۱- نامعادله مقابل را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$$\frac{|2x-1|}{3}<1$$

۲- در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ مقادیر a,b,c را طوری بیابید که تابع ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کند و $f(1)=6$ و نمودار تابع از نقطه $(-1,10)$ نیز بگذرد.

۳- دامنه تعریف تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|}$ را بدست آورید.

۴- الف) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x^2}$ باشد ، دامنه $\frac{f}{g}(x)$ را بدست آورید.

ب) اگر $f(x)=\frac{x}{1+x}$ و $f(g(x))$ باشد ، ضابطه $g(x)$ را بدست آورید.

۵- هر یک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-|x|}{[x+1]-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\tan 3x}{1-\cos 2x}$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x}}$ هـ) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3-4x+3}{(x-1)^2}$ و) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-1}{\cos x+\sin^2 x}$

۶- آیا تابع $f(x)=\sqrt{x-3}$ وقتی $x\to 3$ دارای حد است؟ چرا؟

۷- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}3x+\frac{|2x|}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

۸- فاصله پیوستگی تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-2x^2}$ را بدست آورید.

۹- آهنگ تغییرات تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ وقتی x از ۲ به ۲/۲ تغییر کند را بدست آورید.

۱۰- مشتق‌های تابع‌های زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x}$ ب) $g(x)=5\sin^2(x-1)-\cot\sqrt{x}$ ج) $h(x)=(x^3-x)^3(2x-1)$

۱۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=2\sin x-1$ را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر این منحنی بدست آورید.

۱۲- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=x^3+ax^2+b$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول (-1) قطع کند و نقطه عطفی به طول (1) داشته باشد.

۱۳- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=(2-x)(x+1)^2$ را رسم کنید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۷

-۱

$$|2x-1|<3\Rightarrow -3<2x-1<3\Rightarrow -1<x<2\Rightarrow x\in(-1,2)$$

-۲

$$(0,5)\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow 5=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow 5=c$$

$$(1,6)\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow 6=a(1)^2+b(1)+c\Rightarrow a+b+5=6$$

$$(-1,10)\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow 10=a(-1)^2+b(-1)+c\Rightarrow 10=a-b+5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a-b=5\end{cases}\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3,b=-2 \quad \begin{matrix}a+b+5=6\\ a-b+5=10\end{matrix}$$

۳-

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$۴-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow (۲-x)(۲+x) \ge ۰$

$|x| \ne ۰ \Rightarrow x \ne ۰ \Rightarrow R-\{۰\}$ $\qquad \Rightarrow -۲ \le x \le ۲$

$D=(۱)\cap(۲)-\{۰\} \Rightarrow \{x|-۲\le x<۰\}\cup\{x|۰\le x\le ۲\}$

۴-

$D_f : x \ge ۰ , D_g : x \ne ۰$

الف) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|\, g(x)=۰\} \Rightarrow \{x|\, x>۰\}-\{۱\}$ $\qquad g(x)=۰ \Rightarrow \frac{x-۱}{x^۲}=۰ \Rightarrow \begin{matrix} x-۱=۰ \\ x=۱ \end{matrix}$

ب) $f(g(x))=\frac{g(x)}{۱+g(x)}=\frac{۱}{x} \Rightarrow x(g(x))=۱+g(x) \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x-۱}$

۵-

الف) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} \times \frac{(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})}{(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to ۴} \frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to ۴} \frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲(۴-x)(۲+\sqrt{x})} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{x-(-x)}{[x]+۱-x} = \frac{۲x}{-۱+۱-x} = \frac{۲x}{-x} = -۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\frac{۲x\tan ۳x}{x^۲}}{\frac{۲Sin^۲ x}{x^۲}} = \frac{۲x\times ۳x}{۲x^۲} = \frac{۶x^۲}{۲x^۲} = ۳$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x}{\sqrt{۳x^۲}} = \frac{۲x}{|x|\sqrt{۳}} = \frac{۲x}{x\sqrt{۳}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{(x^۲+x-۳)(x-۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲+x-۳}{x-۱} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$

و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲Sin\, x-۱}{Cos\, x+Sin^۲ x} = \frac{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱}{\frac{۱}{۲}+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲} = \frac{\sqrt{۳}-۱}{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}-۱}{\frac{۵}{۴}}$

۶- تابع در نقطه ۳ حد ندارد. چون حد چپ وجود ندارد.

$\lim\limits_{x\to ۳^-} \sqrt{x-۳} =$ وجود ندارد $\qquad D: x-۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۳ \quad \lim\limits_{x\to ۳^+} \sqrt{x-۳} = ۰$

۷-

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$ شرط پیوستگی $\qquad \lim\limits_{x\to ۰^-}\left(۳x+\frac{-۲x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to ۰^-} ۳x-۲ = -۲$

$f(۰)=۲ \quad \lim\limits_{x\to ۰^+}\left(۳x+\frac{۲x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to ۰^+} ۳x+۲ = ۲$ تابع پیوسته نیست

۸-

$x^۳-۲x=۰ \Rightarrow x^۲(x-۲)=۰ \Rightarrow x^۲=۰, x-۲=۰ \Rightarrow x=۰, x=۲$

فاصله پیوستگی: $(-\infty,۰)\cup(۰,۲)\cup(۲,+\infty)$

۹-

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲/۲)^۲-\frac{۱}{۲}(۲)^۲}{۰/۲} = \frac{۰/۴۲}{۰/۲} = ۲/۱$

۱۰-

الف) $f'(x) = \frac{۲x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۴x)^{۳-۱}}} = \frac{۲x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۴x)^۲}}$

ب) $g'(x) = ۲\times ۵Cos(x-۱)Sin(x-۱) + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+Cot^۲\sqrt{x})$

ج) $h'(x) = ۳(x^۳-x)^۲(۳x^۲-۱)(۲x-۱)+۲(x^۳-x)^۳$

۱۱-

$x=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow y=۲\text{Sin}\frac{\pi}{۶}-۱=۰ \qquad x_۱=\frac{\pi}{۶}, y_۱=۰ \qquad \text{Sin}\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

$y'=۲\text{Cos}\,x\Rightarrow m=۲\text{Cos}\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$

$y-y_۱=m(x-x_۱)$

$y=\sqrt{۳}(x-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow y=\sqrt{۳}x-\frac{\sqrt{۳}\pi}{۶}$

-۱۲

$(-۱,۰)\in f\Rightarrow ۰=-۱+a+b\Rightarrow a+b=۱$

$f'(x)=۳x^۲+۲ax\ ,\ f''(x)=۶x+۲a\Rightarrow ۶(۱)+۲a=۰\Rightarrow a=-۳$

$a=-۳\Rightarrow a+b=۱\Rightarrow -۳+b=۱\Rightarrow b=۴$

$a+b=۱\Rightarrow b=۴$

-۱۳

$y'=-(x+۱)^۲+۲(x+۱)(۲-x)=\begin{cases} y'=۰ \\ -۳x^۲+۳=۰\Rightarrow x^۲=۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۱\ ,\ y=۴ \\ x=-۱, y=۰ \end{cases}$

$y''=-۶x=۰\Rightarrow\begin{cases} y''=۰ \\ x=۰\ ,\ y=۲ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$ ↘	۴ ↘	۰ ↗	۲ ↗	۴ ↘	۰ ↘	$-\infty$
			min		max