

# دبیرستان فتح شاهد- منطقه ۳ تهران

حساب دیفرانسیل و انتگرال - پیش دانشگاهی ریاضی

زمان: ۱۲۰ دقیقه

تاریخ: ۱۳۹۶/۱۰/۰۶

نیمسال اول

درک و فهم مسائل بخشی از امتحان است، لذا به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

۱- مثال بزنید.

الف) اعداد گنگ متمایز  $\alpha$  و  $\beta$  را چنان مثال بزنید که  $\log_{\alpha} \beta$  عددی گویا باشد. (۲۵/۰ نمره)

ب) یک دنباله‌ی کراندار، غیر یکنوا و اگر مثال بزنید. (۲۵/۰ نمره)

ج) دنباله‌ی  $a_n$  با جملات گنگ را چنان مثال بزنید که به یک عدد گویا همگرا باشد. (۲۵/۰ نمره)

د) تابع  $y = f(x)$  را چنان مثال بزنید که در هیچ نقطه‌ای حد نداشته باشد. (۲۵/۰ نمره)

۲- جاهای خالی داده شده را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) به ازای هر عدد حقیقی  $a$  مقدار  $\max\{a, -a\}$  برابر ..... است. (۲۵/۰ نمره)

ب) کوچک‌ترین کران بالای دنباله‌ی  $\left\{1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right\}$  برابر  $a_n$  ..... است. (۲۵/۰ نمره)

ج) دنباله‌ی  $a_n = \frac{\sin n!\pi}{\sqrt{n}}$  به عدد حقیقی ..... همگرا است. (۲۵/۰ نمره)

د) حد تابع  $f(x) = [x^2] + [-x^2]$  در تمام نقاط  $\mathbb{R}$  برابر ..... است. (۲۵/۰ نمره)

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) دنباله‌ی فیبوناتچی یک دنباله‌ی همگرا است. (۵/۰ نمره)

ب) خط  $y = 3$  نمودار تابع  $y = x + (x - 2)(x - 4)$  را در بازه‌ی  $[2, 4]$  حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. (۵/۰ نمره)

ج) همواره در یک پنج‌ضلعی منتظم نسبت طول قطر به طول ضلع برابر  $a$  است که در آن،  $x = a$  طول نقطه‌ی پیوستگی تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

است. (۵/۰ نمره)

۴-

الف) اگر  $\sqrt[5]{53}$  و  $\sqrt[5]{5}$  وارون عدد حقیقی  $\frac{a}{a-\sqrt{5}}$  باشد. مقدار  $a$  را بیابید. (۵/۰ نمره)

ب) فرض کنید به ازای هر عدد مثبت  $h$ ،  $h < a \leq 0$  ثابت کنید  $a = 0$ . (۷۵/۰ نمره)

ج) مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی  $1 < \left| \frac{1-2x}{3-x} \right|$  یک بازه‌ی متقارن به مرکز  $\alpha$  و شعاع  $r$  است. مقادیر  $\alpha$  و  $r$  را بیابید. (۷۵/۰ نمره)

۵-

الف) به ازای مقادیر  $n_0 \leq n$ ، اگر فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله‌ی  $\left\{ \frac{2n+1}{3n+4} \right\}$  از نقطه‌ی همگرایی خود، کم‌تر از  $0.4$  باشد. کوچک‌ترین مقدار

$n$  را بیابید. (۲۵/۱ نمره)

ب) اگر جملات دنباله‌ی  $a_n = \epsilon n - n^2$  به ازای  $n \geq M$  کمتر از  $2000 - \epsilon$  باشند، حداقل مقدار  $M$  را بیابید. (۱ نمره)

۶- همگرایی، یکنوایی و کران‌داری دنباله‌ی  $a_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 2^{n-1}}$  را بررسی کنید. (۱ نمره)

۷- مقدار همگرایی دنباله‌ی  $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{n+1}$  را بدست آورید. (۱ نمره)

-۸

الف) اگر  $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$  و تابع  $f(x) = (x+1)[-x]$  مفروض باشند، آنگاه دنباله‌ی  $f(a_n)$  به چه عددی همگراست؟ چرا؟ (۷۵/۰ نمره)

ب) به کمک دنباله‌ها ثابت کنید که تابع  $f(x) = \cos \frac{1}{x-1}$  در  $x=1$  حد ندارد. (۱ نمره)

۹- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. (۲/۵ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \right], \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}-1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left| \tan \frac{\pi x}{2} \right|$$

-۱۰

الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + a}{\sqrt{2+2x}-2} = b$ ، آنگاه مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید. (۷۵/۰ نمره)

ب) مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = +\infty$  (۷۵/۰ نمره)

۱۱- مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی  $x=0$  پیوسته باشد. (۱ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} a \left[ \frac{1}{x-1} \right] & x > 0 \\ \sqrt{2} & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-\cos x}}{b \sin x} & x < 0 \end{cases}$$

۱۲- تابع  $f(x) = [x]^2 - [x]$  در بازه‌ی  $(-1, 2)$  چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟ (۱ نمره)

-۱۳

الف) با استفاده از قضیه‌ی بولتزانو ثابت کنید معادله‌ی  $x = 2 \sin x$  در بازه‌ی  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$  دارای ریشه است. (۷۵/۰ نمره)

ب) بزرگترین بازه‌ای که وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x-2} - 4\sqrt{11-x}$  روی آن پیوسته است را بیابید. (۷۵/۰ نمره)

-۱۴

معادله‌ی مجانب‌های قائم منحنی  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2-4x}$  را بدست آورید. (۱ نمره)

گر تو را باشد هدف تسخیر قلها  
همیشه باید رفت، همیشه باید خواست