۱- دامنه تابع $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{[x]}$ را تعیین کنید.

۲- تابع g با ضابطه $g(x)=\sqrt{x-1}$ مفروض است:

الف) دامنه تابع gog را بدون تشکیل ضابطه آن بیابید. ب) ضابطه تابع gog را بنویسید.

۳- در معادله درجه دوم $4x^2-16x+m=0$ یکی از ریشه ها دو واحد بیشتر از ریشه دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه معادله را بیابید.

۴- f تابعی یک به یک است و f^{-1} معکوس f است. ضابطه تابع معکوس تابع $g(x)=1-2f(x+3)$ را بیابید.

۵- درستی رابطه مقابل را بررسی کنید.

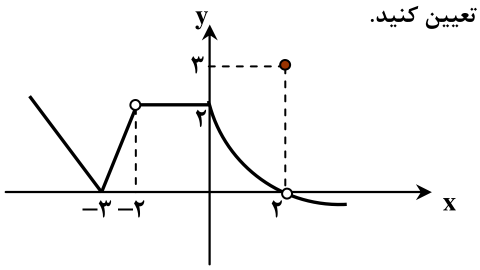
$$\frac{4\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{Sin}5\alpha+\operatorname{Sin}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{Sin}3\alpha}$$

۶- نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است ، حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$



۷- حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

الف) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{[x]+[-x]}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^2-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{Sin}2x}{\sqrt{1-\operatorname{Cos}2x}}$

د) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

۸- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x+1}$ را در صورت وجود بیابید.

۹- تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ مفروض است. $f(0)$ را چنان بیابید که تابع f در $x_0=0$ پیوسته باشد.

۱۰- مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $y=\tan^3(x^2)+\operatorname{Cos}(5x-\frac{\pi}{4})$

ب) $y=\dfrac{(2x+1)^5}{x\sqrt{x}}$

ج) $x^2+x^3y^4-y=2x-5$

۱۱- اگر $f'(x)=x^2$ باشد ، مشتق $y=f(\operatorname{Sin}x)$ را حساب کنید.

۱۲- تابع $y=\dfrac{ax+2}{x+(a-1)}$ مفروض است. در صورتی که نقطه $O'(-2,3)$ مرکز تقارن تابع باشد ، شیب خط مماس بر منحنی تابع را در نقطه تلاقی آن با محور عرض ها بیابید.

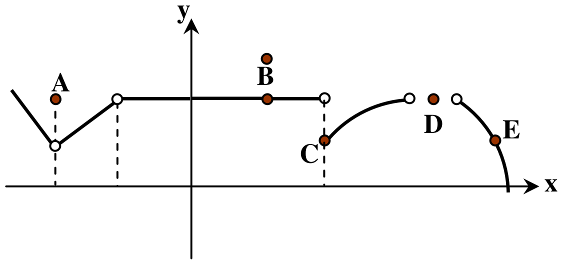
۱۳- مساحت یک کره به شعاع r از فرمول $S = ۴\pi r^۲$ به دست می آید. اگر شعاع کره با آهنگ آنی ۳ سانتی متر در ثانیه کاهش یابد ، آهنگ آنی تغییر مساحت کره را در لحظه ای که شعاع کره ۵ سانتی متر است ، بیابید.

۱۴- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ۸x & x \leq ۲ \\ ۲x^۲ + ۱ & x > ۲ \end{cases}$ مفروض است.

الف) $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ را بدست آورید.

ب) آیا تابع f در $x_۰ = ۲$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

۱۵- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است:



الف) کدام یک از نقاط مشخص شده در شکل ، نقطه بحرانی نیست؟

ب) کدام یک از نقاط مشخص شده ، ماکزیمم و می نیمم نسبی می باشد؟

۱۶- در تابع $y = ax^۳ + bx^۲$ ، ضرایب b,a را چنان بیابید که نقطه $I(۱,۲)$ نقطه عطف تابع باشد.

۱۷- جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \text{ArcCos}(\sqrt{x})$ را رسم کنید.

۱۸- ابتدا نمودار $y = x[x]$ را در بازه $(-۱,۲)$ رسم کنید. سپس مقدار $\int_{-۱}^{۲} y\,dx$ را بیابید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۷

-۱

$$\left.\begin{array}{ll}۱-x\ge ۰\Rightarrow ۱\ge x & (۱)\\ [x]\ne ۰\Rightarrow x\in R-[۰,۱) & (۲)\end{array}\right\}\Rightarrow (۱)\cap(۲)\Rightarrow D=(-\infty,۰)\cup\{۱\}$$

-۲

$$g(x)=\sqrt{x-۱}$$

الف) $D_g: x-۱\ge ۰\Rightarrow x\ge ۱\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

$$D_{gog}=\left\{x\in D_g \middle| g(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in[۱,+\infty)\middle| \underbrace{\underbrace{\sqrt{x-۱}\ge ۱}_{x-۱\ge ۱}}_{x\ge ۲}\right\}=[۲,+\infty)$$

ب) $gog(x)=g\left(g(x)\right)=\sqrt{\sqrt{x-۱}-۱}$

-۳

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱۶}{۴}=۴$$

$$\alpha\times\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{۴}$$

$$\begin{cases}\alpha=\beta+۲\\ \alpha+\beta=۴\\ \alpha\times\beta=\frac{m}{۴}\end{cases}\Rightarrow \beta+۲+\beta=۴\Rightarrow ۲\beta=۲\Rightarrow\begin{cases}\beta=۱\\ \alpha=۳\end{cases}\Rightarrow ۳\times ۱=\frac{m}{۴}\Rightarrow m=۱۲$$

-۴

$$y=g(x)\Leftrightarrow x=g^{-۱}(y)\qquad (۱)$$

$$y=۱-۲f(x+۳)\Rightarrow f(x+۳)=\frac{۱-y}{۲}\Rightarrow x+۳=f^{-۱}(\frac{۱-y}{۲})\Rightarrow x=f^{-۱}(\frac{۱-y}{۲})-۳\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow g^{-۱}(y)=f^{-۱}(\frac{۱-y}{۲})-۳\Rightarrow g^{-۱}(x)=f^{-۱}(\frac{۱-x}{۲})-۳$$

-۵

$$\operatorname{Sin}\alpha.\operatorname{Sin}\beta=-\frac{۱}{۲}[\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)-\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{Sin}\alpha+\operatorname{Sin}\beta=۲\operatorname{Sin}\frac{\beta+\alpha}{۲}\operatorname{Cos}\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

$$\frac{۴\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{۴}+\alpha)\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{۴}-\alpha)}{\operatorname{Sin}۵\alpha+\operatorname{Sin}\alpha}=\frac{۴\times(-\frac{۱}{۲})(\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۲}-\operatorname{Cos}۲\alpha)}{۲\operatorname{Sin}۳\alpha\operatorname{Cos}۲\alpha}=\frac{۲\operatorname{Cos}۲\alpha}{۲\operatorname{Sin}۳\alpha\operatorname{Cos}۲\alpha}=\frac{۱}{\operatorname{Sin}۳\alpha}$$

-۶

الف) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)=۲$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۰$ ج) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۲$

-۷

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۳}{[x]+[-x]}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۳}{-۱}=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x^۳-x-۱}{x^۲-x}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۲x^۲+۲x+۱)}{x(x-۱)}=۵$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\operatorname{Sin}۲x}{\sqrt{۱-\operatorname{Cos}۲x}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\operatorname{Sin}۲x}{\sqrt{۲}|\operatorname{Sin}x|}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۲\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}{-\sqrt{۲}\operatorname{Sin}x}=-\sqrt{۲}$ گویا شده $۱-\operatorname{Cos}۲x=۲\operatorname{Sin}^۲x$

د) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})=\infty-\infty$ مبهم $\Rightarrow$ گویا $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+2x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{\underbrace{|x|}_{-x}}+\underbrace{\sqrt{x^2}}_{\underbrace{|x|}_{-x}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-2x}=-1$

-۸

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x+1}\qquad D:x>0\ \ (1)\quad ,D:x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow R-\{-1\}\quad (2)\Rightarrow (1)\cap(2)\Rightarrow D=(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ مجانب افقی $y=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}=+\infty$ مجانب قائم $x=0$

-۹

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ شرط پیوستگی

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(x+8)-8=(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+8)-8}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{(x+8)}+4)}=\frac{1}{12}$$

-۱۰

الف) $y'=3\times 2x\times \mathrm{tam}^2(x^2)(1+\tan^2(x^2))+\left[-5\sin(5x-\frac{\pi}{4})\right]$

ب) $y'=\dfrac{5\times 2(2x+1)^4\, x\sqrt{x}-(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x})(2x+1)^5}{(x\sqrt{x})^2}$

ج) $x^2+x^3y^4-y-2x+5=0$

$2x+(3x^2y^4+4y^3y'x^3)-y'-2=0\Rightarrow y'=\dfrac{-(2x+3x^2y^4-2)}{4x^3y^3-1}$

-۱۱

$y'=\mathrm{Cos}\,x.f'(\mathrm{Sin}\,x)=\mathrm{Cos}\,x.\mathrm{Sin}^2x$

$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u),\ f'(u)=\mathrm{Sin}^2x$

-۱۲

طول نقطه تلاقی نمودار با محور عرض ها صفر است.

$$\begin{cases}x\to\pm\infty\Rightarrow y=\frac{a}{1}\Rightarrow y=a\\ y\to\pm\infty\Rightarrow x=1-a\Rightarrow x+a-1=0\end{cases}\Rightarrow a=3\Rightarrow y=\frac{3x+2}{x+2}$$

$$y'=\frac{4}{(x+2)^2}\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y'=\frac{4}{(0+2)^2}\\ m=1\ \text{شیب مماس}\end{cases}$$

-۱۳

$r=5,S=4\pi r^2\Rightarrow \dfrac{ds}{dr}=8\pi r$

$\dfrac{dr}{dt}=-3\Rightarrow \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{ds}{dr}\times\dfrac{dr}{dt}=8\pi\times 5\times(-3)=-120\pi$

-۱۴

الف) $f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2+1-16}{x-2}=\dfrac{5-16}{0^+}=\dfrac{-11}{0^+}=-\infty$

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{8x-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{8(x-2)}{x-2}=8$

$$f(2)=8\times 2=16$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2(2)^2+1=9 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$$

تابع در $x_0=2$ پیوستگی راست ندارد ، بنابراین $f'_+(2)$ وجود ندارد.

ب) خیر ، چون مشتق چپ و راست مساوی نیست. یا چون f در $x=2$ پیوسته نیست.

-۱۵

الف) نقطه E بحرانی نیست

ب) نقاط ماکزیمم نسبی $\to A, B$ نقاط می نیمم نسبی $\to B, C$

-۱۶

تابع $\to (1,2)$

$$y=ax^3+bx^2 \Rightarrow 2=a(1)^3+b(1)^2 \Rightarrow a+b=2$$

$$y'=3ax^2+2bx \Rightarrow y''=6ax+2b \Rightarrow \begin{cases} y''=0\ ,x=1 \\ 6a(1)+2b=0 \Rightarrow 3a+b=0 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a=-2 \\ a=-1, b=3 \end{matrix}$$

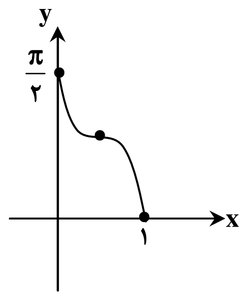
-۱۷

$$-1\le \sqrt{x}\le 1 \Rightarrow D=[0,1]$$

$$y'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}<0$$ همواره منفی است

نقاط بحرانی $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{\pi}{2} \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow y'=-\infty$ در این نقاط ، مماس موازی محور عرض هاست

کمکی $\left| \begin{matrix} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{\pi}{3} \end{matrix} \right.$ کمکی $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

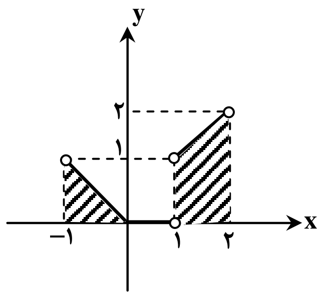


x	۰		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		۱
y'	‖		−				‖
y	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{3}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↘	۰

-۱۸

$$\left.\begin{matrix} -1<x<0 \to y=-x \\ 0\le x<1 \to y=0 \\ 1\le x<2 \to y=x \end{matrix}\right\}$$

$$\int_{-1}^{2} y\,dx=\frac{1\times 1}{2}+\frac{1\times(1+2)}{2}=2$$



x	-۱	۰	۱	۲
y	۱	۰	۱	۲