به نام خدا

کاشی کاری(Tilings)

اردوان محمدی

یکی از چالش های اساسی دبیران در آموزش درس ریاضی ، قانع نمودن دانش آموزان در کاربردی بودن مطالب ارائه شده می باشد و مطمئنا با ارائه ی مفاهیم کاربردی ریاضی(مخصوصا کاربردهای ملموس) می توانیم در کم کردن فاصله ای که متاسفانه بین دانش آموزان و یادگیری ریاضی ایجاد شده است قدم های موثری برداریم.

عدم پرداختن به مباحث کاربردی و ملموس، در کنار آموزش ناقص این درس ،ضربات غیر قابل جبرانی به یادگیری این درس وارد نموده است و باعث شده است که در حقیقت اکثر دانش آموزان ما نه تنها لذتی از یادگیری ریاضی احساس نکرده، بلکه عملا یک حالت تدافعی در مقابل یادگیری این درس اتخاذ نمایند.

خوشبختانه در کتب نو نگاشت ریاضی متوسطه ی اول و دوم تا حدودی در رفع این نقیصه، اقدام هایی صورت گرفته است، هر چند شاید این رویکرد کافی نباشد، اما اتفاق مبارکی قلمداد می شود.

یکی از این مباحث کاربردی ملموس ، کاشی کاری می باشد که در کتاب ریاضی هشتم گنجانده شده است .

سطحی بودن مطلب ارائه شده در کتاب در قالب چند فعالیت و تمرین، تکمیل نشدن این مبحث درکتب ریاضی متوسطه ی دوم و آموزش ناقص باعث شده است که این مطلب خیلی جالب نه تنها محرکی برای جذاب تر نمودن یادگیری ریاضی برای دانش اموزان نشده است بلکه عملا به معضلی برای همکاران دبیر هم تبدیل شده است. امیدواریم مولفین محترم کتب نونگاشت درسی متوسطه ی دوم،به این ارتباط و تکمیل نمودن مباحث مطرح شده در کتب ریاضی متوسطه ی اول بیشتر عنایت داشته باشند و شاهد تغییراتی مفید در سال های آینده باشیم.

همه ی ما با کف پوش های چوبی و تخته ای که در نمای راهرو ها، کف سالن ها و .....مواجه شده ایم، اما بندرت می دانیم که این هنر، ریشه در کاربردهای ریاضی دارد. شکل هایی ترکیبی از مثلث ها، چهار ضلعی ها و.....که در پیرامون خودمان به وفور پیدا خواهیم کرد.

فیثاغورث، نخستین کسی است که پایه گذار مبحث کاشی کاری بوده است، او معلوم نمود که سطح اطراف یک نقطه را روی یک صفحه، تنها با سه نوع از شکل های منتظم می توان، بدون فاصله، پوشانید(مثلث متساوی الاضلاع- مربع-شش ضلعی منتظم)

در این جا ما با مبحث کلی تری روبرو هستیم و می خواهیم بررسی کنیم که در اطراف یک نقطه، چگونه می توان با چندضلعی های مختلف منتظم، سطح صفحه را بدون شکاف و فاصله پوشانید.

انواع کاشی کاری

الف: کاشی کاری منتظم ب: کاشی کاری نیم منتظم

. تعریف کاشی کاری منتظم:

هرگاه تنها از یک نوع nضلعی منتظم به گونه ای استفاده شود که فقط در ضلع ها و راس ها اشتراک داشته باشند.

مسئله1: چند نوع فرش کردن منتظم وجود دارد؟

حل: بدیهی است برای آن که هیچ فضای خالی یا هم پوشانی اتفاق نیفتد، باید مجموع زوایا در هر راس 360 درجه باشد، حال اگر در هر راس، دارای K تا n ضلعی منتظم وجود داشته باشد، آنگاه بدیهی است که اندازه ی هر زاویه ی این n ضلعی منتظم باید $\frac{360}{k}$ درجه باشد. از طرفی می دانیم اندازه ی هر زاویه ی داخلی n ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{(n-2)}{n}180$ بدست می آید، پس خواهیم داشت که

$$\frac{(n-2)}{n}180=\frac{360}{k}$$

طرفین را بر 180 تقسیم می نماییم

$$\frac{(n-2)}{n}=\frac{2}{k}$$

طرفین را در **nk** ضرب می نماییم

$$k(n-2)=2n$$

به طرفین عدد **4** اضافه میکنیم

$$k(n-2)+4=2n+4$$

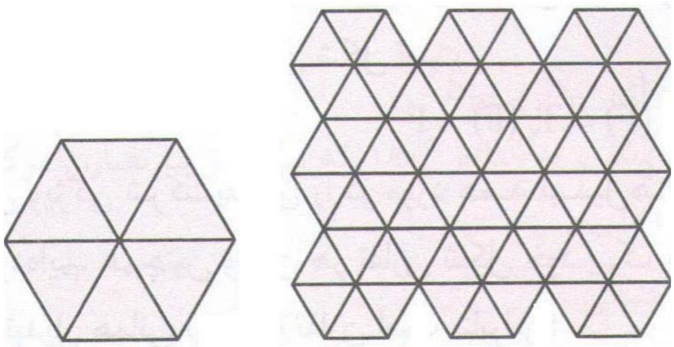
با یک دسته بندی مناسب خواهیم داشت که

$$kn-2k+4=2n+4\xrightarrow{\text{جابه جایی}}(kn-2n)-(2k-4)4\Rightarrow n(k-2)-2(k-2)=4\Rightarrow(n-2)(k-2)=4$$

حال با توجه به این که n و k اعدادی طبیعی اند و $3 \le n$ روی مقادیر مختلف بحث می نماییم

1: اگر n=3 باشد(مثلث متساوی الاضلاع) آنگاه خواهیم داشت که k=6

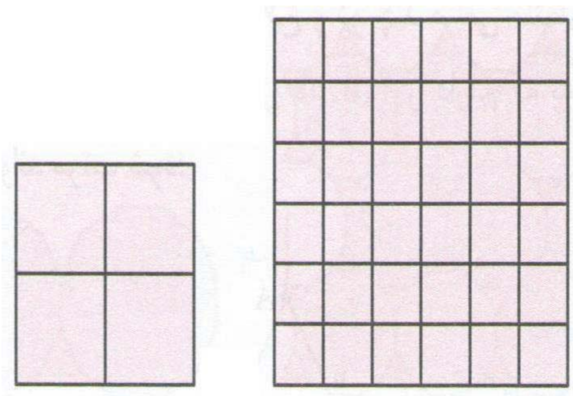
این بدان مفهوم است با شش مثلث متساوی الاضلاع می توان اطراف هر راس را پوشاند یا فرش نمود.(نمودار 1)



نمودار(1)

2: اگر n=4 (مربع) باشد، آنگاه خواهیم داشت که k=4

یعنی آن که با چهار مربع می توان اطراف هر راس را فرش نمود.(نمودار 2)



نمودار (2)

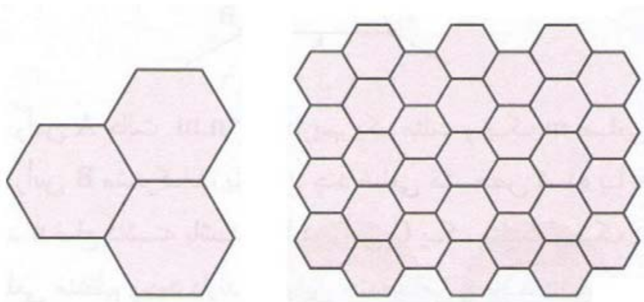
3: اگر n=5 (پنج ضلعی منتظم) باشد، آنگاه

$$3(k-2)=4 \Rightarrow k-2=\frac{4}{3} \Rightarrow k=\frac{10}{3} \notin \mathrm{N}$$

این بدان معنا می باشد که با پنج ضلعی منتظم نمی توان کاشی کاری منتظم انجام داد.

4: اگر n=6 (شش ضلعی منتظم) باشد آنگاه خواهیم داشت که k=3

این بدان مفهوم است که با سه ، شش ضلعی منتظم می توان صفحه را فرش نمود.(شکل 3)



(3)

تمرین1: ثابت نمایید برای هیچ n دیگری امکان کاشی کاری منتظم وجود ندارد؟

تمرین 2: مطالب ارائه شده در بالا را با مهارت کلامی ثابت نمایید؟

اندازه ی هر یک از زوایای داخلی 3 ،4 و6 ضلعی منتظم به ترتیب 60 ، 90 و 120 درجه می باشند که اینها مقسوم علیه های 360 می باشند، پس کاشی کاری با این n ضلعی های یاد شده امکان پذیر است. در ثانی اندازه ی زاویه ی داخلی هیچ nضلعی منتظم دیگری مقسوم علیه 360 نمی باشد، لذا کاشی کاری با آنها امکان پذیر نمی باشد.

کاشی کاری نیم منتظم(ارشمیدسی)

تعریف: اگر ما در هر راس از حداقل از 2 نوع n ضلعی منتظم به گونه ای استفاده نماییم که هر راس یکی، راسی از دیگری باشد.

مسئله: حداکثر چند **نوع** nضلعی منتظم در کاشی کاری نیم منتظم موضوعیت دارد؟

کاشی کاری نیم منتظم با سه n ضلعی منتظم

مسئله: چند نوع کاشی کاری نیم منتظم با سه n ضلعی منتظم امکان پذیر است؟

حل: اگر n_1 ، n_2 و n_3 سه، n ضلعی منتظم با فرض $n_1 \le n_2 \le n_3$ باشند، آنگاه

$$\frac{180(n_1-2)}{n_1}+\frac{180(n_2-2)}{n_2}+\frac{180(n_3-2)}{n_3}=360$$

با تقسیم طرفین بر 180 و ضرب طرفین در $n_1n_2n_3$ خواهیم داشت که

$$n_2n_3(n_1-2)+n_1n_3(n_2-2)+n_1n_2(n_3-2)=2n_1n_2n_3 \Rightarrow ....$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

از آن جا که ساده ترین چند ضلعی منتظم، مثلث متساوی الاضلاع است، یعنی آن که $n_1=3$

پس با توجه به فرمول اخیر خواهیم داشت که

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}$$

حالت 1: اگر $n_2=4$ آنگاه خواهیم داشت که

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_3}=\frac{-1}{12} \Rightarrow n_3=-12$$

که ملاحظه می نماییم یک عدد منفی بدست آمد، پس قابل قبول نیست.

تمرین: با شروع از $n_2=3$ چه اتفاقی خواهد افتاد؟

حالت 2: اگر به n_2 مقدار 5 را نسبت دهیم باز ملاحظه می نماییم که غیر ممکن است. چرا؟

حالت 3: اگر به n_2 مقدار 6 را نسبت دهیم، آنگاه خواهیم داشت که

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{n_3}=0$$

که غیر ممکن است.

حالت 4:اگر به n_2 مقدار 7 را نسبت دهیم، آنگاه خواهیم داشت که

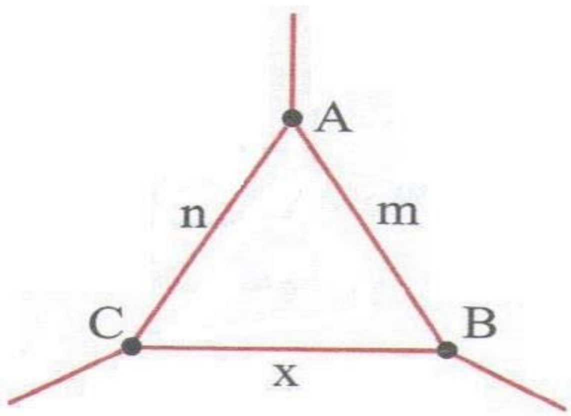
$$\frac{1}{7}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{n_3}=\frac{1}{42}\Rightarrow n_3=42$$

یعنی آن که با $n_1=3,n_2=7,n_3=42$ مواجه ایم، منتها ممکن است حتی با n ضلعی های منتظم بدست آمده هم نتوان کاشی کاری انجام داد.

برای آنکه قابل قبولی جواب بدست آمده در حالت 4 را بسنجیم، از نتیجه ی زیر استفاده می نماییم.

اگر با یک مثلث متساوی الاضلاع و دو چند ضلعی منتظم n وm ضلعی دیگردر هر راس شروع کنیم(شکل 4) آنگاه با شکلی مشابه زیر مواجه میشویم که در راسA حالت m، n و3 را داریم، ملاحظه می نماییم که یک مثلث و یک m ضلعی در راس B مشترک اند، بنابراین چند ضلعی مشخص شده با x باید n ضلع داشته باشد. اما در راس C ، یک مثلث و یک n ضلعی منتظم وجود دارند، بنابراین چند ضلعی x بایدm ضلعی باشد.

پس اگر $n\neq m$ نمی توانیم یک کاشی کاری نیم منتظم به فرم m، n و 3 داشته باشیم.



شکل (4)

نتیجه*: هیچ نوع کاشی کاری نیم منتظمی که هر راس آن به فرم m، n و k باشد و k عددی فرد و n نابرابر با m وجود ندارد.

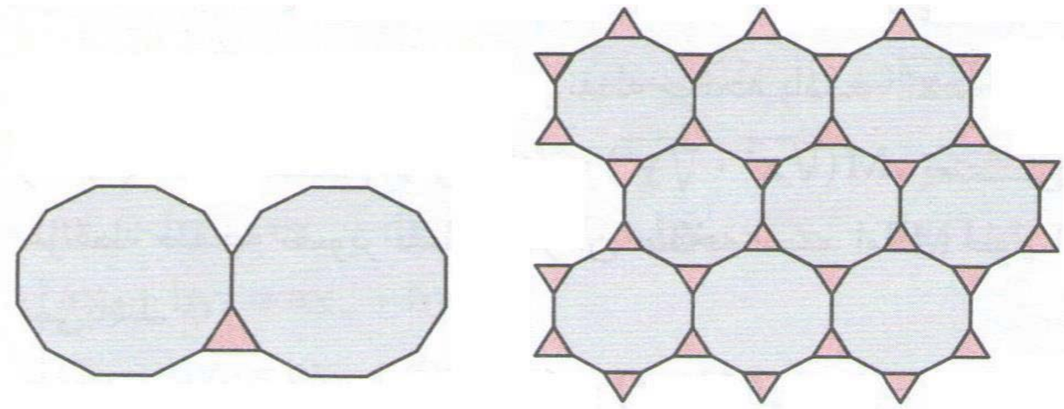
این بدان مفهوم است که اعداد بدست امده در حالت 4، نمیتوانند مطلوب کاشی کاری نیم منتظم باشند.(7،42و3)

حالت 6: اگر $n_2 = 8$ در نظر بگیریم، آنگاه با محاسبه در می بابیم که، $n_3 = 24$ خواهد شد، که با توجه به نتیجه ی گفته شده امکان کاشی کاری نیم منتظم وجود ندارد.

حالت 7: اگر $n_2 = 9, n_2 = 10, n_2 = 11$ باز نتیجه ی مطلوبی نخواهیم داشت. چرا؟

حالت 8: اگر $n_2 = 12$ در نظر گرفته شود، آن گاه با توجه به فرمول (1) خواهیم داشت که $n_3 = 12$.

بدیهی است که این حالت مطلوب ما خواهد بود و شکل آن به صورت زیر است.(در فعالیت 1 صفحه ی 42 کتاب درسی با این نمودار مواجه ایم).(شکل 5)



۳.۱۲.۱۲ یا $۳.۱۲^{۲}$

شکل(5)

تمرین: چرا n_2 نمی تواند مقادیر بیشتر از **12** را اختیار نماید؟

همان طور که در بالا ملاحظه کردیم، ما فرمول (1) را با فرض اولیه ی $n_1=3$ سازمان دهی و حل و فصل نمودیم، حال به دنبال آن هستیم که با فرض اولیه ی $n_1=4$ با چه موارد قابل قبولی برای کاشی کاری نیم منتظم مواجه می شویم.

حالت 1: اگر $n_2=4$ در نظر گرفته شود، آن گاه با توجه به فرمول (1) خواهیم داشت که

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n_3}=0$$

که ملاحظه می نماییم غیر ممکن است.

سوال: چرادر حالت(1) از $n_2=3$ شروع نکرده ایم؟

حالت 2: اگر $n_2=5$ در نظر گرفته شود آنگاه خواهیم داشت که

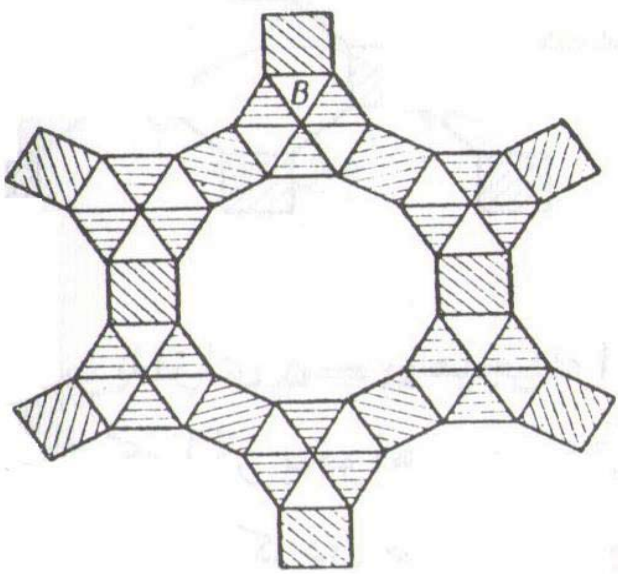
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n_3}=\frac{1}{20}\Rightarrow n_3=20$$

که با رجوع به نتیجه ی * در می یابیم سه تایی 4،5 و20 امکان پذیر نیست.

حالت 3: اگر $n_2=6$ در نظر گرفته شود، آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n_3}=\frac{1}{12}\Rightarrow n_3=12$$

سه تایی 4،6و12 مطلوب ما خواهد بود و نمودار آن به صورت زیر خواهد بود.(شکل6)



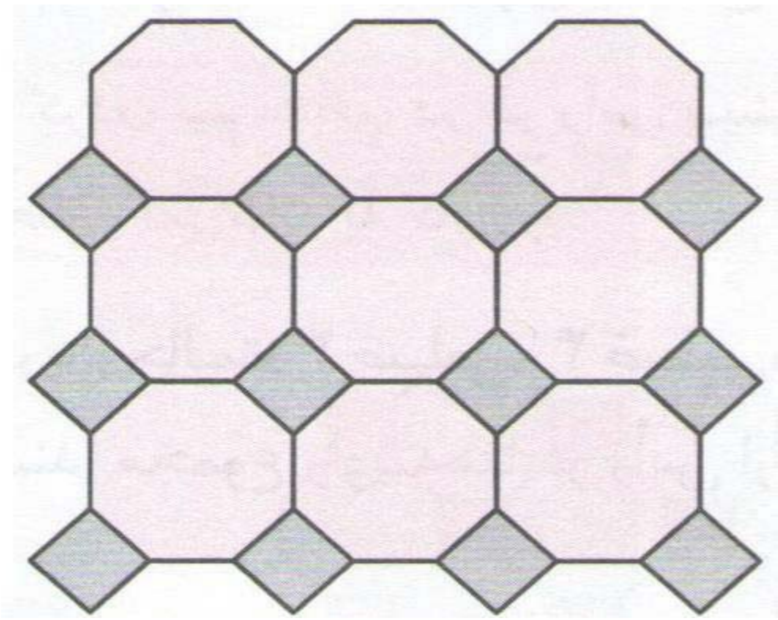
شکل(6)

حالت 4: اگر $n_2 = 7$ در نظر گرفته شود، آنگاه برای n_3 مقدار طبیعی بدست نمی آید و امکان پذیر نیست.

حالت 5: اگر $n_2 = 8$ باشد، آنگاه با توجه به فرمول (1) خواهیم داشت که

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n_3}=\frac{1}{8}\Rightarrow n_3=8$$

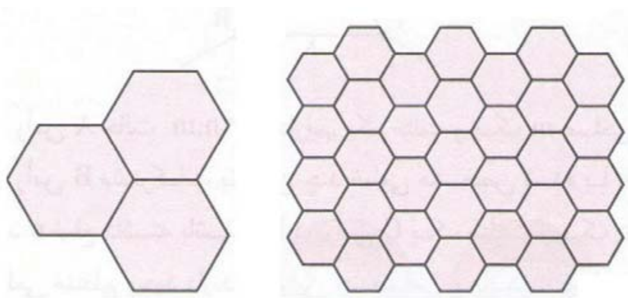
سه تایی 4، 8 و8 مطلوب ما خواهد بود و نمودار آن به صورت زیر خواهد بود(کار در کلاس 3 صحه ی 44 کتاب درسی ریاضی هشتم).(شکل7)



شکل(7)

تمرین: نشان دهید هیچ کدام از سه تایی های بدست آمده با شروع از $n_1 = 5$ مطلوب نخواهد بود؟

تمرین: نشان دهید با شروع از $n_1 = 6$ تنها سه تایی مطلوب 6، 6 و 6 خواهد بود؟(شکل8)



شکل(8)

نتیجه گیری: با توجه به شرط اولیه(استفاده از سه نوعn ضلعی منتظم) ملاحظه نمودیم که تنها با چهار حالت سه تایی مطلوب، مواجه خواهیم بودف که عبارتند از

(3، 12 و12)– (4، 6 و 12) – (4، 8، 8) – (6، 6، 6)

ترکیب های چهار تایی در کاشی کاری نیم منتظم

اگر با چهارn ضلعی منتظم به اضلاع n_1, n_2, n_3, n_4 با فرض $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$ مواجه باشیم، آنگاه باید در هر راس، اتفاق زیر بیفتد

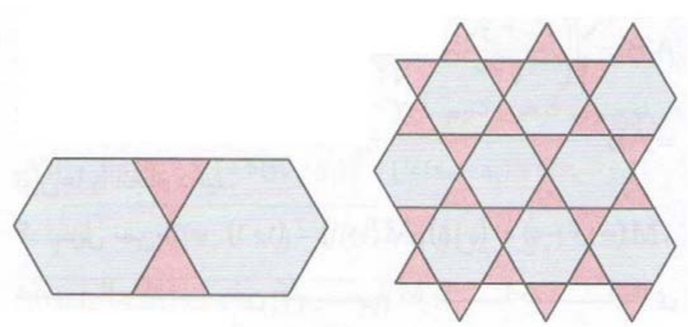
$$\frac{180(n_1-2)}{n_1}+\frac{180(n_2-2)}{n_2}+\frac{180(n_3-2)}{n_3}+\frac{180(n_4-2)}{n_4}=360$$

که با ساده کردن، خواهیم داشت که

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

با استدلال هایی مانند حالت قبل و در نظر گرفتن حالات مختلف برای n_i ، به حالات مطلوب زیر خواهیم رسید.

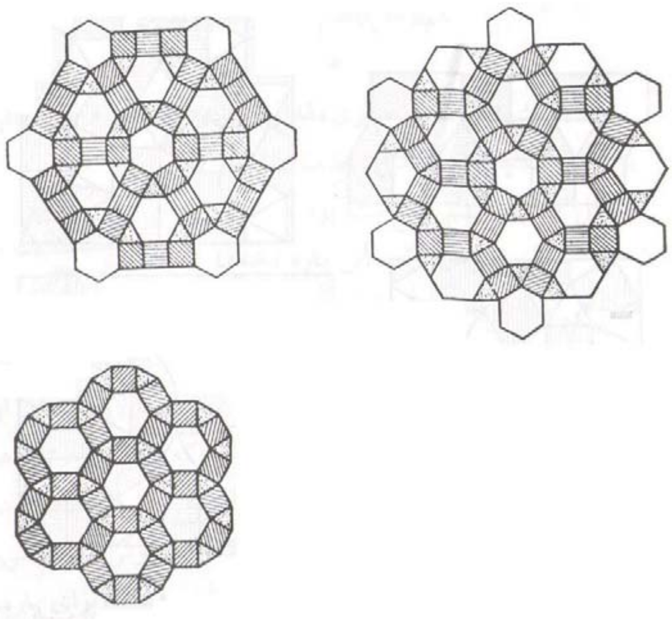
حالت 1: چهارتایی 3، 3، 6و 6 با نموداری مانند زیر مواجه ایم.(شکل9)



(۳.۶)^{۲} یا ۳.۶.۳.۶

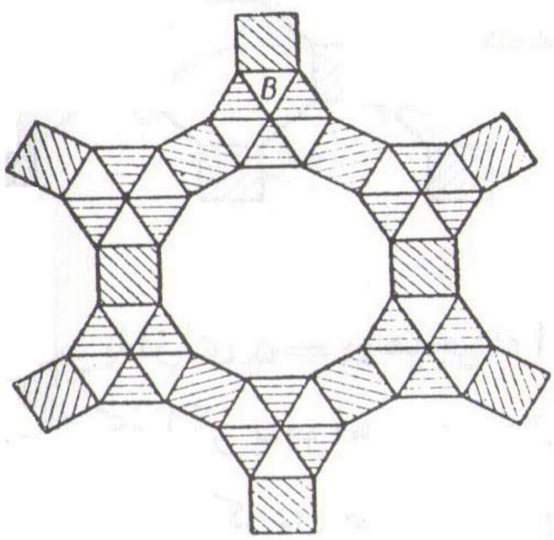
شکل(9)

حالت2: چهارتایی 3، 4، 4و6 با سه نوع متفاوت کاشی کاری مواجه میشویم.(شکل10 الف،ب وج)



شکل10،الف، ب وج

تذکر: البته چهارتایی 4،3،3و 12 هم اگر چه نامطلوب است، اما تحت شرایطی(پر کردن راس سوم مثلث، فقط با مثلث) نقشی مانند شکل **زیر را** بدست می دهند که در حقیقت همان ترکیب سه تایی (4، 6و 12) می باشد.**(شکل 11)**



شکل 11

تمرین: ثابت نمایید با پنج n ضلعی منتظم، تنها دو حالت مطلوب کاشی کاری نیم منتظم وجود دارد؟

منابع:

1: هندسه متوسطه، مبانی و مفهوم ها . تالیف استاد محمود نصیری

2: در پی فیثاغورث، تالیف شه پان النسکی با ترجمه ی استاد فقید پرویز شهریاری

3: آموزش هنر حل مسئله(ریاضیات تکمیلی)، مولفین: یحیی تابش، جواد حاجی بابایی و آرش رستگار

4: کتاب درسی ریاضی هشتم، (سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی)