هندسه (۲) — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۴

۱- الف) این قضیه را به‌صورت قضیه‌ی «دو شرطی» بنویسید: «در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.»

ب) مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که از خط d به فاصله‌ی معلوم "L" باشد.

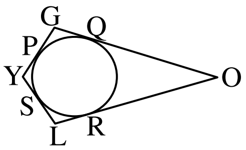
۲- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۳- ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچک‌تر است.

۴- از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطه‌ی بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به‌دست آورید.

۵- قضیه: ثابت کنید عمود منصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرسند.

۶- قضیه: ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

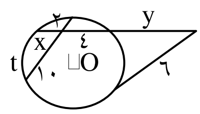


۷- در شکل مقابل ضلع‌های چهارضلعی GOLY بر دایره مماسند.

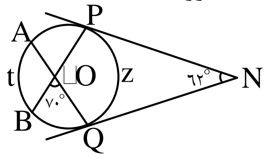
ثابت کنید: $GO+LY=OL+GY$

۸- در شکل‌های زیر مقادیر x، y، z و t را به‌دست آورید.

الف)



ب)



۹- دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ مفروضند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره را به‌دست آورید.

۱۰- الف) تصویر نقطه‌ی $A(-۱,۲)$ را تحت انتقال $T=(x,y)=(x+۲,y+۳)$ به‌دست آورید و آن را A' بنامید.

ب) مختصات تصویر A' را تحت انتقال $T'(x,y)=(x-۳,y+۱)$ به‌دست آورید و A'' بنامید.

ج) ضابطه‌ی انتقالی را بنویسید که مستقیماً A را به A'' تصویر نماید.

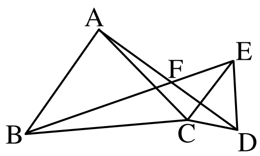
۱۱- تحت یک بازتاب خط $۳x-۷y+۹=۰$ تصویر خط $۳x-۷y-۹=۰$ است. معادله‌ی محور بازتاب آن‌را بنویسید.

۱۲- نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۴,۰)$ و $C(۲,۴)$ مختصات رئوس یک مثلث می‌باشند.

الف) مثلث و تصویر مجانس آن‌را با در نظر گرفتن $O(۰,۰)$ مرکز تجانس و تحت تبدیل $D(x,y)=\left(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y\right)$ رسم کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید و با توجه به ویژگی‌های تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$ را بنویسید.

ج) نوع تجانس را مشخص کنید.

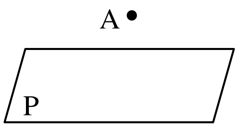


۱۳- مثلث‌های ABC و ECD متساوی‌الاضلاع هستند:

با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید:

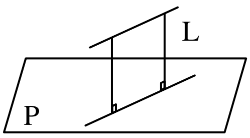
$$A\hat{F}B=۶۰^\circ \quad \text{و} \quad AD=BE$$

۱۴- قضیه: ثابت کنید اگر خط L با یکی از خط‌های صفحه‌ی P موازی باشد، آن‌گاه خط L با صفحه‌ی P موازی است.



۱۵- الف) در شکل مقابل نقطه‌ی A خارج صفحه‌ی P است. از نقطه‌ی A خطی رسم کنید که بر صفحه‌ی P عمود باشد. (روش رسم را توضیح دهید.)

ب) صورت‌های مختلف نمایش صفحه در فضا را بنویسید.



۱۶- اگر خط L با صفحه‌ی P موازی باشد، ثابت کنید فاصله‌ی هر دو نقطه از خط L تا صفحه‌ی P مساوی است.

۱۷- عبارات زیر را چنان کامل کنید که هر دو قسمت به گزاره‌ای درست تبدیل شود:

الف) از هر خط L که بر صفحه‌ی P عمود نیست .... می‌گذرد که بر صفحه‌ی P عمود است.

ب) مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا را که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند .... می‌گویند.

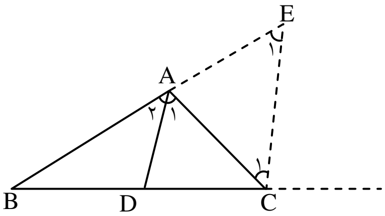
ج) از هر نقطه خارج صفحه .... خط می‌گذرد که با صفحه موازی است.

د) از هر دو نقطه‌ی متمایز در فضا .... می‌گذرد.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۴

۱- الف) چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرها یک‌دیگر را نصف کنند.

ب) مکان هندسی، دو خط موازی در دو طرف خط d به فاصله‌ی L می‌باشد.



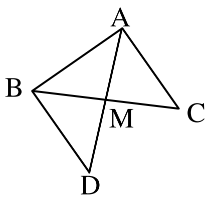
۲- فرض: $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ حکم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

برهان: اضلاع AB و BC را امتداد می‌دهیم. از رأس C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌ی E قطع کند.

زوایای متقابل داخلی و خارجی $\hat{E}_1=\hat{A}_2 \Leftarrow BE$ مورب و $AD \parallel CE$ و بنا به فرض $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و نیز $\hat{A}_1=\hat{C}_1 \Leftarrow AC$ مورب و $AD \parallel CE$ مثلثی که دو زاویه‌ی مساوی داشته باشند، متساوی‌الساقین است پس $\hat{C}_1=\hat{E}_1 \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow AE=AC$. طبق قضیه‌ی تالس در مثلث $\overset{\Delta}{BCE}$ خطی که موازی یک ضلع رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت قطع می‌کند.

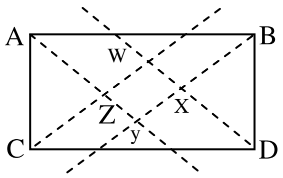
$$\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC} \to \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

۳- ابتدا میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش از سمت M امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D به‌دست آید. از D به B وصل می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD} : AD < AB+BD \\ AM=MD\end{array}\right\} \Rightarrow ۲AM < AB+BD \\ \\ \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{DMB} \ (\text{ض ز ض}) \quad \Rightarrow AC=BD\end{array}\right\} \Rightarrow ۲AM < AB+AC \Rightarrow AM < \frac{AB+AC}{۲}$$

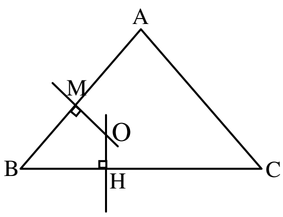
۴-



مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{BDX} : BD^{۲}=BX^{۲}+DX^{۲} \\ BDX : BX=DX\end{array}\right\} \Rightarrow BD^{۲}=۲DX^{۲} \Rightarrow DX=\frac{BD}{\sqrt{۲}}$

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{DWC} : DC^{۲}=DW^{۲}+WC^{۲} \\ DWC : WC=WD\end{array}\right\} \Rightarrow DC^{۲}=۲DW^{۲} \Rightarrow DW=\frac{DC}{\sqrt{۲}}$

طول ضلع مربع $WZ=DW-DX \Rightarrow \frac{DC}{\sqrt{۲}}-\frac{BD}{\sqrt{۲}}=\frac{DC-BD}{\sqrt{۲}}$



۵- فرض: MO و OH عمودمنصف

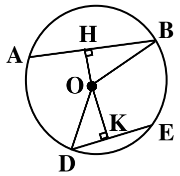
حکم: عمودمنصف ضلع AC هم از O می‌گذرد.

برهان: عمودمنصف‌های اضلاع BC و AB یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند،

زیرا اگر یکدیگر را قطع نکنند باید موازی باشند. در این‌صورت اضلاع AB و BC با یکدیگر موازی باشند و مثلثی به‌وجود نمی‌آید. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{O روی عمودمنصف AB است. } OA=OB \\ \text{O روی عمودمنصف BC است. } OC=OB \\ \to OA=OC\end{array}\right\}$$

پس نقطه‌ی O که از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است روی عمودمنصف AC است.



۶- فرض: $AB > DE$

$$OH=\sqrt{OB^{۲}-BH^{۲}}=\sqrt{R^{۲}-\frac{AB^{۲}}{۴}}$$

حکم: $OH < OK$

$$OK = \sqrt{OD^۲ - DK^۲} = \sqrt{R^۲ - \frac{DE^۲}{۴}}$$

$$AB > DE \to \frac{AB^۲}{۴} > \frac{DE^۲}{۴} \to \frac{-AB^۲}{۴} < \frac{-DE^۲}{۴} \to R^۲ - \frac{AB^۲}{۴} < R^۲ - \frac{DE^۲}{۴}$$

$$\to \sqrt{R^۲ - \frac{AB^۲}{۴}} < \sqrt{R^۲ - \frac{DE^۲}{۴}} \to OH < OK$$

-۷

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \begin{cases} OQ = OR \\ QG = GP \end{cases} \\ \begin{cases} YS = YP \\ SL = RL \end{cases} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} OQ + QG + YS + SL = OR + GP + YP + RL \\ OG + YL = OL + GY \end{matrix}$$

-۸ الف) $۲\times۱۰ = ۴\times x \Rightarrow x = ۵$

$$y(y+۹) = ۳۶ \Rightarrow y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} y = ۳ & \text{ق ق} \\ y = -۱۲ & \text{غ ق ق} \end{matrix}$$

ب)

$$\begin{matrix} z = ۱۱۸^\circ \\ t = ۱۰۲^\circ \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} ۲\times۶۲ = t + \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{BQ} - z \\ ۲\times۷۰ = \overset{\frown}{BQ} + \overset{\frown}{AP} \\ ۲\times۱۱۰ = t + z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z - t = ۱۶ \\ z + t = ۲۲۰ \end{cases} \Rightarrow$$

-۹ $TT'^۲ = d^۲ - (R - R')^۲ \Rightarrow (۱۲)^۲ = d^۲ - (۹ - ۴)^۲ \Rightarrow ۱۴۴ + ۲۵ = d^۲ \Rightarrow d = ۱۳$

-۱۰ الف) $A' = T(-۱,۲) = (۱,۵)$

ب) $A'' = T'(۱,۵) = (-۲,۶)$ ج) $T''(x,y) = (x-۱, y+۴)$

-۱۱ روش اول: اگر $A(x,y)$ روی محور بازتاب باشد فاصله‌ی آن از دو خط یکی است. پس:

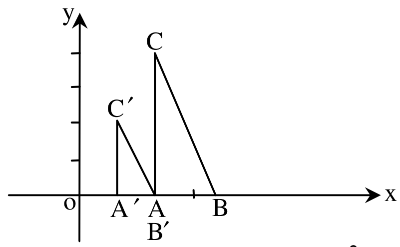
$$d_۱ = \frac{|۳x - ۷y - ۹|}{\sqrt{۳^۲ + ۷^۲}} \quad , \quad d_۲ = \frac{|۳x - ۷y + ۹|}{\sqrt{۳^۲ + ۷^۲}}$$

$d_۱ = d_۲ \Rightarrow ۳x - ۷y = ۰$ (محور بازتاب)

روش دوم: انتخاب یک نقطه از هر خط و یافتن نقطه‌ی وسط آن‌ها و سپس تعیین معادله‌ی خطی که از این نقطه می‌گذرد و موازی دو خط داده شده است.

-۱۲

الف)



ب) $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{۲\times۴}{۲} = ۴$

$$S_{\Delta A'B'C'} = k^۲ S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \times ۴ = ۱$$

ج) با توجه به اینکه $K < ۱$ می‌باشد تجانس، انقباض می‌باشد.

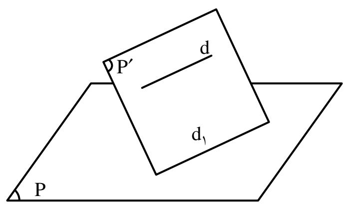
-۱۳ تحت دوران ۶۰° حول نقطه‌ی C $\quad \overset{\Delta}{ACD} \to \overset{\Delta}{BCE} \Rightarrow AD \to BE$

از آنجا که هر خط و دوران یافته‌ی آن تحت زاویه‌ی α با یکدیگر زاویه‌ی α می‌سازند AD ضلع BE را با زاویه‌ی ۶۰° قطع می‌کند. پس:

$AD = BE \quad , \quad A\hat{F}B = ۶۰^\circ$

-۱۴ فرض: $d \parallel d_۱ \quad d_۱ \subset P$

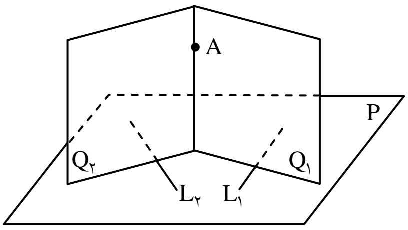
حکم: $d \parallel P$



برهان: از دو خط موازی می‌توانیم یک صفحه بگذرانیم (صفحه P'). اگر خط d با صفحه‌ی P موازی نباشد، آن را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. پس M که در صفحه‌های P و P' است، روی فصل مشترک دو صفحه یعنی خط $d_۱$ قرار دارد.

M نقطه‌ی تقاطع دو خط d و $d_۱$ است که با موازی بودن این دو خط بنا به فرض تناقض دارد. پس $d \parallel P$. در حالت خاص خط d بر صفحه‌ی P واقع است. می‌دانیم انطباق حالت خاص توازی است و قضیه ثابت می‌شود.

۱۵- الف) دو خط غیرموازی L_1 و L_2 در صفحه‌ی P در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ی A صفحه‌ی Q_1 را عمود بر خط L_1 و صفحه‌ی Q_2 را عمود بر خط L_2 رسم می‌کنیم. این دو صفحه متقاطع هستند. فصل مشترک آن‌ها جواب مسأله است.



ب) ۱- سه نقطه غیرواقع بر یک خط راست.

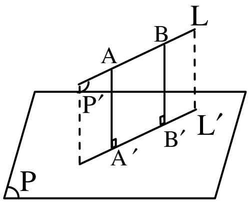
۲- دو خط متقاطع.

۳- دو خط موازی.

۴- یک خط و یک نقطه‌ی خارج آن.

۱۶- از خط L صفحه‌ی P' را عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو صفحه خط L' می‌باشد. واضح است که $L \parallel L'$ است. (۱)

از نقاط $A \in L$ و B دو عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم تا آن را در A' و B' قطع کند. (۲)



$$\left.\begin{array}{l} AA' \in P' \;\Rightarrow\; A' \in P \cap P' \\ BB' \in P' \;\Rightarrow\; B' \in P \cap P' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \subset L' \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم $AA'BB'$ مستطیل است. پس $BB' = AA'$

(یا می‌توان از مرحله‌ی دوم به بعد نوشت در یک صفحه فاصله‌های خط‌های عمودی محصور بین دو خط موازی یعنی L' و L با هم طبق قضیه برابر هستند. لذا $BB' = AA'$)

۱۷- الف) یک صفحه ب) صفحه‌ی عمودمنصف ج) بی‌نهایت د) یک خط