

۱- برای هر عدد طبیعی n ، با استفاده از استقرای ریاضی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$(1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + \sqrt{2}n$$

۲- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصلضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

۳- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

(الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.

(ب) اگر x گنگ باشد، آنگاه x^2 گویاست.

۴- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$xy \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

۵- برای اینکه در یک مدرسه دست کم ۶ دانش آموز در یکی از ماههای سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد؟

۶- با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A \cup B) - B = A - B$$

۷- اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 2\}$ باشد عضوهای مجموعه $A^2 - A \times B$ را مشخص کنید و نمودار آنرا رسم کنید.

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2}$$

۸- رابطه R روی $\mathbb{R} - \{0\}$ بصورت مقابل تعریف شده است:

(الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی است. (ب) کلاس هم ارزی $[(3, 2)]$ را مشخص کنید.

۹- رابطه R روی مجموعه R به صورت $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y\}$ تعریف شده است. نمودار رابطه R را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۰- یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم مطلوبست تعیین:

(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی (ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

(ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید. (د) $A' \cup B'$

۱۱- از بین ۵ دانش آموز سال اول و ۷ دانش آموز سال دوم به تصادف یک تیم چهار نفره انتخاب می‌کنیم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه لااقل ۳ نفر آنها سال دوم باشد.

۱۲- اگر $S = \{a, b, c, d\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد، مطلوبست محاسبه $P(a')$ و $P(b')$ در صورتیکه داشته باشیم:

$$P(a) = 2P(b) \quad \text{و} \quad P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

۱۳- نقطه (x, y) را درون فضای نمونه‌ای $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه نقطه‌ی مورد نظر در $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y \leq x + 1\}$ باشد را تعیین کنید؟

۱۴- احتمال اینکه دانش آموزی در درس جبر و احتمال قبول شود ۳۴٪ و درس حسابان ۲۳٪ است و احتمال این که دست کم در یکی از دو درس قبول شود ۳۸٪ است. احتمال اینکه این دانش آموز در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

۱۵- اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ آنگاه ثابت کنید:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری - شهریور ماه ۱۳۸۵

-۱

$$\begin{cases} P(1) : (1 + \sqrt{2})^1 \geq 1 + \sqrt{2} & (1) \longrightarrow 1 + \sqrt{2} \geq 1 + \sqrt{2} \\ P(k) : (1 + \sqrt{2})^k \geq 1 + \sqrt{2}k \end{cases}$$

$$P(k+1) : (1 + \sqrt{2})^{k+1} \geq 1 + \sqrt{2}(k+1)$$

طرفین فرض استقراء را در عبارت $(1 + \sqrt{2})$ ضرب می‌کنیم. $(1 + \sqrt{2})^{k+1} \geq (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}k) \geq 1 + \sqrt{2}(k+1)$

$$(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}k) \geq 1 + \sqrt{2}(k+1) \Rightarrow 1 + \sqrt{2}k + \sqrt{2} + 2k \geq 1 + \sqrt{2}k + \sqrt{2} \Rightarrow 2k \geq 0$$

این نامعادله همواره برقرار است. پس حکم برقرار است.

-۲

$$x = 2K \quad y = 2K + 2 \quad z = 2K + 4 \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$xyz = (2K)(2K + 2)(2K + 4) = 8(K)(K + 1)(K + 2)$$

$x, y, z = 8(2q) = 24q$ پس یکی از این‌ها مضرب ۳ است.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \quad x^2 < x$$

۳- الف : نادرست

$$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \Rightarrow x^2 = 3 + \sqrt{5}$$

یک عدد گنگ است.

ب: نادرست

-۴

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \Rightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4} \Rightarrow 4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

۵- دوازده ماه سال را لانه‌های کبوتر در نظر می‌گیریم. برای اینکه در یکی از لانه‌ها ۶ کبوتر باشد، باید در هر لانه حداقل ۵ کبوتر و در یکی از لانه‌ها ۶ کبوتر داشته باشیم.

$$5 \times 12 = 60 \quad 60 + 1 = 61$$

پس حداقل این مدرسه باید ۶۱ دانش آموز داشته باشد.

-۶

$$\text{طرف اول} = (A \cup B) - B$$

$$(A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A \cap B') \cup \emptyset = A \cap B' = A - B = \text{طرف دوم}$$

-۷

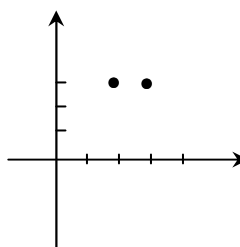
$$A = \{2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$A^2 = \{(x, y) | x \in A, y \in A\} \quad A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$A^2 - A \times B = \{(2, 3), (3, 3)\}$$



-۸

$$(x, y)R(x, y) \Leftrightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{x}{y^2} \quad \text{بازتابی}$$

$$\begin{cases} (x,y)R(z,t) \Rightarrow (z,t)R(x,y) \\ \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2} \Rightarrow \frac{z}{t^2} = \frac{x}{y^2} \end{cases} \quad \text{تقارنی}$$

$$\begin{cases} (x,y)R(z,t), (z,t)R(e,f) \Rightarrow (x,y)R(e,f) \\ \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2} \\ \frac{z}{t^2} = \frac{e}{f^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{e}{f^2} \quad \text{تراپایی}$$

$$(x,y)R(3,2) \Rightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x = 3y^2$$

نتیجه می‌گیریم R یک رابطه هم ارزی است.

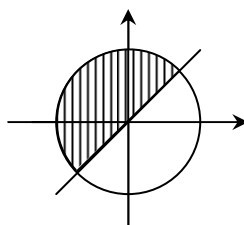
-۹

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x \leq y$$

$$x = y \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$



-۱۰

$$\text{الف: } S = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$\text{ب: } A = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (2, 3), (4, 3), (6, 3), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

$$\text{ج: } B = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2)\}$$

$$\text{د: } A' = \{(1, 3), (3, 3), (5, 3)\}$$

$$B' = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$A' \cup B' = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

-۱۱

$$n(s) = \binom{12}{4}$$

$$n(A) = \binom{7}{3} \binom{5}{1} + \binom{7}{4} \binom{5}{0} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{3} \binom{5}{1} + \binom{7}{4} \binom{5}{0}}{\binom{12}{4}}$$

-۱۲

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

$$2P(b) + P(b) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

$$3P(b) + \frac{1}{3} = 1$$

$$3P(b) = \frac{2}{3} \quad P(b) = \frac{1}{3}$$

$$P(a) = 2P(b) = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$P(a') = 1 - P(a) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(b') = 1 - P(b) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S = [0, 1] \times [0, 1]$$

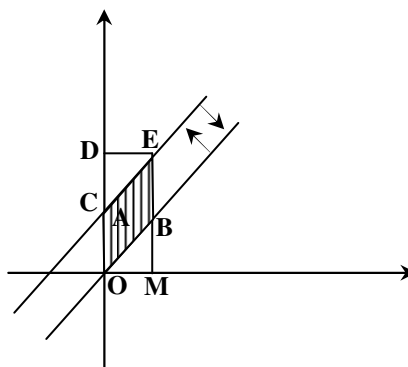
$$\begin{cases} x \leq y & (0, 0) & (1, 1) \\ y \leq x + 1 & (0, 1) & (-1, 0) \end{cases}$$

$$a(S) = 1 \times 1 = 1$$

$$a(A) = a(s) - \left[a(OMB) + a(CDE) \right]$$

$$a(A) = 1 - \left[\frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} \right]$$

$$a(A) = 1 - 1 = 0 \quad P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{0}{1} = 0$$



-۱۳

$$P(A) = 0/34$$

$$P(B) = 0/23$$

$$P(A \cup B) = 0/38$$

$$P(A \cap B) = ?$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0/38 = 0/34 + 0/23 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0/34 + 0/23 - 0/38$$

$$P(A \cap B) = 0/57 - 0/38$$

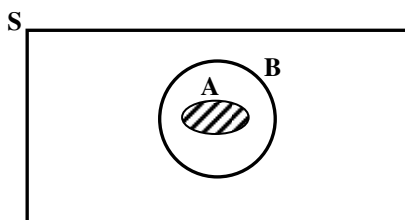
$$P(A \cap B) = 0/19$$

۱۵- با استفاده از شکل می‌دانیم $B = (B - A) \cup A$ همچنین $P(B) = P((B - A) \cup A)$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$P(B) = P(B - A) + P(A)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$



-۱۴