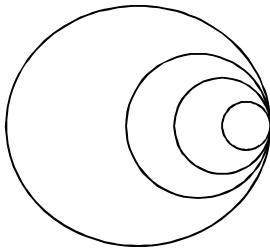
پاسخ: الف) توپ پس از رها شدن به اندازه ارتفاع  $a_1 = h = 10$  مسافت طی می کند. پس از بار اول و بار دوم برخورد، توپ به اندازه  $a_2 = 2 \times 0.8h$  مسافت طی می کند. در نتیجه  $h, 2 \times 0.8h, 2 \times (0.8)^2 h, \dots$  به این ترتیب مجموع زیر برای بدست آوردن مسافت طی شده پس از ۲۰ برخورد برابر است با:

$$s = h + 2 \times 0.8h + 2 \times (0.8)^2 h + \dots + 2 \times (0.8)^{19} h = h + 2 \times 0.8h \times \frac{1 - (0.8)^{20}}{1 - 0.8}$$

ب) در حالت کلی بعد از برخورد  $n$ ، مسافت طی شده برابر است با:

$$s = h + 2 \times 0.8h + 2 \times (0.8)^2 h + \dots + 2 \times (0.8)^n h = h + 2 \times 0.8h = 10 + 16 \times \frac{1 - (0.8)^n}{0.2} < 10 + 16 \times 5 = 90$$

۷۸- (فاطمه محمد میرزایی) دوایری به شعاع  $r$  و  $\frac{r}{2}$  و  $\frac{r}{4}$  و ... به صورت مماس داخلی در یک نقطه مفروضند حد مجموع محیطها و مساحتهای آنها را بدست آورید. پاسخ:



$$\text{حد} = \frac{2\pi R}{1 - \frac{1}{2}} = 4\pi R$$

$$\text{مجموع} \Rightarrow \pi R, \frac{\pi R}{2}, \dots \Rightarrow \text{محیطها}$$

$$\text{حد} = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\pi R^2}{3}$$

$$\text{مجموع} \Rightarrow \pi R^2, \frac{\pi R^2}{4}, \frac{\pi R^2}{16}, \dots \Rightarrow \text{مساحتها}$$

۷۹- (نزهت دانش) باقی مانده تقسیم  $x^4 - x^2 - 1$  بر  $f(x) = (x+1)^3(x-1)^2$  را بدست آورید. پاسخ:

$$f(x) = (x+1)^3(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1 = (x+1)^2(x^2-1)(x-1) + x^4 - x^2 - 1$$

$$= (x+1)^2(x^2-1)(x-1) + x^2(x^2-1) - 1 = (x^2-1)((x+1)^2(x-1) + x^2) - 1$$

پس باقیمانده -۱ است

۸۰- (نزهت دانش) معادله  $(x-1)^2 - 5|x-1| + 4 = 0$  چند ریشه دارد. پاسخ:

$$(x-1)^2 - 5|x-1| + 4 = 0 \quad \text{و} \quad |x-1|^2 = (x-1)^2$$

$$|x-1|^2 - 5|x-1| + 4 = 0 \Rightarrow (|x-1| - 4)(|x-1| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 4 \Rightarrow x = 5, -3 \\ |x-1| = 1 \Rightarrow x = 0, 2 \end{cases}$$

۴ ریشه دارد  $\Rightarrow$

۸۱- (فاطمه محمد میرزایی) بدون حل معادله و با استفاده از  $S$  و  $P$  و  $\Delta$  در وجود و علامت ریشههای معادله  $3x^2 - 6x - 2 = 0$  بحث کنید. پاسخ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(-2) = 60 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه دارد}$$

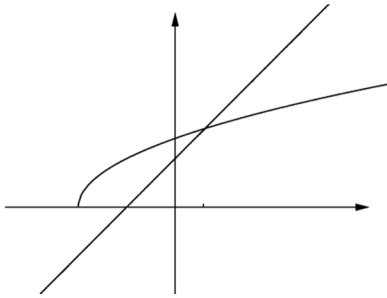
$$p = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3} < 0 \Rightarrow \text{دو ریشه مختلفالعلامه هستند.} \quad s = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6)}{3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{قدر مطلق ریشه مثبت بزرگتر است}$$

۸۲- (فاطمه محمد میرزایی) اگر ریشههای معادله  $x^2 + 2(m+1)x + 2m-1$  برابر  $x'$  و  $x''$  باشند به ازای کدام مقدار  $m$  اعداد  $x'$  و  $m$  و جملههای متوالی یک تصاعد هندسی هستند. پاسخ:

$$x', m, x'' \text{ تصاعد هندسی} \Rightarrow m^2 = x'x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow m^2 = \frac{2m-1}{1} \Rightarrow$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

۸۳- (فاطمه محمد میرزایی) معادله  $x+1=\sqrt{x+2}$  را به روش هندسی حل کنید و در صورت امکان جواب آن را از طریق جبری بدست آورید. پاسخ:



$$x+1=\sqrt{x+2} \Rightarrow (x+1)^2=(\sqrt{x+2})^2 \Rightarrow x^2+2x+1=x+2$$

$$x^2+2x+1-x-2=0 \Rightarrow x^2+x-1=0 \rightarrow \Delta=5 \Rightarrow x=\begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

۸۴- (حکیمه پور زنگی آبادی) فاصله بین دوشهر واقع در کنار رودخانه ای ۱۴۴ کیلومتر است یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی گردد مدتی که در این سفر بوده است ۱۷ ساعت می باشد در صورتیکه سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان اب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان اب باشد سرعت کشتی را در خلاف جهت حرکت اب تعیین کنید.

پاسخ:

$$\frac{144}{x} + \frac{144}{x+8} = 17 \Rightarrow x(x+8) \frac{144}{x} + x(x+8) \frac{144}{x+8} = 17x(x+8)$$

$$\Rightarrow 144(x+8) + 144x = 17x(x+8) \Rightarrow 5x^2 + 56x - 384 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = \frac{-24}{5} \end{cases}$$

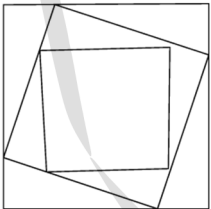
۸۵- (سوسن ترکزاده) مربعی به ضلع  $a=4\text{cm}$  مفروض است طبق شکل هر ضلع را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده نقاط تقسیم به هم وصل می شود مربعی دیگر بدست می آید با تکرار عمل حد مجموع مساحت این مربع ها را بدست آورید.

پاسخ: حل: ضلع مربع اول  $a$  مساحت آن  $a^2$  می شود.

$t_1 = a^2$  و ضلع دوم  $x$  و مساحت آن

$$AB^2 = x^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = \frac{10a^2}{16} = \frac{5}{8}a^2 = t_2 \Rightarrow 9 = \frac{t^2}{t^1} = \frac{5}{8}$$

$$\lim S = \frac{a^2}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{8}{3}a^2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \lim S = \frac{128}{3}$$



۸۶- (صغری احمدی) نقطه ی مینیمم تابع با ضابطه  $y = x^2 + ax + 2$  روی نیمساز ربع سوم قرار دارد  $a$  را بیابید.

$$\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} \\ y = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{-b}{2a} = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow \Delta = 2b \Rightarrow a^2 - 8 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2 \end{cases}$$

۸۷- (عصمت میرزایی) اگر درختان خیابانی را به ۹ به ۹ بشماریم ۵ عدد زیاد می آید اگر ۱۰ به ۱۰ بشماریم ۷ عدد زیاد می آید. تعداد درختان که بیشتر از ۳۰۰ و کمتر از ۴۰۰ می باشد چقدر است؟

پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} 9n_1 + 5 &\Rightarrow 14, 23, 32, \dots, 77, \dots \\ 10n_2 + 7 &\Rightarrow 17, 27, 37, \dots, 77, \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow 90n + 77$$

$$300 < 90n + 77 < 400 \Rightarrow 2/47 < n < 3/5 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow \text{تعداد درختان خیابان} = 347$$