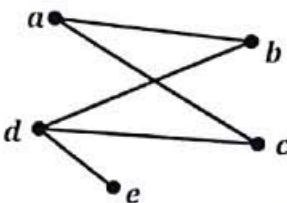
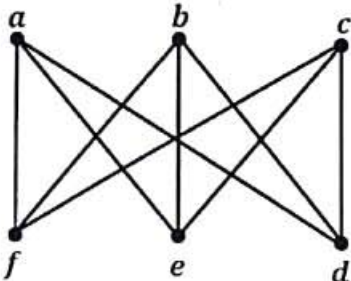


بسمه تعالی

سؤالات امتحان نوبت اول: <b>ریاضیات گسسته</b>	دبیرستان <b>بزرگمهر تبریز</b>	پایه: <b>دوازدهم</b>
رشته: ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: <b>۱۵۰ دقیقه</b>	نام و نام خانوادگی:
ساعت شروع: <b>۹:۳۰ صبح</b>	تاریخ امتحان: <b>۹۷/۱۰/۸</b>	تعداد صفحه: <b>۲</b>

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با مثال نقض رد کنید. الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (۰/۵ نمره) ب) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است. (۰/۵ نمره)	۱
۱/۲۵	اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a, b > 0$ ، آن گاه به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$	۲
۱	اگر عدد صحیح $a$ دو عدد $(5m + 4)$ و $(4m + 3)$ را عاد کند ثابت کنید: $a = \pm 1$	۳
۱	اگر باقی مانده تقسیم $a$ بر $b$ بر ۲۳ به ترتیب ۱۸ و ۱۹ باشد باقی مانده تقسیم $a - 2b$ بر ۲۳ را بیابید.	۴
۱	در یک تقسیم، مقسوم علیه برابر ۵۳ و باقی مانده برابر ۱۷ است. بزرگ ترین عددی که می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند را بیابید.	۵
۱	فرض کنید $a$ و $b$ دو عدد طبیعی باشند حاصل $[(a^5, b^7), [a^7, a^9]]$ را بیابید.	۶
۱	ثابت کنید اگر $a b$ و $b \neq 0$ در این صورت $ a  \leq  b $ .	۷
۱	نشان دهید دو طرف یک رابطه همنهشتی را می توان در عددی صحیح ضرب کرد.	۸
۱/۲۵	باقی مانده تقسیم $(1000)^{451} \times 4$ بر عدد ۷ بیابید.	۹
۱	رقم یکان عدد $A = (493623)^{4938}$ را بیابید.	۱۰
۱	اگر اول مهر در سالی روز پنج شنبه باشد، معین کنید ۲۲ بهمن همان سال چه روزی خواهد بود.	۱۱
۱/۵	جواب های معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را بیابید.	۱۲
۱/۵	کلیه جواب های معادله همنهشتی $973x \equiv 1! + 2! + \dots + 1397!$ (پیمانه ۱۵) را بیابید.	۱۳
۰/۵	توضیح دهید یک مخزن آب ۷۷ لیتری را به چند طریق می توانیم با ظرف های ۲ و ۶ لیتری از آب پر کنیم؟	۱۴
۱	برای هر یک از گراف های زیر نموداری رسم کنید. الف) $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ab, ae, bd, ce, de\}$ (۰/۵ نمره) ب) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $E = \{xy   3 x + y\}$ (۰/۵ نمره)	۱۵
۱	گراف $G$ با مجموعه راس های $V = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\deg(a) = 3$ ، $\deg(b) = 3$ ، $\deg(c) = 2$ ، $\deg(d) = 2$ و $\deg(e) = 2$ آن گاه اندازه $\bar{G}$ را به دست آورید.	۱۶

۲	<p>گراف <math>G</math> با ساختار زیر را در نظر بگیرید و به سوالات داده شده پاسخ دهید.</p>  <p>الف) مجموعه های <math>V(G)</math> و <math>E(G)</math> را بنویسید. (۵/۰ نمره)  ب) <math>\Delta(G)</math> و <math>\delta(G)</math> را مشخص کنید. (۵/۰ نمره)  پ) مجموعه همسایه های راس های <math>a</math> و <math>b</math> را بنویسید. (۵/۰ نمره)  ت) اگر <math>N_G^{(x)} = \{d\}</math> آن گاه <math>x</math> را مشخص کنید. (۵/۰ نمره)</p>	۱۷
۱	<p>در گراف زیر تمام مسیرهای به طول ۵ بین دو راس <math>a</math> و <math>d</math> را بنویسید.</p> 	۱۸

موفق باشید.

یاسین سپهر

نمره به عدد: .....

نمره به حروف: .....

الف) (۲۵٪)

$$a = 2n+1, b = 2n'+1 \rightarrow a+b = 2k+2 = 2k'$$

مثال نقی:  $n=4: 2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$

ب) (۲۵٪)

$$\frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \leq \sqrt{ab} \leftrightarrow \frac{2ab}{(a+b)} \leq \sqrt{ab} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab - 2$$

$$\xrightarrow{ab > 0} \frac{4ab}{(a+b)^2} \leq 1 \leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

آفرین گزار یعنی  $(a-b)^2 \geq 0$  همواره برقرار است به عبارت  
 دیگر حکم ایزد گزاره ای است که همواره برقرار است. چون تمام مراحل به جهت این  
 هستند پس حکم همواره برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} a | 4m+3 &\Rightarrow a | 2(2m+3) \Rightarrow a | 20m+15 \\ a | 2m+4 &\Rightarrow a | 4(2m+4) \Rightarrow a | 20m+14 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a$$

$$\Rightarrow a | (20m+14) - (20m+15) \Rightarrow a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 23q_1 + 18 \tag{۴}$$

$$b = 23q_2 + 19 \Rightarrow 2b = 2 \times 23q_2 + 2 \times 19 \Rightarrow a - 2b =$$

$$= 23q_1 + 18 - 2 \times 23q_2 - 2 \times 19 = 23(q_1 - 2q_2) - 20$$

$$\Rightarrow a - 2b = 23q - 20 \Rightarrow a - 2b = 23q - 20 + 23$$

$$\Rightarrow a - 2b = 23q + 3$$

بنابراین به هر مانده  $a-2b$  بر ۲۳ برابر با ۳ است.

$$a = 5^3 q + 17$$

فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین عدد صحیحی در می‌توان به طرفین اضافه کرد شرایط  
ساله برقرار باشد.  $n$  است:

$$a+n = 5^3 q + 17 + n \Rightarrow 17+n < 5^3 \Rightarrow n < 5^3 - 17$$

$$\Rightarrow n < 34 \Rightarrow n_{max} = 34$$

$$a^3 | a^7 \Rightarrow [a^3, a^7] = a^7$$

$$و (a^5, b^2) | a^5, a^5 | a^7 \Rightarrow (a^5, b^2) | a^7$$

$$\Rightarrow [(a^5, b^2), [a^3, a^7]] = [(a^5, b^2), a^7] = a^7$$

۷- چون  $a | b$  پس  $b = aq$ ، از طرفی طبق فرض ساله  $b \neq 0$  پس  $a \neq 0$

پس طبق فرض  $(b = aq)$ ،  $q \neq 0$  خواهد بود بنابراین چون  $q$  عددی صحیح است

پس  $|a| > |aq|$  است. حل می‌توانیم طرفین نامساوی  $|a| > |aq|$  را در عدد

نامنتقی  $|a|$  ضرب کنیم:

$$1 \leq |q| \Rightarrow |a| \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

$$a \equiv b \Rightarrow m | a-b \Rightarrow m | c(a-b) \Rightarrow m | ac-bc \quad \text{۸-}$$

$$\Rightarrow ac \equiv bc$$

$$1000 \equiv -1 \Rightarrow 4 \times (1000)^{201} \equiv -1 \times 4 \equiv 3 \quad \text{۹-}$$

پس باقی‌مانده تقسیم  $A$  بر  $7$  برابر  $3$  است.

$$4938 = 4 \times 1234 + 2$$

$$(493423) \equiv 3 \pmod{7}$$

۱- ابتدا باقی‌مانده  $4938$  را بر  $4$  بدیواریم.

$$\Rightarrow 3^2 = 9$$

۱۱ نامہ تاریخ مشرف ۱۵ تاریخ خواستہ شدہ برابر ۲۱ + (۴ × ۳۰) = ۱۲۱ روز است. یعنی ۱۴۱ روز

$$121 \equiv 1 \pmod{121}$$

پ	ج	ش	ک	د	س	ع
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱۲ عدد ۱ در جدول فوق متناظر روز جمع است. پس ۲۲ بجای ۱۴۱ روز جمع

$$7x + 5y = 11 \Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 7x \equiv 11 + 2 \times 5 \pmod{5} \quad 12$$

$$\Rightarrow 7x \equiv 21 \pmod{5} \xrightarrow{(2,7)=1} x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow \boxed{x = 5k + 3}$$

$$7(5k + 3) + 5y = 11 \Rightarrow 35k + 21 + 5y = 11$$

$$\Rightarrow 5y = -35k + 11 - 21 \Rightarrow 5y = -35k - 10$$

$$\Rightarrow 5y = 5(-7k - 2) \Rightarrow \boxed{y = -7k - 2}$$

$$973 \equiv 15 \pmod{15} \text{ و } 1! + 2! + 3! + \dots + 100! \equiv 1 + 2 + 4 + 24 + \dots + 0 \pmod{15} \quad 13$$

$$\xrightarrow{\equiv 3 \pmod{15}} -2x \equiv 3 \pmod{15} \xrightarrow{(2,15)=1} -x \equiv 9 \pmod{15} \Rightarrow x \equiv -9 \pmod{15} \equiv 6 \pmod{15}$$

$$\Rightarrow x = 15k + 6$$

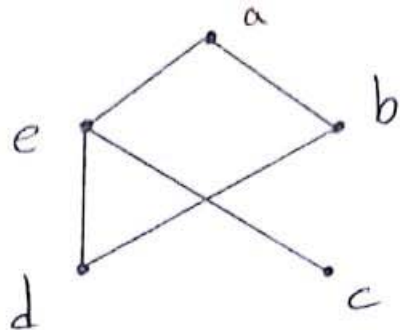
۱۴ - معادله متناظر با این معادله بصورت  $2x + 4y = 77$  از طرفی معادله  $ax + by = c$  معلومی جواب دارد که  $(a, b) | c$

$$(2, 4) | 77$$

$$(2, 4) = 2 \nmid 77$$

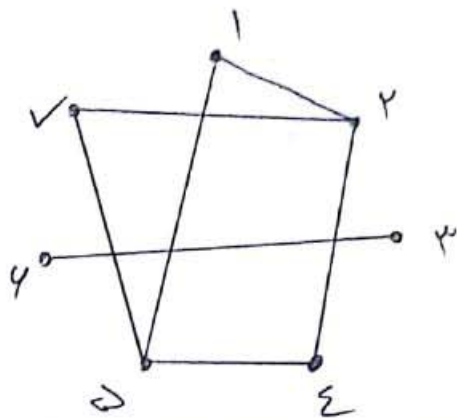
پس این معادله جواب ندارد پس نمی توان پر کرد.

۴



۱۵ (الف)

$$E = \{12, 15, 24, 27, 34, 45, 57\}$$



(ب)

$$\sum \deg(v_i) = 2q \Rightarrow 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q$$

-۱۴

$$\Rightarrow q = 4, \quad q(G) + q(\bar{G}) = \binom{P}{2}, \quad P = 5$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{5}{2} - 4 \Rightarrow q(\bar{G}) = 4$$

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}, \quad E(G) = \{ab, ac, bd, dc, de\} \quad (۱۷- الف)$$

$$S(G) = 1, \quad \Delta(G) = 3 \quad (ب)$$

$$N(a) = \{b, c\}, \quad N(b) = \{a, d\} \quad (ج)$$

$$N(x) = \{d\} \Rightarrow x = e \quad (د)$$

$$a f b e c d, a f c e b d, a e b f c d, a e c f b d \quad -۱۸$$

در کل ۴ مسیر طول ۵ بین a و b وجود دارد.