

۱- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

۲- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$

۳- می‌دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $1 + \sqrt{3}$ گنگ است. (برهان خلف)

۴- از ۸۰۰ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه حداقل چند دانش‌آموز در یک روز سال متولد شده‌اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید)

۵- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم، حاصل همواره عددی فرد است.

۶- با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

۷- اگر $A = \{x^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 3\}$ ، عضوهای مجموعه $A \times B - A^2$ را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۸- رابطه‌ی R روی \mathbb{R}^2 به صورت روبه‌رو تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^3 - t^2 = z^3 - y^2$

(الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

(ب) کلاس هم‌ارزی $[(-2, 3)]$ را مشخص کنید.

۹- نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۰- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین: (الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد.

(ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

(ج) پیشامد B به‌طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

(د) $A \cap B'$

۱۱- ۳ لامپ را از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آن‌ها بدون هیچ‌گونه آثار خارجی معیوب می‌باشد انتخاب می‌کنیم. تعیین کنید احتمال این‌که: (الف) هیچ‌کدام معیوب نباشند.

(ب) فقط یکی از لامپ‌ها معیوب باشد.

۱۲- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است. احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید.

۱۳- نقطه‌ی (x, y) را درون دایره $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این را که نقطه‌ی مورد نظر در $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ باشد، تعیین کنید.

۱۴- سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که ۷ بار رو بیاید.

۱۵- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

۱۶- اگر $P(A \cup B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشند، مطلوب است محاسبه‌ی: (الف) $P(B)$ (ب) $P(B - A)$

$$\left\{ P(1): \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad P(K): \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^K} = 1 - \frac{1}{2^K} \right. \quad -1$$

$$P(K+1): \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{1}{2^{K+1}} \quad 1 - \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^{K+1}} = 1 + \frac{-2+1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{1}{2^{K+1}}$$

$$x^2 + y^2 \geq 2(x+y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \quad -2$$

همواره برقرار است. \Leftarrow طبق اثبات بازگشتی حکم درست است.

۳- از برهان خلف استفاده می‌کنیم پس اگر $1 + \sqrt{3}$ اصم نباشد آن‌گاه گویاست:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = a - b \in \mathbb{Z} \\ q = b \in \mathbb{Z} \\ q = b \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{array} \right. \quad (a, b) = 1 : 1 + \sqrt{3} = \frac{a}{b} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b} - 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a-b}{b} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

پس خلاف حکم نادرست و حکم درست است. خلاف حکم، مستلزم اینست که $\sqrt{3}$ گویا باشد \rightarrow

۴- هر سال ۳۶۵ روز است. اگر دانش‌آموزان را به منزله‌ی کبوتر و روزهای سال را به منزله‌ی لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم $۸۰۰ > ۳۶۵$ طبق اصل لانه‌ی کبوتر اگر تعداد کبوترها از دو برابر لانه‌ها بیش‌تر باشد، حداقل یک لانه دارای ۳ کبوتر است.

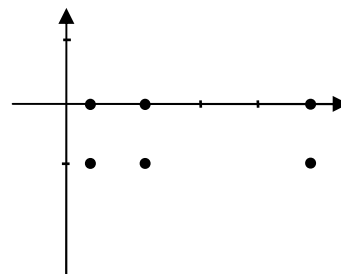
$$\begin{array}{r|l} ۸۰۰ & ۳۶۵ \\ \hline ۷۳۰ & ۲ \\ \hline ۷۰ & \end{array} \quad ۲+۱=۳ \quad \text{حداقل ۳ دانش‌آموز در یک روز سال متولد شده‌اند.}$$

$$v(2k) + 2k' + 1 = 14k + 2k' + 1 = 2(\underbrace{7k + k'}_q) + 1 = 2q + 1 \quad -5$$

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= (A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') = [(A \cup B) \cap B'] \cap C' \\ &= (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C \quad \text{طرف دوم} \end{aligned} \quad -6$$

$$-7$$

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1}{4}, 1, 4 \right\} \quad B = \{ -1, 0, 1 \} \\ A \times B &= \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \} \quad A^2 = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in A \} \\ A \times B &= \left\{ \left(\frac{1}{4}, -1 \right), \left(\frac{1}{4}, 0 \right), \left(\frac{1}{4}, 1 \right), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (4, -1), (4, 0), (4, 1) \right\} \\ A^2 &= \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{4}, 1 \right), \left(\frac{1}{4}, 4 \right), \left(1, \frac{1}{4} \right), (1, 1), (1, 4), \left(4, \frac{1}{4} \right), (4, 1), (4, 4) \right\} \\ A \times B - A^2 &= \left\{ \left(\frac{1}{4}, -1 \right), \left(\frac{1}{4}, 0 \right), (1, -1), (4, -1), (4, 0), (1, 0) \right\} \end{aligned}$$



-۸

$$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 - t^2 = z^2 - y^2 \quad \text{الف)}$$

$$(x, y)R(x, y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x^2 - y^2 \quad (1) \text{ بازتابی}$$

$$\begin{cases} (x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 - t^2 = z^2 - y^2 \\ (z, t)R(x, y) \Leftrightarrow z^2 - y^2 = x^2 - t^2 \end{cases} \quad (2) \text{ تقارنی}$$

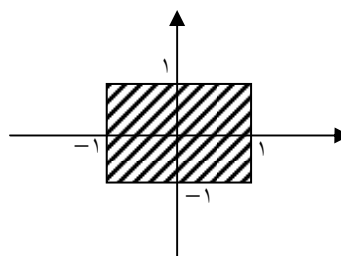
$$\begin{cases} (x, y)R(z, t) & , & (z, t)R(m, n) \Rightarrow (x, y)R(m, n) \\ x^2 - t^2 = z^2 - y^2 \\ z^2 - n^2 = m^2 - t^2 \end{cases} \quad \text{ترابری (3)} \quad x^2 - t^2 + z^2 - n^2 = z^2 - y^2 + m^2 - t^2 \text{ طرفین را جمع می کنیم}$$

از (1) و (2) و (3) نتیجه می گیریم R یک رابطه ی هم ارزی است.

$$b) [(-2, 3)] = \{(x, y) \mid (x, y)R(-2, 3)\} = \{(x, y) \mid x^2 - 3^2 = (-2)^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 13\}$$

-9

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$



-10

$$الف) S = \{(ج, 1), (ج, 2), (ج, 3), (ج, 4), (ج, 5), (ج, 6), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

$$ب) A = \{(ج, 1), (ج, 2), (ج, 3), (ج, 4), (ج, 5), (ج, 6), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ)\}$$

$$ج) B = \{(پ, ر, پ), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ)\}$$

$$د) B' = \{(ج, 1), (ج, 2), (ج, 3), (ج, 4), (ج, 5), (ج, 6), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ)\}$$

$$A \cap B' = \{(ج, 1), (ج, 2), (ج, 3), (ج, 4), (ج, 5), (ج, 6)\}$$

-11

$$n(s) = \binom{15}{3} \quad \text{الف) } P(A) = \frac{\binom{10}{3} \binom{5}{0}}{\binom{15}{3}} \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}$$

-12

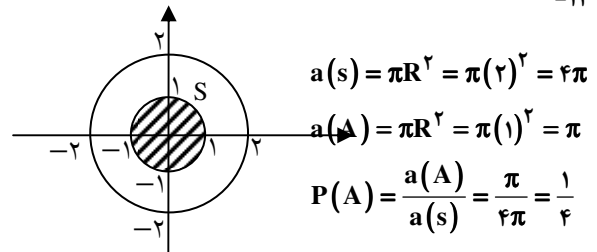
$$P(r) = P(f) = P(s) = W \quad P(1) = P(2) = P(5) = \Delta W$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Delta W + W + \Delta W + W + \Delta W + W = 1 \quad 18W = 1 \quad W = \frac{1}{18}$$

$$P(1) = P(2) = P(5) = \Delta \left(\frac{1}{18} \right) = \frac{\Delta}{18} \quad P(3) = P(4) = P(6) = \frac{1}{18}$$

-۱۳



$$P(A) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{10}{4}}$$

-۱۴

-۱۵

$$= (A \cap B') \cup (A \cap B) \quad A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad \text{می دانیم}$$

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

از طرفی دو پیشامد $A \cap B$ و $A \cap B'$ از هم جدا هستند. لذا داریم:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

-۱۶

$$P(A') = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad , \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{الف) } \frac{6}{8} = \frac{5}{8} + P(B) - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{11}{24}$$

$$\text{ب) } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \quad P(B - A) = \frac{11}{24} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{11-8}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$