هندسه (۲)   سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۶

۱- الف) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به دلخواه رسم نمایید. وسط ضلع‌ها را پیدا کرده و به‌هم وصل کنید.

ب) سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید. این فرآیند را روی سه مثلث جدید تکرار کنید و با استفاده از استدلال استقرایی جدول مقابل را کامل کنید.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد مثلث‌ها	۱				

۲- قضیه: ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشد و ضلع سوم مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آن‌گاه زاویه بین دو ضلع از مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

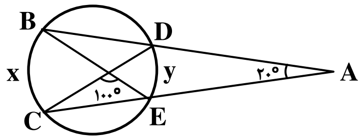
۳- از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطه‌ی بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به‌دست آورید؟

۴- قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

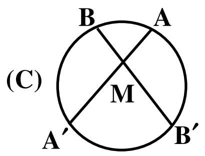
۵- قضیه: ثابت کنید در یک دایره از دو وتر نابرابر آن‌که به مرکز دایره نزدیک‌تر است بزرگتر است.

۶- دایره‌ی $C(O , R)$ مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره بر هم عمود باشند.

۷- الف) در شکل زیر مقادیر x و y را به‌دست آورید.



۸- قضیه: از نقطه‌ی M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند. ثابت کنید: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$



۹- شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر است. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر را که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است پیدا کنید.

۱۰- واژه‌های مقابل را تعریف کنید: الف) نگاشت   ب) ایزومتری   ج) دو صفحه ی عمود بر هم

۱۱- تحت یک بازتاب نقطه‌ی $A(-3 , -1)$ روی نقطه‌ی $A'(3 , 5)$ تصویر می‌شود:

الف) محور تقارن را رسم کنید.   ب) معادله‌ی محور تقارن را بنویسید.

۱۲- نقاط $A(2 , -1)$ و $B(1 , 2)$ دو سر یک پاره‌خط هستند.

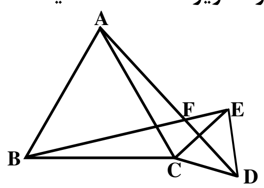
الف) تصویر پاره‌خط AB را تحت تبدیل $F(x , y) = (-y + 3 , x - 3)$ به‌دست آورید $A''B''$ نامیده و آن‌ها را رسم نمایید.

ب) تصویر پاره‌خط AB را تحت دوران $R(x , y) = (-y , x)$ پیدا کنید و آن‌را $A'B'$ بنامید. اگر تصویر $A'B'$ تحت یک انتقال بر پاره‌خط $A''B''$ منطبق گردد، ضابطه‌ی این انتقال را به‌دست آورید.

۱۳- الف) سه ویژگی تجانس را بنویسید.

ب) در شکل مقابل دو مثلث ABC و ECD متساوی‌الاضلاع هستند.

با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید: $AD = BE$ و $A\hat{F}B = 60^\circ$



۱۴- قضیه: ثابت کنید اگر خط L صفحه‌ی P را قطع کند و بر دو خط غیرموازی در نقطه‌ی تقاطع عمود باشد آن‌گاه خط L بر صفحه‌ی P عمود است.

۱۵- جاهای خالی را طوری پر کنید که هر قسمت به عبارتی درست تبدیل شود:

الف) حداقل .... نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.

ب) محل تقاطع دو صفحه، .... آن دو صفحه نامیده می‌شود.

ج) اگر L و L' دو خط .... باشند، یک صفحه شامل L وجود دارد که با L' موازی باشد.

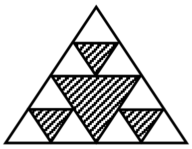
د) از یک نقطه خارج یک صفحه، .... خط موازی آن صفحه می‌گذرد.

۱۶- ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه‌ی موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

۱۷- اگر A، B، C و D چهار نقطه‌ی متمایز در فضا باشند، ثابت کنید این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر دو خط AB و CD متقاطع یا موازی باشند.

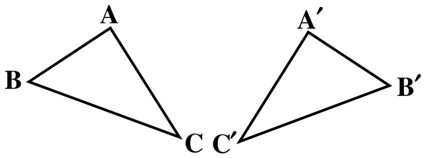
پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خرداد ماه ۱۳۸۶

-۱



مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد	۱	۳	$۳^{۲}$		۳^{n}

-۲



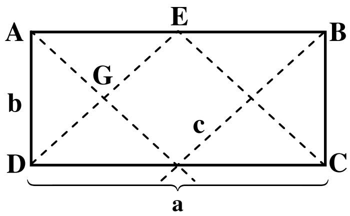
$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC > B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} > \hat{A}'$$

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\hat{A} \not> \hat{A}'$ پس $\hat{A} = \hat{A}'$ یا $\hat{A} < \hat{A}'$

الف: اگر $\hat{A} = \hat{A}'$ باشد دو مثلث به حالت ض ز ض هم‌نهشت می‌شوند آن‌گاه $BC = B'C'$ که خلاف فرض است.

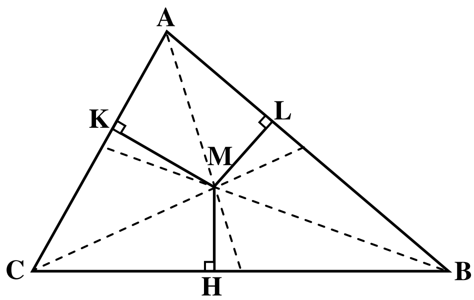
ب: اگر $\hat{A} \not< \hat{A}'$ باشد بنا به قضیه لولا $BC < B'C'$ که خلاف فرض است. پس نقیض حکم نادرست است و حکم قضیه درست می‌باشد.

-۳ مثلث‌های DEC و AGD قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند.



$$\left.\begin{array}{l} DG^{۲} = \dfrac{b^{۲}}{۲} \Rightarrow DG = \dfrac{b}{\sqrt{۲}} \\ DE^{۲} = \dfrac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow DE = \dfrac{a}{\sqrt{۲}} \end{array}\right\} \Rightarrow C = DE - DG = \dfrac{a-b}{\sqrt{۲}}$$

-۴ برهان: در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. از M بر ضلع‌های AB، AC و BC عمود می‌کنیم تا به‌ترتیب آن‌ها را در نقطه‌های K، L و H قطع نمایند. چون M روی نیمساز زاویه B است، پس:



$$MH = ML \qquad (۱)$$

و چون M روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ قرار دارد:

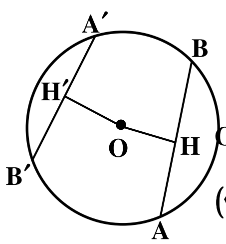
$$MH = MK \qquad (۲)$$

$$(۱) \quad , \quad (۲) \Rightarrow MK = ML$$

پس M روی نیمساز زاویه A نیز قرار دارد. پس M محل تلاقی سه نیمساز است.

-۵

$$OH < OH' \Rightarrow AB > A'B'$$



$$OH < OH' \xrightarrow[OH\ ,\ OH' > ۰]{\text{چون}} OH^{۲} < OH'^{۲} \Rightarrow OH'^{۲} - OH^{۲} > ۰ \qquad (۱)$$

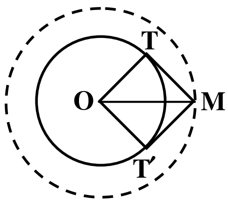
و داشتیم:

$$OH'^{۲} - A'H'^{۲} = OA'^{۲} = R^{۲} = OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} \Rightarrow OH'^{۲} - OH^{۲} = AH^{۲} - A'H'^{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱) \quad , \quad (۲) \Rightarrow AH^{۲} - A'H'^{۲} > ۰ \Rightarrow AH^{۲} > A'H'^{۲} \xrightarrow[AH \text{ و } A'H' > ۰]{\text{چون}} AH > A'H'$$

وقتی نصف وتر، بزرگ‌تر از نصف وتر دیگر باشد در نتیجه: $AB > A'B'$ یا به روش برهان خلف.

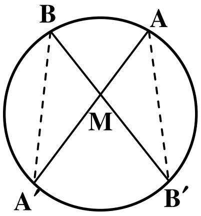
-۶ فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌هایی باشد که از آن دو مماس عمود بر هم MT و MT′ بر دایره $C(O,R)$ رسم شده است. از O به نقطه‌های تماس T و T′ وصل می‌کنیم. چهارضلعی OTMT′ مربع است. زیرا چهار زاویه قائمه دارد و دو ضلع مجاور برابرند. $OT = OT' = R$. در این مربع $OM = R\sqrt{۲}$ مقدار ثابتی است. مکان هندسی نقطه‌ی M، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ است.



-۷

$$\begin{cases} x+y=2(180^\circ-100^\circ) \\ x-y=2\times 20^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=160^\circ \\ x-y=40^\circ \end{cases} \qquad 2x=200^\circ \Rightarrow x=100^\circ \Rightarrow y=60^\circ$$

۸- از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث MAB' و MBA' متشابه‌اند زیرا:

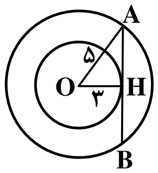


$$A\hat{M}B' = B\hat{M}A' \quad , \quad B'\hat{A}A' = A'\hat{B}B' = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

۹-



$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OA^2 - OH^2 \Rightarrow AH^2 = 25-9 \Rightarrow AH = 4$$
$$AH = HB$$
$$AB = AH + HB \Rightarrow AB = 8$$

۱۰- الف: تناظر بین دو مجموعه D و R که در آن، هر عضو مجموعه D با یک و تنها یک عضو از مجموعه R متناظر باشد.

ب: تبدیلی که فاصله بین نقطه‌ها را حفظ کند.

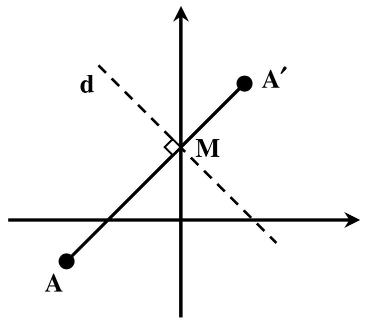
ج: دو صفحه را عمود بر هم گویند هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر صفحه دیگر عمود باشد.

۱۱-

ب:

:

الف

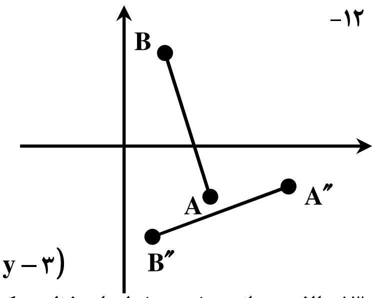


$$\Rightarrow M\left|\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right. \quad \begin{matrix} x_M = \dfrac{X_A + A_{A'}}{2} = \dfrac{-3+3}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \end{matrix}$$

$$M_{AA'} = \frac{y_A - y_{A'}}{x_A - x_{A'}} = \frac{-1-5}{-3-3} = \frac{-6}{-6} = 1 \Rightarrow M_d = -1$$

$$y - y_M = M_d(x - x_M) \Rightarrow y - 2 = -1(x-0) \Rightarrow y = -x+2$$

۱۲-



الف: $F(x,y) = (-y+3\ ,\ x-3) \qquad A(2,-1)\ ,\ B(1,2)$

$A'' = (1+3\ ,\ 2-3) = (4,-1)$

$B'' = (-2+3\ ,\ 1-3) = (1,-2)$

ب: $R(x,y) = (-y\ ,x) \qquad A' = (1,2)\ ,\ B' = (-2,1)$

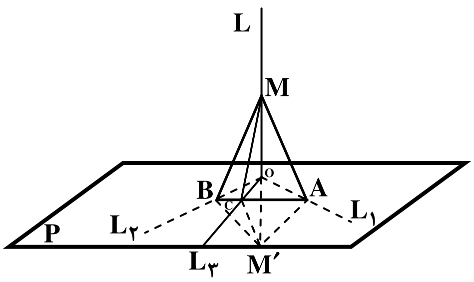
$T(x,y) = (x+h, y+k) \qquad A'' = (4,-1)\ ,\ A'(1,2)$

$(4,-1) = (1+h\ ,\ 2+k) \Rightarrow 4 = 1+h \Rightarrow h = 3\ ,\ -1 = 2+k \Rightarrow k = -3 \Rightarrow T(x,y) = (x+3, y-3)$

۱۳- الف: تجانس شیب خط را حفظ می‌کند- تحت تجانس، مرکز تجانس ثابت می‌ماند- تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند. (مگر در حالتی که $K = 1$ باشد.)

ب: تحت دوران 60° حول نقطه C مثلث ACD روی مثلث BCE تصویر می‌شود. در نتیجه $AD \to BE$ و AD ضلع BE را با زاویه‌ی 60° قطع می‌کند.

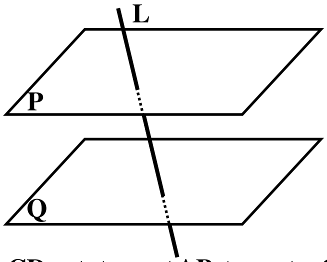
چون طول تحت دوران حفظ می‌شود، پس $AD = BE$ و همچنین $A\hat{F}B = 60^\circ$.



۱۴- اگر خط L صفحه P را در نقطه‌ای مانند O قطع کند و بر دو خط غیرموازی این صفحه مانند L_1 و L_2 که از O می‌گذرند عمود باشد باید ثابت کنیم که L بر هر خطی از این صفحه مانند L_3 که از O می‌گذرد عمود است. نقطه‌های A و B را به‌ترتیب روی L_1 و L_2 در نظر گرفته که پاره‌خط L_3 را در نقطه‌ای مانند C قطع کند. روی خط L و در دو طرف نقطه O نقطه‌های M و M' را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $OM = OM'$ باشد. در صفحه گذرنده از خط L و نقطه A خط OA عمودمنصف پاره‌خط MM' است. پس $AM = AM'$ و $BM = BM'$ و دو مثلث MAB و $M'AB$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند.

پس $MC = M'C$ و مثلث MCM' در رأس C متساوی‌الساقین است و چون OC میانه وارد بر ضلع MM' است. پس OC بر MM' عمود است یعنی خط L بر $L_۳$ عمود است. در نتیجه L بر صفحه P عمود است.

۱۵- الف: چهار ب: فصل مشترک ج: متنافر د: بی‌شمار



۱۶- فرض: $L \parallel P$ و $P \parallel Q$ حکم: $L \parallel Q$

فرض می‌کنیم خط L موازی صفحه‌ی Q نباشد پس آن‌را قطع می‌کند. اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند. یعنی خط L صفحه P را قطع می‌کند و این خلاف فرض است، پس $L \parallel Q$.

۱۷- روش اول: دو خط AB و CD در فضا نسبت به هم سه حالت دارند:

۱- موازی که در این صورت از خط AB و نقطه C غیرواقع بر آن یک صفحه می‌گذرد و چون خط CD موازی خط AB است بنابراین CD هم روی صفحه قرار دارد، یعنی هر چهار نقطه در یک صفحه‌اند.

B A

۲- متقاطع‌اند که از این دو خط هم یک صفحه می‌گذرد.

۳- متنافرند که در این حالت دو خط در یک صفحه قرار ندارند. پس حالت متنافر قابل قبول نیست.

روش دوم: اگر این چهار نقطه در یک صفحه باشند، لذا طبق وضعیت دو خط در صفحه خط‌های AB و CD یا با هم موازی‌اند یا متقاطع.