www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

samadit.farhad@gmail.com

مقدمه

همکاران عزیز همانگونه که مستحضرید، کتاب ریاضی(۱) پایه دهم رشته‌های ریاضی و تجربی امسال برای اولین بار در حال تدریس است. بحث‌های فراوانی پیرامون نقاط ضعف و قوت این کتاب بین همکاران در دوره های ضمن خدمت و گروه‌های مجازی ریاضی شکل گرفت. فارغ از صحت و سقم این مباحث این ترجمه فقط اشاره‌ای دارد به دو تصویر زیر که برگرفته از کتاب ریاضی(۱) چاپ شهریور ماه ۹۵ و کتاب راهنمای تدریس معلم همین کتاب که در تاریخ ۲۴ آذرماه از طریق تارنمای گروه ریاضی دفتر تالیف بارگذاری شد.

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < ۰$ در این صورت $a^{\frac{۱}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۲}{۴}}$ تعریف نمی‌شوند.

شکل ۱: شکل برگرفته از کتاب درسی اصلی

پس از ان برای هر عدد، توان کسری تعریف می‌شود :

هرگاه $a > ۰$ و n عددی طبیعی باشد، $a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$

توجه داشته باشید که در این سطح باید همواره a مثبت فرض شود. ما در اینجا توان کسری عددهای منفی را تعریف نمی‌کنیم؛ گرچه در ریاضیات عالی چنین امری ممکن می‌باشد.

تعمیم : وقتی کسر، یک کسر دلخواه مانند $\frac{m}{n}$ باشد.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

شکل ۲: شکل برگرفته از کتاب راهنمای معلم ریاضی (۱)

همانگونه که بنده در جایی دیگر اشاره کردم، اینکه عبارتی تعریف نمی‌شود(مثل $\frac{۱}{۰}$) با این بیان که این عبارت را تعریف نمی کنیم، دو چیز متفاوت است. خوشبختانه در راهنمای معلم این مورد، که در تصویر دوم دیده می‌شود اصلاح شد. اما متاسفانه باعث برداشت‌هایی کاملا متفاوت توسط همکاران عزیز شد. اگر چه همانطور که این مقاله در انتها اشاره می‌کند، ریاضیات قائم به شخص یا کتاب نیست، با اینحال خواندن داستان زیر برای همکاران عزیز خالی از لطف نیست. این مقاله نوشته‌ی خانم‌ها *Dina Tirosh & Ruhama Even* است که در مجله‌ای در هلند به

چاپ رسیده است.

چکیده

در این مقاله دو شیوه‌ی برخورد با عبارت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. اولین رویکرد تعریف آن بصورت :

$$(-۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$$

است. دومین رویکرد هم تعریف نکردن $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ است. مزایا و معایب هر دو شیوه را ملاحظه خواهیم کرد و چند راهنمایی و ایده نیز برای معلمان آموزش و پروش در نظر گرفته شده است.

مشکل ران

آقای ران یک معلم دبیرستان است. وی در نظر دارد طرح درسی برای مبحث توان‌های گویا آماده کند. وی در ابتدا چند مثال آماده و حل می‌کند که شامل $۸^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ هستند و بترتیب به جوابهای ۲ و ۲− می‌رسد. وی سپس به کتابخانه رفته و چند کتاب مختلف را بررسی می‌کند. او در تمام این کتاب‌ها این مطلب را مشاهده می کند:
« برای هر عدد حقیقی و مثبت x و هر عدد صحیح و مثبت m, n داریم: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ »

بنابراین آقای ران کاملا متقاعد می‌شود که اولین مثال و راه حلش درست است.($۸^{\frac{۱}{۳}} = ۲$) وی سپس دومین مثال خود را در نظر می‌گیرد و با مراجعه به چند کتاب بویژه کتاب ($Dugopolski$ ۱۹۹۰) متوجه می‌شود که تعریف $x^{\frac{m}{n}}$ زمانی که $x < ۰$ است و m, n اعداد صحیح مثبتی هستند، با حل دومین مثال خودش سازگار است. برای خاطر جمع شدن از اطلاعاتش در این زمینه، کتاب دیگری را مطالعه نمود.($senk$ ۱۹۹۰)
وی با دیدن تعریف زیر که در صفحه ۴۵۴ کتاب آمده بود سخت متحیر شد.

« **قضیه توانهای گویا:**
برای هر عدد حقیقی و مثبت x و اعداد صحیح و مثبت m, n .
$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ توان mام ریشه‌ی مثبت nام x است.
و این عبارت برابر $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ است که در واقع ریشه‌ی nام مثبت توان m ام x است.
چون $x^{\frac{1}{n}}$ فقط برای $x > ۰$ تعریف شده است پس قضیه‌ی توانهای گویا فقط برای پایه‌های مثبت بکار می‌رود.»

آقای ران سپس تمرین ۱۹ در صفحه‌ی ۴۵۷ کتاب را خواند و آنرا بصورت زیر حل کرد:
« تمرین ۱۹: این تمرین نشان می‌دهد که چرا قضیه‌ی توان‌های گویا فقط برای پایه‌های مثبت بکار می‌رود.
۱ – اگر $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ را به عنوان ریشه‌ی سوم حقیقی عدد ۸− بگیریم آنگاه: $\sqrt[۳]{-۸} = \cdots$.
۲ – اگر $(-۸)^{\frac{۲}{۶}}$ از قضیه توانهای گویا تبعیت کندآنگاه : $(-۸)^{\frac{۲}{۶}} = \left((-۸)^۲\right)^{\frac{۱}{۶}} = \cdots$.
۳ – آیا در این سوال رابطه‌ی $(-۸)^{\frac{۱}{۳}} = (-۸)^{\frac{۲}{۶}}$ برقرار است؟»

آقای ران به پرسش اولی جواب ۲− و به دومی جواب ۲ داد. با حل این تمرین آقای ران احساس بلاتکلیفی و سردرگمی می کرد. برای مطالعه‌ی بیشتر به ویرایش جدید همان کتاب ۱۹۹۶ $senk$ نگاهی انداخت و در صفحه‌ی ۴۵۲ مطلب زیر را دید:

«قضیه توان $\frac{۱}{n}$:
ریاضدان‌ها می توانند نماد $x^{\frac{۱}{n}}$ را برای هر کدام از ریشه های عدد x در نظر بگیرند. با اینحال برای اطمینان از اینکه $x^{\frac{۱}{n}}$ تنها دارای یک مقدار باشد، ما پایه را به $x \geq ۰$ و حقیقی محدود کرده‌ایم و لذا $x^{\frac{۱}{n}}$ مبین ریشه nام یکتا و غیرمنفی عدد x است. بویژه $x^{\frac{۱}{۲}}$ معرف ریشه‌ی دوم مثبت x است و $۲^{\frac{۱}{۳}}$ معرف ریشه‌ی سوم مثبت عدد ۲ است. زمانی که از قضیه توانهای گویا استفاده می کنید به پرانتزها توجه خاصی داشته باشید. زمانی که پایه منفی باشد قوانین اعداد تواندار در اینجا کاربرد ندارند. اگرچه ممکن است ماشین حساب شما عبارت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ را محاسبه کند اما ما چنین عباراتی را در این کتاب در نظر نخواهیم گرفت.»

آقای ران در صفحه‌ی ۴۵۷ این کتاب یک کار در کلاس جالب دید:

« در این کار در کلاس برخی مشکلات کار با توانهای گویای غیر صحیح، زمانی که پایه منفی است آشنا می‌شوید. سعی کنید کار را گروهی انجام دهید و از ماشین حساب و کامپیوترهای متفاوتی استفاده کنید تا بتوانید نتایج حاصله را بهتر با هم قیاس کنید:

۱. نمودار $y = x^{\frac{۱}{۳}}$ را رسم کنید.

۲. حال رابطه‌ی $y = \left(x^{\frac{۱}{۶}}\right)^{۲}$ را در نظر بگیرید. قبل از رسم در مورد نمودار این رابطه چه فکری می کنید؟ آیا نمودارش همان نمودار $y = x^{\frac{۱}{۳}}$ است؟ اگر هست چرا و اگر نیست چرا؟

آقای ران متوجه شد که برای $x \geq ۰$ هر دو نمودار یکسان هستند، اما برای $x < ۰$ نمودارها متفاوت هستند. در کتاب راهنمای تدریس معلم همین کتاب در صفحه‌ی ۴۵۷ در مورد همین فعالیت آمده است:

«هدف این کار در کلاس این است که چرا در قضیه توانهای $\frac{۱}{n}$ ما پایه را به $x \geq ۰$ محدود کرده‌ایم. به عبارت بهتر چرا در توانهای گویا، پایه را منفی در نظر نگرفته‌ایم. نتیجه‌ی بدست آمده با تاکید بر نمودار مبین آنست که: اگر پایه‌های منفی را بکار ببریم آنگاه مثال‌های نقض زیادی در مورد خواص اعداد تواندار در بند ۲ − ۷ بدست می‌آید.» [۱]

برای آقای ران چنین وضعیتی نادر و البته جالب بود که کتب مختلف در مورد یک عبارت بیان‌های متفاوتی دارند. وی مجددا به دو کتاب دیگر در کتابخانه نگاه کرد و هر دو کتاب $Goren\ ,\ Sfard$ در مورد تعریف نکردن $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ بحثی مشابه کتاب $senk$ داشتنند و علت را چنین بیان کردند که عدد ۸− با دو نمایش یکسان $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ نتایج متفاوتی می‌دهد.

[۱] البته آقای ران مثال‌های نقضی را هم در مورد قاعده‌ی به توان رساندن اعداد تواندار یافت. منظور عبارت $(a^n)^m = a^{mn}$ است.

در این وضعیت که وی کمی مضطرب شده بود از خودش سوالاتی پرسید: آیا $(-۸)^{\frac{۱}{۳}} = -۲$ است یا یکی از عبارات تعریف نشده ریاضیات است؟ جواب درست چیست؟ در مورد $(-۸)^{\frac{۲}{۶}}$ چطور؟ آیا همانگونه که در برخی کتب اشاره شده ابتدا با کسر $\frac{۲}{۶}$ را ساده کرد و سپس آنرا برابر -۲ تعریف کرد یا خیر؟ چرا داشتن مقداری یکتا برای $x^{\frac{۱}{n}}$ اینقدر مهم است؟ آیا برای تصمیم گرفتن در مورد تعریف کردن یا نکردن یک عبارت ریاضی می‌توان به نمودار اتکا کرد؟ چگونه ممکن است کتب درسی مختلف در مورد یک تمرین جواب های مختلفی ارائه کرده باشند؟

برداشت معلمان از عبارت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$

فعلا آقای ران را با این مشکلش رها کرده و نگاه خود را به مقاله‌ی دیگری معطوف می کنیم. در این مقاله موضوع تحقیق، برداشت یا تصور معلمین ریاضی از عمل‌های ریاضی تعریف نشده است. تعدادی از معلمین ریاضی انتخاب شده و پرسشنامه ای در اختیار آن‌ها قرار داده شد. در این پرسشنامه تعدادی اعمال ریاضی تعریف شده و یا تعریف نشده قرار داده شد و از معلمین خواسته شد به پرسشها پاسخ دهند. از آنان خواسته شد که هر عمل تعریف شده‌ای (با توجه به برداشت معلم) را جواب عددی بدهند و اگر عملی تعریف نشده است توضیح دهند چرا و چگونه آن عمل تعریف نشده است. یکی از این پرسش‌ها عبارت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ بود. پس از تکمیل پرسشنامه‌ها ، با معلمین بصورت جداگانه مصاحبه‌ای انجام شد. در این مصاحبه‌ها معلمین با واکنش مشترک اغلب دانش‌آموزان در مواجه با عبارات مختلف ریاضی روبرو شدند. دو مورد از آنها مربوط به $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ بود. در مصاحبه از معلم مصاحبه شونده خواستند که خود را در وضعیت آموزشی در کلاس درس تصور کند و فرض کند که دو دانش‌اموز عبارت فوق را بصورت‌های زیر محاسبه کرده باشند:

$$\begin{cases} ۱)\ (-۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲ \\ \\ ۲)\ (-۸)^{\frac{۱}{۳}} = (-۸)^{\frac{۲}{۶}} = \sqrt[۶]{(-۸)^{۲}} = \sqrt[۶]{۶۴} = ۲ \end{cases}$$

همانطور که در مقاله اشاره شده است اغلب معلمین به مانند آقای ران گزینه ی اول را انتخاب کرده بودند. تنها تعدادی از معلمین به این مطلب اشاره کرده بودند که این عبارت به دلیل وجود پایه‌های منفی با توانهای گویا تعریف نشده است. اما مهمترین نتیجه مطالعه ما این بود که اغلب معلمین هر دو نوع استدلال دانش آموزان را منطقی دیده بودند با این حال می‌دانستند که هر دو مورد یک و دو نمی‌تواند به صورت همزمان برقرار باشد. آنها به درستی راه برون رفت از این موضوع رانمی‌دانستد. چراکه شاهد دو راه حل کاملا متفاوت و درعین حال ناسازگار بودند. به همین دلیل نمی‌توانستند تصمیم درست را اتخاذ کنند. تعدادی ازمعلمین، همان راه حل اول را انتخاب کردند و قبول کردند که توضیح مناسبی برای اشتباه بودن راه حل دوم ندارند.

آیا عبارت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ باید تعریف شود؟

اجازه دهیدبه آقای ران و مشکلش بازگردیم و ببینیم چگونه میتوان به وی کمک کرد. آیا باید $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$تعریف شود؟ آقایان گوئل و روبیلارد در مقاله‌ی خود (۱۹۹۶) بحث کرده‌اند که باید تعریف شود و مقدارش همان -۲ باشد. منبع

ادعای آنها همان دو کتاب قبلی است که به آنها اشاره شد. در واقع تعریف آنها بدین صورت است که برای هر عدد حقیقی a و هر عدد مثبت و صحیح m بطوریکه $\frac{m}{n}$ تحویل‌ناپذیر باشد تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

علاوه بر این اگر $r = \frac{p}{q}$ باشد و ریشه‌ی qام a عددی حقیقی باشد آنگاه a^r را بصورت $a^r = a^{r_۱}$ تعریف می کنیم که $r_۱$ صورت تحویل‌ناپذیر r است.[۲]

مزایا و معایب این تعریف برای آقای ران چیست؟ اجازه دهید نگاهی جامع تر به پیامدها و نتایج تعریف یک عمل ریاضی داشته باشیم، چراکه در اینصورت رجحان یک تعریف بر دیگری معلوم شده و قدرت انتخاب را بالاتر می‌برد. در ریاضیات اغلب تمایل به تعمیم تعاریف اعمال ریاضی به حیطه‌های جدید است. با اینحال این توسیع اعمال ریاضی، بعضا مشکلاتی را در پی خواهد داشت.(بطور مثال باعث ایجاد تناقض میشود، قضایای مهم و حساس و یا خواص اعمال را نقض می‌کنند) . در این مواقع ریاضیدانان ترجیح می دهند که آن عبارت را تعریف نکنند. در مقاله دیگر ما ($Even\ and\ Tirosh$ ۱۹۹۵)به چند عبارت تعریف نشده (شامل $\frac{a}{۰}$ وقتی که $a \neq ۰$ و $\frac{۰}{۰}$) اشاره شده است. باید اشاره کنیم که جامعه ریاضی، عموما انتخاب اول را برمیگزیند و نه انتخاب دوم (یعنی تعریف $\frac{a}{۰}$) چراکه هر تعریفی از این عبارت ناقض تعریف تقسیم است، که به عنوان معکوس عمل ضرب در نظر گرفته می‌شود.

داستان $\frac{۰}{۰}$ نیز در گذر زمان، آمیخته با شک و تردید فراوان، بحث‌ها و اختلاف نظرهای متفاوت بوده است.(من جمله تصمیم بر تعریف $\frac{۰}{۰} = ۰$). اما تصمیم نهایی تعریف نکردن عبارت $\frac{۰}{۰}$ بود و این‌روزها بسیار مشکل است(اگر نگوییم ناممکن) شما کتابی درسی بیابید که این عبارت در آن تعریف شده (معین) باشد.

اما سوژه مورد بحث ما در اینجا کاملا متفاوت است.(نسبت به بحث بالا) همانطور که قبلا اشاره شد در مورد تعریف کردن یا نکردن $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ اتفاق نظر و اجماع کلی وجود ندارد.

قبلا اشاره کردیم که در کتاب ($senk$ ۱۹۹۶) فعالیتی ترتیب داده شده بود تا به دانش‌آموزان نشان دهد که خواصی از قوانین اعداد تواندار وجود دارد که در مورد پایه‌های منفی با توان گویا کاربرد ندارند. یکی از این خواص $(b^m)^n = b^{mn}$ است. این خاصیت حتی زمانی که تعریف گوئل و روبیلارد را نیز قبول کنیم باز هم برقرار نیستند. به معنی که عدد گویای ظاهر شده در توان را به صورت تحلویل‌ناپذیرش تبدیل کنیم و سپس تعریف کنیم:

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

دلیل آن نیز واضح است. اگر خاصیت $(b^m)^n = b^{mn}$ را بپذیریم آنگاه:

$$\left((-۸)^۲\right)^{\frac{۱}{۶}} = ۶۴^{\frac{۱}{۶}} = ۲$$

از طرفی بنا به تعریف گوئل و روبیلارد داریم:

$$(-۸)^{\frac{۲}{۶}} = (-۸)^{\frac{۱}{۳}} = -۲$$

[۲] در اینجا ذکر یک نکته ضروری است و آن اینکه این قسمت از تعریف تلاش برای استقلال تعریف از صورت‌های متفاوت نمایش عدد r است که البته لازم است.

و همچنین عبارت $\left((-۸)^{\frac{۱}{۶}}\right)^{۲}$ معرف یک عدد حقیقی نیست.(در اعداد حقیقی تعریف نشده است)
همچنین توجه داریم که در اعداد حقیقی عبارت $\left((-۲)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۲$ است، در حالیکه $\left((-۲)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۲}$ معرف عددی حقیقی نیست.
آیا باید پیشنهاد گوئل و روبیلارد را برای تعریف دو مرحله‌ای $(a^{\frac{m}{n}}, \quad a < ۰)$ به قیمت از کار افتادن قاعده‌ی $(b^m)^n = b^{mn}$ بپذیریم؟ نتایج چنین انتخابی چیست؟ آیا باید تعمیم توان‌های صحیح به گویا را فقط به پایه های مثبت محدود کنیم؟

در ادامه نظر یک استاد دانشکده تربیت دبیر، استاد اولریچ را که مربوط به همین موضوع است بیان می کنیم.
« در کلاس درس از دانشجویان تربیت دبیر تقاضا کردم که درسی در سطح پایه ی یازدهم، در مورد توانهای گویا ارائه کنند. آنها دو تعریف ارائه کردند. اولین تعریف که همان تعریف گوئل و روبیلارد هست و شامل پایه‌های منفی هم می‌شود را با $D_۱$ نشان می دهیم. تعریف دوم که فقط به پایه های غیرمنفی محدود شده است را با نماد$D_۲$ نمایش می دهیم. واضح است که $D_۲$ بستگی به نمایش عدد گویای $\frac{m}{n}$ ندارد، و این البته در تعریف یک عمل در ریاضیات بسیار حائز اهمیت است. اما دلایل دیگری بر برتری $D_۲$ نسبت به $D_۱$ وجود دارد که در زیر فهرست شده‌اند.

۱- دلیل اصلی برای تعریف $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$ اینست که می‌خواهیم $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ برابر a^m شود. بنابراین این ایجاب می‌کند که $a^{\frac{۲}{۶}}$ باید برابر $\sqrt[۶]{a^۲}$ باشد تا اینکه برابر $\sqrt[۳]{a^۱}$ باشد و یا حداقل می‌خواهیم رابطه‌ی اول نیز برقرار باشد. این رابطه برای $D_۲$ برقرار است در حالیکه برای $D_۱$ برقرار نیست.

۲- برابری $(a^b)^c = a^{bc}$ همیشه تحت تعریف $D_۲$ درست است، اما با تعریف $D_۱$ خیر.[۳] قضیه‌ی $(a^b)^c = a^{bc}$ در اثبات $\log_a(b^c) = c.\log_a b$ و $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ استفاده میشود.

۳- اتحاد $a^r.a^s = a^{r+s}$ برای هر دوی $D_۱$, $D_۲$ برقرار است.

۴- گیریم $r = \frac{۳۳۳۳۳۳۳۰۴۸}{۹۹۹۹۹۹۹۱۷۵}$ و $s = \frac{۶۶۶۶۶۶۶۱۱۵}{۱۹۹۹۹۹۹۸۳۴۷}$ باشند. هر دو عدد r, s بصورت تحویل‌ناپذیرشان نوشته شده‌اند و به یکدیگر بسیار نزدیک‌اند.($|r - s| < ۱۰^{-۲۰}$). از تعریف $D_۱$ استفاده کرده و مقادیر $(-۸)^r$ و $(-۸)^s$ را محاسبه کنید و نشان دهید که اولی به عدد ۲ بسیار نزدیک است درحالیکه دومی به عدد ۲− بسیار نزدیک است. می دانیم که برای پایه‌های مثبت در حالت کلی اگر $a_n \longrightarrow a$ باشد آنگاه $b^{a_n} \longrightarrow b^a$ است. با این حساب زمانی که پایه منفی باشد این قضیه را نمی‌توان بکار برد و یا حتی به توان‌های گنگ تعمیم داد.[۴]

[۳] شماره‌های ۱ و ۲ در صفحه‌ی ۳ در بخش برداشت معلمان را ببینید.
[۴] هدف مولف در اینجا این بوده است که نشان دنباله $(-۸)^{r_i}$ کوشی نیست و لذا واگراست. این مطلب البته با پایه‌های مثبت درست است.

۵- در عصر کامپیوتر براحتی می‌توان برای یک معادله دیفرانسیل معمولی ساده جواب عددی یا نموداری یافت. پس تعریف کردن تابع e^x به کمک معادله‌ی دیفرانسیل $y' = y$ با مقدار اولیه $(0, 1)$ یک پیشنهاد خوب است. نتیجه‌ی این تعریف ما را به $a^x = e^{x\,lna}$ می‌رساند، که البته برای پایه‌های منفی برقرار نیست.(چنین وضعیتی مجددا در تعریف تابع $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u}du$ و یا تعریف e^x بصورت سری مک لورن ظاهر می‌شود.)
استاد اولریچ در انتها تذکر می‌دهد که می‌توان از تعریف D_1 استفاده کرد و در مورد خواص اعداد تواندار فرض $a > 0$ را لحاظ کرد، اما با این روش و تفکر مطالب را پیچیده و بغرنج می کنیم در حالیکه اساسا ضرورتی ندارد.

تصمیم نهایی آقای ران

با توجه به بررسی مطالعه‌ی کتب مختلف، نهایتا آقای ران ترجیح می دهد که عبارت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نکند.

سخن آخر

آیا این پایان راه است؟
خب ما اعتقاد داریم که تصمیم آقای ران تصمیم درستی است. اما این موضوع اصلی در اینجا نیست. در راه رسیدن به این نتیجه، آقای ران آشنایی بیشتری با ماهیت ریاضیات، اعمال ریاضی و تعاریف بدست آورد. علاوه بر این وی یاد گرفت که نمی‌توان در تصمیم نهایی در مورد یک بحث ریاضی تنها به کتب درسی اکتفا کرد. بویژه در همین بحث ما در مورد سوژه‌ی ران دیدیم که چگونه کتب مختلف دیدگاه‌های متفاوتی را ارائه کرده‌اند. همانطور که می‌دانیم درک و فهم کامل اعمال تعریف نشده در ریاضیات مشکل است. استدلال‌های درگیر و بعضا پیچیده‌ای که در پشت تصمیم‌گیری در مورد تعریف نکردن یک عبارت ریاضی وجود دارد، به طرز آشکاری ماهیت ریاضیات و تعاریف در ریاضیات را هویدا می‌کند.
به باور ما در برنامه‌ی آموزشی معلمان آموزش و پروش گنجاندن چنین چالش‌هایی باعث افزایش اطلاعات معلمان و به تبع آن افزایش مهارت در آموزش ریاضیات خواهد شد. مادامی که معلمان با چنین چالش‌هایی به مانند چالش آقای ران درگیر هستند، بیشتر پی به ماهیت ریاضیات و نحوه‌ی آموزش ریاضیات می‌برند.(به عنوان مثال: ریاضیدانان چگونه درباره‌ی تعریف یک عمل تصمیم می‌گیرند؟ آیا عموما یک خط مشی واحدی وجود دارد که بر اساس آن حکم به تعریف شدن یا نشدن یک عمل ریاضی داد؟ بدفهمی‌های رایج در مورد این سوژه‌ها چیست؟ علت احتمالی چنین بدفهمی‌هایی چیست؟)
مشکلات دانش‌آموزان و معلمان درریاضیات که عللی مرکب از روحیات،آموزه‌ها و نحوه‌ی آموزش آنهاست،می‌تواند با چنین بحث‌هایی تحت تاثیر قرار گرفته و بهبود یابد. بنابراین پیامدهای چنین چالش‌هایی باعث افزابش آموزه‌ها و همچنین بهبود نحوه‌ی تدریس دبیران ریاضی خواهد شد.
خب،حال باید $(-8)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف کرد یا خیر؟ برخی معتقدند که باید تعریف شود و برخی مخالف این نظر هستند. از نظر ما آشنایی قبلی دبیران ریاضی با چنین چالش‌هایی،قبل از شروع به تدریس لازم است.
ما مایل هستیم که آنها دیدی از ریاضی را در خود ایجاد کنند که به آن بعنوان یک نوآوری آزاد و پویا از خرد انسان

نگریسته شود که متاثر از نیروهای مختلف درون وبیرون ریاضی است.

یک نتیجه‌ی اخلاقی از این داستان اینست که در ریاضیات،مانند سایر فعالیت‌های بشری، ما به دقت به یکدیگر گوش کنیم و سعی کنیم دیدگاه‌های یکدیگر را بفهمیم،خواه طرف مقابل دانش‌آموز باشد ویا همکار ما باشد.

فرهاد صمدی

دبیر ریاضی ناحیه یک شیراز

دیماه ۱۳۹۵

REFERENCES

Borasi, R.: 1992, *Learning Mathematics Through Inquiry*, Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books.

Dugopolski, M.: 1995, *College Algebra*, Addison-Wesley.

Even, R. and Tirosh, D.: 1995, 'Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter', *Educational Studies in Mathematics* **29**, 1–19.

Goel, S.K. and Robillard, M.S.: 1996, 'The equation $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = 2$', *Educational Studies in Mathematics*.

DINA TIROSH
Dept. of Science Education,
School of Education,

RUHAMA EVEN
Dept. of Science Teaching,
Weizmann Institute of Science,