حسابان — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری-شهریور ماه ۱۳۸۷

۱- اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-1}{2x+1} & x\neq -\dfrac{1}{2}\\ 1-k & x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ، k را طوری بیابید که به ازای هر x متعلق به دامنه $f(x)=g(x)$

۲- نمودار تابع $y=2\sqrt{x^2-6x+9}$ را رسم کرده ، زوج یا فرد و نه زوج و نه فرد بودن آن را بررسی کنید.

۳- دو تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ مفروضند ، در صورت وجود D_{fog} و ضابطه gof را معین کنید.

۴- a را چنان تعیین کنید که رابطه $\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{\beta+1}+\dfrac{1}{\alpha+1}$ میان ریشه‌های معادله $x^2-(a+2)x+a+1=0$ برقرار باشد.

۵- حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ($[\;]$ نماد جزء صحیح است)

الف) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{7}{x^2-9}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x]+|x|}{x+1}$

۶- با استفاده از قضیه فشردگی ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{Sin}\frac{1}{x-\frac{\pi}{6}}=0$$

۷- مقادیر a و b را طوری محاسبه کنید که تابع زیر در نقطه $x_0=0$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}[x+3]+a & x<0\\ |x-3|+\dfrac{b}{2} & x=0\\ \dfrac{\mathrm{Sin}^2 x}{x^2} & x>0\end{cases}$$

۸- معادلات مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2}}$ را در صورت وجود معین کنید.

۹- مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن عبارات الزامی نیست)

الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-x}$

ب) $h(x)=\mathrm{Cos}\,2x-3\tan^2(x+1)$

۱۰- اگر $f(x)=x^3-x$ و $y=f(\mathrm{Sin}\,2x)$ ، $y'(x)$ را بدست آورید.

۱۱- معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی $x^2-xy+y^2=1$ را در نقطه $(1,1)$ واقع بر آن ، بدست آورید.

۱۲- نشان دهید تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax-2}{x+a+2}$ برای تمام مقادیر a قبل و بعد از مجانب قائم خود صعودی است. سپس برای $a=1$ مرکز تقارن تابع را معین کنید.

۱۳- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-1|$ را در نقطه $x_0=1$ بررسی کنید.

۱۴- جدول تغییر و نمودار تابع $y=\dfrac{\mathrm{Cos}\,x}{2\mathrm{Cos}\,x-1}$ را در $[0,\pi]$ رسم کنید.

۱۵- با استفاده از آزمون مشتق دوم تعیین کنید تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در چه بازه تقعر رو به بالا و در چه بازه تقعر رو به پایین دارد؟

۱۶- نقطه‌ای روی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بیابید که از نقطه $(4,0)$ کمترین فاصله را داشته باشد.

۱۷- ابتدا نمودار تابع $f(x)=3+|x-2|$ را رسم کنید ، سپس $\int_0^3 f(x)\,dx$ را محاسبه نمایید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

-۱

$(D_f = D_g = R)$ به ازای $x \neq -\frac{1}{2}$ ، $f(x) = y(x)$ است ، زیرا : $g(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1} = 2x-1$

بنابراین کافی است که: $f(-\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2})$

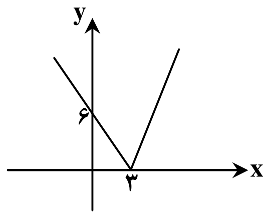
$$f(-\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}) \Rightarrow 2(-\frac{1}{2}) - 1 = 1 - k \Rightarrow k = 3$$

-۲

$$y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2|x-3| \qquad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, y = 0$$

$D_y = R \rightarrow$ دامنه متقارن است

x	y
2	2
3	0
4	2



تابع نه زوج و نه فرد است. چون با توجه به شکل تابع نسبت به مبدأ و نسبت به محور عرض‌ها تقارن ندارد.

-۳ ابتدا دامنه‌های f و g را تعیین می‌کنیم.

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow D_f = R - \{2\}, x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 | \sqrt{x-1} \neq 2\} = [1, 5) \cup (5, +\infty)$$

$$\sqrt{x-1} \neq 2 \Rightarrow x - 1 \neq 4 \Rightarrow x \neq 5 \qquad (gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{3}{x-2}}$$

-۴

$$S = -\frac{b}{a} = a + 2 \qquad P = \frac{c}{a} = a + 1$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{a+2+2}{a+1+a+2+1} = \frac{a+4}{2a+4} = \frac{5}{6} \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

-۵

الف) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x+3-7}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x-4}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0$

ج) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{0+x}{x+1} = 0, \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1-x}{x+1} = -1 \Rightarrow 0 \neq -1$ حد ندارد

-۶

$-1 \leq \mathrm{Sin}\frac{1}{x-\frac{\pi}{6}} \leq 1 \Rightarrow$ در $2x - \frac{\pi}{3}$ ضرب می‌کنیم $\Rightarrow -\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{Sin}\frac{1}{x-\frac{\pi}{6}} \leq 2x - \frac{\pi}{3}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} -(2x - \frac{\pi}{3}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} (2x - \frac{\pi}{3})\mathrm{Sin}\frac{1}{x - \frac{\pi}{6}} = 0$$

-۷ تابع f در $x = 0$ در صورتی پیوسته است که : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} [x+3] + a = 2 + a$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{Sin}^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x^2} = 1, f(0) = 3 + \frac{b}{2} \qquad 2 + a = 1 \Rightarrow a = -1, 3 + \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4$$

-۸

$x^2 + 2 > 0 \Rightarrow$ تابع مجانب قائم ندارد

مجانب‌های افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{|x|}=\pm1\Rightarrow y=+1, y=-1$

-۹

الف) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\times(x^2-x)-(2x-1)\sqrt{x+2}}{(x^2-x)^2}$

ب) $h'(x)=-2\operatorname{Sin}2x-6\tan(x+1)(1+\tan^2(x+1))$

-۱۰ با توجه به رابطه $(f(u))'=u'f'(u)$ داریم:

$$\left.\begin{matrix} y'=2\operatorname{Cos}2x\, f'(\operatorname{Sin}2x) \\ f'(x)=3x^2-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow y'=2\operatorname{Cos}2x(3\operatorname{Sin}^2 2x-1)$$

-۱۱

$$y'=\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x-y}{-x+2y}\Rightarrow x=1, y=1$$

شیب خط مماس $=-1\Rightarrow$ شیب خط قائم $=1$

معادله خط قائم $y-1=(x-1)$ معادله خط مماس $y-1=-(x-1)$

-۱۲

$$y'=\frac{a(x+a+2)-(ax-2)}{(x+a+2)^2}=\frac{a^2+2a+2}{(x+a+2)^2}=\frac{(a+1)^2+1}{(x+a+2)^2}>0$$ قبل و بعد از مجانب قائم خود صعودی‌اند

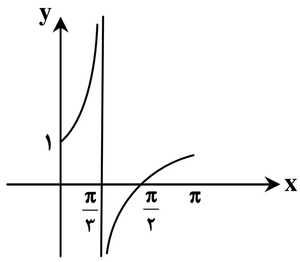
محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک ، مرکز تقارن است.

$$a=1\Rightarrow y=\frac{x-2}{x+3}\Rightarrow x+3=0\Rightarrow x=-3, y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+3}=1\Rightarrow w\left|\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.$$

-۱۳

$$1\neq-1\ \ f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x|x-1|}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=1\\[2mm] \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x(x-1)}{x-1}=-1\end{cases}$$ مشتق‌پذیر نیست

-۱۴ تابع‌های مثلثاتی مجانب افقی و مایل ندارند.



$2\operatorname{Cos}x-1=0\Rightarrow\operatorname{Cos}x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ مجانب قائم

$$y'=\frac{\operatorname{Sin}x}{(2\operatorname{Cos}x-1)^2}=0\Rightarrow\operatorname{Sin}x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=1\\ x=\pi\Rightarrow y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$y=0\Rightarrow\operatorname{Cos}x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	0		‖	+			0
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{3}$

-۱۵

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\qquad x\neq0$$

$$y''=\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\qquad x\neq0$$

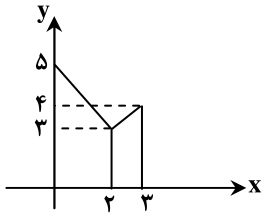
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	+	‖	−
y	∪		∩
جهت تقعر	رو به بالا	نقطه عطف	رو به پایین

آزمون مشتق دوم برای تقعر: در بازه‌ای که $y''<0$ است ، تقعر رو به پایین و در بازه‌ای که $y''>0$ است ، تقعر رو به بالا است.

۱۶- هرگاه بخواهیم کمترین و یا بیشترین مقدار یک کمیت را بدست آوریم ، ابتدا آن را بر حسب یک مجهول نوشته ، سپس مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$A\left|\begin{matrix} x \\ \sqrt{x} \end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix}\right. \Rightarrow d=\sqrt{(x-۴)^۲+(\sqrt{x})^۲}=\sqrt{x^۲-۷x+۱۶} \qquad d'=\frac{۲x-۷}{۲\sqrt{x^۲-۷x+۱۶}}=۰\Rightarrow x=\frac{۷}{۲}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{۷}{۲}}$$

۱۷-



$$\int_۰^۳ f(x)dx=\int_۰^۲ f(x)dx+\int_۲^۳ f(x)dx=\left[\frac{۳+۵}{۲}\times ۲\right]+\left[\frac{۳+۴}{۲}\times ۱\right]=۸+\frac{۷}{۲}=\frac{۲۳}{۲}$$