هندسه (۲) — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۵

۱- واژه های روبه رو را تعریف کنید: الف) مثال نقض ب) دو خط متنافر

۲- دو نقطه ی A و B در دو طرف خط d در یک صفحه واقع هستند. نقطه ای روی خط d بیابید که از دو نقطه ی Aو B به یک فاصله باشد. (بحث کنید.)

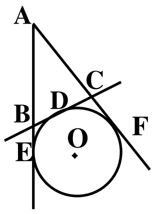
۳- در مثلث ABC میانه ی AM و نیمسازهای دو زاویه ای AMB و AMC را رسم می کنیم. این دو نیمساز اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC موازیند.

۴- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث ، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است. (نامساوی مثلث)

۵- در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A}'$ ثابت کنید: $BC \neq B'C'$ (برهان خلف)

۶- قضیه: ثابت کنید در هر دایره ، قطر عمود بر هر وتر ، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.

۷- خط های BC, AF, AE به ترتیب در نقطه های D, E, F بر دایره ی (O) مماس هستند. ثابت کنید با تغییر مکان D روی دایره بین دو نقطه ی ثابت E و F محیط مثلث ABC ثابت می ماند.



۸-پاره خط AB به طول ۴ سانتی متر و کمان درخور زاویه 30° روبه رو به این پاره خط مفروض است. شعاع دایره ای را که این کمان درخور بخشی از آن است و فاصله ی مرکز این دایره از این پاره خط را تعیین کنید. (رسم کمان درخور الزامی نیست.)

۹- قضیه: ثابت کنید اندازه ی زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود، برابر نصف مجموع اندازه ی دوکمانی از دایره است که به ضلع های آن زاویه محدودند.

۱۰- نقاط $M = (3,3), N = (1,-1), P = (-2,2), Q = (-3,1)$ رئوس یک ذوزنقه هستند :

الف) مختصات تصویر این ذوزنقه را تحت تبدیل $T(x, y) = (x+2, -y)$ به دست آورید.

ب) این تبدیل را توصیف کنید. (دو ویژگی این تبدیل را بررسی کنید.)

۱۱- الف) نقطه ی $A = (-1,2)$ را تحت زاویه 90° حول مبدأ مختصات دوران داده مختصات نقطه ی جدید را به دست آورده و A' بنامید.

ب) مختصات دوران یافته نقطه ی A' را حول مبدأ مختصات به اندازه ی 180° به دست آورید و A'' بنامید.

ج) تحت چه دورانی مستقیماً نقطه ی A به A'' تصویر می شود.

۱۲- نقاط $A = (1,1), B = (1,3), C = (3,1)$ رئوس یک مثلث هستند . اگر $O = (0,0)$ مرکز تجانس و تبدیل $D(x, y) = (2x, 2y)$ باشد.

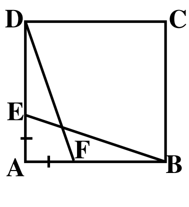
الف) مثلث و تصویر مجانس آن را رسم کنید. ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

ج) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

د) نوع تجانس را مشخص کنید.

۱۳-چهار ضلعی $ABCD$ یک مربع است و $AE = AF$.

با استفاده از تبدیل ها ثابت کنید : $BE = DF$



۱۴-در جاهای خالی کلمه ای مناسب قرار دهید تا هر جمله به گزاره ای درست تبدیل شود.

الف) حداقل .... نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.

ب) از هر دو نقطه در فضا ...... صفحه می گذرد.

ج) از هر نقطه مانند A در فضا ، .... خط می گذرد که بر صفحه ای مانند P عمود است.

د) صفحه ای را که در وسط یک پاره خط ، بر آن عمود باشد .... می نامیم.

۱۵- قضیه: اگر P, Q و R سه صفحه موازی باشند و دو خط L و L' این صفحه ها را به ترتیب در نقطه های A, B, C, A', B', C' قطع کنند، ثابت کنید : $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (قضیه تالس در فضا)

۱۶- اگر O نقطه ای خارج از صفحه ای مانند P باشد، ثابت کنید کلیه خط های گذرنده از O که با P موازی هستند در یک صفحه موازی P قرار دارند.

۱۷- ثابت کنید فاصله یک نقطه از یک صفحه ، کوتاه ترین فاصله بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۵

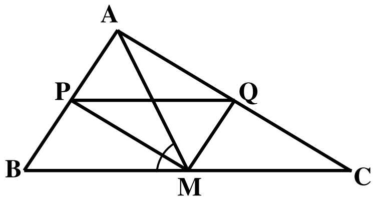
۱- به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری یا یک حدس کلی نادرست است مثال نقض گفته می شود.
دو خط متمایز که نقطه ی مشترک نداشته باشند و در یک صفحه نیز واقع نشوند دو خط متنافر نامیده می شوند.

۲- مسأله در صورتی جواب دارد که عمود منصف AB خط d را قطع کند. اگر d عمودمنصف AB باشد مسأله بی شمار جواب دارد و هر نقطه از خط d جواب مسأله است. اگر d عمود بر AB باشد ولی آن را نصف نکند مسأله جواب ندارد.

۳-فرض: AM میانه و MP و MQ نیمساز

حکم: $BC \parallel PQ$

اثبات: می دانیم نیمساز هر زاویه داخلی مثلث ضلع روبه رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع مجاور آن زاویه تقسیم می کند.



$\overset{\Delta}{AMC}:$ نیمساز $MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC}$ 	$\overset{\Delta}{AMB}:$ نیمساز $MP \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB}$

بنا به فرض می دانیم $\Rightarrow$ میانه $AM \Rightarrow MC = MB \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

$\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$

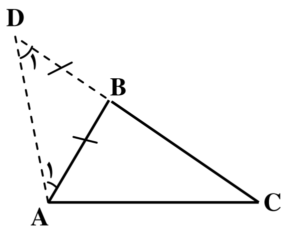
۴-فرض : ABC مثلث است.

حکم: $AB + BC > AC$

اثبات: ضلع BC را به اندازه ی ضلع AB امتداد می دهیم تا نقطه ی D به دست آید . سپس D را به نقطه ی A وصل می کنیم.

$BD = AB$ پس $\overset{\Delta}{ABD}$ متساوی الساقین است: $\hat{A}_1 = \hat{D}$

(در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه روی دو ساق با هم برابرند.)



$D\hat{A}C > \hat{A}_1 \Rightarrow D\hat{A}C > \hat{D}_1 \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD}: DC > AC$

(در هر مثلث ضلع روبه رو زاویه ی بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه روی به زاویه کوچکتر)

$DB + BC > AC \Rightarrow AB + BC > AC$

به همین ترتیب برای اضلاع دیگر هم می توان رابطه ی فوق را ثابت کرد.

۵- برهان خلف: فرض می کنیم $BC = B'C'$ (فرض خلف)

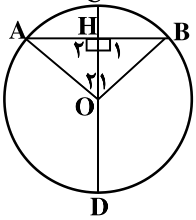
$$\left.\begin{array}{l} BC = B'C' \\ AC = A'C' \text{ بنا به فرض} \\ AB = A'B' \text{ بنا به فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \text{ به حالت ض ض ض} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' \text{ اجزای نظیر}$$

در فرض مسأله داریم $\hat{A} = \hat{A}'$ به تناقض می رسیم پس خلاف حکم نادرست و حکم درست است یعنی $BC \neq B'C'$

۶- فرض: CD قطر و $\hat{H} = 90^\circ$

حکم: $AH = HB$, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

برهان: از O مرکز دایره به A و B وصل می کنیم.



$$\begin{cases} OA = OB \text{ شعاع های دایره} \\ OH \quad \text{مشترک} \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{O}H \cong B\overset{\Delta}{O}H$$ به حالت وتر و یک ضلع

$$\text{اجزای نظیر} \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$
در یک دایره کمان های روبه رو به زاویه های مساوی با هم برابرند.

۷-

$$\text{محیط } A\overset{\Delta}{B}C = AB + BC + AC = AB + BD + DC + AC$$

اگر از یک نقطه خارج دایره ، دو مماس بر دایره رسم کنیم طول مماس ها برابرند.

$$\begin{cases} BD = BE \\ DC = CF \\ AE = AF \end{cases}$$

$$\text{محیط } A\overset{\Delta}{B}C = AB + BE + CF + AC = AE + AF = ۲AF$$

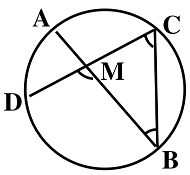
۸-

$$R = \frac{a}{۲Sin\alpha} = \frac{۴}{۳Sin۳۰^\circ} = \frac{۴}{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۴$$

$$OH = R|Cos\alpha| = ۴\times|Cos۳۰| = ۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

۹- فرض: M محل تلاقی دو وتر AB و CD در داخل دایره است.

حکم: $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$



برهان: $\hat{M}$ زاویه خارجی مثلث $M\overset{\Delta}{B}C$ است.

در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است.

$$\hat{M} = \hat{B} + \hat{C}$$

اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه رویش است.

$$\begin{cases} \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

۱۰- الف)

$$T(x,y) = (x+۲,-y) \qquad M' = (۳+۲,-۳) = (۵,-۳)$$

$$P' = (-۲+۲,-۲) = (۰,-۲) \qquad N' = (۱+۲,-(-۱)) = (۳,۱)$$

$$Q' = (-۳+۲,-۱) = (-۱,-۱)$$

ب)

$$MN = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (-۱-۳)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} \qquad M'N' = \sqrt{(۵-۳)^۲ + (-۳-۱)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰}$$

این تبدیل طول را حفظ کرده یعنی ایزومتری است. ولی شیب خط را حفظ نمی کند.

$$\begin{cases} m_{MN} = \frac{۳+۱}{۳-۱} = \frac{۴}{۲} = ۲ \\ m_{M'N'} = \frac{۱+۳}{۳-۵} = -۲ \end{cases}$$

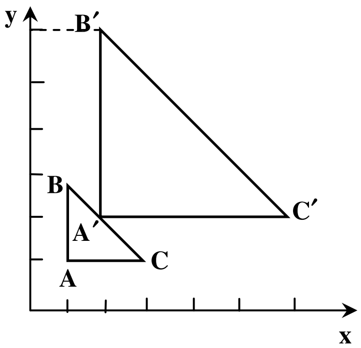
۱۱- الف)

$$R(x,y) = (-y,x) \Rightarrow A' = (-۲,-۱)$$

ب) $R(x,y)=(-x,-y) \Rightarrow A''=(۲,۱)$

ج) $A=(-۱,۲) \xrightarrow{R} A''(۲,۱) \Rightarrow R(x,y)=(y,-x)$

تحت دوران ۲۷۰° حول مبدأ مختصات A به A'' تبدیل می شود.



۱۲- الف) $D(x,y)=(۲x,۲y)$

$$A=(۱,۱) \xrightarrow{D} A'=(۲,۲)$$

$$B=(۱,۳) \xrightarrow{D} B'=(۲,۶)$$

$$C=(۳,۱) \xrightarrow{D} C'=(۶,۲)$$

ب) $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲=۲$

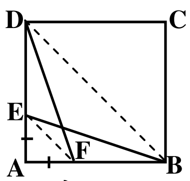
ج) $۸=۲\times ۲^{۲}=S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} \Leftarrow K^{۲}S_{ABC}=S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}$ $\longleftarrow$ ضریب تجانس $K=۲$

د) تجانس از نوع انبساط است زیرا $K=۲>۱$ است.

۱۳- فرض: $ABCD$ مربع و $AE=AF$

حکم: $BE=DF$

برهان: قطر AC را رسم می کنیم . بنا به فرض $AE=AF$ پس AC عمودمنصف EF است.ضمناً چون $AD=AB$ (اضلاع مربع)پس AC عمودمنصف BD است. بنابراین در بازتاب نسبت به AC داریم:

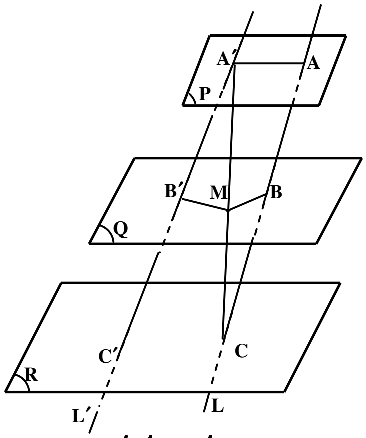


$$\left.\begin{array}{l} B\longrightarrow D \\ E\longrightarrow F \end{array}\right\} \Rightarrow BE=DF$$

بازتاب ایزومتری است و طول را حفظ می کند. $\Leftarrow BE=DF$

۱۴- الف) چهار ب) بی شمار ج) یک د) صفحه عمود منصف

۱۵- فرض : $P||Q||R$ حکم: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$



برهان: A' محل تلاقی خط L' با صفحه ی P را به C محل تلاقی خط L با صفحه ی R وصل می کنیم. $A'C$ که دو صفحه ی موازی را قطع کرده با صفحه ی Q هم که با P و R موازی است متقاطع است. محل تلاقی $A'C$ را با صفحه ی Q نقطه ی M می نامیم. صفحه ی مثلث $AA'C$ با صفحه ی Q در خط BM مشترک است و $BM \| AA'$

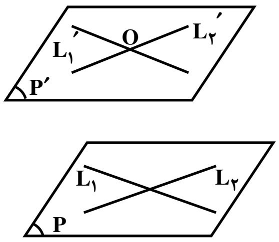
پس بنا به قضیه تالس داریم: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'M}{MC}$ (۱)

و به همین ترتیب صفحه مثلث $A'C'C$ با صفحه ی Q در $B'M$ مشترک است و داریم :

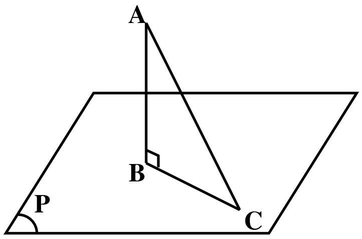
$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A'M}{MC} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AB}{BC}$$

۱۶- دو خط به دلخواه $L_۱$ و $L_۲$ را به طور متقاطع در صفحه ی P رسم می کنیم. سپس از



نقطه ی O خارج از صفحه ی P دو خط L'_1 و L'_2 را به ترتیب موازی L_1 و L_2 و رسم می کنیم. صفحه ای که بر دو خط L'_1 و L'_2 می گذرد با صفحه ی P موازی است. همچنین هر خط دیگری که از نقطه O موازی صفحه ی P رسم شود در صفحه ی P' واقع می شود. بنابراین کلیه خطوطی که به طور مشابه از نقطه ی O موازی صفحه ی P رسم می شوند در صفحه ی P' واقع خواهند شد.



۱۷- اگر AB عمود بر صفحه ی P باشد، نقطه ی دلخواه C را روی صفحه P در نظر می گیریم. از A به C وصل می کنیم. AB بر صفحه ی P عمود است پس بر کلیه خطوط صفحه از جمله BC عمود است.

$$A\hat{B}C = 90^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \text{ قائم الزاویه} \longrightarrow AB < AC$$

در مثلث قائم الزاویه، وتر بزرگتر از اضلاع زاویه قائم است.