

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱/۷۵	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱
۱/۲۵	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.	۲
۱	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n 9k+7$ و $n 7k+6$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.	۳
۱/۵	باقی مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۴
۱/۲۵	معادله هم نهشتی $2x \equiv 5 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۵
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. ب) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است. پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر گراف G می نامیم. ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.	۶
۱/۲۵	گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.	۷
۰/۷۵	درگراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \bar{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۸
۱	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۹
۱/۲۵	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱۰
۰/۷۵	با ارقام عدد ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۱۱
۱/۲۵	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱۲

«بقیه سوالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲																
۱	۲	۳	۴																
۲	۱	۴	۳																
۴	۳	۲	۱																

۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱	<table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> (الف)	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	<table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> (ب)	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۳	۲	۱																				
۱	۳	۲																				
۲	۱	۳																				
۲	۱	۳																				
۱	۳	۲																				
۳	۲	۱																				

(ب) بخش انتخابی

دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱۵	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.	۱
۱۶	گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. (الف) اندازه گراف G را بیابید. (ب) نمودار گراف G را رسم کنید.	۱
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱
۱۸	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. (ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).	۱
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۱
۲۱	در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱
۲۲	قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱
۲۴	جمع نمره	" موفق باشید "

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

پاسخ سوالات الزامی

۱	الف) نادرست (۰/۲۵) $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C$ (0/25), $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$ (0/25) ب) درست (۰/۲۵) $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1 - 1}_{(0/25)} = \underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(0/25)} = 8q$	۱/۷۵
۲	$a = 4q + 3$ (0/25) $\Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(0/25)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(0/25)} = 8q' + 1$ (0/25) $\Rightarrow r = 1$ (0/25)	۱/۲۵
۳	$n 9k + 7 \times (-7)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n -63k - 49 + 63k + 54$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n 5$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1$ یا ۵ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۱۲)	۱
۴	$7^2 = 49 \equiv 4$ (0/25) $\Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1$ (0/5) $\Rightarrow 7^{28} \equiv 1$ (0/25) $\xrightarrow{\times 7^2 \equiv 4 (0/25)} 7^{30} \equiv 4$ (0/25) (مشابه سوال ۸ و ۹ صفحه ۲۹)	۱/۵
۵	$2 \equiv 35$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 5x \equiv 35$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(5,11)=1 (0/25)} x \equiv 7$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = 11k + 7$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۱۴ صفحه ۳۰)	۱/۲۵
۶	الف) دو برابر (۰/۲۵) (نتیجه ابتدای صفحه ۴۰) پ) مینیمم (۰/۲۵) (تعریف صفحه ۴۴) ب) k (۰/۲۵) (تعریف گراف منتظم صفحه ۳۵) ت) مینیمال (۰/۲۵) (تعریف صفحه ۴۶)	۱
۷	الف) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ (0/5) (مشابه مثال صفحه ۳۶) ب) دور به طول ۴ a, b, e, d, a (0/25) (تعریف دور صفحه ۳۸) (در قسمت ب اگر دور را به صورت a, d, e, b, a نوشت، نمره داده شود). پ) مسیر به طول ۳، a, e, b, c (0/25) و مسیر به طول ۴، a, d, e, b, c (0/25) (مشابه مثال صفحه ۳۸)	۱/۲۵
۸	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1$ (0/25) $\Rightarrow 9 + 12 = p - 1$ (0/25) $\Rightarrow p = 22$ (0/25) (مسئله ۱ صفحه ۳۸)	۰/۷۵
۹	الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا $\{a, b\}$ است. (۰/۲۵). (تمرین ۹ صفحه ۵۳) ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$. (۰/۲۵). (ذکر یک مجموعه کافی است.) رسم گراف (۰/۲۵) 	۱
۱۰	برای گراف مورد سوال داریم $\gamma(G) = 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 3 \leq \gamma(G)$ احاطه‌گر برای گراف است (۰/۲۵). لذا $\gamma(G) \leq 3$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (۰/۲۵). (قسمت دوم کار در کلاس صفحه ۵۰)	۱/۲۵
۱۱	$\frac{7!}{2! \times 3!}$ (۰/۲۵) = ۴۲۰ (۰/۲۵) (مشابه مثال پایین صفحه ۵۸)	۰/۷۵
۱۲	قسمت پ تمرین ۸ صفحه ۷۱) $x_1 + \dots + x_5 = 11$, $x_2 \geq 2$, $x_5 \geq 4$ (0/25) $x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$ (0/25) $\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ (0/25) \Rightarrow جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$ (0/5)	۱/۲۵

ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۳	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ ($0/5$) مربع لاتین به صورت مقابل داریم. (مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۷۲) (برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.)	۱
----	---	---

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(۰/۵)

۱۴	متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. ($0/25$) متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. ($0/25$) (مثال صفحه ۶۵)	(الف)	(ب)	۱
----	--	-------	-----	---

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

(ب)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

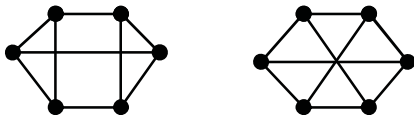
۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

پاسخ سوالات اختیاری

۱۵	چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است. ($0/25$) قسمت الف تمرین ۱ صفحه ۸	۱
----	---	---

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \quad (0/25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad (0/25) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (0/25)$$

۱۶	رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. ($0/5$) $3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$ (الف) (تعریف گراف k -منتظم صفحه ۳۵)	۱
----	---	---



۱۷	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ (۰/۲۵) از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ زوج‌اند. ($0/25$) لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. ($0/25$) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. ($0/25$) (صفحه ۴۰)	۱
----	---	---

۱۸	(الف) $4! \times 3!$ (ب) $4! \times 4!$ ($0/5$) (مشابه مثال صفحه ۵۷)	۱
----	--	---

۱۹	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی ($0/25$)، یعنی: $(0/25) = 1680 = \frac{8!}{4!}$ (الف) (مثال پایین صفحه ۷۸)	۱
----	---	---

۲۰	(مشابه کار در کلاس صفحه ۷۶) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow A = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ ($0/25$) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow B = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$ ($0/25$) $A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow A \cap B = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$ ($0/25$) $\Rightarrow A \cup B = 16 + 10 - 3 = 23$ ($0/25$)	۱
----	--	---

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه																																																																			
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸																																																																				
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir																																																																				
ردیف	راهنمای تصحیح																																																																					
نمره																																																																						
۲۱	در این مسأله $k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7 = (0/25)$ و تعداد لانه ها ۱۲ است $(0/25)$. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn + 1 = 6 \times 12 + 1 = 73 = (0/5)$ باشد.																																																																					
۲۲	برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کننده الیاف است. (سوال ۱۴ صفحه ۷۲)																																																																					
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">W_1</td> <td style="text-align: center;">W_2</td> <td style="text-align: center;">W_3</td> <td></td> <td style="text-align: center;">W_1</td> <td style="text-align: center;">W_2</td> <td style="text-align: center;">W_3</td> <td></td> <td style="text-align: center;">W_1</td> <td style="text-align: center;">W_2</td> <td style="text-align: center;">W_3</td> </tr> <tr> <td>روز اول</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲</td> <td></td> <td>روز اول</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳</td> <td></td> <td>روز اول</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱۲</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳۱</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲۳</td> </tr> <tr> <td>روز دوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱</td> <td style="text-align: center;">= A</td> <td>روز دوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱</td> <td style="text-align: center;">= B</td> <td>روز دوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳۳</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲۲</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱۱</td> </tr> <tr> <td>روز سوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳</td> <td></td> <td>روز سوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲</td> <td></td> <td>روز سوم</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۲۱</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۱۳</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">۳۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">(۰/۲۵)</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">(۰/۵)</td> <td></td> <td style="text-align: center;">(۰/۲۵)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">عدد سمت چپ هر درآیه نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص کننده نوع الیاف است.</p>			W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3	روز اول	۱	۳	۲		روز اول	۲	۱	۳		روز اول	۱۲	۳۱	۲۳	روز دوم	۳	۲	۱	= A	روز دوم	۳	۲	۱	= B	روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱	روز سوم	۲	۱	۳		روز سوم	۱	۳	۲		روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲		(۰/۲۵)			(۰/۵)		(۰/۲۵)							
W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3																																																												
روز اول	۱	۳	۲		روز اول	۲	۱	۳		روز اول	۱۲	۳۱	۲۳																																																									
روز دوم	۳	۲	۱	= A	روز دوم	۳	۲	۱	= B	روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱																																																									
روز سوم	۲	۱	۳		روز سوم	۱	۳	۲		روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲																																																									
	(۰/۲۵)			(۰/۵)		(۰/۲۵)																																																																
۲۰	جمع نمره																																																																					

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»