

سوالات امتحان پایانی درس: ریاضی گسسته چهارم ریاضی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۲/۲۲	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دبیرستان دخترانه کوثر شهرستان تایباد		نام و نام خانوادگی:		
ردیف	سوالات	نمره		
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. الف) گرافی با دنباله درجه رئوس ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۱، ۰ وجود دارد. ب) گرافی با مرتبه ی ۷ و اندازه ی ۱۶ قطعاً همبند است.	۱		
۲	گراف کاملی از درختی هم مرتبه اش ۳۶ یال بیشتر دارد، اندازه ی درخت را مشخص کنید.	۱		
۳	ثابت کنید اگر $a bc$ و $(a,b)=1$ آن گاه $a c$.	۱/۵		
۴	معادله ی سیاله ی $45 = 7y - 2x$ را در مجموعه اعداد صحیح حل کنید.	۱/۵		
۵	تعداد رابطه های بازتابی روی یک مجموعه ی ناتهی با تعداد رابطه های تقارنی روی آن مجموعه مساوی است. چند رابطه پادتقارنی روی این مجموعه وجود دارد؟	۱		
۶	مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید: الف) رابطه ای روی A بنویسید که ویژگی بازتابی داشته باشد ولی تقارنی، پادتقارنی و ترایی نباشد. ب) نمودار گراف متناظر با رابطه ی قسمت الف را رسم کنید.	۱/۲۵		
۷	فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و رابطه ی R روی A به صورت $R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,2)\}$ تعریف شده باشد، $M(R)$ و رابطه ی $R \circ R$ را مشخص کنید.	۱/۵		
۸	چند عدد سه رقمی وجود دارد که مجموع ارقامش برابر ۱۴ باشد؟	۲		
۹	چند عدد طبیعی کوچک تر از ۱۸۰۰ وجود دارد که نسبت به ۶۰ اول باشد؟	۱/۲۵		
۱۰	در جای خالی عبارتی مناسب بنویسید تا گزاره ی حاصل درست باشد. الف) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه ای S باشند، آن گاه $P(A' B) + P(A B) = \dots\dots\dots$ ب) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، A و B مستقل اند هرگاه $\dots\dots\dots$ یا $\dots\dots\dots$ ج) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه $P(A B) = \dots\dots\dots$	۱/۵		
۱۱	اگر $P(A \cup B) = 1$ ، $P(A) = 5$ ، $P(B) = 3$ باشد، مقدار $P(A \Delta B)$ را مشخص کنید.	۱		
۱۲	ظرف A حاوی ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ظرف B حاوی ۳ مهره سفید و ۱ مهره سیاه است. از ظرف B به تصادف مهره ای را برداشته و بدون نگاه کردن به آن در ظرف A می اندازیم سپس به تصادف مهره ای از ظرف A خارج میکنیم الف) (مطلوبست احتمال این که مهره خارج شده از A سفید باشد؟ ب) اگر مهره خارج شده از A سفید باشد با چه احتمالی مهره خارج شده از B سیاه بوده است؟	۲/۵		
۱۳	۵ مرد و ۳ زن به طور تصادفی دور یک میز گرد می نشینند احتمال این که هر سه زن کنار هم باشند چقدر است؟	۱		
۱۴	نشان دهید تابع زیر یک تابع احتمال است. $P(X = x) = \frac{1}{n^2} [2(n-x) + 1] \text{ و } x = 1, 2, 3, \dots, n$	۲		
۲۰	موفق باشید	عباس نیا		

پاسخنامه امتحان پایانی درس: ریاضی گسسته چهارم ریاضی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۲/۲/۲۲	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دبیرستان دخترانه کوثر شهرستان تایباد		نام و نام خانوادگی:		
ردیف	پاسخ ها	نمره		
۱	الف) درست (۰/۲۵). رسم نمودار یا توضیح درستی (۰/۲۵). ب) درست (۰/۲۵). ابتدا با ۶ رأس گراف کاملی با $\frac{6 \times 5}{2} = ۱۵$ یال ایجاد می کنیم حال کافی است از رأس باقیمانده به یکی از رأس های قبلی وصل کنیم. (۰/۲۵)	۱		
۲	$\frac{p(p-1)}{2} - (p-1) = ۳۶(۰/۵) \Rightarrow p^2 - 3p - 70 = 0 \Rightarrow p = 10(۰/۲۵) \Rightarrow$ درخت $q = 9(۰/۲۵)$	۱		
۳	لم اقلیدس (اثبات در کتاب) (۱/۵)	۱/۵		
۴	$2x - 7y = 45 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -5 \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k \\ y = -5 + 2k \end{cases} (۱)$	۱/۵		
۵	تعداد رابطه های بازتابی روی یک مجموعه ی n عضوی 2^{n^2-n} و تعداد رابطه های تقارنی $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ می باشد. لذا: $2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{n^2-n} (۰/۵) \Rightarrow \frac{n^2+n}{2} = n^2 - n \Rightarrow$ $n = ۳ (۰/۲۵)$ و در نتیجه تعداد رابطه های پادتقارنی مساوی (۰/۲۵) $2^3 \times 3^2 = ۸ \times ۲۷ = ۲۱۶$ می باشد. #	۱		
۶	مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید: الف) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (a, c)\}$ (۰/۷۵) ب) رسم (۰/۵)	۱/۲۵		
۷	$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ در نتیجه $M(ROR) = M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ لذا $ROR = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, a), (d, b)\}$ (۰/۵)	۱/۵		
۸	برای عدد \overline{abc} باید معادله ی $a + b + c = ۱۴$ که در آن $۱ \leq a \leq ۹$ و $۰ \leq b, c \leq ۹$ حل شود (۰/۵). (شمول وعدم..) $\left[\begin{matrix} a \geq 1 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} a \geq 10 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} a \geq 1 \\ b \geq 10 \\ c \geq 0 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} a \geq 1 \\ b \geq 0 \\ c \geq 10 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} a \geq 10 \\ b \geq 10 \\ c \geq 0 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} a \geq 10 \\ b \geq 0 \\ c \geq 10 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} a \geq 1 \\ b \geq 10 \\ c \geq 10 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} a \geq 10 \\ b \geq 10 \\ c \geq 10 \end{matrix} \right]$ $= \binom{15}{2} - \binom{6}{2} - \binom{5}{2} - \binom{5}{2} + 0 + 0 + 0 + 0 = 70$ (۱/۵ نمره تقسیم شود).	۲		
۹	چون $۱۸۰۰ = ۲^3 \times ۳^2 \times ۵^2$ و $۶۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ عامل های اول یکسان دارند (۰/۵) پس برای محاسبه ی تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۸۰۰ که نسبت به ۶۰ اول هستند کافی است تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۸۰۰ که نسبت به ۱۸۰۰ اول هستند را بیابیم (۰/۲۵) لذا جواب مسأله $\phi(۱۸۰۰) = \phi(۲^3 \times ۳^2 \times ۵^2) = ۴۸۰$ است. (۰/۵)	۱/۲۵		

۱۰	الف) جواب = ۱ (۰/۲۵) زیرا $P(A' B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A B) (۰/۵)$ ب) $P(A) = ۰$ یا $P(B) = ۰$ (۰/۲۵) $P(A \cap B) = ۰ \Rightarrow$ ج) $P(A) \cdot P(B)$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۱	$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{5} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{30} \\ P(A \cup B) = \frac{1}{2} \end{cases}$ لذا $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 2\left(\frac{1}{30}\right) = \frac{7}{15} (۰/۵)$	۱
۱۲	الف) (۱/۵) پیشامد سفید بودن مهره خارج شده از ظرف $E_1 = B$ پیشامد سیاه بودن مهره خارج شده از ظرف $E_2 = B$ پیشامد سفید بودن مهره خارج شده از ظرف $E = A$ $P(E) = P(E_1) \cdot P(E E_1) + P(E_2) \cdot P(E E_2) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}\right) = \frac{19}{28}$ ب) (۱) $P(E_2 E) = \frac{P(E E_2) \cdot P(E_2)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{4}}{\frac{19}{28}} = \frac{4}{19}$	۲/۵
۱۳	$P(A) = \frac{3! \times 5!}{7!} = \frac{1}{7}$ که درمخرج آن چون کلاً هشت نفرند ۷! می شود و در صورت ۳! برای کنار هم بودن سه زن و ۵! برای ۶ نفر (سه زن باهم به عنوان یک نفر + پنج مرد)	۱
۱۴	تمرین کتاب اثبات $۱, 2, 3, \dots, n$ و x و $P(X=x) \leq ۱$ (۰/۷۵) و اثبات $\sum_{x=1}^n P(X=x) = ۱$ (۱/۲۵)	۲
	موفق باشید عباس نیا	۲۰