

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴/۰۳/۲۴	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۴		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید: الف) اگر $A \subseteq \emptyset$ باشد، آنگاه مجموعه A برابر است. ب) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ باشد، آنگاه مجموعه A دارای تعداد افراز است.	۰/۵
۲	با استفاده از اصل استقرای ریاضی درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	۱/۵
۳	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود، عددی زوج بدست می آید.	۰/۷۵
۴	قضیه شرطی "اگر $x > 1$ آنگاه $ x > 1$ است." را در نظر بگیرید: الف) عکس قضیه شرطی را بنویسید. ب) آیا عکس آن نیز یک قضیه شرطی است؟ در صورت نادرستی، مثال نقض بیاورید.	۰/۷۵
۵	اگر a, b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید: $a^{2^r} + 1 \geq b(2 - b)$	۰/۷۵
۶	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $(x+y)$ گنگ است.	۱
۷	در یک کلاس ۳۰ نفر دانش آموز حضور دارند. حداقل چند نفر از دانش آموزان این کلاس در یک فصل از سال متولد شده اند؟ چرا؟	۰/۷۵
۸	اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid -n < k, 2^k < 2\}$ باشد، آنگاه: الف) مجموعه های A_1, A_2, \dots را با اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ را با اعضا مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، درستی رابطه زیر را ثابت کنید. $(A - B) \cup (A \cup B)' = B'$	۱/۲۵
۱۰	مجموعه های $A = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$ مفروضند: الف) مجموعه های A^2 و $A \times B$ و $(A \times B) - A^2$ را با اعضا مشخص کنید. ب) نمودار مجموعه $(A \times B) - A^2$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۱/۲۵
۱۱	رابطه R روی مجموعه R^2 به صورت زیر تعریف شده است: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + d = c^2 + b$ الف) نشان دهید رابطه R هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 0)]$ را مشخص کنید.	۱/۷۵
	ادامه سؤالات در صفحه دوم	

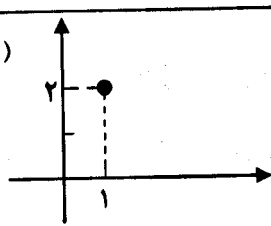
سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴/۰۳/۲۴	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۴		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.

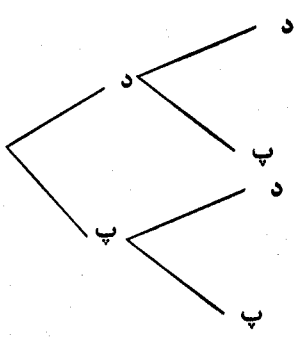
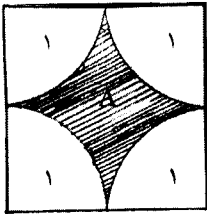
ردیف	سؤالات	نمره
۱۲	یک سکه سالم و یک تاس مخصوص داریم که به جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو را با هم می اندازیم، مطلوب است تعیین: (الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی. (ب) پیشامد A که در آن تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید. (ج) پیشامد B که در آن تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.	۱/۵
۱۳	با به کارگیری عبارت های مجموعه ای، فضای نمونه ای مرکب از تمام نقاط واقع بر محیط و داخل دایره ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ مختصات را مشخص کنید.	۰/۵
۱۴	یک کیسه محتوی ۵ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سبز است. دو مهره را به طور تصادفی از کیسه بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آن که فقط یک مهره قرمز باشد.	۱/۲۵
۱۵	نمودار درختی مربوط به حالات ممکن جنسیت فرزندان یک خانواده با دو فرزند را بنویسید. سپس جاهای خالی را با توجه به آن کامل کنید. (فرض می کنیم احتمال پسر بودن فرزند $\frac{1}{2}$ باشد). تعداد پسرها: ۰ ۱ ۲ تعداد حالات: <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> احتمال: <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$	۱/۵
۱۶	اگر فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی $S = \{1, 2, 3\}$ باشد و $P(1) = a^2$ و $P(3) = 2P(2) = a$ مقدار a و $P(2)$ را بدست آورید.	۱/۵
۱۷	یک نقطه به طور تصادفی درون مربعی به ضلع ۲ واحد انتخاب می شود، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس مربع بیشتر از ۱ واحد باشد.	۱/۲۵
۱۸	اگر $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(A') = \frac{1}{5}$ و $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ باشد، مطلوب است: (الف) $P(A \cup B)$ (ب) $P(A - B)$	۱/۵
	«موفق باشید»	جمع نمره
		۲۰

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴ / ۰۳ / ۲۴	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۴	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) $A = \emptyset$ (۰/۲۵) ص ۴۵ ب) ۵ افراز (۰/۲۵) ص ۶۸	۰/۵
۲	ص ۱۱ (۰/۲۵) درست است $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$: $n = 1$: آزمون استقراء (۰/۲۵) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$: $n = k$: فرض استقراء (۰/۲۵) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$: $n = k+1$: حکم استقراء به طرفین فرض استقراء $\frac{1}{2^{k+1}}$ را اضافه می نماییم. (۰/۲۵) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$ (۰/۲۵) $= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}$ (۰/۲۵) $= 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ (۰/۲۵) بنابراین حکم استقراء برقرار است.	۱/۵
۳	عددی زوج است (۰/۲۵) $2k' = 2(2k+2) = 4k+4 = 2(2k+1)+2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 2k+1$ عددی فرد ص ۱۹	۰/۷۵
۴	الف) عکس قضیه شرطی: اگر $ x > 1$ آنگاه $x > 1$ است. (۰/۲۵) ب) خیر (۰/۲۵)، ارائه مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۳	۰/۷۵
۵	(۰/۲۵) $a^2 + 1 \geq b(2-b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2b + b^2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 + (1-b)^2 \geq 0$ درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت پذیر می باشند در نتیجه حکم برقرار است. (۰/۲۵) ص ۲۳	۰/۷۵
۶	فرض خلف: فرض می کنیم $(x+y)$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. (۰/۲۵) $y = a - x$ یا $(y = a + (-x))$ گویا $x + y = a$ (۰/۲۵) می دانیم تفاضل (یا جمع) دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه y گویاست. (۰/۲۵) که این خلاف فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵) ص ۳۰	۱
۷	۳۰ دانش آموز: ۳۰ کبوتر ۴ فصل سال: ۴ لانه (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵)، $\frac{30}{28} \mid \frac{4}{7}$ حداقل $7+1=8$ دانش آموز در یک فصل از سال متولد شده اند. (۰/۲۵) ص ۳۳	۰/۷۵
	"ادامه راهنما در صفحه دوم"	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۴ / ۰۳ / ۲۴	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۴		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
۸	۵۶ ص	<p>الف) $A_1 = \{k \in \mathbb{Z} \mid -1 < k, 2^k < 2\} = \{0\}$ (۰/۲۵)</p> <p>$A_2 = \{k \in \mathbb{Z} \mid -2 < k, 2^k < 2\} = \{-1, 0\}$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $\bigcap_{i=1}^2 A_i = A_1 \cap A_2 = \{0\}$ (۰/۲۵)</p>	۰/۷۵
۹	۵۷ ص	<p>$(A - B) \cup (A \cup B)' = (A \cap B') \cup (A' \cap B') = (A \cup A') \cap B' = U \cap B' = B'$ (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
۱۰	۶۱ ص	<p>الف) $A^2 = A \times A = \{(1,1)\}$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) (۰/۲۵)</p> <p>$A \times B = \{(1,1), (1,2)\}$ (۰/۵)</p> <p>$(A \times B) - A^2 = \{(1,2)\}$ (۰/۲۵)</p> 	۱/۲۵
۱۱	۷۰ ص	<p>برقرار است $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a^2 + b = a^2 + b$ (۰/۲۵)</p> <p>تقارنی: $(a,b)R(c,d) \Rightarrow a^2 + d = c^2 + b \Rightarrow c^2 + b = a^2 + d \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ (۰/۲۵)</p> <p>تعدی: $\begin{cases} (a,b)R(c,d) \\ (c,d)R(e,f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + d = c^2 + b \\ c^2 + f = e^2 + d \end{cases} \Rightarrow a^2 + f = e^2 + b \Rightarrow (a,b)R(e,f)$ (۰/۲۵)</p> <p>با جمع طرفین تساوی در نتیجه یک رابطه هم ارزی است. (۰/۲۵)</p> <p>ب)</p> <p>$[(-1,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b)R(-1,0)\}$ (۰/۲۵) $a^2 + 0 = (-1)^2 + b$ (۰/۲۵)</p>	۱/۷۵
۱۲	۸۳ و ۹۲ ص	<p>الف) ۰/۷۵ (هر دو مورد صحیح ۰/۲۵)</p> <p>ب) ۰/۵ (هر دو مورد صحیح ۰/۲۵)</p> <p>ج) ۰/۲۵</p> <p>$S = \{(1,r), (1,p), (2,r), (2,p), (3,r), (3,p)\}$</p> <p>$A = \{(2,r), (2,p), (1,r), (3,r)\}$</p> <p>$B = \{(2,r)\}$</p>	۱/۵
۱۳	۸۳ ص	<p>نامساوی (۰/۲۵) و تساوی (۰/۲۵)</p> <p>$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ (۰/۵)</p>	۰/۵
ادامه راهنما در صفحه سوم			

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۴/۰۳/۲۴	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۴	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	ص ۸۷ $n(S) = \binom{12}{2} = 66 \quad (۰/۱۵)$ $n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{7}{1} = 35 \quad (۰/۲۵)$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} (۰/۲۵) = \frac{35}{66} \quad (۰/۲۵)$	۱/۲۵
۱۵	رسم نمودار درختی (۰/۱۵):  تعداد پسرها: ۲ تعداد حالات: ۴ احتمال: $\frac{1}{4}$ (هر مورد صحیح ۰/۲۵) ص ۹۴	۱/۵
۱۶	$p(1) + p(2) + p(3) = 1 \xrightarrow{(۰/۲۵)} a^2 + a/2 + a = 1$ $2a^2 + 3a - 2 = 0 \quad (۰/۲۵) \begin{cases} a = 1/2 \quad (۰/۲۵) \rightarrow p(2) = 1/4 \quad (۰/۲۵) \\ a = -2 \quad (۰/۲۵) \end{cases}$ غیر قابل قبول (طبق اصل احتمال) (۰/۲۵) ص ۱۰۰	۱/۵
۱۷	$a_S = \text{مساحت مربع} = 2 \times 2 = 4 \quad (۰/۲۵)$ $a_A = \text{مساحت دایره به شعاع ۱} = \pi \quad (۰/۲۵)$ $a_A = \text{مساحت دایره به شعاع ۱} - \text{مساحت مربع} = 4 - \pi \quad (۰/۲۵)$ $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 - \pi}{4} \quad (۰/۲۵)$  رسم شکل (۰/۲۵) ص ۱۰۹	۱/۲۵
۱۸	الف) $p(A') = \frac{1}{5} \quad p(A) = 1 - p(A') \quad (۰/۲۵) = 1 - 1/5 = 4/5 \quad (۰/۲۵)$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (۰/۲۵) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{13}{10} \quad (۰/۲۵)$ ب) $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \quad (۰/۲۵) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \quad (۰/۲۵)$ ص ۱۲۱	۱/۵
۲۰	جمع نمره «موفق باشید»	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.