هندسه (۲)　　سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۶

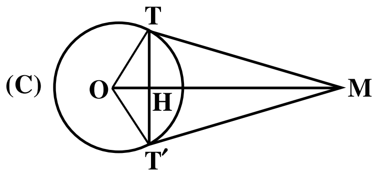
۱- واژه‌های زیر را تعریف کنید:

الف) شکل خود- متشابه　　ب) مکان هندسی

۲- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۳- با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر از یک نقطه‌ی اختیاری روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آن‌ها را قطع کند، آن‌گاه مجموع طول پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر طول ساق مثلث خواهد بود.

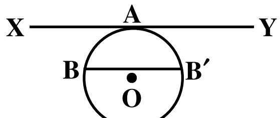
۴- قضیه: ثابت کنید عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرسند.



۵- دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O\,.\,R)$ مماسند. H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:

الف) خط OM نیمساز زاویه‌های $T\hat{M}T'$ و $T\hat{O}T'$ است.

ب) $TT'.OM = ۲R.MT$



۶- خط XY در نقطه‌ی A بر دایره‌ی (C) مماس است. وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید کمان AB برابر با کمان AB' است.

۷- قضیه: ثابت کنید اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه‌ی تماس، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است.

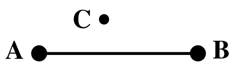
۸- دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر مفروضند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ سانتی‌متر باشد، طو خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ ۱

۹- برای هر قسمت یک تبدیل که دارای ویژگی خواسته شده باشد بنویسید.

الف) ایزومتری نباشد　　ب) جهت شکل را حفظ نکند.

ج) شیب خط را حفظ نکند.　　د) $T(x,y)=(x-۲,y+۵)$ ضابطه‌ی نگاشت آن باشد.

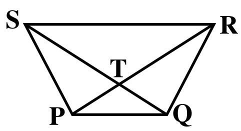
۱۰- اگر $T(x,y)=(x-۲y,x+y)$ ضابطه‌ی یک نگاشت باشد و تبدیل یافته‌ی $A(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی $A'(-۳,۳)$ باشد، مختصات نقطه‌ی A را به‌دست آورید.



۱۱- پاره‌خط AB و نقطه‌ی C خارج آن را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن C به‌عنوان مرکز تجانس، تصویر مجانس پاره‌خط AB را با نسبت تجانس $k=\frac{۱}{۲}$ رسم نمایید. (روش رسم را توضیح دهید)

۱۲- الف) خط $۲x+y-۶=۰$ و تصویر آن‌را تحت دوران ۲۷۰° رسم نمایید.

ب) معادله‌ی خط تصویر را به‌دست آورید.

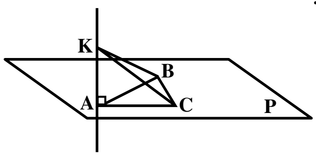


۱۳- در شکل روبه‌رو PR، QS قطرها، $PT=QT$ و $RT=ST$، با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید: $\overset{\Delta}{PQS}\cong\overset{\Delta}{QPR}$

۱۴- سه خط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ دوبه‌دو متقاطع هستند ولی همرس نیستند. ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند.

۱۵- قضیه: ثابت کنید، اگر خط L با صفحه‌ی P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می‌کند.

۱۶- ثابت کنید، اگر خطی با دو صفحه‌ی متقاطع، موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است.



۱۷- فرض کنید A، B و C سه نقطه از صفحه‌ی P باشند که بر یک خط قرار ندارند و $AB=AC$. اگر K نقطه‌ای خارج از صفحه‌ی P باشد که $KB=KC$ و خط KA بر خط AB عمود باشد، ثابت کنید خط KA بر صفحه‌ی P عمود است.

۱۸- اگر L و L' دو خط متنافر باشند، عمود مشترک آن‌ها را رسم نمایید و روش رسم را توضیح دهید.

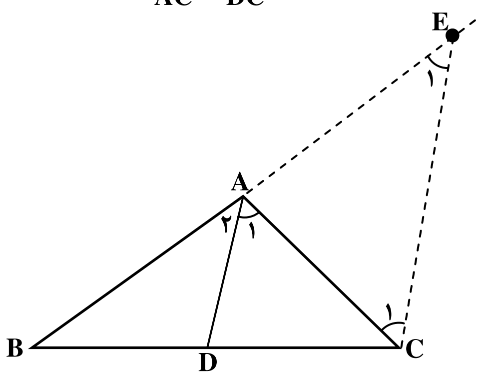
پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۶

۱- الف: اگر قسمتی از یک شکل با کل شکل متشابه باشد آن شکل خود- متشابه نامیده می‌شود.

ب: مکان هندسی، مجموعه نقاط صفحه یا فضا که دارای ویژگی مشترکی باشند.

۲-

نیمساز $AD \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

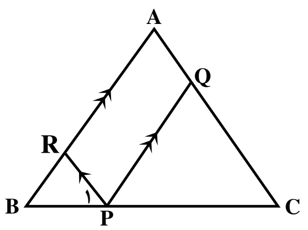


از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویه A رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند. چون AD موازی CE است اگر AC را به‌عنوان خط مورب در نظر بگیریم آن‌گاه: $\hat{A}_1=\hat{C}_1$ (۱)

و اگر BE را به‌عنوان خط مورب آن‌ها در نظر بگیریم، آن‌گاه: $\hat{A}_2=\hat{E}_1$ (۲)

از طرفی $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (۳). حال از رابطه‌های ۱ و ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت $\hat{C}_1=\hat{E}_1$. پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است $AE=AC$. در مثلث BEC، AD موازی EC است. طبق تالس $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}$. حال به‌جای AE مساوی آن AC را قرار می‌دهیم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

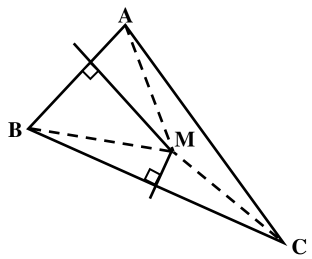
۳-



$$\left.\begin{array}{l} PR \parallel AC \;,\; BC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{P}_1=\hat{C} \\ AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{P}_1=\hat{B}$$

در مثلث BPR، $BR=PR$ (۱). با توجه به متوازی‌الاضلاع بودن چهارضلعی AQPR داریم $AR=PQ$ (۲). طرفین دو رابطه (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم:

$$BR+AR=PQ+PR \Rightarrow PQ+PR=AB$$



۴- عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. چون M روی عمودمنصف BC است، پس MB=MC و چون M روی عمودمنصف AB است $MA=MB$. در نتیجه $MA=MC$ بنابراین نقطه M از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. یعنی M روی عمودمنصف AC است، در نتیجه هر سه عمودمنصف از نقطه M می‌گذرند.

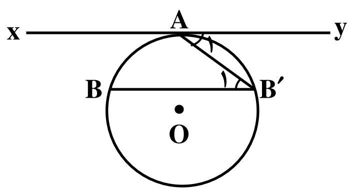
۵-

$$\text{ض ض ض}\left\{\begin{array}{l} MT=MT' \text{ مماس} \\ OM=OM \\ OT=OT'=R \end{array}\right.$$

الف: $O\hat{M}T \cong O\hat{M}T' \Rightarrow T\hat{M}O=T'\hat{M}O \quad , \quad T\hat{O}M=T'\hat{O}M$

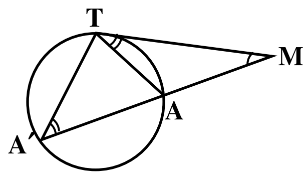
ب: $\left.\begin{array}{l} \hat{O}=\hat{O} \\ \hat{H}=\hat{T}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OTH} \approx \overset{\Delta}{OTM} \Rightarrow \frac{TH}{MT}=\frac{OT}{OM}$

$$\left.\begin{array}{l} TH \times OM = MT \times OT \\ OT=R \quad , \quad TH=\frac{TT'}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow TT' \times OM = ۲MT \times R$$



۶- از نقطه‌ی A به B' وصل می‌کنیم. بنابر قضیه خطوط موازی $\hat{A}_1=\hat{B}'_1$. زاویه‌ی محاطی $\hat{B}'_1=\frac{AB}{۲}$ و زاویه ظلّی $\hat{A}_1=\frac{AB'}{۲}$ بنابراین $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB'}$

۷- از T به A و A' وصل می‌کنیم. دو مثلث MAT و $MA'T$ متشابه‌اند:



زیرا: $\hat{M}=\hat{M}$ $\quad$ $A\hat{T}M = A\hat{A}'T = \frac{AT}{۲}$

پس: $\frac{MT}{MA}=\frac{MA'}{MT} \Rightarrow MT^{۲} = MA \times MA'$

۸-

$$TT'^{۲} = d^{۲} - (R-R')^{۲} \Rightarrow ۱۴۴ = d^{۲} - (۹-۴)^{۲} \Rightarrow d = ۱۳$$

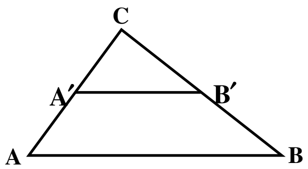
چون طول خط‌المرکزین برابر با مجموع دو شعاع است بنابراین دو دایره مماس بیرون هستند.

۹- الف: تجانس در صورتی‌که $k \neq ۱$ $\qquad$ ب: بازتاب محوری

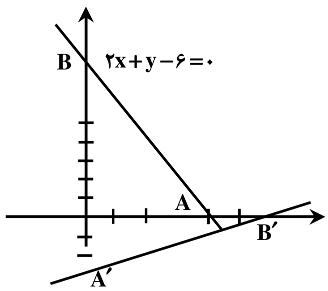
ج: دوران یا بازتاب محوری $\qquad$ د: انتقال

۱۰-

$$T(\alpha,\beta) = (\alpha - ۲\beta\ ,\ \alpha+\beta) = (-۳,۳) \Rightarrow \begin{cases}\alpha - ۲\beta = -۳\\ \alpha+\beta = ۳\end{cases} \Rightarrow \alpha = ۱ \qquad \beta = ۲ \Rightarrow A(۱\ ,\ ۲)$$



۱۱- با توجه به تعریف تجانس $CA' = \frac{۱}{۲}CA$ و $CB' = \frac{۱}{۲}CB$ از C به A و B وصل می‌کنیم. وسط CA را A' و وسط CB را B' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم.



۱۲- الف: نقاط $A(۰,۶)$ و $B(۳,۰)$ روی خط مورد نظر هستند و با توجه به ضابطه دوران $R(x,y) = (y,-x)۲۷۰^{\circ}$ داریم:

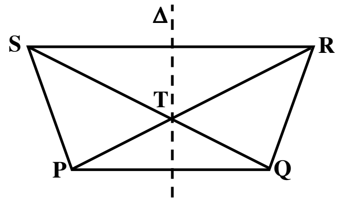
$$B' = R(۳,۰) = (۰,-۳), A' = R(۰,۶) = (۶,۰)$$

ب: معادله تصویر به‌صورت:

$$M = \frac{۰-(-۳)}{۶-۰} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

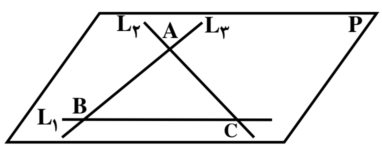
$$y - ۰ = \frac{۱}{۲}(x-y) \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - ۳ \Rightarrow ۲y - x + ۶ = ۰$$

۱۳- چون فاصله نقطه T از دو سر پاره‌خط‌های PQ و SR به یک اندازه است بنابراین نقطه‌ی T روی عمودمنصف این دو پاره‌خط قرار دارد و چون این دو خط موازی‌اند عمودمنصف آن‌ها بر هم منطبق است. خط Δ عمودمنصف دو پاره‌خط PQ و SR را رسم می‌کنیم. در یک بازتاب نسبت به خط Δ داریم:



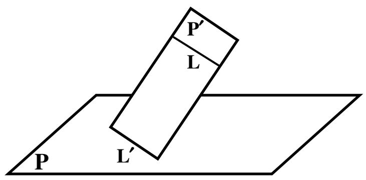
$$\left.\begin{matrix}Q \to P\\ R \to S\end{matrix}\right\} \Rightarrow QR = PS \quad (۱) \qquad \left.\begin{matrix}P \to Q\\ R \to S\end{matrix}\right\} \Rightarrow PR = QS \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\Leftarrow$ $\overset{\Delta}{SPQ} \cong \overset{\Delta}{PQR}$



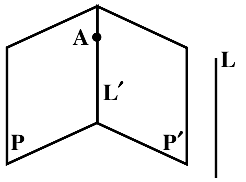
۱۴- اگر سه خط $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ مانند شکل در سه نقطه A و B و C یکدیگر را قطع کنند از این سه نقطه صفحه P را می‌گذرانیم. زیرا می‌دانیم از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست، تنها یک صفحه می‌گذرد. هرگاه دو نقطه از خطی در یک صفحه قرار داشته باشد آن‌گاه آن خط به تمامی در آن صفحه قرار دارد پس $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ در صفحه P قرار دارند.

۱۵- دو حالت در نظر گرفته:



الف) خط در صفحه P قرار ندارد. فرض P' صفحه‌ای گذرنده از L باشد که p را در خط L' قطع کند L و L' هر دو در صفحه P' هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند زیرا از متقاطع بودن L و L' نتیجه می‌شود که خط L صفحه P را قطع می‌کند که خلاف فرض است. بنابراین دو خط L و L' هر دو در صفحه P' هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس با هم موازیند.

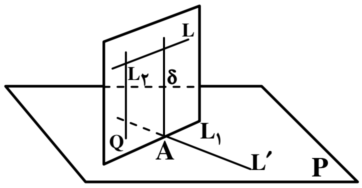
ب) خط L در صفحه P قرار دارد. در این حالت P' متمایز از P که از L می‌گذرد صفحه P را در همان خط L قطع می‌کند. (در این حالت L' و L است)



۱۶- فرض کنید خط L موازی دو صفحه متقاطع P و P' باشد از یک نقطه فصل مشترک مانند A خط L' را موازی خط L رسم می‌کنیم چون خط L موازی صفحه P است خط L' به تمامی در صفحه P قرار دارد. با استدلال مشابه خط L' به تمامی در صفحه P' قرار دارد. پس L' همان فصل مشترک دو صفحه است که با خط L نیز موازی است.

۱۷-

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ AK = AK \\ KB = KC \end{array}\right\} \text{ض ض ض} \Rightarrow \overset{\Delta}{AKC} \cong \overset{\Delta}{AKB} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AK \perp AC \\ AK \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp P$$



۱۸- اگر دو خط L' و L متنافر باشند ابتدا، صفحه P شامل خط L' و موازی خط L را رسم می‌کنیم. سپس صفحه Q را از L عمود بر صفحه P می‌گذرانیم. طبق قضیه فصل مشترک دو صفحه P و Q که آن‌را L_1 می‌نامیم با خط L موازی است. بنابراین خط‌های L_1 و L' موازی نیستند و چون هر دو در یک صفحه قرار دارند با یکدیگر متقاطع خواهند بود. نقطه مشترک دو خط L_1 و L' را A می‌نامیم. از نقطه A در صفحه Q خط δ را عمود بر خط L_1 و L_2 رسم می‌کنیم.

اگر L_2 خطی در Q باشد که بر P عمود است و دو خط δ و L_2 هر دو در صفحه Q قرار دارند و بر خط L_1 عمودند. بنابراین با هم موازیند. بنابراین خط δ نیز بر صفحه P عمود است. پس خط δ بر خط L' نیز عمود است. به این ترتیب خط δ بر هر دو خط متنافر L' و L عمود است و با آن‌ها نیز متقاطع می‌باشد.