هندسه (۲) — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۷

۱- الف) جدول زیر را با استفاده از استدلال استقرایی کامل کنید:

چند ضلعی محدب	۳ ۴ ۵ ۶ .... n
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰ ۱

ب) رابطه ای بین تعداد ضلع ها و تعداد قطرهایی که از تمام رأس ها یک n ضلعی می گذرند را حدس بزنید.

۲- قضیه: اگر در مثلث دو زاویه نابرابر باشند ، ضلع روبرو زاویه بزرگتر ، بزرگتر از ضلع روبروی زاویه کوچکتر است.

۳- ثابت کنید: مجموع فاصله های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس ، از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است.

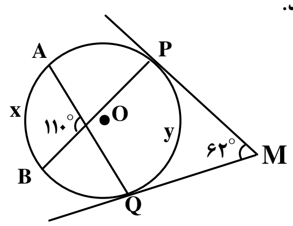
۴- قضیه: ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

۵- مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید ، که از یک خط داده شده d به فاصله معلوم k باشد. ($k > ۰$)

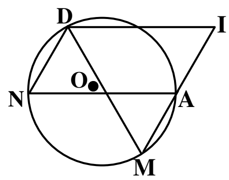
۶- قضیه: ثابت کنید اگر یک ضلع زاویه محاطی قطری از دایره باشد ، اندازه آن زاویه برابر نصف کمان روبروی آن است.

۷- در شکل زیر مقادیر x و y را بدست آورید.

$\widehat{AB} = x , \widehat{PQ} = y$



۸- در شکل روبرو چهارضلعی $DIAN$ یک متوازی الاضلاع است ، و نقطه های I و A و M روی یک خط راست قرار دارد. ثابت کنید $DM = DI$



۹- دو دایره به شعاع های ۴ و ۹ سانتی متر ، مماس برون هستند ، مقدار x را چنان تعیین کنید که اندازه مماس مشترک خارجی آنها برابر $(۲x - ۲)$ باشد.

۱۰- پاره خط AB به طول ۶ سانتی متر و کمان درخور ۶۰° روبرو این پاره خط داده شده است ، فاصله مرکز دایره ای که کمان درخور قسمتی از آن است تا وسط پاره خط AB و شعاع دایره را بدست آورید.

۱۱- تبدیل $T(x , y) = (۲x + ۱ , ۲y)$ را درنظر بگیرید.

الف) تصویر نقطه های $A = (۱,۲)$ و $B = (۰,۰)$ را تحت تبدیل T بدست آورید.

ب) طول و شیب پاره خط های AB و $A'B'$ را بدست آورید.

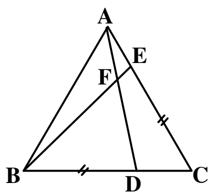
پ) آیا تبدیل T ایزومتری است؟ و آیا این تبدیل شیب AB را حفظ می کند؟ (پاسخ خود را با دلیل نشان دهید.)

۱۲- الف) خط $۲x + ۳y = ۶$ و تصویرش را تحت انتقال $T(x , y) = (x + ۴ , y - ۱)$ رسم کنید.

ب) معادله خط تصویر را بدست آورید.

۱۳- نقطه $A = (۲ , -۱)$ را تحت زاویه ۲۷۰° حول مبدأ مختصات دوران داده و مختصات نقطه جدید را بدست آورید.

۱۴- مثلث ABC متساوی الاضلاع است و $BD = CE$ با استفاده از تبدیلات ثابت کنید $AD = BE$



۱۵- هر یک از عبارت های زیر را چنان کامل کنید که یک گزاره درست حاصل شود:

الف) از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند ، یک و تنها یک .... می گذرد.

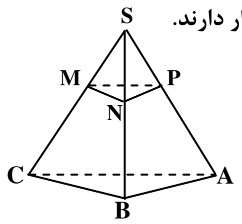
ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی گیرند ، دو خط .... می نامیم.

پ) اگر دو خط متقاطع از صفحه ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگری دو به دو موازی باشند ، ....

ت) اگر P و Q دو صفحه عمود بر هم باشند ، هر کدام شامل خطی است که ....

۱۶- قضیه: اگر خط L با صفحه P موازی باشد ، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد ، P را در یک صفحه موازی L قطع می کند.

۱۷- ثابت کنید که در یک هرم مثلث القاعده ، وسط یال های آن در یک صفحه موازی صفحه قاعده قرار دارند.



۱۸- اگر صفحه ای بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد ، ثابت کنید بر دیگری هم عمود است.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۷

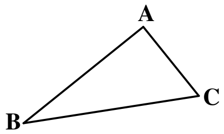
۱- الف)

چند ضلعی محدب	۳	۴	۵	۶	....	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰	۱	۲	۳		$n-3$

ب) n ضلعی ، n رأس و از هر رأس $n-3$ قطر می گذرد و هر قطر دو بار به حساب می آید. پس:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \text{تعداد تمام قطرهای یک } n \text{ ضلعی محدب}$$

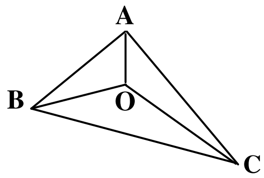
۲- اثبات : برهان خلف:



فرض می کنیم $BC \not> AC$ پس یا $BC = AC$ که در این صورت متساوی الساقین است و $\hat{A} = \hat{B}$ که خلاف فرض است. و یا $BC < AC$ که در این صورت بنا به قضیه $\hat{A} < \hat{B}$ که خلاف فرض است.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$ حکم : $BC > AC$

-۳



$\overset{\Delta}{AOB} : OA + OB > AB$

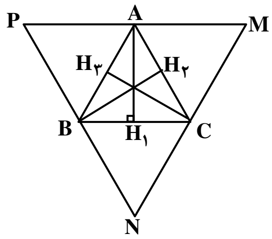
$\overset{\Delta}{AOC} = OA + OC > AC$

$\overset{\Delta}{BOC} : OB + OC > BC$

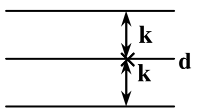
$2(OA + OB + OC) > AB + AC + BC$

$$OA + OB + OC > \frac{AB + AC + BC}{2}$$

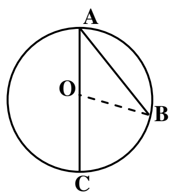
۴- از رأس های A, B, C به ترتیب خط هایی موازی ضلع های AB, AC, BC از مثلث ABC رسم می کنیم تا مثلث MNP حاصل شود. چهار ضلعی $AMCB$ متوازی الاضلاع است ($AM \| BC, AB \| MC$) در نتیجه $AM = BC$ (۱) و از طرف دیگر چهار ضلعی $ACBP$ نیز متوازی الاضلاع است. ($AP \| BC, PB \| AC$) در نتیجه $AP = BC$ (۲). از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می شود $PA = AM$ یعنی AH_1 از وسط PM می گذرد و از طرف دیگر چون $AH_1 \perp BC$ و $PM \| BC$ پس $AH_1 \perp PM$ در نتیجه AH_1 عمودمنصف ضلع PM می باشد. با همین روش ، ثابت می شود که BH_2 عمودمنصف ضلع PN و CH_3 عمودمنصف ضلع MN از مثلث MNP است. و می دانیم که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرسند. در نتیجه ارتفاع های AH_1 و BH_2 و CH_3 از مثلث ABC همرسند.



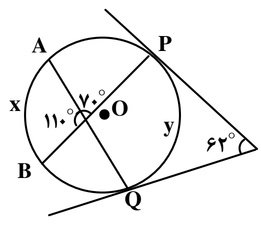
۵- چند نقطه به فاصله معلوم k از خط d را در نظر گرفته و به هم وصل می کنیم. دو خط موازی خط d و به فاصله k که در دو طرف خط d قرار گرفته اند جواب مسأله می باشند.



۶- از نقطه B به O وصل می کنیم. زاویه $B\hat{O}C$ یک زاویه مرکزی در دایره است $B\hat{O}C = \widehat{BC}$. از طرف دیگر زاویه $B\hat{O}C$ زاویه خارجی برای مثلث $O\hat{A}B$ است. پس $B\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B}$ و چون $OA = OB$ پس $B\hat{O}C = 2A$ در نتیجه : $\widehat{BC} = 2\hat{A}$ لذا $\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$.



-۷



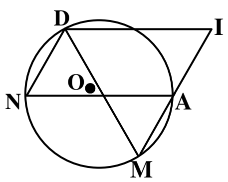
$$\begin{cases} \widehat{AP} + x + \widehat{BQ} - y = 124 \\ \widehat{AP} + \widehat{BQ} = 140 \\ \hat{x} + \hat{y} = 220 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{x} - \widehat{y} = -16 \\ \widehat{x} + \widehat{y} = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x} = 102^\circ \\ \widehat{y} = 118^\circ \end{cases}$$

۸- در متوازی الاضلاع $DIAN : \hat{N} = \hat{I}$ (۱)

از طرف دیگر $\hat{N}$ و $\hat{M}$ محاطی ، $\hat{N} = \hat{M} = \frac{AD}{2}$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می شود $\hat{M} = \hat{I}$ پس مثلث MDI متساوی الساقین است. لذا داریم $DM = DI$



-۹

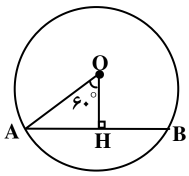
$$dd' = oo' = R + R' = ۴ + ۹ = ۱۳ \qquad TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$$

$$۲x - ۲ = \sqrt{(۱۳)^۲ - (۹ - ۴)^۲} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \Rightarrow ۲x - ۲ = ۱۲ \Rightarrow ۲x = ۱۴ \Rightarrow x = ۷$$

-۱۰

$$R = OA = \frac{a}{۲\sin\alpha} = \frac{۶}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۶\sqrt{۳}}{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$$OH = \frac{a}{۲|\tan\alpha|} = R|\cos\alpha| = ۲\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲} = \sqrt{۳}$$



۱۱- الف)

$$T(x,y) = (۲x+۱, ۲y) \Rightarrow T(۱,۲) = (۳,۴) = A'$$
$$T(۰,۰) = (۱,۰) = B'$$

ب)

$$AB = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵} \qquad A'B' = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲} = ۲\sqrt{۵}$$

$$m_{AB} = \frac{۲-۰}{۱-۰} = ۲ \qquad m_{A'B'} = \frac{۴-۰}{۳-۱} = ۲$$

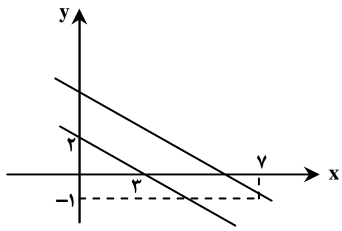
پ) تبدیل T ایزومتری نیست زیرا طول پاره خط AB با طول تصویرش یعنی $A'B'$ برابر نیست و تبدیل T شیب AB را حفظ کرده است. زیرا: $m_{AB} = m_{A'B'}$

-۱۲

$$A(۰,۲) \qquad T(۰,۲) = (۴,۱) = A'$$
$$B(۳,۰) \qquad T(۳,۰) = (۷,-۱) = B'$$

$$m_{A'B'} = \frac{-۱-۱}{۷-۴} = -\frac{۲}{۳} \qquad y - ۱ = -\frac{۲}{۳}(x - ۴)$$

$$y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۱۱}{۳}$$



-۱۳

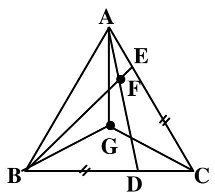
$$R(x,y) = (y,-x) \qquad R(۲,-۱) = (-۱,-۲)$$

۱۴- محل تلاقی میانه های مثلث ABC را G می نامیم. می دانیم هر کدام از زاویه های حول نقطه G مساوی ۱۲۰° می باشند و $AG = BG = CG$ تحت دوران به مرکز G و زاویه $۱۲۰^\circ-$

$$\left.\begin{matrix} B \to A \\ A \to C \end{matrix}\right\} \Rightarrow BA \to AC$$

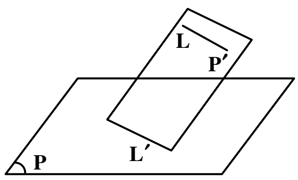
$$\left.\begin{matrix} A \to C \\ C \to B \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \to CB$$

$$AE = CD \Rightarrow E \to D \Rightarrow \left\{\begin{matrix} B \to A \\ E \to D \end{matrix}\right. \Rightarrow BE \to AD \Rightarrow BE = AD$$



۱۵- الف) صفحه ب) متنافر پ) آن دو صفحه با هم موازیند. ت) بر دیگری عمود است.

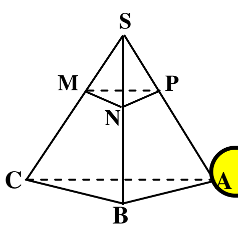
۱۶- الف) اگر خط L در صفحه P قرار نداشته باشد ، فرض کنیم P' صفحه گذرنده از L باشد که P را در خط L' قطع می کند. L و L' هر دو در صفحه P' هستند و همدیگر را قطع نمی کنند زیرا از متقاطع بودن L و L' نتیجه می شود که خط L صفحه P را قطع می کند که این خلاف فرض است. بنابراین دو خط L و L' هر دو در صفحه P' هستند و همدیگر را قطع نمی کنند ، پس با هم موازیند.



ب) خط L در صفحه P قرار دارد. در این حالت هر صفحه P' متمایز از P که از L می گذرد صفحه P را در همان خط L قطع می کند.

-۱۷

در صفحه مثلث SBC



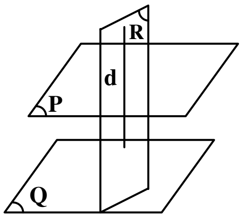
$\frac{SM}{MC}=\frac{SN}{NB}=۱\Rightarrow$ بنابر عکس قضیه تالس در مثلث $\Rightarrow MN || BC$

و در صفحه مثلث SAB

$\frac{SN}{NB}=\frac{SP}{PA}=۱\Rightarrow PN || AB$

از دو رابطه بالا نتیجه می شود ، چون دو خط متقاطع از صفحه مثلث ABC با دو خط متقاطع از صفحه مثلث MNP موازیند پس طبق قضیه این دو صفحه موازیند.

۱۸-



فرض: $P || Q, R \perp P$ حکم: $R \perp Q$

چون $R \perp P$ پس خط d در صفحه R وجود دارد که $d \perp P$ و اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد ، بر دیگری هم عمود است. پس $d \perp Q$ در نتیجه صفحه R شامل خطی است ، که آن خط بر صفحه Q عمود است. پس: $R \perp Q$