

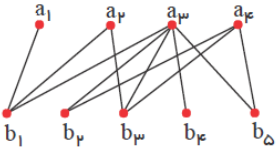
منطقه ۳ تهران

ریاضیات گسسته - پیش‌دانشگاهی ریاضی
نیمسال اول

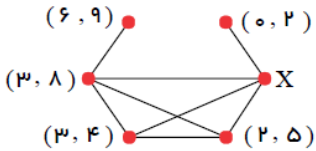
زمان: ۱۲۰ دقیقه
تاریخ: ۱۳۹۶/۱۰/۱۶

۱. در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس‌های زوج عددی و تعداد رأس‌های فرد عددی است.

۲. الف) ۵ نفر $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ جهت مشاغل $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ مطابق نمودار زیر اعلام آمادگی کرده‌اند. به چند طریق می‌توان این افراد را جهت مشاغل مورد نظر انتخاب کرد به گونه‌ای که در هر شغل فقط یک نفر وجود داشته باشد و هر شخص حداکثر یک شغل را اشغال کند؟



ب) به رأس X ، بازه‌ی بازی را چنان نسبت دهید تا گراف زیر یک گراف بازه‌ای شود؟



ج) گرافی از مرتبه‌ی ۱۴ و اندازه‌ی ۲۵ مفروض است. اگر این گراف فقط رئوسی از درجه‌ی ۳ یا ۵ داشته باشد، این گراف چند رأس درجه‌ی ۳ دارد؟

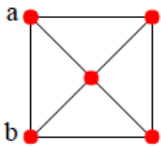
۳. الف) اگر حاصلضرب دو عدد p و q فرد باشد، آنگاه چند گراف p -منتظم از مرتبه q وجود دارد؟ چرا؟

ب) در یک گراف ساده‌ی 6 -منتظم رابطه‌ی $q = 2p + 5$ بین مرتبه و اندازه برقرار است. مقدار p را بیابید؟

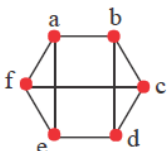
ج) گراف کامل را تعریف کنید و تعداد یال‌های یک گراف کامل از مرتبه‌ی ۱۰ را بیابید.

د) یک گراف ساده ۹ رأس و ۳۵ یال دارد. این گراف چند رأس از درجه‌ی $\Delta = 8$ دارد؟ چرا؟

۴. الف) در گراف ساده‌ی روبه‌رو، چند مسیر از a به b وجود دارد؟



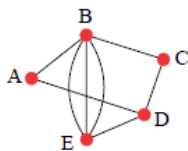
ب) در گراف ۳-منتظم زیر، چند دور با طول ۵ وجود دارد؟



ج) چند نوع گراف ساده، همبند و نامنتظم که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۰ باشد، وجود دارد؟

۵. الف) نمودار گراف پترسن را رسم کنید؟ آیا این گراف همیلتنی است چرا؟

ب) شکل مقابل ۵ منطقه A و B و C و D و E را با ۸ پل به هم راه داده است اگر مجاز باشیم از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنیم با شروع از منطقه B ، منطقه پایان کدام است؟ چرا؟



۶. الف) اگر T درخت مفروضی از مرتبه ۱۳۹۶ باشد، حداکثر چند خاصیت از خواص "همبندی - منتظم بودن - همیلتنی بودن - کامل بودن - وجود راس منفرد" را دارد؟ چرا؟

ب) با استفاده از رسم نمودار گراف، مشخص کنید چند درخت از مرتبه ۶ وجود دارد

۷. فرض کنید M ماتریس مجاورت گراف G با دنباله درجه‌ی راس‌های $1, 2, 2, 3, 3, 3$ باشد.

الف) مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس M را بیابید.

ب) مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس M^2 را بیابید.

ج) تعداد صفرهای ماتریس M را بیابید؟

۸. الف) چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی مانده ی تقسیم آن بر ۲۵، برابر مکعب خارج قسمت باشد؟

ب) کوچکترین عضو مثبت مجموعه‌ی $A = \{-438 - 19q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ را بیابید.

ج) به ازای چند عدد طبیعی n رابطه‌ی $n^2 + 7 \mid n + 3$ برقرار است؟

د) اگر a یک عدد فرد باشد، بزرگترین مقدار k که به ازای آن 2^k همواره عدد $(3a^2 + 5)(a^2 + 3)$ را بشمارد، بیابید.

۹. الف) اگر $(xyz)_8 = (11010011)_2$ ، آن‌گاه حاصل $x + y + z$ را بیابید.

ب) حاصل $(112)_3 - (2000)_3$ در مبنای ۶ را بیابید.

ج) یک عدد طبیعی فرد و مربع کامل، با بیشترین مقدار ممکن، به صورت $(abc)_8$ نوشته می‌شود. حاصل $a + c$ را بیابید.

۱۰. الف) بین $2 + 1396! + 1395!$ تا $1396!$ چند عدد اول وجود دارد؟

ب) به ازای چند عدد اول p ، عدد $48p + 1$ مربع کامل است؟

ج) اگر $a^3 \mid 48$ و $b^2 \mid 375$ ، کمترین مقدار $a + b$ را بیابید؟

د) اگر $20! \mid 18^n$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار n را بیابید؟

۱۱. الف) اگر a یک عدد طبیعی بزرگتر از یک و $(a, 48) = 1$ کوچکترین مقدار $a^2 - 1$ را بیابید؟

ب) حاصل $(8n + 6, 12n + 10)$ را بیابید؟

ج) اگر $(a^2, a^2 + b^2) = (-a, b) + 12$ باشد، آن‌گاه مقدار $(3a^2, 3b^2)$ را بیابید؟

۱۲. الف) اگر $[a, 54] = 2700$ باشد، کمترین مقدار ممکن برای a را بیابید.

ب) کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی a و b برابر 360 و تفاضل آن‌ها برابر 66 است. بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

پیروز باشید
قادری