حسابان — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۴

۱- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\frac{1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ مفروض هستند:

الف) دامنه‌ی f و g و gof را تعیین کنید. ب) ضابطه‌ی تابع gof را در صورت وجود به‌دست آورید.

۲- ابتدا نمودار f با ضابطه‌ی $f(x)=|\operatorname{Sin} x|$ و $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ را رسم کنید. سپس با توجه به نمودار تابع f، زوج یا فرد بودن f را بررسی کنید.

۳- نشان دهید که تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ یک‌به‌یک است، سپس ضابطه‌ی تابع معکوس آن‌را بنویسید.

۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2x-5=0$ باشند، مقدار عددی $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ را محاسبه کنید.

۵- عبارت روبه‌رو را به حاصل جمع تبدیل کنید: $A=\operatorname{Sin}2x\operatorname{Sin}3x$

۶- تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ مفروض است. حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$

۷- حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید. ([ ] نماد جزءصحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}ax-\operatorname{Sin}bx}{ax-bx}$ ج) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{[x]-2}{x-2}$ د) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x+1}}$

۸- معادلات مجانب‌های قائم و افقی تابع $y=\frac{2x+1}{1-x}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

۹- پیوستگی تابع $f(x)=x[x]$ را در بازه‌ی $[1,2)$ بررسی کنید. ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱۰- مشتق تابع زیر را حساب کنید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y=\frac{\sqrt{2x}}{x^2+1}$ ب) $y=\operatorname{Sin}^3x+\sqrt[5]{\operatorname{Cos}x}$ ج) $y=5x\left(x^2-x+1\right)^3$

۱۱- منحنی تابع $y=x^2+x-1$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع را در نقطه‌ی A بنویسید.

۱۲- اگر شعاع دایره‌ای با آهنگ آنی ۳ سانتی‌متر بر ثانیه بزرگ شود در لحظه‌ای که مساحت دایره برابر 4π باشد، آهنگ آنی تغییر مساحت آن چقدر است؟

۱۳- فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}ax-b & ; & x<2\\ x^2-2 & ; & x\ge 2\end{cases}$، مطلوب است محاسبه‌ی مقادیر a و b به‌طوری که f همواره مشتق‌پذیر باشد.

۱۴- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^3-3x$ را رسم کنید. سپس مختصات نقطه‌ی عطف و نقاط بحرانی تابع را تعیین کنید.

۱۵- جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\operatorname{ArcSin}\frac{1}{x}$ را رسم کنید.

۱۶- اگر $xy^3+3xy^2-4x^2=0$، ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه نموده، سپس $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه‌ی $(1,1)$ به‌دست آورید.

۱۷- ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-2|-1$ را رسم کنید. سپس $\int_{-1}^{3}f(x)dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۴

۱- الف)

$$D_f = R - \{1\} \quad , \quad D_g = [-2, +\infty)$$

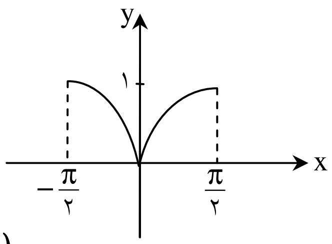
$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in R - \{1\} \;\middle|\; \frac{1}{x-1} \geq -2\right\} \Rightarrow D_{gof} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$$

ب)

$$gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 2} = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

۲- چون محور عرض‌ها محور تقارن شکل است، تابع زوج است.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y	1	0	1



۳-

$$D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \quad , \quad R_f = [0, +\infty)$$

پس تابع یک‌به‌یک است و بنابراین معکوس‌پذیر است.

$$\sqrt{2x_1 - 1} = \sqrt{2x_2 - 1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \sqrt{2x-1} \Rightarrow y^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2} \quad , \quad x \geq 0$$

۴-

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -2 \quad , \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha\beta\left[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\right] = -5\left[(-2)^2 - 2(-5)\right] = -70$$

۵-

$$A = \operatorname{Sin} 2x \operatorname{Sin} 3x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Cos}(2x - 3x) - \operatorname{Cos}(2x + 3x)\right] = -\frac{1}{2}\operatorname{Cos} 5x + \frac{1}{2}\operatorname{Cos} x$$

۶-

$$D_f = [-1, 1]$$

الف) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ با توجه به دامنه‌ی f وجود ندارد یا معنی ندارد

ب) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0$

۷- الف)

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2}$$

ب)

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{Sin}\frac{ax-bx}{2}\operatorname{Cos}\frac{ax+bx}{2}}{ax - bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sin}\frac{ax-bx}{2}}{\frac{ax-bx}{2}} \times \operatorname{Cos}\left(\frac{ax+bx}{2}\right) = 1$$

ج)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{[x] - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2-2}{0^+} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی}} = 0$$

د)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2\left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{|2x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

۸- $\lim\limits_{x \to 1} y = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \Rightarrow y = -2$ مجانب افقی

۹- ابتدا باید f در $x = 1$ پیوستگی از راست داشته باشد یعنی:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = 1$$

سپس f در $(۱,۲)$ پیوستگی کامل داشته باشد: $f(\alpha)=\alpha[\alpha]=\alpha\times ۱=\alpha \quad , \quad \alpha\in(۱,۲)$

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\alpha\left[\alpha^+\right]=\alpha\times ۱=\alpha$$

چون $f(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ پس f در هر $\alpha\in(۱,۲)$ پیوسته است. پس f در $\alpha\in[۱,۲)$ پیوسته است.

۱۰- الف) $y'=\dfrac{\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\left(x^۲+۱\right)-۲x\sqrt{۲x}}{\left(x^۲+۱\right)^۲}$ ب) $y'=۳\mathrm{Sin}^۲x\mathrm{Cos}\,x+\dfrac{-\mathrm{Sin}\,x}{۵\sqrt[۵]{\mathrm{Cos}^۴x}}$

ج) $y'=۵\left(x^۲-x+۱\right)^۳+۳\left(x^۲-x+۱\right)^۲(۲x-۱)۵x$

۱۱- $x=\circ\Rightarrow y=-۱\Rightarrow A(\circ,۱)$

$y'=۲x+۱\Rightarrow m=۱\Rightarrow m'=-۱\Rightarrow y-۱=-۱(x-\circ)\Rightarrow y=-x+۱$

۱۲- $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{ds}{dr}\times\dfrac{dr}{dt}=۲\pi r\times ۳=۱۲\pi \qquad S=\pi r^۲ \underset{S=۴\pi}{\Rightarrow} r=۲$

۱۳- برای این‌که f روی R مشتق‌پذیر باشد، باید در $x=۲$ نیز مشتق‌پذیر باشد. ضمناً اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز هست.

الف) $f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)\Rightarrow ۲a-b=۲$

ب) $f'_-(۲)=f'_+(۲)\Rightarrow a=۴ \quad , \quad b=۶$

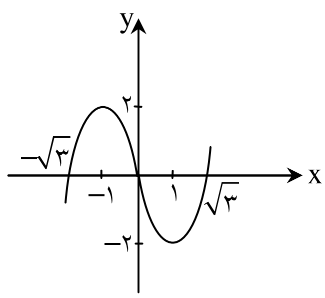
۱۴- $y'=۳x^۲-۳=\circ\Rightarrow \begin{array}{l} x=۱\Rightarrow y=-۲ \\ x=-۱\Rightarrow y=۲ \end{array}$

نقاط بحرانی $(۱,-۲)$ ، $(-۱,۲)$

$y=\circ\Rightarrow\begin{cases} x=\circ \\ x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'		+		+	۰		−		۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	۰	↗	$+\infty$

$y''=۶x=\circ\Rightarrow x=\circ \quad , \quad y=\circ\to(\circ,\circ)$ نقطه‌عطف



۱۵-

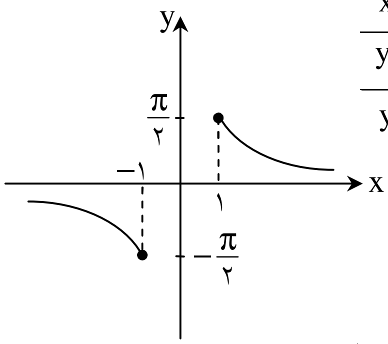
$-۱\le \frac{۱}{x}\le ۱ \Rightarrow D=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

$x\to \pm\infty \Rightarrow y=۰$

$y'=\dfrac{-\frac{۱}{x^{۲}}}{\sqrt{۱-\frac{۱}{x^{۲}}}}<۰$

$x=-۱\Rightarrow y=\frac{-\pi}{۲}$

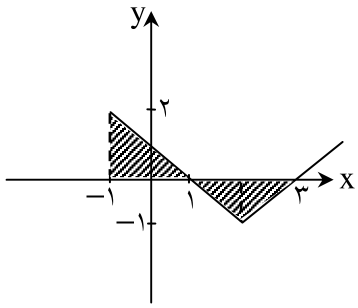
$x=۱\Rightarrow y=\frac{\pi}{۲}$



x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		-	۰			-	
y	۰	↘	$-\frac{\pi}{۲}$		$\frac{\pi}{۲}$	↘	۰

۱۶- $y^{۳}+۳y^{۲}xy'+۳y^{۲}+۶xyy'-۸x=۰\Rightarrow y'=\dfrac{۸x-۳y^{۲}-y^{۳}}{۳y^{۲}x+۶xy}\xrightarrow{x=y=۱}=\frac{۴}{۹}$

۱۷- $x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=-۱$



$|x-۲|-۱=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۳\\ x=۱\end{cases}$

$x=-۱\Rightarrow y=۲$

$\int_{-۱}^{۳} y\,dx=\frac{۲\times ۲}{۲}-\frac{۱\times ۲}{۲}=۱$