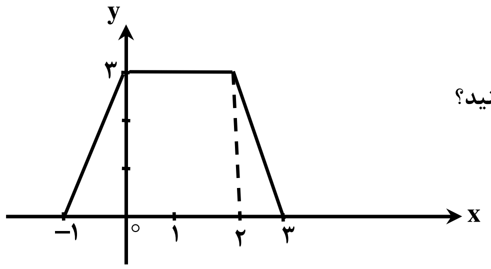
حسابان — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری-شهریور ماه ۱۳۸۵

۱- تساوی یا عدم تساوی توابع f و g با ضابطه‌ی $f(x)=\text{Sin}x$ و $g(x)=\sqrt{1-\text{Cos}^2x}$ را بررسی کنید؟

۲- نمودار تابع معین f در زیر داده شده است:

الف) دامنه و برد f را تعیین کنید؟

ب) نمودار تابع $f(x-2)+1$ را به کمک انتقال رسم نموده سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید؟



۳- توابع f و g با ضابطه‌ی $f(x)=3x+2$ و $g(x)=x^2+1$ مفروضند. مقدار x را چنان بیابید که داشته باشیم : $(fog)(x)=80$

۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x-6=0$ باشند ، مقدار عددی عبارت $(\alpha-\beta)^2$ را محاسبه کنید؟

۵- f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع معکوس تابع f می‌باشد. معکوس تابع $h(x)=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$ را محاسبه کنید ؟

۶- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=a[x]+[x+1]$ مفروض است . مقدار a را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجود باشد. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۷- حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)\text{Sin}\dfrac{1}{x-3}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\text{Cos}x}{1-\text{Sin}x}$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x$

۸- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ را در صورت وجود به دست آورید؟

۹- پیوستگی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\neq 1\\ 4 & x=1\end{cases}$ را در $x_0=1$ بررسی کنید؟

۱۰- مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x}}{x^3+x}$

ب) $y=\text{Sin}7x+\text{Cos}\sqrt{x}$

ج) $y=(\text{Arc cot } x)^3$

۱۱- تابع $y=x^2+bx+3$ مفروض است ، b را چنان بیابید که تابع ، مینیممی برابر ۲ داشته باشد؟

۱۲- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+1}{x-1}$ مفروض است. a را به قسمی تعیین کنید که فاصله‌ی مرکز تقارن تابع از مبداء مختصات مساوی $\sqrt{5}$ گردد.

سپس معادلات محورهای تقارن تابع را بنویسید؟

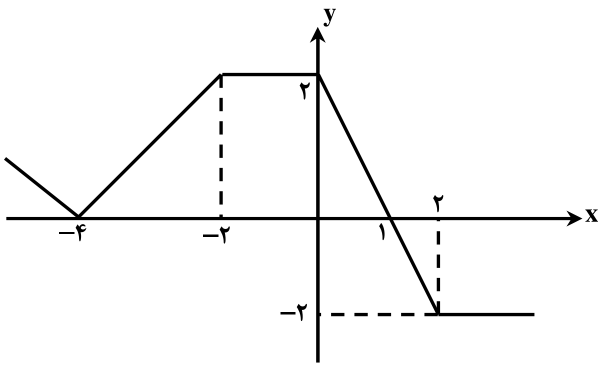
۱۳- مشتق پذیری تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-2)[x]$ را در نقطه‌ی $x_0=2$ بررسی کنید . ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱۴- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^3-3x^2$ را رسم نموده سپس مختصات نقطه‌ی عطف آن را تعیین کنید؟

۱۵- طول و عرض مستطیلی که محیط آن برابر ۸۰ متر بوده و دارای مساحت ماکزیمم باشدچقدر است؟

۱۶- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\sqrt{3}\text{Sin}x-\text{Cos}x$ را دربازه‌ی $[0\ ,\ 2\pi]$ رسم کنید . سپس مختصات نقاط بحرانی تابع را مشخص کنید؟

۱۷- نمودار تابع f در زیر داده شده است . مقدار $\int_{-4}^{2} f(x)dx$ را محاسبه کنید؟



پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۵

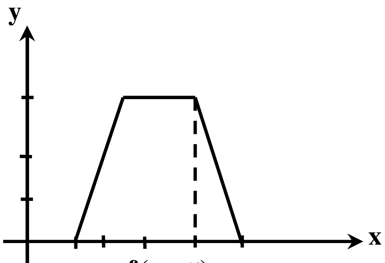
۱-

$D_f = D_g = R$

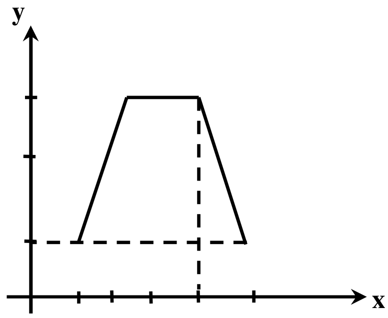
$g(x) = \sqrt{Sin^۲ x} = |Sinx| \neq Sinx = f(x) \qquad \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f \neq g$

۲-

$D_f = [-۱ , ۳] \quad R_f = [\circ , ۳]$



$f(x-۲)$



$f(x-۲)+۱$

$D = [۱ , ۵] \quad R = [۱ , ۴]$

۳-

$f(x) = ۳x + ۲ \qquad (fog)(x) = ۳(x^۲ + ۱) + ۲ = ۳x^۲ + ۵$

$g(x) = x^۲ + ۱ \qquad (fog)(x) = ۸۰ \to ۳x^۲ + ۵ = ۸۰ \to x^۲ = ۲۵ \to = \pm ۵$

۴-

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{۵}{۲} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-۶}{۲} = -۳ \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha - \beta)^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۴\alpha\beta = \dfrac{۷۳}{۴}$$

۵-

$h(x) = \dfrac{f(x)}{۱ - f(x)} = y \qquad h(x) = y \to x = h^{-۱}(y)$

$\dfrac{f(x)}{۱ - f(x)} = y \to f(x) = y - yf(x) \to yf(x) + f(x) = y \to (y+۱)f(x) = y \to f(x) = \dfrac{y}{۱+y} \to x = f^{-۱}(\dfrac{y}{۱+y})$

$(۱),(۲) \to h^{-۱}(y) = f^{-۱}(\dfrac{y}{۱+y}) \to h^{-۱}(x) = f^{-۱}(\dfrac{x}{۱+x})$

۶-

$\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^+} (a[x] + [x+۱]) = a + ۲$

$\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^-} (a[x] + [x+۱]) = ۱$

$\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) \to a + ۲ = ۱ \to a = -۱$

۷- الف)

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x-۱|}{x-۱} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{|x-۱|}{x-۱} = -۱ \\ \lim\limits_{x \to ۱^+} \dfrac{|x-۱|}{x-۱} = ۱ \end{cases} \to$$ حد وجود ندارد

ب)

این حد را با قضیه فشردگی حل می‌کنیم:

$$-1 \le \sin\frac{1}{x-3} \le 1 \longrightarrow -(x^2-9) \le (x^2-9)\sin\frac{1}{x-3} \le x^2-9$$

حد عبارت سمت راست در $x=3$ برابر صفر است. حد عبارت سمت چپ هم در $x=3$ برابر صفر است. بنابراین طبق قضیه فشردگی حد عبارت وسطی هم در $x=3$ برابر صفر است.

ج)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \overset{\sin x\neq 1}{1-\sin \ge 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 1-\sin x = 0^+}$$

د)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

-۸

$$D_f : x+1>0 \to x>-1 \to D_f=(-1\,,+\infty)$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \to y=0$ مجانب افقی $\qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \to x=-1$ مجانب قائم

-۹

شرط پیوستگی : $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 4f(1) = 4 \to$ f در $x=1$ پیوستگی دارد.

-۱۰ الف)

$$y' = \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}(x^3+x)-(3x^2+1)\sqrt[3]{2x}}{(x^3+x)^2}$$

ب)

$$y' = 7\cos 7x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$$

ج)

$$y' = 3(\operatorname{Arc}\cot x)^2 \times \frac{-1}{1+x^2}$$

-۱۱ روش اوّل :

$$y = x^2+bx+3$$

$$y_{min} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{12-b^2}{4} = 2 \to b=\pm 2$$

روش دوّم :

$$y' = 2x+b=0 \to x=\frac{-b}{2}$$

$$(-\frac{b}{2},2) \to 2=(-\frac{b}{2})^2+b(-\frac{b}{2})+3 \to b^2=4 \to b=\pm 2$$

-۱۲

$f(x)=\frac{ax+1}{x-1}$ محل تلاقی مجانبها = مرکز تقارن

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a \to y=a$ مجانب افقی

$\lim_{x\to\pm} f(x)=\infty \to x=1$ مجانب قائم

مرکز تقارن $W(1,a)$, $O(0,0)\Rightarrow OW=\sqrt{(1-0)^2+(a-0)^2}$

$\Rightarrow OW=\sqrt{1+a^2}=\sqrt{5}\to a^2=4\to a=\pm 2$

$a=2\to$ مرکز تقارن $w(1,2)$ معادلات محورهای تقارن $y-2=\pm(x-1)$

$a=-2\to$ مرکز تقارن $w(1,-2)$ معادلات محورهای تقارن $y+2=\pm(x-1)$

یا می‌توان با استفاده از فرمول‌ها ، معادلات محورهای تقارن را نوشت ، یعنی : $y=-x+\frac{a-d}{c}, y=x+\frac{a+d}{c}$

-۱۳

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)[x]-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}[x]=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}[x]=1\\ \lim_{x\to 2^+}[x]=2\end{cases}\to$$ مشتق پذیر نیست

-۱۴

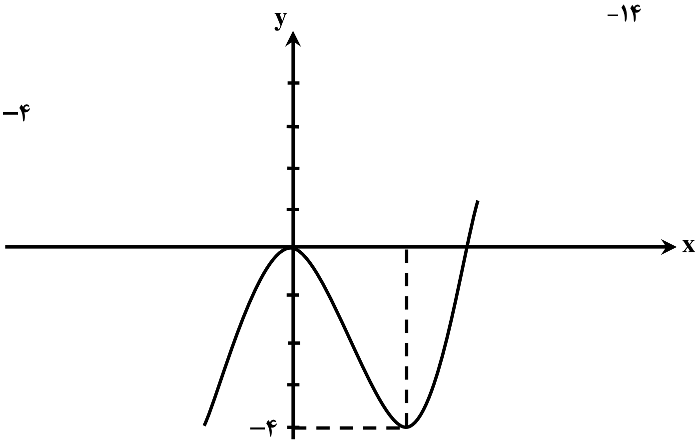
$y=x^3-3x^2$

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0\to x=0 , x=2\to y=0 , y=-4$

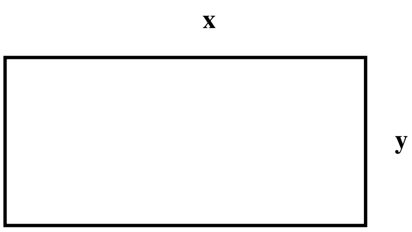
$y''=6x-6=0\to x=1 , y=-2\to(1,-2)$ نقطه عطف

$x=0\to y=0$, $y=0\to x^2(x-3)=0$ $x=0$ $x=3$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		+	0	−			0			+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	−2	↘	−4	↗	0	↗	$+\infty$



-۱۵



محیط $=2(x+y)=80\to x+y=40\to y=40-x$

مساحت $=S=xy=x(40-x)=40x-x^2$

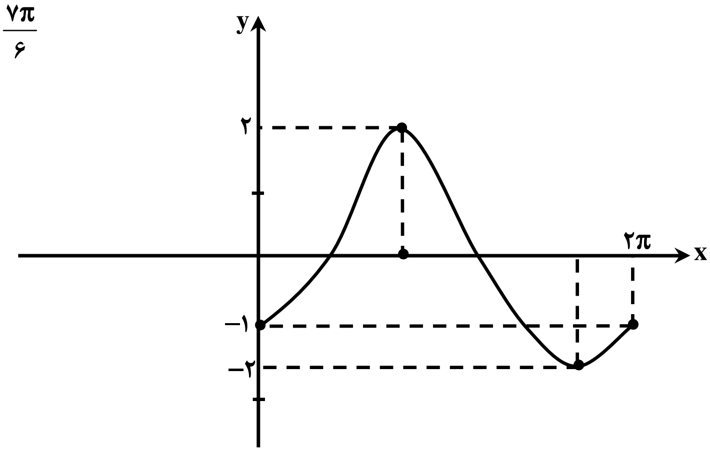
$S'=40-2x=0\to x=20$, $y=20$

-۱۶

$$y' = \sqrt{۳}\text{Cos}x + \text{Sin}x = ۰ \to \tan x = -\sqrt{۳} \to x = k\pi - \frac{\pi}{۳} \to x = \frac{۲\pi}{۳}, y = ۲, x = \frac{۵\pi}{۳}, y = -۲$$

$$x = ۰ \to y = -۱ \,,\; y = ۰ \to \tan x = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \to x = \frac{\pi}{۶}, x = \frac{۷\pi}{۶}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{۲\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۶}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
y′			+		۰		−		۰	+	
y	−۱	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	−۲	↗	−۱



نقاط بحرانی : $(۲\pi,-۱),(۰,-۱),(\frac{۲\pi}{۳},۲)\,,\,(\frac{۵\pi}{۳}\,,-۲)$

-۱۷

$$\int_{-۴}^{۲} f(x)dx = \int_{-۴}^{۱} f(x)dx + \int_{۱}^{۲} f(x)dx = \frac{(۲+۵)\times ۲}{۲} - \frac{۱\times ۲}{۲} = ۷ - ۱ = ۶$$