هندسه (۲) — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

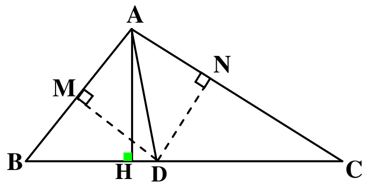
۱- الف) برای حدس کلی «ارتفاع های هر مثلث داخل مثلث واقع است.» مثال نقض ارائه دهید:

ب) قضیه فیثاغورس را به صورت قضیه دوشرطی بنویسید.

۲- قضیه: ثابت کنید که نیمساز یک زاویه ، مکان هندسی نقطه ای در صفحه آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

۳- در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می دهیم.

الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده این مثلث ها نسبت $\frac{S}{S'}$ را بدست آورید.



ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطه ای با هم دارند؟

پ) با درنظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده مثلث های ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

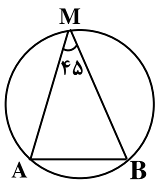
ت) از مقایسه نسبت ها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه ای می گیرید؟

۴- ثابت کنید در هر مثلث ، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچک تر است.

۵- مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد.

۶- قضیه: ثابت کنید طول مماس های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.

۷- دایره $C(O,R)$ مفروض است. وتر AB به طول $\sqrt{۲}$ سانتی متر داده شده است.

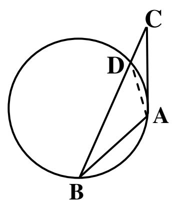


با توجه به شکل اگر $A\hat{M}B = ۴۵^\circ$ مطلوب است محاسبه:

الف) شعاع دایره

ب) فاصله مرکز دایره از وتر AB

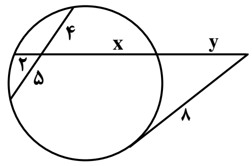
۸- در دایره $C(O,R)$ مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی اند.



خط BC دایره را در نقطه D قطع کرده است.

ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است.

۹- با توجه به شکل مقدار x,y را بیابید.



۱۰- شعاع های دو دایره ۳ و ۵ سانتی متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی آنها ۶ سانتی متر باشد فاصله بین مرکزهای دو دایره را بیابید.

۱۱- مفاهیم مقابل را تعریف کنید: الف) زاویه ظلی ب) ایزومتری

۱۲- نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۰,۱)$ و $C(۱,۰)$ و $D(۲,۱)$ رئوس یک مربعند:

الف) مربع $ABCD$ و تصویر مجانس آن را با درنظر گرفتن $O(۰,۰)$ به عنوان مرکز تجانس و عدد ۲ به عنوان عامل مقیاس را رسم کنید.

ب) نوع تجانس را مشخص کنید.

ج) نسبت مساحت مربع $A'B'C'D'$ را به مساحت مربع $ABCD$ مشخص کنید.

د) نسبت محیط مربع $A'B'C'D'$ را به محیط مربع $ABCD$ بنویسید. ($A'B'C'D'$ تصویر مربع $ABCD$ است)

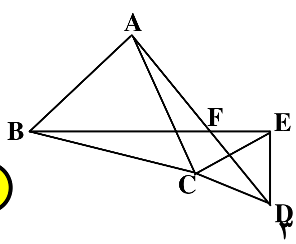
۱۳- الف) مختصات نقطه ای را به دست آورید که تصویر آن تحت تبدیل $T(x,y) = (-x+۳,۲y)$ نقطه $(-۴,۱)$ باشد.

ب) معادله تصویر $۳x - ۲y = ۶$ را تحت تبدیل $T(x,y) = (-y,-x)$ را به دست آورید.

۱۴- مثلث ABC و مثلث ECD متساوی الاضلاع هستند.

با استفاده از ویژگی های تبدیلات ثابت کنید :

$AD = BE$, $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$



۱۵- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

الف) زاویه مرکزی در هر دایره برابر نصف کمان روبروی آن است.   ب) انتقال الزاماً شیب را حفظ نمی کند.

ج) اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند ، آن گاه در یک خط ، مشترک خواهند بود.

د) از نقطه O خارج صفحه P فقط یک خط می گذرد که با صفحه P موازی است.

۱۶- الف) قضیه: ثابت کنید اگر خط L با یکی از خط های صفحه P موازی باشد ، آن گاه خط L با صفحه P موازی است. (با رسم شکل)

ب) ثابت کنید اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد آن گاه با فصل مشترک آنها موازی است.

۱۷- ثابت کنید اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی ، عمود باشد ، بر دیگری هم عمود است. (با رسم شکل)

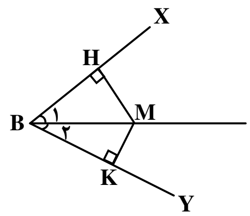
۱۸- اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند ثابت کنید هر خط بر عمود صفحه P با صفحه P' موازی است. (با رسم شکل)

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

۱- الف) کافی است مثلثی رسم کنیم که یک زاویه منفرجه داشته باشد.

ب) مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد.

۲- براساس تعریف مکان هندسی ، اثبات دو مرحله دارد:

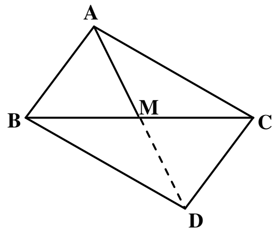


مرحله اول: نقطه M روی نیمساز زاویه $X\hat{B}Y$ درنظر می گیریم و از M خطوطی بر اضلاع BX و BY عمود می کنیم. تا آنها را به ترتیب در H و K قطع کند بنابراین $B\overset{\Delta}{M}H \cong B\overset{\Delta}{M}K$ (ز ض ز) پس $MH = MK$

مرحله دوم: اگر نقطه M از دو ضلع BX و BY به فاصله یکسانی باشد ، چون $B\overset{\Delta}{M}H \cong B\overset{\Delta}{M}K$ (وتر و یک ضلع) پس $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$ یعنی خطی که از B و M می گذرد نیمساز زاویه است.

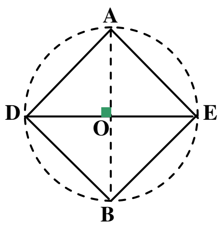
۳- الف) $\frac{S}{S'} = \frac{\frac{۱}{۲}DB \times AH}{\frac{۱}{۲}DC \times AH} = \frac{BD}{DC}$ ب) $DM = DN$ پ) $\frac{S}{S'} = \frac{\frac{۱}{۲}AB \times DM}{\frac{۱}{۲}AC \times DN} = \frac{AB}{AC}$

ت) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$



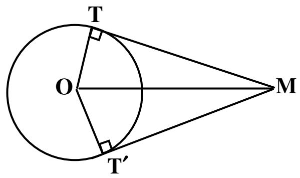
۴- در مثلث ABC میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه D برسیم از D به C و B وصل می کنیم. در این چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع خواهد بود. زیرا اقطارش منصف یکدیگرند.

$$A\overset{\Delta}{D}C : AD < AC + DC \xrightarrow{AB=DC} ۲AM < AC + AB \Rightarrow AM < \frac{AC + AB}{۲}$$



۵- ابتدا عمودمنصف پاره خط DE را رسم می کنیم. سپس به مرکز O (وسط DE) و به شعاع DO یک دایره رسم می کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف را A و B می نامیم. چهار ضلعی $ADBE$ مربع مورد نظر است.

۶- از نقطه M مماس های MT و MT' را بر دایره رسم می کنیم. اگر از مرکز O به نقاط T و T' وصل کنیم چون شعاع های دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است نتیجه می گیریم $\hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ$ داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰ \\ OT = OT' \\ OM = OM \end{cases} \text{وتر و یک ضلع } O\overset{\Delta}{M}T \cong O\overset{\Delta}{M}T' \Rightarrow MT = MT'$$

۷-

الف) $R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{۲}}{۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$ ب) $OH = \frac{a}{۲|\tan\alpha|} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۲}}{۲ \times ۱} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸-

$$\begin{cases} AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{B}_{\text{محاطی}} = D\hat{A}C_{\text{ظلی}} = \frac{AD}{۲} \end{cases} \Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow DC = DA$$

۹-

$$۲ \times x = ۴ \times ۵ = ۲۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

$$y(y + ۱۰ + ۲) = ۸^۲ \Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۶۴ = ۰ \Rightarrow (y + ۱۶)(y - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۴ \\ y = -۱۶ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

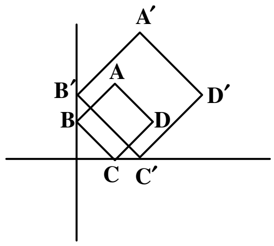
۱۰-

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} \qquad ۶ = \sqrt{d^۲ - (۵ + ۳)^۲} \Rightarrow ۳۶ = d^۲ - ۶۴ \Rightarrow d^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow d = ۱۰$$

۱۱- الف) زاویه ای که رأسش روی دایره است و یک ضلعش دایره را قطع می کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است ، زاویه ظلی نامیده می شود.

ب) تبدیلی که فاصله بین نقطه ها را حفظ کند ایزومتری نامیده می شود.

۱۲- الف)



$D(x,y)=(۲x,۲y)$

$$\begin{cases} A(۱,۲)\rightarrow A'(۲,۴) \\ B(۰,۱)\rightarrow B'(۰,۲) \\ C(۱,۰)\rightarrow C'(۲,۰) \\ D(۲,۱)\rightarrow D'(۴,۲) \end{cases}$$

ب) نوع تجانس انبساطی است. زیرا نسبت تجانس بزرگ تر از یک است.

ج) $\dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=K^۲=۲^۲=۴$ د) $\dfrac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}}=K=۲$

۱۳- الف)

$$T(x,y)=(-x+۳,۲y)=(-۴,۱)\Rightarrow\begin{cases}-x+۳=-۴\Rightarrow x=۷ \\ ۲y=۱\Rightarrow y=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow(۷,\dfrac{۱}{۲})$$

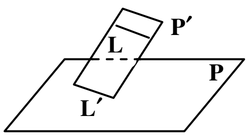
$$\Rightarrow\begin{array}{l}T(۰,-۳)=(۳,۰)\\ A(۰,-۳)\rightarrow A'(۳,۰)\\ T(۲,۰)=(۰,-۲)\\ B(۲,۰)\rightarrow B'(۰,-۲)\end{array}\quad\Rightarrow y-\dfrac{۲}{۳}x-۲\qquad \begin{array}{l} m_{A'B'}=\dfrac{۰-(-۲)}{۳-۰}=\dfrac{۲}{۳} \\ y-۰=\dfrac{۲}{۳}(x-۳)\end{array}$$

ب) دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۲,۰)$ را روی خط $۳x-۲y=۶$ درنظر گرفته و تبدیل آنها را تحت تبدیل $T(x,y)=T(-y,-x)$ بدست می آوریم.

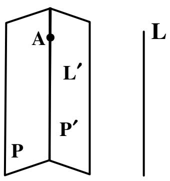
۱۴- تحت یک دوران ۶۰° حول نقطه C مثلث ACD روی مثلث BCE تصویر می شود. بنابراین $AB\rightarrow BE$ و AD ضلع BE را با زاویه ۶۰° قطع می کند. چون طول تحت دوران حفظ می شود پس $AD=DE$ و هم چنین $A\hat{F}B=۶۰^\circ$

۱۵- الف) نادرست   ب) نادرست   ج) درست   د) نادرست

۱۶- الف) اگر خط L در صفحه P باشد حکم قضیه برقرار است.



در غیر این صورت صفحه ای که از دو خط موازی L' ، L می گذرد را P' درنظر می گیریم. اگر خط L صفحه P را قطع کند محل تقاطع روی فصل مشترک این دو صفحه است. یعنی دو خط L' و L متقاطعند که خلاف فرض است.

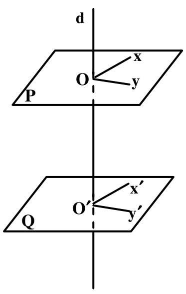


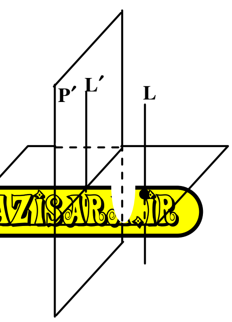
ب) فرض کنید خط L موازی دو صفحه متقاطع P' و P باشد. از یک نقطه فصل مشترک مانند A خط L' را موازی L رسم می کنیم. چون خط L با صفحه P موازی است خط L' به تمامی در صفحه P قرار دارد. با استدلال مشابه خط L' به تمامی در صفحه P' قرار دارد پس L' همان فصل مشترک دو صفحه P' و P است که با خط L موازی است.

۱۷- فرض کنیم خط d بر صفحه P عمود است و $P||Q$ دو خط متقاطع ox,oy را در صفحه P در نظر می گیریم. بنابراین $d\perp ox$ و $d\perp oy$.

دو خط $o'x'$ و $o'y'$ را موازی ox و oy در صفحه Q رسم می کنیم.

بنابراین $d\perp o'x'$ و $d\perp o'y'$. پس $d\perp Q$





۱۸- دو صفحه P,P' بر هم عمودند. پس صفحه P' شامل خط L' است که بر P عمود است. بنابراین $L'||L$. پس خط L موازی صفحه P است.