

۱- اگر $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{x-2}{3} < 1 \right\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < 2\}$ باشد حاصل $A \cap B$ را به صورت بازه نمایش دهید.

۲- اگر معادله سهمی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد و a, b, c را طوری بیابید که سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۱ قطع کرده و از نقطه $A(1, -2)$ نیز بگذرد.

۳- دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{2 + \sqrt{3+x}}{\sqrt{-x}}$ را تعیین کنید.

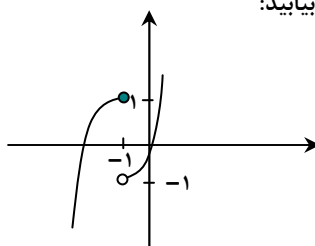
۴- الف) اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = 3x + k$ باشد مقدار k را طوری بیابید که $\text{fog}(x) = \text{gof}(x)$ ب) اگر $f(x) = \sqrt{2x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشد، دامنه $(f+g)(x)$ را بدست آورید.

۵- با توجه به نمودار تابع f حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید:

الف) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$



۶- هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 3x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[2x+1]}{x-2}$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 1}}{5x + \sqrt{4x^2 + 1}}$

هـ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

۷- تابع $f(x) = \begin{cases} (a+2)x - 3 & x > 2 \\ -x^2 + 1 & x \leq 2 \end{cases}$ مفروض است. a را طوری بیابید که تابع در نقطه $x = 2$ دارای حد باشد.

۸- اگر $2 < \cos 3x + 2 < f(x) + 1 < \sin 2x$ باشد، مطلوب است:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

۹- مقادیر a, b را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a|1 - 3x| & x > 1 \\ [2x + 2] & x = 1 \\ bx^2 + x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

۱۰- تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2 - 5x + 6}$ در چه فاصله‌هایی پیوسته است؟

۱۱- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{2}{x+1}$ را وقتی متغیر x از ۱ به $1/2$ تغییر می‌کند بدست آورید.

۱۲- مشتق‌های تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x) = \frac{7}{(x+4)^2}$ ب) $g(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^3} \right)^2$ ج) $h(x) = \sqrt{\sin 5x} + 2 \tan^3 2x$

۱۳- معادله خط قائم بر منحنی $y = \frac{1}{2x+1}$ را در نقطه‌ای به طول -۱ واقع بر منحنی را بدست آورید.

۱۴- تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ مفروض است. a, b, c را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای می‌نیم بوده و $A(0, 1)$ نقطه عطف منحنی باشد.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

-۱

$$-1 \leq \frac{x-2}{3} < 1 - \frac{x^2}{3} \rightarrow -3 \leq x-2 < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 5 \Rightarrow A \cap B = [-1, 2)$$

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

-۲

$$(\cdot, 2) \in f \Rightarrow 2 = c$$

$$(-1, \cdot) \in f \Rightarrow \cdot = a - b + c \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$f(1) = -2 \Rightarrow -2 = a + b + c$$

-۳

$$3 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < \cdot\}$$

$$-x > 0 \Rightarrow x < 0$$

-۴

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 3(2x+1) + k = 6x + 3 + k$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+k) = 2(3x+k) = 2(3x+k) + 1 = 6x + 2k + 1$$

$$6x + 3 + k = 6x + 2k + 1 \Rightarrow k = 2$$

$$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$x \neq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, +\infty)$$

۵- الف) -۱ (ب) ۱ ج) چون $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ پس تابع در $x = -1$ حد ندارد

-۶

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x^2 - 2x}{x-1} = \frac{0}{0}$ رفع ابهام: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+2)}{1} = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 3x} = \frac{0}{0}$ رفع ابهام: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 3x} \times \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x (\sqrt{x+4} + 2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3 \sin 3x} \times \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{12}$$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[2x+1]}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{5x + |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + x}{5x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$

هـ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{2})^+ = -\infty$

-۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a+2)x - 3 = 2a+1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2+1) = -3 \Rightarrow 2a+1 = -3 \Rightarrow a = -2$$

-۸

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x + 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3(f(x) + 2)) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{3}$$

-۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a - 2 = 2a, f(1) = 4, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b + 2 \Rightarrow 2a = b + 2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

۱۰- مخرج کسر نباید صفر شود.

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ یا } x \neq 3$$

$$\text{پیوستگی: } (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$$

-۱۱

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/2) - f(1)}{1/2 - 1} = \frac{\frac{2}{2/2} - \frac{2}{1+1}}{0/2} = \frac{-0/2}{0/2} = -\frac{1}{2/2}$$

-۱۲

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{-21(x+4)^2}{(x+4)^6}$$

$$\text{ب) } g'(x) = 2x \frac{(\sqrt{x})'(1+x^2) - (1+x^2)'\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} \times \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} = \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x^2) - 2x^2(\sqrt{x})}{(1+x^2)^2} \right) 2 \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \right)$$

$$\text{ج) } h'(x) = \frac{\Delta \cos \Delta x}{2\sqrt{\sin \Delta x}} + 24 \tan^2 2x (1 + \tan^2 2x)$$

-۱۳

$$f(-1) = -1 \quad y' = \frac{-2}{(2x+1)^2} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = f'(-1) = \frac{-2}{(2+(-1)+1)^2} = -2 \Rightarrow \text{شیب خط قائم} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

-۱۴

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$(0, 1) \in f \Rightarrow 1 = c$$

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(0) = 0 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$2a + b = -3 \Rightarrow b = -3$$

-۱۵

$$x = 2 \Rightarrow y = 1 \quad y' = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 1 \\ x = 2 \rightarrow y = 5 \end{array} \right\} \text{نقطه کمکی}$$

$$y'' = 6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	\searrow	5	\searrow	1	\searrow	$-\infty$

