

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۱۰ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزادسراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	اگر اشتراک دو بازه $(2,5)$ و $(\frac{3}{p}, 4)$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، مقدار a و r را بیابید.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید: الف) حد دنباله $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$ برابر است. ب) اگر دنباله $\{a_n\}$ که چنین تعریف شده است: $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ همگرا باشد، آنگاه حد دنباله $\{a_n\}$ برابر است.	۱
۳	یکنوایی و کرانداری دنباله $\left\{ \frac{(-1)^n}{n+2} \right\}$ را بررسی کنید.	۱
۴	به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد.	۱/۵
۵	حدهای توابع رو به رو را محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+9x}-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-1}$	۱/۵
۶	حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با: $v(t) = 250(16-t)^2$ ، آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.	۱
۷	معادله خط مماس بر تابع $y = \frac{x}{x^2+6}$ را در نقطه $(2, 0/2)$ پیدا کنید.	۱/۵
۸	به ازای چه مقادیری از a ، b و c تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟	۱/۵
۹	مشتق بگیرد. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = e^{\cos x}$ ب) $x^2 + y^2 - 6xy = 0$	۱
۱۰	فرض کنید $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ ، مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۱۱	به کمک آزمون مشتق مرتبه دوم نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ پیدا کنید.	۱/۵
۱۲	شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ سانتی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع کره ۶۰ سانتی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.	۱
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.	۲
۱۴	با استفاده از افزایش مناسب، مساحت ناحیه تحت $y = x^2$ بالای $y = 0$ و محدود به خطوط $x = 1$ و $x = 3$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	مقدار متوسط تابع $f(x) = x^2 + x$ را در بازه $[1, 3]$ پیدا کنید.	۱
۱۶	انتگرال‌های معین و نامعین رو به رو را بیابید الف) $\int (e^{2x} + \cos x) dx$ ب) $\int \frac{dx}{x^2}$	۱
۲۰	موفق باشید	جمع نمره

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱	$(2,5) \cap (\frac{3}{2}, 4) = (2, 4)$ (۰/۱۵) $a = \frac{2+4}{2} = 3$ (۰/۲۵) $r = \frac{4-2}{2} = 1$ (۰/۲۵)	۱
۱		۲ الف) e^2 (۰/۵) ب) 3^2 (۰/۵)
۱	جملات دنباله بصورت: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots)$ (۰/۲۵) در نتیجه غیر یکنوا است. (۰/۲۵) کراندار است (۰/۲۵) \Rightarrow همگرا به صفر (۰/۲۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 0$ (۰/۲۵)	۳
۱/۵	$a_n = \frac{1}{2n\pi}$ (۰/۲۵) , $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ (۰/۲۵) , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (۰/۲۵) $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$ (۰/۲۵) , $f(b_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ (۰/۲۵) حد ندارد $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \xrightarrow{(۰/۲۵)}$	۴
۱/۵	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{2x\sqrt{1 + \frac{9}{4x} - \frac{1}{4x^2}}} \xrightarrow{(۰/۵)} \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \xrightarrow{(۰/۵)} \frac{2}{3}$ (۰/۲۵)	۵ الف) ب)
۱	$v'(t) = -500(16-t) \xrightarrow{(۰/۵)} v'(4) = -6000$ (۰/۲۵) یعنی وقتی که ۴ دقیقه از زمان تخلیه آب منبع گذشته باشد، پس از یک دقیقه دیگر ۶۰۰۰ لیتر دیگر تخلیه می شود. (۰/۲۵)	۶
۱/۵	$y' = \frac{x^2 + 6 - 2x(x)}{(x^2 + 6)^2} \xrightarrow{(۰/۵)} \frac{-x^2 + 6}{(x^2 + 6)^2}$ (۰/۲۵) $m = f'(2) = \frac{1}{5}$ (۰/۲۵) $y - \frac{2}{10} = \frac{1}{5}(x - 2) \xrightarrow{(۰/۲۵)} y = \frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$ (۰/۲۵)	۷

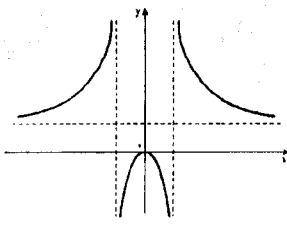
ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۱/۵	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + b + c = 1 \quad (./۲۵)$ $f'(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 1 \\ 2ax + b & x \geq 1 \end{cases} \quad (./۲۵), f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 2a + b = 2 \quad (./۲۵)$ $f''(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ 2a & x \geq 1 \end{cases} \quad (./۲۵), f''_+(1) = f''_-(1) \rightarrow 2a = 6 \quad (./۲۵)$ $\rightarrow a = 3, b = -2, c = 1 \quad (./۲۵)$	۸
۱	الف) $y' = -\sin x \times e^{\cos x} \quad (./۵)$ ب) $2x^2 + 2y^2 y' - 6y - 6xy' = 0 \quad (./۵)$	۹
۱	$y = 1 \Rightarrow x = 0 \quad (./۲۵) \quad f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 \quad (./۲۵)$ $f'(0) = 6 \xrightarrow{(.۱۲۵)} (f^{-1})'_{(1)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6} \quad (./۲۵)$	۱۰
۱/۵	$f'(x) = \sqrt{x} + 2 \sin x = 0 \xrightarrow{(.۱۲۵)} x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3} \quad (./۲۵)$ $f''(x) = 2 \cos x \xrightarrow{(.۱۲۵)} \begin{cases} f''(\frac{4\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2}) = -1 < 0 \quad (./۲۵) \\ f''(\frac{5\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}) = 1 > 0 \quad (./۲۵) \end{cases}$ نقطه $x = \frac{4\pi}{3}$ ماکسیمم موضعی و نقطه $x = \frac{5\pi}{3}$ مینیمم موضعی است. (./۲۵)	۱۱
۱	$v = \frac{4}{3} \pi r^2, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 4\pi r \times \frac{dr}{dt} \quad (./۲۵)$ $r = 60 \rightarrow v'(t) = 4\pi (60)^2 \times 2 = 43200\pi \quad (./۲۵)$	۱۲
۲	$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (./۲۵)$ مجانب قائم $x = \pm 1 \quad (./۲۵)$ مجانب افقی $y = 1 \quad (./۲۵)$	۱۳

ادامه در برگه ی سوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

	$y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad (0/25)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td></td> <td>$+\infty$</td> <td></td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table>  <p style="text-align: center;">(0/5) (0/5)</p>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	+		+	0	-	y		$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$	۱۳
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$															
y'	+		+	0	-															
y		$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$															
۱/۵	<p>بازه ی $[0, 2]$ را به n بازه ی جزء با طول مساوی تقسیم می کنیم:</p> $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \quad (0/25), \quad x_i = 1 + \frac{2}{n}i \quad (0/25), \quad f(x_i) = \frac{4}{n^2}i^2 + \frac{4}{n}i + 1 \quad (0/25)$ $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{n^2}i^2 + \frac{4}{n}i + 1 \right) \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{26}{3} \quad (0/25)$	۱۴																		
۱	$\bar{f}(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (x^2 + x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^3 = 12 \quad (0/25)$	۱۵																		
۱	<p>الف) $\int (e^{rx} + \cos x) dx = \frac{1}{r} e^{rx} + \sin x + c \quad (0/5)$</p> <p>ب) $\int_1^5 \frac{dx}{x^2} = \int_1^5 x^{-2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big _1^5 = \frac{4}{5} \quad (0/25)$</p>	۱۶																		
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر																			