

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۶ / ۳ / ۶	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خردادماه سال ۱۳۹۶		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	جواب‌هایی از نابرابری $ x^2 - 1 < 3$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10})$ باشد.	۱
۰/۷۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید : الف) مرکز بازه متقارن $(-6, 4)$ برابر است با ب) دنباله $\left\{ 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$ همگرا به عدد است . ج) اینفیمم دنباله $\left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ برابر با می باشد.	۲
۱/۲۵	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$	۳
۱	حدود m را طوری تعیین کنید که معادله $x^2 + 2x + m = 0$ در بازه $(0, 1)$ حداقل دارای یک ریشه باشد.	۴
۱	مجانب مایل تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3}$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ به دست آورید.	۵
۱	پیوستگی تابع $f(x) = [\sin x]$ را در نقطه $x = \pi$ بررسی کنید.	۶
۱	بالنی را از هوا پر می کنیم آهنگ تغییر حجم بالن هنگامی که شعاع آن ۱۵ سانتیمتر است را بیابید.	۷
۱/۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در $x = 2$ بررسی کنید سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x = 2$ بنویسید.	۸
۱/۵	از $A(0, -1)$ دو مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + x$ رسم شده است معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.	۹
۱	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y = \ln(\sin x)$ ب) $\cos \sqrt{y} = y^x \sin x$	۱۰
۱	فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق پذیر f باشد و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$ مقدار $g'(2)$ را بیابید.	۱۱
۱	به کمک آزمون مشتق مرتبه اول نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ پیدا کنید.	۱۲
۱/۵	جهت تقعر نمودار f با ضابطه $f(x) = x^4 - 4x^2$ را در دامنه اش مشخص کنید و نقاط عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.	۱۳
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ را رسم کنید.	۱۴
۱/۵	با استفاده از افزایش مناسب، مساحت ناحیه‌ای تحت $f(x) = x + 2$ بالای $y = 0$ از $x = -2$ تا $x = 0$ را حساب کنید.	۱۵
۱	بدون محاسبه مستقیم انتگرال، نامساوی داده شده را ثابت کنید. $3 \leq \int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx \leq 5$	۱۶
۱	انتگرال معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int (e^x + \cos x) dx$ ب) $\int_0^1 x \sqrt{x} dx$	۱۷
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۳/۶	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۶	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱	$ x^2 - 1 < 1 \Rightarrow -3 < x^2 - 1 < 3 \xrightarrow{(+1)} -2 < x^2 < 4 \xrightarrow{x^2 \geq 0} 0 \leq x^2 < 4 \xrightarrow{(-\sqrt{x})} -2 < x < 2 \xrightarrow{(-\sqrt{x})} 1/9 < x < 2 \quad (0/25)$	۱	
۰/۷۵	(الف) -۱ (۰/۲۵) (ب) همگرایه ۳ (۰/۲۵) (ج) ۱ (۰/۲۵)	۲	
۱/۲۵	$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, n \geq M \Rightarrow \left \frac{1}{2n^2} - 0 \right < \varepsilon \Rightarrow 2n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{(-\sqrt{2\varepsilon})} n > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \xrightarrow{(-\sqrt{2\varepsilon})} M \geq \left\lceil \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \right\rceil + 1$	۳	
۱	$f(0) = m, f(1) = 2 + m, f(0) \cdot f(1) < 0 \xrightarrow{(-/)} m(2+m) < 0 \xrightarrow{(-/)} -3 < m < 0 \quad (0/25)$	۴	
۱	$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3}}{x} = 2 \quad (0/25),$ $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{2x + \sqrt{x^2 + 3} - 2x}_{(0/25)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3} + x} \right) = 0 \quad (0/25)$ مجانب مایل: $y = 2x \quad (0/25)$	۵	
۱	$f(\pi) = 0 \quad (0/25)$ $\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] = -1 \quad (0/25)$ $\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x] = 0 \quad (0/25)$	\Rightarrow (۰/۲۵) تابع در $x = \pi$ پیوسته نیست	۶
۱	$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \xrightarrow{(-/25)} V'(r) = 4\pi r^2 \xrightarrow{r=15} V'(15) = 4\pi(15)^2 = 900\pi \quad (0/25)$	۷	
۱/۵	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} = +\infty \quad (0/25)$	در $x = 2$ مشتق پذیر نیست (۰/۲۵)	۸
۱/۵	$B(a, a^x + a), y' = 2x + 1 \xrightarrow{(-/25)} m = 2a + 1 \xrightarrow{(-/25)} y - (a^x + a) = (2a + 1)(x - a) \xrightarrow{(-, -)} -1 - a^x - a = -2a^x - a$ $\rightarrow a^x = 1 \rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{(-/25)} \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \quad (0/25)$	۹	
۱	الف) $y' = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (0/25)$ ب) $\frac{y'}{2\sqrt{y}} \sin \sqrt{y} = 2yy' \sin x + y^x \cos x$	۱۰	

ادامه در برگه دوم

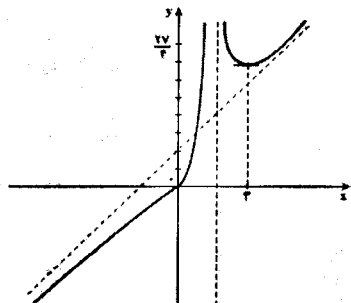
باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان بهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۳/۶	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۶	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	$f(1) = 2, f'(1) = \frac{1}{8} \rightarrow f^{-1}(2) = 1 \quad (0/25), (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = 8 \quad (0/25)$ $g'(x) = \frac{-(f^{-1})'(x)}{(f^{-1}(x))^2} \xrightarrow{(0/25)} g'(2) = \frac{-8}{1} = -8 \quad (0/25)$	۱۱																		
۱	$y' = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \xrightarrow{(0/25)} \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad (0/25) \\ \sin x = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$ <p>تابع در بازه $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ نزولی و در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی در نتیجه بنابر آزمون مشتق اول در $(0, 0)$ مینیمم نسبی است. (۰/۲۵)</p> <p>تابع در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی و در $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ نزولی در نتیجه بنابر آزمون مشتق اول در $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ماکسیمم نسبی است. (۰/۲۵)</p>	۱۲																		
۱/۵	$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \quad (0/25)$ $f''(x) = 12x^2 - 24x \quad (0/25) \xrightarrow{f'(x)=0} 12x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 \quad (0/25)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>علامت f'(x)</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>جهت تغير f</td> <td>رو به بالا</td> <td>رو به پایین</td> <td>رو به بالا</td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">(۰/۵ نمره)</p> <p style="text-align: right;">نقاط عطف: $(0, 0), (2, -16)$ (۰/۲۵)</p>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	علامت f'(x)	+	0	-	+	جهت تغير f	رو به بالا	رو به پایین	رو به بالا		۱۳			
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																
علامت f'(x)	+	0	-	+																
جهت تغير f	رو به بالا	رو به پایین	رو به بالا																	
۲	<p>مجانِب قائم: $x = 1$ (۰/۲۵) $D = R - \{1\}$</p> <p>مجانِب مایل: $y = x + 2$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ندارد</p> $y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = \frac{x^2 - 3x^2}{(x-1)^4} \xrightarrow{y'=0} x = 0, x = 3 \quad (0/25)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$-\infty$</td> <td>+</td> <td>$+\infty$</td> <td>$\frac{27}{4}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">(۰/۵ نمره)</p>	x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	y'	+	+	+	-	+	y	$-\infty$	+	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$	۱۴
x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$															
y'	+	+	+	-	+															
y	$-\infty$	+	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$															

ادامه در برگه ی سوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۳/۶	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۶	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

	 <p>(۰/۵ نمره)</p>	ادامه ۱۴
۱/۵	$\Delta x = \frac{2}{n} \quad (۰/۲۵) \quad x_i = -2 + \frac{2}{n}i \quad (۰/۲۵) \quad f(x_i) = \frac{2}{n}i \quad (۰/۲۵)$ $A = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n}i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = 2 \quad (۰/۲۵)$	۱۵
۱	$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 5)}{(x^2 + 2)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x=0 \quad (۰/۲۵)$ $f(0) = \frac{5}{2} \text{ max}, \quad f(2) = \frac{2}{2} \text{ min} \quad (۰/۲۵)$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \rightarrow 2 \leq \int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx \leq 5 \quad (۰/۲۵)$	۱۶
۱	<p>الف) $f(x) = e^x + \sin x + c \quad (۰/۵)$</p> <p>ب) $f(x) = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} \times x^{\frac{5}{3}} \Big _0^1 = \frac{3}{5} \quad (۰/۲۵)$</p>	۱۷
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	