حسابان — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری-شهریور ماه ۱۳۸۶

۱- دامنه‌ی تابع روبه‌رو را تعیین کنید. $y=\dfrac{\sqrt{x-۱}}{۹-x^۲}$

۲- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x^۲-۱}$ مفروضند.

الف) دامنه‌ی توابع f و gof را تعیین کنید.   ب) ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۵x+۱=۰$ باشند، مقدار عددی عبارت $\dfrac{\beta^۲}{\alpha}+\dfrac{\alpha^۲}{\beta}$ را تعیین کنید.

۴- مقدار K را چنان بیابید که چند جمله‌ای $۵x^۲-۵x+K-۷$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر باشد.

۵- ابتدا یک‌به‌یک بودن تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<۰ \\ x^۲+۱ & x\geq ۰\end{cases}$ را بررسی کنید، سپس در صورت وجود، معکوس تابع f را تعیین کنید.

۶- حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x+\sqrt{x+۱}}{۵x-۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to۰}\dfrac{\sin x}{[x]+[-x]}$

ج) $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{x^۳-۲x+۱}{x^۴-۱}$ د) $\lim\limits_{x\to۰}\dfrac{\sqrt{۲+\tan x}-\sqrt{۲-\tan x}}{۳x}$

۷- با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to۰}|x|\sin x=۰$

۸- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^۲-۱}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۹- پیوستگی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x_۰=۰$ بررسی کنید.

۱۰- الف) مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست)

$g(x)=\operatorname{ArcCot}(۱-۲x)+(۲x-x^۳)^۴$ $f(x)=\sin\left(\dfrac{۱}{x}\right)+\sqrt[۳]{x^۲-۵x}$

ب) اگر $f(x)=۳\sin x-\cos x$ و $y=f(\sqrt{x})$ مطلوبست: محاسبه‌ی $\dfrac{dy}{dx}$

۱۱- در تابع $y=ax^۲+bx$، ضرایب a و b را چنان بیابید که رأس سهمی روی خط $x=۱$ واقع باشد و منحنی از نقطه‌ی $(-۲,۴)$ بگذرد.

۱۲- بادکنک کروی شکل را طوری باد می‌کنند که شعاع آن با آهنگ ۰/۰۳ سانتی‌متر در ثانیه افزایش می‌یابد. آهنگ تغییر حجم بادکنک را در لحظه‌ای که شعاع آن ۵ سانتی‌متر است تعیین کنید.

۱۳- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leq\dfrac{\pi}{۲}\\ ax-b & x>\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که این تابع در $x_۰=\dfrac{\pi}{۲}$ مشتق‌پذیر باشد.

۱۴- ضرایب a و b را چنان بیابید که مرکز تقارن توابع $y=x^۳-۳x^۲+a$ و $y=\dfrac{-۲x+۱}{x+b}$ بر هم منطبق باشد.

۱۵- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\sin-\sqrt{۳}\cos x$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

۱۶- معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی $x^۲y^۲=۲۵$ را در نقطه‌ی $A(-۱,۵)$ بنویسید.

۱۷- ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x|+[x]$ را رسم کنید. سپس مقدار $\int_{-۲}^{۱}f(x)dx$ را محاسبه کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۶

۱-

$$D_f:\ \begin{cases} x-1\geq 0 \\ 9-x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} D_f: \\ D_g: \end{matrix}\ \begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq 3 \quad x\neq -3 \end{cases} \rightarrow D=[1,+\infty)-\{3\} \qquad D: D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

۲-

$$D_f=[0,+\infty)\ ,\ D_g=R-\{1,-1\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\left\{x\in[0,+\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x}\in R-\{1,-1\}}_{\substack{\sqrt{x}\neq 1\\ x\neq 1}}\right\}=[0,+\infty)-\{1\}\Rightarrow gof(x)=\frac{1}{x-1}$$

۳-

$$\alpha+\beta=5 \quad , \quad \alpha\beta=1 \qquad\qquad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\rightarrow\frac{5^3-3(1)(5)}{1}=110$$

۴-

$f(x)=(x-2)Q(x)+R \xrightarrow[\ ]{\text{باقیمانده} \quad R=0}$ چون f بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است $\Rightarrow f(2)=0$

$$\Rightarrow x-2=0\rightarrow x=2 \ \rightarrow 5(2)^2-5(2)+k-7=0\rightarrow k=-3$$

۵-

$$y_1=x+1\rightarrow x=y_1-1\rightarrow x<0\rightarrow y_1-1<0\rightarrow y_1<1\Rightarrow R=(-\infty,1)$$

$$y_2=x^2+1\rightarrow |x|_{x\geq 0}=\sqrt{y_2-1}\rightarrow x=\sqrt{y_2-1}\rightarrow x=\sqrt{y_2-1}\rightarrow y_2-1\geq 0\rightarrow y_2\geq 1\rightarrow R_2=[1,+\infty)$$

و $R_1\cap R_2=\phi$ پس یک‌به‌یک است و معکوس آن:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1 & x<1 \\ \sqrt{x-1} & x\geq 1 \end{cases}$$

۶-

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x+1}}{5x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Sin}x}{[x]+[-x]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Sin}x}{-1}=\lim\limits_{x\to 0}(-\operatorname{Sin}x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0}[x]+[-x]=-1$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^4-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{1}{4}$

د) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2-\tan x}\right)}{3x}\times\dfrac{\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2-\tan x}}{\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2-\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+\tan x)-(2-\tan x)}{3x\left(\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2-\tan x}\right)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{3x\left(\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2-\tan x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2x}{3x\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2}{3\left(2\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

۷-

$$-1\leq\operatorname{Sin}x\leq 1\rightarrow -|x|\leq|x|\operatorname{Sin}x\leq|x|\rightarrow\lim_{x\to 0}|x|=\lim_{x\to 0}(-|x|)=0\rightarrow\lim_{x\to 0}|x|\operatorname{Sin}x=0$$

۸-

$$\left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x^2-1\neq 0 \end{matrix}\right\}\rightarrow D=[0,+\infty)-\{1\}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0\rightarrow y=0$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y=\pm\infty \to x=1$ مجانب قائم

-۹

$$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x\frac{\sqrt{-x}}{x}\right)=0$$

$$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\to$ پیوسته است $x_0=0$ در F

-۱۰ الف)

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{Cos}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{\left(x^2-5x\right)^2}}$$

$$g'(x)=\frac{-(-2)}{1+(1-2x)^2}+4\left(2-3x^2\right)\left(2x-x^3\right)^3$$

ب)

$$f'(x)=3\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Sin}\,x$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times f'\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3\mathrm{Cos}\sqrt{x}+\mathrm{Sin}\sqrt{x}\right) \qquad \begin{array}{l} y=f(u)\\ y'=u'.f'(u)\end{array}$$

-۱۱

$$x=-\frac{b}{2a}=1\to 2a+b=0$$

$(-2,4)\to$ تابع $\Rightarrow \begin{cases}2a+b=0\\ 2a-b=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\quad,\quad b=-1$

$$4=a(-2)^2+b(-2)\to 2a-b=2$$

-۱۲

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad V'_R=4\pi R^2 \qquad r=0/03t \qquad r'_t=0/03$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\times\frac{dR}{dt}=4\pi R^2\times 0/03=4\pi(5)^2\times 0/03=3\pi$$

-۱۳ اولاً: باید f در $x_0=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد.

$$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \frac{\pi}{2}a-b=0$$

ثانیاً: مشتق چپ و راست تابع f در $x_0=\frac{\pi}{2}$ باید مساوی باشند.

$$\begin{cases}f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\\ f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\end{cases}\to -1=a\to b=-\frac{\pi}{2}$$

-۱۴

$y'=3x^2-6x\to y''=6x-6=0\to x=1\xrightarrow{\text{تابع}} y=a-2\Rightarrow$ نقطه عطف یا مرکز تقارن $=(1,a-2)$

$\begin{cases}x\to\pm\infty\Rightarrow y=-2\\ y\to\pm\infty\Rightarrow x=-b\end{cases}\to$ مرکز تقارن $=(-b,-2)\Rightarrow\begin{cases}(1,a-2)=(-b,-2)\\ b=-1\,,\,a=0\end{cases}$

-۱۵

$y' = \mathrm{Cos}\,x + \sqrt{۳}\,\mathrm{Sin}\,x$

$y' = ۰ \to \mathrm{Cos}\,x + \sqrt{۳}\,\mathrm{Sin}\,x = ۰ \Rightarrow ۱ + \sqrt{۳}\tan x = ۰ \Rightarrow \tan x = -\dfrac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{۶}$

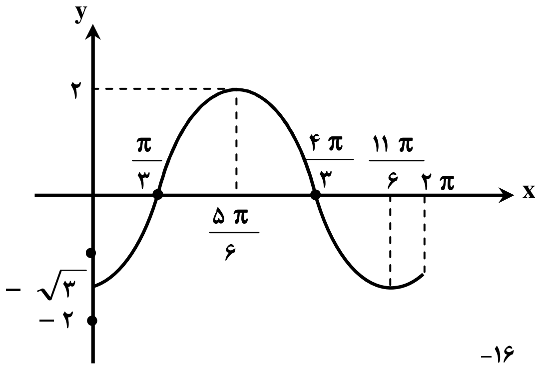
$x = k\pi + \alpha$

$x = k\pi - \dfrac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = \dfrac{۵\pi}{۶} \;,\; \dfrac{۱۱\pi}{۶} \\ y = ۲ \quad , \quad y = -۲ \end{cases}$

$x = ۰ \xrightarrow{\text{تابع}} y = -\sqrt{۳} \qquad x = ۲\pi \xrightarrow{\text{تابع}} y = -\sqrt{۳}$

$y = ۰ \to \begin{cases} \mathrm{Sin}\,x - \sqrt{۳}\,\mathrm{Cos}\,x = ۰ \\ x = k\pi + \dfrac{\pi}{۳} \to x = \dfrac{\pi}{۳} \;,\; \dfrac{۴\pi}{۳} \end{cases}$

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{۵\pi}{۶}$		$\frac{۴\pi}{۳}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
y′			+		۰		-		۰	+	
y	$-\sqrt{۳}$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	$-\sqrt{۳}$



-۱۶

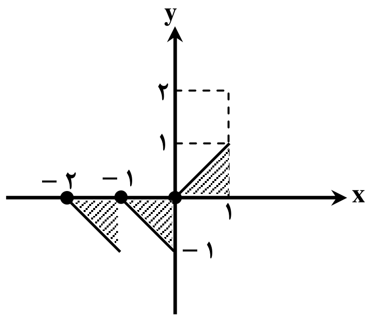
$۲xy^{۲} + ۲yy'x^{۲} = ۰ \to y' = \dfrac{y}{x}$ یا $y' = \dfrac{-۲xy^{۲}}{۲yx^{۲}} \Rightarrow y' = \dfrac{-y}{x}$

$(-۱,۵) \to m = \dfrac{-y}{x} = \dfrac{-۵}{-۱} = +۵ \Rightarrow m_{\text{مماس}} = ۵$ و $m_{\text{قائم}} = -\dfrac{۱}{۵}$

$y - ۵ = ۵(x+۱)$ معادله مماس و $y - ۵ = -\dfrac{۱}{۵}(x+۱)$ معادله قائم

-۱۷

$f(x) = \begin{cases} -x + [x] & x \le ۰ \\ x + [x] & x > ۰ \end{cases} \to \begin{cases} \vdots & \vdots \\ f(x) = -x - ۲ & -۲ \le x < -۱ \\ f(x) = -x - ۱ & -۱ \le x < ۰ \\ f(x) = x & ۰ \le x < ۱ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$



$\int_{-۲}^{۱} f(x)dx = -\dfrac{۱}{۲} - \dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{۲} = -\dfrac{۱}{۲}$