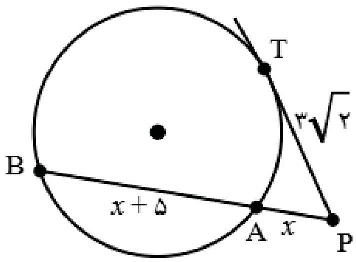
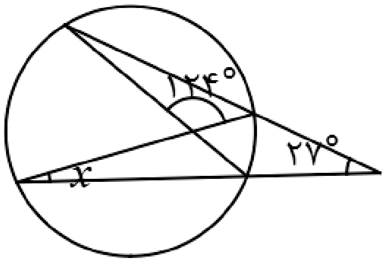
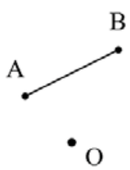
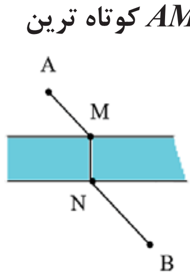
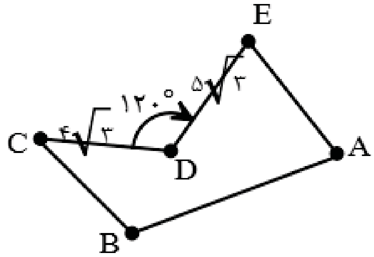
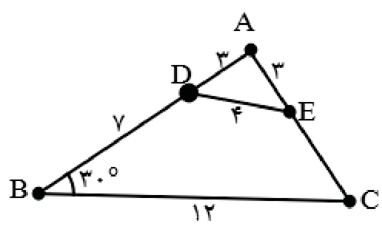
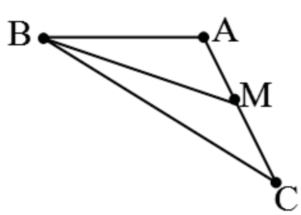
استان: تهران **طراح : پوران نوروزی**

سؤالات آزمون نهایی درس: **هندسه۲**	تعداد صفحه: ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **یازدهم دوره دوم متوسطه**	تاریخ آزمون:	نام و نام خانوادگی:	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**

ردیف	سؤالات پاسخ‌نامه دارد-استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	نمره
۱	درستی و یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) عمود منصف های همه اضلاع یک چند ضلعی محاطی در یک نقطه همرس هستند. ب) تبدیل های بازتاب، انتقال، دوران همواره موقعیت شکل را تغییر می دهند، اما اندازه پاره خط ها و زاویه ها را تغییر نمی دهند.	۰/۲۵ ۰/۲۵
۲	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف) اگر نقطه P بیرون دایره $C(O,r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است. ب) در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه رو به رو به آن ضلع برابر با اندازه .... است.	۰/۲۵ ۰/۲۵
۳	گزینه مناسب را انتخاب کنید: الف)دردایره $C(O,r)$ اندازه وترهای CD, AB به ترتیب برابر $a^۲$ و $a^۲+۱$ می باشد. اگر $OH = x+۱$ و $OH' = ۲x-۱$ حدود x کدام است. (OH و OH' به ترتیب فاصله وتر AB و CD از مرکز دایره است) ۱) $x > ۲$ ۲) $x < ۲$ ۳) $\frac{۱}{۲} < x < ۲$ ۴) $-۳ < x < ۲$ ب) یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش برابر ۵ باشد، مساحت مربع اولیه کدام است: ۱) $S = ۹$ ۲) $S = ۲$ ۳) $S = ۳$ ۴) $S = ۴$ پ) اگر در مثلث ABC ، $BC = ۱۰cm$ و $A = ۱۲۰°$ باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است: ۱) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲}$	۰/۵ ۰/۵ ۰/۵
۴	مساحت قطاعی از دایره $C(O,۶)$ را بیابید که طول کمان روبه روی آن برابر ۲π است.	۱
	ادامه سوالات در صفحه دوم	

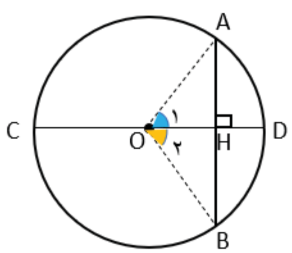
ادامه سوالات در صفحه دوم

۵	نشان دهید اگر قطر CD از دایره $C\left(O,r\right)$ بر وتر AB عمود باشد، آنگاه کمان AB را نصف می کند.	۱/۲۵
۶	در شکل های زیر مقدار x را به دست آورید. 	۲
۷	برای دو دایره متقاطع $C\left(O\ ,R\right)$, $C'\left(O',R'\right)$ درستی رابطه $\left\|R-R'\right\| \langle OO' \langle R+R'$ را ثابت کنید.	۱
۸	طول شعاع های دو دایره مماس برون را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۲\sqrt{۱۰}$ و $R-R'=۳$ باشد.	۱
۹	برای یک مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع $\sqrt{۳}$ ، شعاع دایره محاطی را محاسبه کنید.	۰/۷۵
۱۰	برای حالت زیر نشان دهید تبدیل دوران طول پاره خط را حفظ می کند. (زاویه دوران از زاویه AOB بزرگتر است) 	۱/۵
۱۱	الف) نقطه ثابت تبدیل های غیر همانی(بازتاب ، دوران ،تجانس) را در صورت وجود مشخص کنید. ب) تبدیل های "انتقال ، دوران ، تجانس "در چه صورتی می توانند تبدیل همانی باشند؟	۱/۵
۱۲	اگردو شهر B , A دردو طرف یک رودخانه قرار داشته باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا درنظر بگیریم که $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟ ادعای خود را ثابت کنید. 	۱/۵
	ادامه سوالات در صفحه سوم	

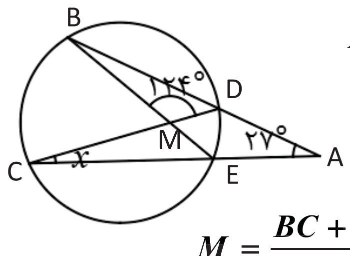
۱۳	شکل زیر را در نظر بگیرید، می خواهیم بدون آنکه محیط این شکل تغییرکند، مساحت آن را افزایش دهیم. به کمک کدام تبدیل هندسی می توان این کار را انجام داد؟ میزان افزایش مساحت را حساب کنید. 	۱
۱۴	نشان دهید در هر مثلث، مربع اندازهء هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند.	۱/۵
۱۵	در مثلث ABC ، $AB=۱۳\ ,\ AC=۱۴\ ,\ BC=۱۵$ است. طول های دو قطعه ای را به دست آورید که نیمساز زاویه A روی ضلع مقابل ایجاد می کند.	۱
۱۶	در شکل مقابل مساحت چهارضلعی $DECB$ را محاسبه کنید. 	۱/۲۵
۱۷	در مثلث ABC ، میانه BM را رسم کرده ایم. به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید: $\left(AB=c\ ,\ AC=b\ ,\ BC=a\right)\ a^۲+c^۲=۲BM^۲+\frac{b^۲}{۲}$ 	۱/۲۵
	موفق باشید جمع	۲۰

استان: تهران **طراح : پوران نوروزی**

راهنمای آزمون نهایی درس: **هندسه۲**	تعداد صفحه: **۶**	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: **۸ صبح**
پایه: **یازدهم دوره دوم متوسطه**	تاریخ آزمون:	نام و نام خانوادگی:	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>سؤالات پاسخ‌نامه دارد-استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>الف) درست   (۰/۲۵)   ب) نادرست   (۰/۲۵)</td><td>۰/۵</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>الف) بزرگتر (۰/۲۵)   ب) وتر (یا دو برابر شعاع دایره محیطی) (۰/۲۵)</td><td>۰/۵</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>الف) گزینه ۳ (۰/۵)   ب) گزینه ۱ (۰/۵)   پ) گزینه ۳ (۰/۵)</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>$L=\frac{\alpha}{۳۶۰}۲\pi r=۲\pi\ \left(۰/۲۵\right)\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ\ \left(۰/۲۵\right)$
$S=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\pi r^۲\ \left(۰/۲۵\right)=\frac{۶۰}{۳۶۰}\pi\left(۶\right)^۲=۶\pi\ \left(۰/۲۵\right)$</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>روش اول :
<table><tr><td>$CD\perp AB$</td><td>فرض</td></tr><tr><td>$AD=BD\ ,\ AC=BC$</td><td>حکم</td></tr></table>


$AH\cong\Delta OBH\rightarrow\begin{cases}OA=OB=r\\ OH=OH\\ H_۱=H_۲=۹۰^\circ\end{cases}\left(۰/۵\right)\Rightarrow O_۱=O_۲\ \left(۰/۲۵\right)$
$AD=BD\ \left(۰/۲۵\right)\Rightarrow ۱۸۰^\circ-AD=۱۸۰^\circ-BD\rightarrow AC=BC\ \left(۰/۲۵\right)$
روش دوم :
چون $OA=OB=r$ پس نقطه O روی عمود منصف AB قرار دارد. (۰/۲۵) از طرفی چون $CD\perp AB$ پس OH عمود منصف AB است. (۰/۲۵) همچنین مثلث OAB متساوی الساقین است، پس OH نیمساز زاویه O است. یعنی $O_۱=O_۲$ (۰/۲۵). لذا، $AD=BD$ (۰/۲۵) و :
$۱۸۰^\circ-AD=۱۸۰^\circ-BD\rightarrow AC=BC$ (۰/۲۵)</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td colspan="3">**ادامه در صفحه دوم**</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>۶</td>
<td>


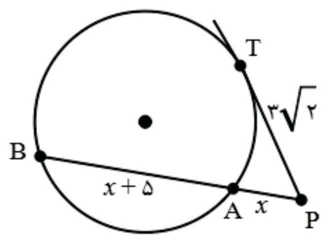
$$A=\frac{BC-DE}{۲}=۲۷^\circ \Rightarrow BC-DE=۵۴^\circ \left(۰/۲۵\right)$$

$$M_{۱}=\frac{BC+DE}{۲}\Rightarrow ۱۸۰^\circ-۱۲۴^\circ=\frac{BC+DE}{۲}\Rightarrow BC+DE=۱۱۲^\circ \quad \left(۰/۲۵\right)$$

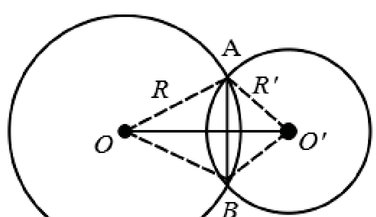
$$\begin{cases}BC-DE=۵۴^\circ\\ BC+DE=۱۱۲^\circ\end{cases}\Rightarrow BC=۸۳^\circ\ ,\ DE=۲۹^\circ \left(۰/۵\right)\Rightarrow x=\frac{DE}{۲}=۱۴/۵^\circ \left(۰/۲۵\right)$$

$$PT^{۲}=PA\times PB \Rightarrow \left(۳\sqrt{۲}\right)^{۲}=x\times\left(۲x+۵\right)\left(۰/۲۵\right)$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۵x-۱۸=۰ \quad \left(۰/۲۵\right)\Rightarrow\left(۲x+۹\right)\left(x-۲\right)=۰\rightarrow \underset{\text{ق ق}}{x=۲} \quad \left(۰/۲۵\right)$$

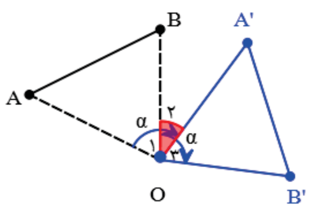


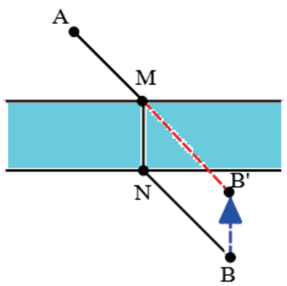
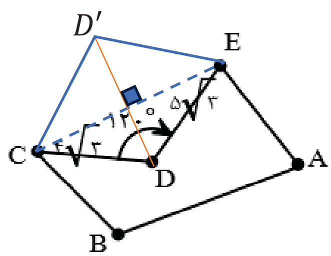
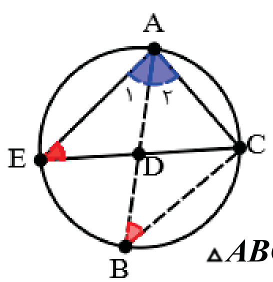
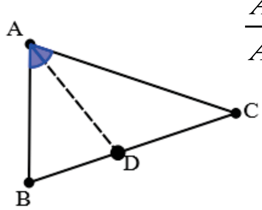
</td>
<td>۲</td>
</tr>
<tr>
<td>۷</td>
<td>
بنا به نامساوی مثلثی در مثلث OAO' داریم :

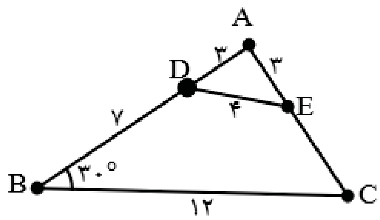
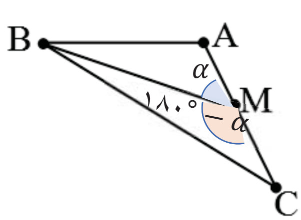


$$\begin{cases}OO'<R+R' \ (۱)\\ R<OO'+R'\\ R'<OO'+R\end{cases}\left(۰/۲۵\right)\Rightarrow\begin{cases}R-R'<OO'\\ -OO'<R-R'\end{cases}\Rightarrow -OO'<R-R'<OO' \ (۲)\ \left(۰/۲۵\right)$$

$$\Rightarrow\left|R-R'\right|<OO' \ \left(۰/۲۵\right) \qquad \overset{(۲)\text{ و }(۱)}{\Rightarrow} \left|R-R'\right|<OO'<R+R' \ \left(۰/۲۵\right)$$
</td>
<td>۱</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>ادامه در صفحه سوم</td>
<td></td>
</tr>
</table>

۸	دو دایره مماس برون اند، پس $R + R' = OO'$ $(0/25)$. $\Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{10}$ $(0/25)$ $\Rightarrow RR' = 10\ ,\ R - R' = 3 \Rightarrow R = 5\ ,\ R' = 2$ $(0/5)$	۱
۹	$r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}{\frac{3a}{2}}$ $(0/5)$ $= \dfrac{\sqrt{3}a}{6} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{6} = \dfrac{1}{2}$ $(0/25)$	۰/۷۵
۱۰	فرض کنیم تبدیل یافته نقطه A، نقطه A' و تبدیل یافته نقطه B، نقطه B' باشد. با توجه به شکل روبرو $O_1 + O_2 = O_2 + O_3 = \alpha$ $(0/25)$ پس می توان گفت : $AOB = A'OB'$ $(0/25)$.  $\Rightarrow AB = A'B'$ $(0/25)$ رسم شکل (۰/۲۵) $\Delta AOB \cong \Delta A'OB' \rightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AOB = A'OB' \end{cases}$ $(0/5)$	۱/۵
۱۱	الف) تمام نقاط روی محور تقارن بازتاب، نقاط ثابت تبدیل بازتاب است. (۰/۲۵) مرکز دوران تبدیل دوران، نقطه ثابت تبدیل دوران است. (۰/۲۵) مرکز تجانس تبدیل تجانس، نقطه ثابت تبدیل تجانس است. (۰/۲۵) ب) در تبدیل انتقال اگر بردار انتقال، بردار صفر باشد، تبدیل همانی می شود. (۰/۲۵) در تبدیل دوران اگر زاویه دوران $(0/25)$ $\alpha = K \times 360°$ باشد،(K عدد صحیح است)تبدیل همانی می شود. در تبدیل تجانس اگر نسبت تجانس $(0/25)$ $k = 1$ تبدیل همانی می شود.	۱/۵
۱۲	ابتدا تحت تبدیل انتقال (۰/۲۵) که بردار آن در راستای عمود بر رودخانه و طول آن برابر انداه عرض رودخانه باشد، تصویر نقطه B را به دست می آوریم و آن را B' می نامیم. از B' به A وصل می‌کنیم و محل برخورد آن را باراستای رودخانه نقطه M می نامیم(۰/۲۵)، نقطه M محل احداث پل خواهد بود. از M به راستای دیگر رودخانه عمود می‌کنیم و آن را N می نامیم. مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. زیرا با توجه به ویژگی تبدیل انتقال خواهیم داشت:	۱/۵

	 $MN = BB', MN \parallel BB' \ (۰/۲۵)$ $AMNB = AM + MN + NB = AM + BB' + MB' = AB' + BB' \ (۰/۵)$ رسم شکل (۰/۲۵)	
۱۳	به کمک تبدیل بازتاب (۰/۲۵)  $S_{DCD'E} = ۲ \times S_{DCE} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times DC \times DE \times \sin(۱۲۰^\circ)$ $= ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۵\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰^\circ)(۰/۵) = ۳۰\sqrt{۳} \ (۰/۲۵)$	۱
۱۴	ابتدا نیمساز زاویه A یعنی AD را امتداد می دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه B قطع کند.از B به C وصل می کنیم. زاویه های B , E هر دو محاطی و رو به رو به یک کمان هستند، $(۰/۲۵)$ $B = E = \frac{AC}{۲}$.  $\triangle ABC \sim \triangle AED \ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \ (۰/۲۵)$ $\Rightarrow AC \times AE = AD \times AB = AD \times (AD + DB) \ (۰/۲۵) = AD^۲ + AD \times DB$ $D \times I \quad = ED \times DC \ (۰/۲۵) \Rightarrow AC \times AE = AD^۲ + ED \times DC \Rightarrow AD^۲ = AC \times AE - ED \times DC \ (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۵	 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۱۳}{۱۴} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۱۳+۱۴}{۱۴} = \frac{BD+DC}{DC} \ (۰/۲۵)$ $\Rightarrow \frac{۲۷}{۱۴} = \frac{۱۵}{DC} \Rightarrow DC = \frac{۷۰}{۹}(۰/۲۵) \ , \ BD = ۱۵ - \frac{۷۰}{۹} = \frac{۶۵}{۹}(۰/۲۵)$	۱
	ادامه در صفحه پنجم	

ردیف	پاسخ	بارم
۱۶	روش اول :  $۲P = ۳ + ۳ + ۴ \Rightarrow P = ۵ \ \left(۰/۲۵\right)$ $\Rightarrow S_{ADE} = \sqrt{P\left(P-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)} \ \left(۰/۲۵\right)$ $S_{ADE} = \sqrt{۵\left(۵-۳\right)\left(۵-۳\right)\left(۵-۴\right)} = ۲\sqrt{۵}$ $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin\left(۳۰°\right) \ \left(۰/۲۵\right)$ $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۱۲ \times \frac{۱}{۲} = ۳۰ \ \left(۰/۲۵\right)$ $S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} = ۳۰ - ۲\sqrt{۵} \ \left(۰/۲۵\right)$	
۱۶	روش دوم : $AC^۲ = ۱۰^۲ + ۱۲^۲ - ۲ \times ۱۰ \times ۱۲ \times \cos ۳۰° = ۲۴۴ - ۱۲۰\sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۶۱ - ۳۰\sqrt{۳}} \ \left(۰/۲۵\right)$ $S_{ABC} = \sqrt{P\left(P-۱۰\right)\left(P-۱۲\right)\left(P - ۲\sqrt{۶۱-۳۰\sqrt{۳}}\right)} =$ $\sqrt{\left(۱۱+\sqrt{۶۱-۳۰\sqrt{۳}}\right)\left(۱+\sqrt{۶۱-۳۰\sqrt{۳}}\right)\left(-۱+\sqrt{۶۱-۳۰\sqrt{۳}}\right)\left(۱۱-\sqrt{۶۱-۳۰\sqrt{۳}}\right)}$ $S_{ABC} = ۳۰ \ \left(۰/۲۵\right)$ و $۲P = ۳+۳+۴ = ۱۰ \rightarrow P = ۵ \ \left(۰/۲۵\right)$ $S_{ADE} = \sqrt{۵\left(۵-۳\right)\left(۵-۳\right)\left(۵-۴\right)} = ۲\sqrt{۵} \ \left(۰/۲۵\right)$ $S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} = ۳۰ - ۲\sqrt{۵} \ \left(۰/۲۵\right)$	۱/۲۵
۱۷	در مثلث ABM طبق قضیه کسینوس ها داریم :  $AB^۲ = BM^۲ + AM^۲ - ۲ \times BM \times AM \times \cos\alpha \ \left(۰/۲۵\right)$ $AB^۲ = BM^۲ + \left(\frac{b}{۲}\right)^۲ - ۲ \times BM \times \frac{b}{۲} \times \cos\alpha$ $\Rightarrow c^۲ = BM^۲ + \frac{b^۲}{۴} - BM \times b \times \cos\alpha \left(۰/۲۵\right)$ همچنین در مثلث BMC طبق قضیه کسینوس ها داریم: $BC^۲ = BM^۲ + MC^۲ - ۲ \times BM \times MC \times \cos\left(۱۸۰° - \alpha\right) \ \left(۰/۲۵\right)$	۱/۲۵

	$BC^۲ = BM^۲ + \left(\frac{b}{۲}\right)^۲ + ۲\times BM \times \frac{b}{۲}\times \cos\alpha \Rightarrow a^۲ = BM^۲ + \frac{b^۲}{۴} + BM\times b\times \cos\alpha$ (۰/۲۵) $\begin{cases} c^۲ = BM^۲ + \frac{b^۲}{۴} - BM\times b\times\cos\alpha \\ a^۲ = BM^۲ + \frac{b^۲}{۴} + BM\times b\times\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow a^۲ + c^۲ = ۲BM^۲ + \frac{b^۲}{۲}$ (۰/۲۵)		
	جمع		۲۰

صفحه ششم