بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۹۸

دوره ی بیست و هفتم، شماره ی۲، زمستان۱۳۸۸

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

فهرست

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت ،مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از اثر و مقاله ی ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، باز گشت داده نمی شود.

- **نشانی دفتر مجله :** تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی:۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- **تلفن :** ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
- **نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸
- **پایگاه اینترنتی:** www.roshdmag.ir
- **رایانامه** **E-mail:** riazi@roshdmag.ir
- **تلفن پیام گیر نشریان رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲
- **کد مدیرمسئول:** ۱۰۲ ● **کد دفتر مجله:**۱۱۳ ● **کد امور مشترکین:** ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین : تهران، صندوق پستی : ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- **تلفن امور مشترکین :**۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۶۶۵۵
- **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)
- **شمارگان:**۱۲۰۰۰

جیب‌های پراز سواد!

داستان کنکور در ایران، آن‌قدر پرحاشیه و پرهیجان و پرآب‌وتاب است که جمع کثیری را در هر سال، به خود جذب می‌کند. هرکس به اندازه‌ی قوه‌ی تخیل و تصور خود، شاخ‌وبرگ تازه‌ای به آن اضافه می‌نماید و هر نوشته‌ای که در مورد ارایه‌ی راهکارهای بکر! و ابتکاری! برای موفق شدن در این عرصه‌ی پر رمزوراز تولید می‌شود، دارای شمارگان بالایی است و اغلب، چندین‌بار تجدیدچاپ می‌شود. تا جایی که داستان‌های سرگرم‌کننده برای خوانندگان مشتاق نوشته شود، مشکلی نیست. اما درد بی‌درمان از جایی آغاز می‌گردد که بسیاری از مردم جامعه ـ حتی آدم‌های تحصیل‌کرده و فرهنگی ـ این داستان‌ها را واقعی تصور می‌کنند! شناخت و چرایی این درد و ریشه‌یابی آن، خارج از حوزه‌ی کنکور است و بحث این یادداشت، اشاره به گوشه‌هایی از این معضل ویرانگر اجتماعی است.

***

اگر تغییرات ایجاد شده در تبلیغات مؤسسات متولی آموزش برای کنکور و تأثیر آن‌ها را بر رقابت بین مدارس ویژه برای جلب دانش‌آموزان به اصطلاح «نخبه» مورد مطالعه‌ی عمیق‌تر و دقیق‌تری قرار دهیم، شاید نسبت به تخیلی شدن بیشتر و بیشتر داستان کنکور، پی ببریم. در تبلیغات جدید، حد و مرزها شکسته شده‌اند، حیطه‌های علمی و علوم انسانی و شناختی یکی پس از دیگری درنوردیده می‌شوند و متأسفانه کسی نیست بگوید که «لباس این امپراطور کجاست!؟» چگونه می‌شود که هر مؤسسه‌ای به تناسب امکانات و شهرتش، جسورانه‌تر از سایر حوزه‌ها وام می‌گیرد و با هزینه‌کردن تکنیک‌ها و مفاهیم آن حوزه‌ها و لوث‌کردن آنان، مشتری بی‌صبر و مشتاق و پرپول و غیرواقع‌بین را جذب خود می‌کند و در این مرحله است که تیر به‌هدف خورده و دانش‌آموز معصوم و شکننده و تحت فشار از همه‌طرف، شیفته‌ی این همه چیزهای جدید می‌شود! او خودش را یک‌باره به این نوع آموزش می‌سپارد و با تعطیل کردن ذهن خلاق و روح جست‌وجوگر و ژرف‌اندیش خویش، با اعتماد تمام منتظر می‌ماند که توصیه‌های جدید مؤسسه یا مدرسه در مورد ذهن و حافظه و یادگیری و برنامه‌ریزی و چه و چه جواب دهند و او را به آرمان‌هایش برسانند، و این در حالی است که عملاً به تعداد داوطلبان ورود به آموزش عالی، صندلی خالی در مؤسسات وابسته وجود دارد! این ساده‌انگاری‌ها انسان را به یاد قصه‌های شاه‌پریانی می‌اندازد که دختر لطیف نازک‌دل، منتظر می‌ماند تا شاهزاده‌ای با اسب سفید بیاید و او را تا آسمان رؤیاهایش ببرد! حال این شاهزاده با اسب سفید، برای بسیاری از دختران و پسران این مرزوبوم، هویت علمی هم پیدا کرده و کم‌کم، بعضی از آن‌ها باور کرده‌اند که اگر وِردهای درست را یاد بگیرند، شاهزاده‌ی رؤیاهاشان سوار بر اسب سَفید، آن‌ها را بر صندلی‌های مناسب دانشگاه مورد انتظارشان می‌نشاند!

از طرف دیگر، بسیاری از مدارس ویژه ـ به معنای وسیع آن ـ کم نمی‌آورند و برای جلب مشتری، از سیاست ترکه و شیرینی به‌خوبی استفاده می‌کنند؛ تحت سخت‌ترین شرایط امتحان، دانش‌آموزان را سَرَند می‌کنند و در طول آموزش، مرتب به آن‌ها نهیب می‌زنند که قدر آن زحمات را باید بدانند و به ذره‌ای کمتر از عالی‌ترین، بسنده نکنند! این ملغمه‌ی جدید، موضوعی تحقیق‌پذیر و بسیار حساس است که پرداختن به آن، نیازمند انجام پژوهش‌های جدی است. اما خوب است که به نفرات اول تا دهم کنکور سراسری ۸۹-۸۸ دوباره بنگریم و ببینیم که چند درصد آن‌ها، به‌طور طبیعی به این مقام رسیدند و چند درصد آن‌ها، با صرف میلیون‌ها تومان در ظرف چند سال و به قیمت خسته‌نمودن و مضطرب کردن و رنجور شدنشان به دانشگاه رسیدند. دانش‌آموزانی که بعد از خروج از نظام مدرسه‌ای و آموزشگاهی، مسایل و مشکلاتشان بروز می‌کند و کسی نیست که مسئولیت نابسامانی آن‌ها را به‌عهده بگیرد!

***

در تابستان ۸۸، به‌طور تصادفی تلویزیون را باز کردم و مطلبی را در یکی از شبکه‌های آن شنیدم که به جهات مختلف، برایم قابل تأمل بود. بدین سبب تمام صحبت‌ها را یادداشت کردم و تلاش نمودم تا با گوینده‌ی محترم، از طریق شماره تماسی که پایین صفحه بود، صحبت کنم اما موفق نشدم. در هر صورت، آقایی جوان به برنامه دعوت شده بود تا راجع به برنامه‌ریزی برای کنکور به دانش‌آموزان رهنمود دهد (یادداشت‌ها و مستندات این برنامه، در دفتر مجله موجود است). ایشان با اصرار می‌گفتند که «دانش‌آموزان تا می‌توانند جیباشونو پر از سواد کنند»! سپس ادامه دادند که «این یک قانون است! درس‌ها باید تا اسفند تمام شوند.» اگر به همین دو توصیه بسنده کنیم، باید ترس و لرزش و عرق سرد را بر تیره‌ی پشت خود احساس کنیم. خدایا! سواد چه هست که جیب پرکن شده! یاد «مدرسه‌ی موش‌ها» افتادم که «کپل»، همیشه «جیب‌هاشو پر از فندق و پسته می‌کرد» تا برای مغزش خوراک تهیه کند! ولی آیا حب سواد را می‌توان خورد یا اکسیرش را نوشید و ذهن را چاق و چله نمود!؟ به استناد چه یافته‌های علمی، این چنین بی‌پروا به «علم‌زدایی» می‌پردازند و از گل نازک‌تر نمی‌شنوند؟ الله اعلم!

توصیه‌ی بعدی تکیه بر قانون تمام شدن درس‌های پیش‌دانشگاهی تا پایان اسفند ماه بود. تناقض به‌دنبال تناقض بیداد می‌کند. از طرفی راجع به ضرورت تأثیر معدل بر قبولی کنکور صحبت می‌شود تا حیات طبیعی به مدرسه بازگردد و از طرف دیگر، در رسانه‌ی ملی به دانش‌آموزان و خانواده‌های آن‌ها توصیه می‌شود که از **قانون** تمام شدن دروس در **اسفند ماه** تبعیت کنند! و این به نوعی، فاتحه‌ی مدرسه را خواندن و تبدیل کردن آن به یک مؤسسه‌ی تجاری ـ آموزشی است.

قصد ندارم با بیان مجدد برنامه‌ای که به سهولت قابل دسترسی است، خواننده را خسته کنم. فقط یکی دو نکته از تنها یک جلسه از برنامه را ذکر کردم تا با نوع شست‌وشوهای مغزی که گریبان جامعه‌ی دانش‌آموزی و خانواده‌های آن‌ها را گرفته آشنا شویم. این کارشناس محترم، عرصه‌ی کنکور را بیشتر جنگی و بی‌انعطاف و عاری از خطا توصیف نمود. مثلاً، وی تذکر داد که «داوطلبی دوام می‌آورد که نظم داشته باشد. داوطلبی دوام بیشتری می‌آورد که منظم کار کند ـ نظم همه چی، نظم جایی که درس می‌خواند، نظم کتاب، ...، داوطلب باید طوری کار کند که اگر بعد از چند ساعت خود را در آیینه ببیند به خودش بگوید خسته نباشید.» و در اواخر برنامه تأکید نمود که «ما قاطعانه کار می‌کنیم اما نه قاتلانه!»

افسوس که این ادبیات؛ با ادبیات مشفقانه، واقع بینانه، انسان‌دوستانه و انسان‌پرور آموزشی / تعلیم و تربیت تفاوت ماهوی دارد و درحقیقت، پارادایم آن‌ها با هم متفاوت‌اند. نمی‌دانم هنوز وقتی برای نجات ذهن‌های بکر و خلاق و توانا و باهوش از دام چنین وسوسه هایی باقی مانده یا خیر. اما این برنامه‌ها و تفکرات و واقعیت گریزی‌ها، تأثیرات سوء خود را بر جامعه و حتی تصمیم گیرندگان و تصمیم سازان گذاشته است. بسیاری از خانواده‌ها سر از پا نشناخته، کنکور را یکی از محورهای اصلی زندگی خانوادگی خود قرار داده‌اند و برای رسیدن به خواسته‌های خودشان ـ و نه الزاماً فرزندانشان ـ حاضر به هر نوع سرمایه‌گذاری مادی و فیزیکی هستند، اما فرصت فکر کردن به نیازهای روحی و روانی عزیزان خود را کمتر می‌یابند. گروه دوم نیز گاهی تحت‌تأثیر این همه توصیه‌های آموزشی! روان‌شناسی! روان‌شناختی! و نظایر آن، برای هر نوع موفقیتی کلیشه‌ای را در نظر می‌گیرند که در آن، افراد توانمند اما غیرمتعارف، اجازه‌ی ورود بدون شک و شبهه را ندارند. نمونه‌ی بارز این امر، قبولی یک داوطلب از یکی از شهرهای کوچک ایران بود که تصمیم گیرندگان را به شبهه انداخت. زیرا طبق اخبار شنیده شده، این داوطلب چند سال پیش ـ با وجود محدودترین امکانات آموزشی و بدون رعایت برنامه‌ریزی‌های اشاره شده! ـ رتبه‌ی زیر ۱۰۰ کنکور ریاضی ـ فیزیک را آورد اما به هر دلیلی، انصراف داد و به خدمت سربازی رفت. پس از چند سال وقفه و پایان خدمت سربازی، مجدداً در گروه علوم تجربی و زبان کنکور داد و در هر دو، رتبه‌ی اول را کسب کرد. متأسفانه به دلیل وجود کلیشه‌هایی که به یکی از آن‌ها اشاره شد، تصمیم‌گیرندگان ناباورانه به این نتیجه نگریستند و از داوطلب خواستند که مجدداً به‌طور انفرادی کنکور بدهد و این بار هم نتیجه همان بود! کسب رتبه‌ی اول در هر دو! کار این دانش‌آموز یک شاهکار است و می‌تواند سرفصل جدیدی در تحقیقات مربوط به حوزه‌ی یادگیری و ارزیابیِ این همه هیاهو برای کنکور باشد. امیدوارم شاهکار این عزیز ملت، خون تازه‌ای در رگ‌های فسرده‌ی تحقیقات در حوزه‌ی علوم تربیتی، آموزش‌های موضوعی، روان‌شناسی شناختی و سایر حوزه‌های مربوط جاری کند تا از برکات آن‌ها، بتوانیم به برگشت به یک تعادل منطقی به بدنه‌ی آموزشی کشور و ایجاد محیط‌هایی پر از تلاش و نشاط و چالش و شوق به یادگیری در مدارس خود امیدوار باشیم ـ مدارسی که آموزش در آن‌ها رایگان، بی‌تنش، پرمحتوا، سرشار از روح زندگی و شادابی آموختن باشد. مدارسی که بنا به گزارش دلور یادگیری را «گنج درون» بداند و زمینه‌ی به فعلیت درآوردن اینِ گنج را فراهم نماید تا بتوانیم انتظار داشته باشیم که یادگیری برای انجام دادن و با هم زیستن و عمل کردن، بالاخره به «آموختن برای زیستن»، آن هم زیستنی درخور و شایسته و سزاوار آینده‌سازان ایران عزیز بینجامد.

a چه ساکت است!

امیرحسین اصغری، استادیار آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

در شماره‌های ۹۲ و ۹۵ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، مقاله‌هایی با عنوان «a چه خوشمزه است» و «گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری» از دکتر امیرحسین اصغری به چاپ رسید که در مقاله‌ی نخست، مشکلات آموزش جبر با بررسی روش معرفی نمادها و بدفهمی‌های حاصل از آن، بررسی شد. مقاله‌ی حاضر، در ادامه‌ی آن مقاله‌ها و از زاویه‌ای دیگر به بررسی این مشکلات، می‌پردازد. در این مقاله، مشکلات جبر، که به عنوان «زبان ریاضی» است، زمانی که به عنوان «زبانی برای ریاضی» در نظر گرفته می‌شود و در آموزش نمادین آن، بسیاری از ظرافت‌ها، فراموش شده یا بدیهی فرض می‌شوند، مطرح شده است. امید داریم با این مقالات، دبیران گرامی، خود با هوشیاری بیش‌تری به رفع مشکلات آموزش جبر نائل آیند.

رشد آموزش ریاضی

اولی: دوست من می‌تونه به شش زبان زنده‌ی دنیا صحبت کند!

دومی: عجب! حالا اون با این شش زبان چه می‌گه؟!

گفت‌وگوی واقعی بالا یادآورِ داستانی واقعی‌تر است:

داستان جبری که «زبان ریاضی» است نه «زبانی برای بیان ریاضی»؛ جبری که به ترجمه‌ای خالی از معنی تقلیل یافته است، جبری که با نمادها، تنها با جملاتی این چنینی پیوند می‌خورد:

برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده می‌شود ...

ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان، ص ۲۰

اما افسوس که نمادها خود سخن نمی‌گویند (اسفارد، لینچنسکی؛ ۱۹۹۴، ص ۸۷) اگرچه بهترین ابزار برای بیان تعمیم‌اند. ولی وقتی نه موقعیتی در کار است نه مسئله‌ای که نیازمند به کارگیری این ابزار است، آن‌چه که می‌ماند «تمرین در کلاسی» است برای ترجمه‌ی لفظ به لفظ:

تمرین در کلاس:

۱. جمله‌های زیر را با استفاده از حروف انگلیسی که به عنوان نمادهای حرفی و نمادهای ریاضی به کار برده می‌شوند، بنویسید.

الف) سه برابر هر عددی برابر است با سه بار جمع آن عدد با

خودش .

ب) ......

۲ . جمله‌های زیر را به زبان فارسی بنویسید .

الف) $a \times a > 0$ یا $a \times a = 0$

ب) ......

ریاضیات ۱ ، سال اول دبیرستان، ص ۲۲

اشکال در کجاست؟ «مگر علامت گذاری حرفی چیزی جز ... یک تندنویسی مناسب است؟» (دانتزیگ، ص ۱۱۵) . اگر شما در پاسخ به سؤال دانتزیگ عجله کنید، احتمالاً پاسخ خواهید داد :

البته که نه؛

و اضافه خواهید کرد :

علاوه بر این، می‌توان برای آسان‌تر صحبت کردن در ریاضی، از نمادها استفاده کرد!!

چنین پاسخی شاید شمای ریاضی خوانده (مؤلف، محقق، معلم) را قانع کند، اما شمای آموزشگر (مؤلف، محقق، معلم) را با چالشی جدی‌تر روبه‌رو می‌کند، چالشِ پاسخ به سؤال بعدی دانتزیگ (همان‌جا، ص ۱۱۵) :

بی‌شک در طرز نوشتن $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ صرفه‌جویی وجود دارد، اما آیا حقیقتاً این شکل نوشتن بیش از شکل بیانی این رابطه، یعنی «مجذور حاصل جمع دو عدد برابر است با مجموع مجذورات هر یک از آن‌ها به علاوه‌ی دو برابر حاصل ضرب یکی در دیگری» چیزی به شخص می‌آموزد؟

پافشاری بر پاسخ داده شده به سؤال اول، به معنی پاک کردن صورت سؤال دوم و تلاش برای به دست آوردن ابزار به قیمت محروم کردن دانش‌آموزان از لزوم و هدف جبر است :

«نیاز به تعمیم، بیان و توجیه آن» (می‌سون، ۲۰۰۵)

اما بسیاری از دانش‌آموزان حتی در بیان تعمیم در زبان طبیعی با مشکل مواجه هستند و این مشکل وقتی آن‌ها ناچار به استفاده از زبان جبری هستند حادتر است (کوچمن، هویلس؛ ۲۰۰۵) . پس پافشاری بر پاسخ داده شده به سؤال اول و تأکید بر جنبه‌ی «زبانی» جبر، به تعبیری «ساده»ترین کار ممکن است؛ چرا که دانش‌آموزان از قسمت سخت کار (و البته معنی‌دار آن) معاف و عهده‌دار ترجمه‌ی جمله‌های فارسی یا جبری ما خواهند شد؛ و اگر ما موفق شویم که مترجم خوبی تربیت کنیم، در نهایت فردی خواهیم داشت که می‌تواند به هفت زبان «زنده‌ی» دنیا صحبت کند ولی چیزی برای گفتن نمی‌یابد، نحوی خوبی که شنا کردن نمی‌داند!

باد کشتی را به گردابی فکند
گفت کشتی‌بان به آن نحوی بلند
هیچ دانی آشنا کردن بگو
گفت نی ای خوش جواب خوب‌رو
گفت کل عمرت ای نحوی فناست
زانک کشتی غرق این گرداب‌هاست

دفتر اول مثنوی

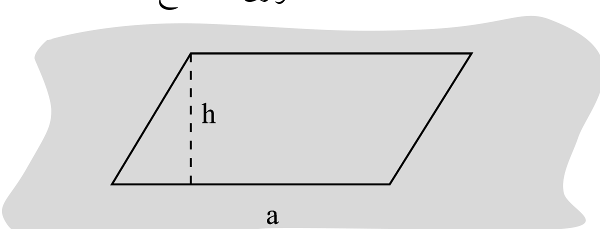
حکایت نحوی و کشتی‌بان

مترجم خوب، نحوی خوب

در بسیاری اوقات، می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم . در این موارد لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان دهنده‌ی عدد دلخواهی باشند . (کتاب ریاضیات ۱ ، سال اول دبیرستان، ص ۲۲)

مثال . (این مثال برگرفته از کتاب ریاضیات ۱ نیست، ولی کاملاً به سبک و سیاق مثال‌های آن کتاب تنظیم شده است؛ مثال کتاب در مورد مساحت مثلث است .) برای بیان این که «مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب طول یک قاعده در ارتفاع نظیر آن قاعده»، می‌گوییم : یک متوازی‌الاضلاع دلخواه را در نظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید، در این صورت :

ah = مساحت متوازی‌الاضلاع



اکنون دانتزیگ حق دارد بپرسد (به بخش قبل نگاه کنید) : آیا حقیقتاً نوشتن مساحت متوازی‌الاضلاع به شکل ah، بیش از شکل کلامی این مساحت، چیزی به شخص می‌آموزد؟ و شما ممکن است پاسخ دهید :

خُب، این سؤال در این مورد بی‌ربط است . دانش‌آموزانی که در سال اول دبیرستان درس می‌خوانند مساحت متوازی‌الاضلاع را در سال چهارم دبستان یاد گرفته‌اند، پس می‌توان از آن برای دست‌یابی به اهداف این فصل (فصل یک، کتاب ریاضیات ۱) استفاده کرد؛ بنابر راهنمای تدریس، یکی از اهداف این فصل

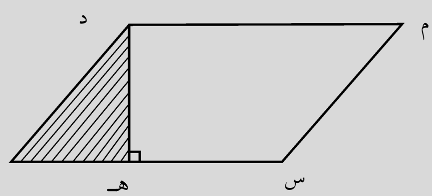
«ترجمه‌ی بین جملات فارسی و ریاضی» است.

این جواب می‌تواند قانع کننده باشد، در صورتی که بپذیریم که دانش‌آموز ما «معنی ریاضی» نهفته در جمله‌ی فارسی موردنظر برای ترجمه را به درستی درک می‌کند؛ اما، به نظر می‌رسد چنین درکی با درک مورد نظر مؤلفین کتاب ریاضیات ۱ متفاوت است. فرض مؤلفین کتاب این است که:

- دانش‌آموزان جملات فارسی را به خوبی می‌فهمند و درک می‌کنند. بنابراین یک عمل ترجمه از زبان فارسی به زبان نمادین و برعکس به خوبی می‌تواند معنای جملات نمادین را مشخص سازد (راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱، ص ۳۳).

برای روشن کردن تفاوت بین «درک جمله‌ی فارسی» و «درک ریاضیات نهفته در جمله‌ی فارسی» اجازه دهید با ورت هایمر (۱۹۴۵) به یک کلاس درس ریاضی برویم. معلم کلاسی که ورت‌هایمر آن را مشاهده می‌کند، مساحت متوازی‌الاضلاع را بسیار شبیه آن روشی که در کتاب چهارم دبستان ما آمده است آموزش می‌دهد؛ بنابراین من این قسمت داستان را از کتاب چهارم دبستان (ص ۱۷۵) نقل می‌کنم:

در متوازی‌الاضلاع زیر، ارتفاع (د هـ) رسم شده است.



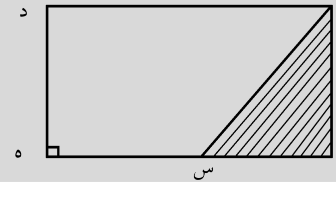
ضلع (س ر) قاعده‌ی نظیر این ارتفاع است. این ارتفاع و قاعده‌ی نظیر آن را اندازه بگیرید و جمله‌های زیر را کامل کنید.

ارتفاع (د هـ)... سانتی‌متر و قاعده‌ی نظیر آن... سانتی‌متر است.

اگر در متوازی‌الاضلاع بالا، مثلث (در هـ) را جدا کنیم و آن را در طرف دیگر متوازی‌الاضلاع بچسبانیم، مستطیلی به شکل زیر به دست می‌آید. مساحت متوازی‌الاضلاع بالا با مساحت این مستطیل برابر است ...

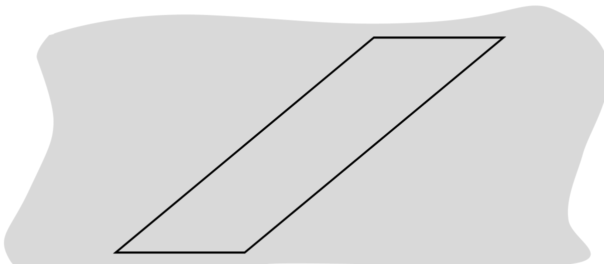
پس

مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن

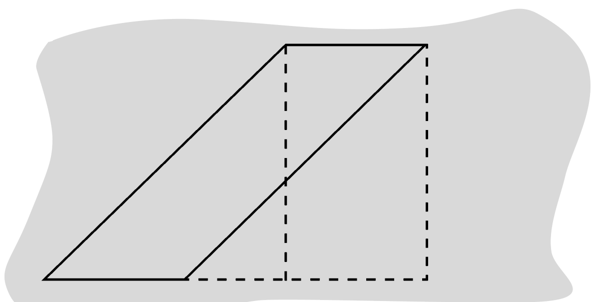


پس از انجام «فعالیت» بالا و با به‌کارگیری چند متوازی‌الاضلاع دیگر، معلم مطمئن می‌شود که «همه‌ی بچه‌های کلاس» می‌دانند که مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن. اکنون، به طور یقین، همه‌ی دانش‌آموزان معنی جمله‌ی فارسی مورد نظر را به خوبی درک می‌کنند، و حتی کمی بیش‌تر، به نظر می‌رسد که معنی ریاضی نهفته در آن را نیز می‌فهمند؛ چرا که روز بعد همه‌ی دانش‌آموزان می‌توانند فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع را به درستی تکرار کنند و حتی یکی از دانش‌آموزان «متوسط» کلاس به درخواست معلم نحوه‌ی به دست آوردن مساحت را شرح می‌دهد.

اما ماجرا هنوز تمام نشده است. ورت‌هایمر (پس از اجازه گرفتن از معلم کلاس) شکل زیر را روی تخته رسم می‌کند.



بعضی از بچه‌ها اعتراض می‌کنند که ما این را نخوانده‌ایم، و بعضی دیگر همان کاری را می‌کنند که معلم به آن‌ها «آموزش» داده است: قاعده‌ی پایینی را کمی گسترش می‌دهند و از دو رأس بالایی دو عمود بر آن رسم می‌کنند (شکل زیر):



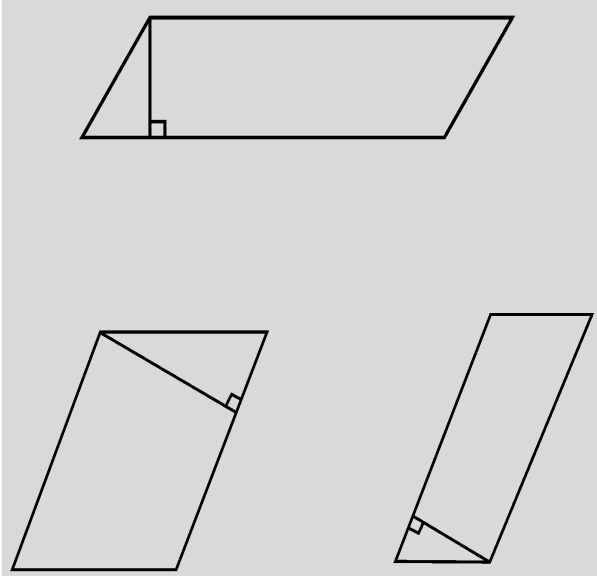
و سپس به فارسی سلیس (البته در مورد کلاس مورد بحث، به انگلیسی سلیس!) اعلام می‌کنند که «مساحت برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع»! ولی وقتی از آن‌ها خواسته می‌شود که با استفاده از شکلی که رسم کرده‌اند، «معنی» جمله‌ی سلیس خود را روشن کنند، گیج و بهت‌زده به ورت‌هایمر و البته به معلم خود نگاه می‌کنند!!

اکنون، دوباره می‌توان پرسید: آیا بیان نمادین مساحت متوازی‌الاضلاع به شکل ah، چیزی بیش‌تر به این دانش‌آموزان می‌آموزد؟ اگر شما چالشی را که ورت‌هایمر برای دانش‌آموزان ایجاد کرد «غیرمنصفانه» می‌دانید، اجازه دهید که یک دانش‌آموز چهارم دبستان را (که از این شانس که ورت‌هایمر از کلاس او دیدن کند برخوردار نبوده است!) تا اول دبیرستان دنبال کنیم.

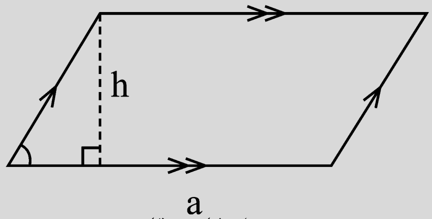
دانش‌آموز ما پس از انجام موفقیت‌آمیز کار در کلاس، تمرین‌های زیر را نیز به درستی حل می‌کند (کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص ۱۷۵):

تمرین

در هر متوازی‌الاضلاع قاعده و ارتفاع داده شده را برحسب سانتی‌متر اندازه بگیرید و مساحت آن را حساب کنید.



توجه کنید در همه‌ی این تمرین‌ها طول ارتفاع رسم شده برای دانش‌آموز، کمتر از طول قاعده‌ی نظیر آن است. سپس تا دوم راهنمایی از متوازی‌الاضلاع در کتاب‌های درسی ریاضی خبری نیست تا این‌که از دانش‌آموز ما خواسته می‌شود که تمرین زیر را حل کند (کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی، ص ۱۷۳):



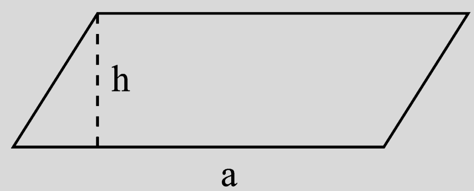
ارتفاع × قاعده

مساحت هر یک از شکل‌ها را با عبارت جبری بنویسید.

و دوباره در سوم راهنمایی (کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی، ص ۵۳):

کار در کلاس

مساحت هر یک از شکل‌های زیر را با یک عبارت جبری بیان کنید.

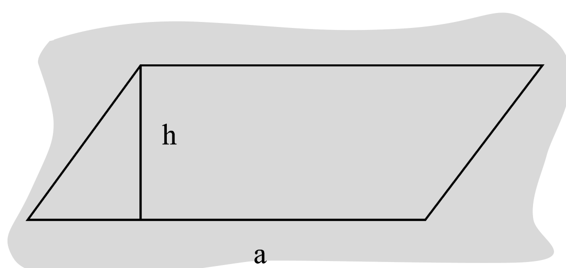


اکنون دانش‌آموز «خوب» ما در کلاس اول دبیرستان است و ما برای این‌که دوباره (!) به او نشان دهیم که در اوقاتی که «می‌خواهیم مطلبی را در مورد دو عدد دلخواه بیان کنیم لازم است از دو نماد مختلف استفاده کنیم که هر کدام نشان‌دهنده‌ی عدد دلخواهی باشند.» (ریاضی ۱، ص ۲۲) مساحت متوازی‌الاضلاع را به زبان نمادین ترجمه می‌کنیم. اما اعداد مربوط به طول قاعده و طول ارتفاع نظیر آن، تا چه اندازه برای دانش‌آموزی با تجربه‌ی دانش‌آموز ما **اعدادی دلخواه** محسوب می‌شوند؟ آیا عجیب است که او (حتی اگر با کمال خوش‌بینی فرض کنیم که به چیزی فرای یک ترجمه به این مثال نگاه کند)، عدد منسوب به طول قاعده را بزرگ‌تر از عدد منسوب به طول ارتفاع فرض کند! شاید همین قدر درک هم مورد نظر نباشد، چرا که ما مترجم خوب می‌خواهیم، چرا که «اهداف کلی رفتاری و عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز» این است که «با نمادها جملات ریاضی را بیان کند و جملات ریاضی را به زبان فارسی

بیان کند و توضیح دهد» (راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱ ، ص۲) . اگر چنین است ، اگر قرار است که نمادها تنها «برچسب»هایی باشند برای کلمات فارسی ، چرا از مثال زیر استفاده نکنیم که حداقل برای دانش‌آموز ما تازگی دارد (ایده‌ی این مثال از ورت‌هایمر است) :

مثال : برای بیان این که : «مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل تفریق طول ارتفاع از طول قاعده‌ی نظیر آن تقسیم بر حاصل تفریق معکوس طول قاعده از معکوس طول ارتفاع نظیر آن» ، می‌گوییم : یک متوازی‌الاضلاع دلخواه را در نظر بگیرید و طول یک قاعده‌ی آن را a و ارتفاع نظیر آن قاعده را h بنامید ، در این صورت :

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$$



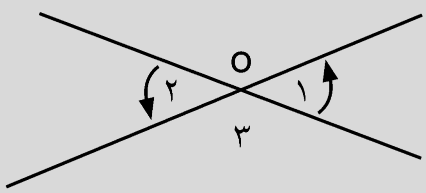
دانش‌آموزی که از پس حل این مثال برآید ، به‌طور یقین مترجم خوبی است و اگر علاوه بر ترجمه ، بتواند نشان دهد که عبارت $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$ با ah برابر است ، به طور یقین نحوی خوبی نیز خواهد بود چرا که توانسته است «بدون توجه به معنی نمادها و بر طبق قوانینی معین» (دمبی ، ۱۹۹۷ ، ص ۶۶) ، عبارت گویای $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$ را ساده کند[1] . با این حساب ، ما با یک تیر دو نشان زده‌ایم ، هم مترجم خوبی تربیت کرده‌ایم ، هم نحوی خوبی ؛ اما افسوس که نشان اصلی را نزده‌ایم!

نشان اصلی

نشان اصلی جبر به بزرگی و وسعت همه‌ی آموزش عمومی ماست . ولی ما با جدا کردن آن از حساب در دبستان (استیسی ، اصغری ، ۱۳۸۸) ، با تقلیل آن به یک زبان در راهنمایی و اول دبیرستان ، با تأکید بیش از اندازه به زبان جبری به جای تفکر جبری (استیسی و اصغری ؛ همان‌جا) ، و به‌طور کلی ، با جداکردن نمادها از زمینه‌هایی که به آن‌ها معنی می‌بخشند و یا با اتصال نابه‌جای نمادها به آن زمینه‌ها ، همه‌ی فرصت‌های زدن نشانی به این بزرگی را از دست داده‌ایم . «فعالیت» زیر شاهد دیگری است از آن‌چه بر دانش‌آموز اول نظری ما گذشته (و می‌گذرد و به نظر می‌رسد که خواهد گذشت!)

فعالیت *(کتاب ریاضی اول راهنمایی ، ص ۹۱)*

در شکل مقابل ، دو نوار مقوایی را می‌بینید که در نقطه‌ی O



لولا شده‌اند . زاویه‌های ۱ و ۲ را دو زاویه‌ی متقابل به رأس می‌نامیم .

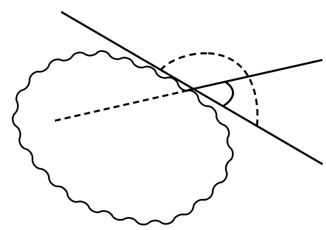
آیا این دو زاویه با هم مساوی‌اند؟

با کامل کردن رابطه‌ها نشان دهید که چرا دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم مساوی‌اند؟

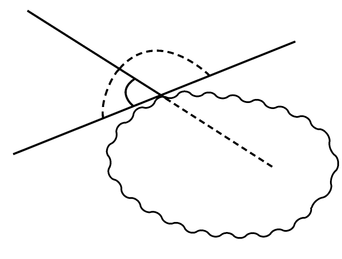
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_3=180^\circ\\ \hat{O}_2+\ldots=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \ldots=\ldots$$

فرض کنید که دانش‌آموز شما لزوم «اثبات» این‌که چرا دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم مساوی‌اند را درک می‌کند (و این خود تقریباً فرضی محال است!) ؛ آیا حتی با این فرض ، «اثبات» داده شده به او کمک می‌کند که درک کند چه چیزهایی در این

«ساختار» هندسی ثابت‌اند و چه چیزهایی متغیر؟ یا این‌که چرا از O_4 استفاده نشده در حالی که زاویه‌های دیگر نام‌گذاری شده‌اند؟ یا این‌که چرا این روابط خاص نوشته شده‌اند و نه بسیاری از روابط ممکن دیگر؟ و آیا این «اثبات» چیزی بیش‌تر از استدلال کلامی و نمایشی که با پوشاندن بخشی از شکل با دست حاصل می‌شود به دانش‌آموز می‌آموزد (شکل زیر):



این قسمت را با دست بپوشانید

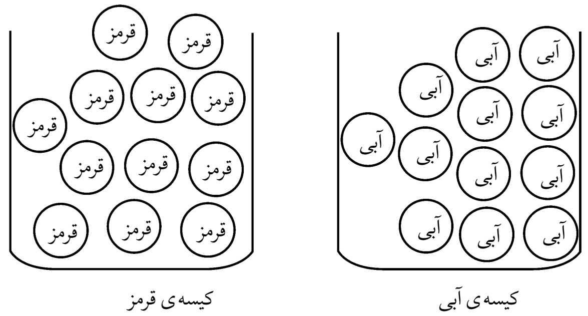


این قسمت را با دست بپوشانید

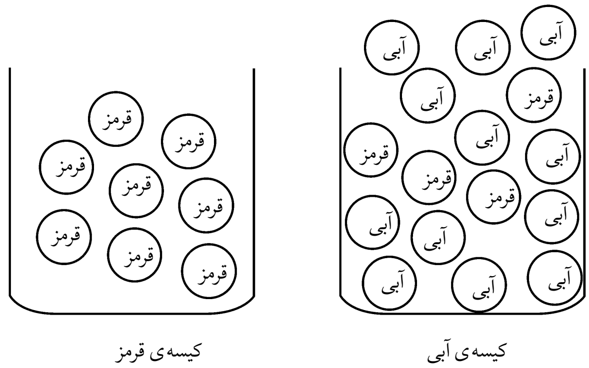
از آن‌جایی که این مثال بسیار آشنا است (هم‌چنان که مثال متوازی‌الاضلاع بود) و از آن‌جا که این آشنایی ممکن است که اهمیت سؤال‌های بالا را پنهان کند، اجازه دهید شما را به حل مسئله‌ی دیگری دعوت کنم.

فرض کنید دو کیسه دارید. در یکی از کیسه‌ها (کیسه‌ی قرمز)، ۱۸۰ مهره‌ی قرمزِ یک شکل و یک اندازه و در کیسه‌ی دیگر (کیسه‌ی آبی)، ۱۸۰ مهره‌ی آبی به همان شکل و اندازه است. شخصی تعدادی مهره‌ی قرمز را از کیسه‌ی قرمز برمی‌دارد و در کیسه‌ی آبی قرار می‌دهد، سپس کیسه‌ی آبی را خوب به هم می‌زند به طوری که مهره‌های قرمز در لابه‌لای مهره‌های آبی پخش شود. همان شخص، با چشمانی بسته، به تعداد مهره‌های قرمزی که به کیسه‌ی آبی انتقال داده است، از کیسه‌ی آبی مهره برمی‌دارد (توجه کنید که این تعداد می‌تواند هم شامل مهره‌های آبی باشد و هم مهره‌های قرمز) و در کیسه‌ی قرمز قرار می‌دهد. اکنون در انتهای این جابه‌جایی، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز بیش‌تر است یا تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی؟

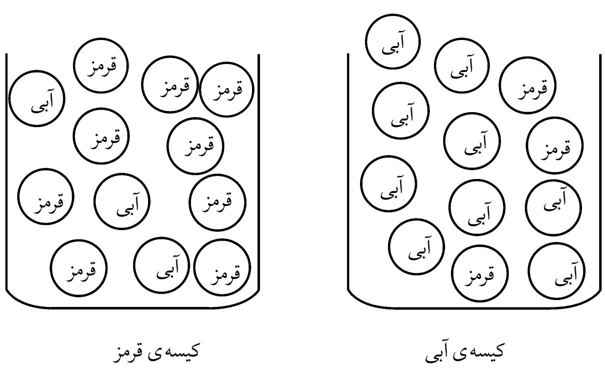
لطفاً قبل از خواندن «فعالیت» زیر، به مسئله‌ی مهره‌ها فکر و سعی کنید آن را حل کنید، چرا که «فعالیت» مذکور هم مسئله را خراب و هم آن را حل می‌کند!!



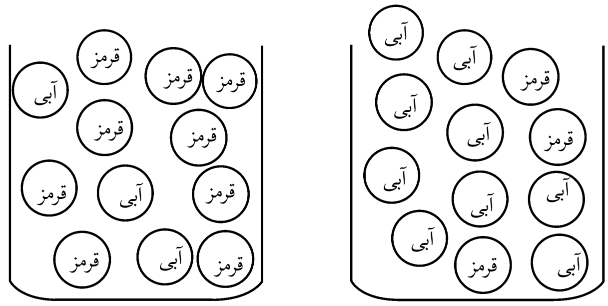
موقعیت مسئله در شروع



موقعیت مسئله پس از انتقال مهره‌های قرمز از کیسه‌ی قرمز به کیسه‌ی آبی



موقعیت مسئله در انتها



کیسه‌ی قرمز　　　　کیسه‌ی آبی

O_2 ، تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی ؛ O_1 ، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی، قرمز O_3 ، تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی آبی

فعالیت[۲]

فرض کنید دو کیسه دارید که در هر کدام ۱۸۰ مهره‌ی ... [مسئله‌ی بالا را دوباره بخوانید، فقط سؤال آخر مسئله را با سؤال‌های زیر جایگزین کنید.]

آیا تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز با تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی برابر است؟ با کامل کردن رابطه‌ها نشان دهید که چرا تعداد مهره‌های آبی در کیسه‌ی قرمز با تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی آبی برابر است؟

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_3=180^\circ\\ \hat{O}_2+\ldots=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \ldots=\ldots$$

شکلِ بیان مسئله‌ی مهره‌ها، اگرچه ممکن است برای شما چندان نامناسب نباشد، برای اکثر دانش‌آموزان شما بسیار نامناسب و گیج‌کننده خواهد بود [برای دیدن شکل هیجان‌انگیزتر و قابل استفاده‌تری از این مسأله به مقاله‌ی «بهترین شروع کدام است؟» (اصغری، ۱۳۷۹) نگاه کنید.] از طرفی، به طور یقین، «فعالیت» طرح شده براساس مسئله‌ی گوی‌ها، حتی برای شما نیز گیج‌کننده خواهد بود، و این نه به خاطر پیچیدگی آن، بلکه به دلیل بی‌محتوا شدن آن است. در واقع من برای طرح فعالیت مذکور دو دلیل دارم. اول این‌که در شما همان حسی را ایجاد کنم که دانش‌آموز اول راهنمایی شما آن را در مواجهه با «اثبات» تساوی زاویه‌های متقابل به رأس تجربه می‌کند؛ اکنون شاید

بسیاری از دانش‌آموزان حتی در بیان تعمیم در زبان طبیعی با مشکل مواجه هستند و این مشکل وقتی آن‌ها ناچار به استفاده از زبان جبری هستند حادتر است

همه‌ی آن سؤال‌هایی که در وحله‌ی اول، به دلیل عادت کردن به موضوع (زاویه‌های متقابل به رأس) بی‌ربط به نظر می‌رسید، موضوعیت پیدا کنند: چرا از O_4 (تعداد مهره‌های قرمز در کیسه‌ی قرمز) استفاده نشده است؟ چرا این روابط خاص نوشته شده‌اند و نه بسیاری از روابط ممکنِ دیگر؟ آیا «استدلال» نمادین بالا، اصولاً چیزی به شخص می‌آموزد؟ آیا او درک خواهد کرد که در این مسئله، چه چیزهایی ثابت‌اند و چه چیزهایی متغیر؟ آیا «استدلال» مذکور، تجربه‌ی جبری بیش‌تری از استدلال کلامی ـ عددی زیر به همراه خواهد آورد؟

	مهره‌ی آبی	مهره‌ی قرمز
کیسه‌ی آبی	۱۶۳	
کیسه‌ی قرمز		

فرض کنید در انتها ۱۶۳ مهره‌ی آبی در کیسه‌ی آبی باقی مانده باشد. با توجه به این تعداد مهره‌ها در دو کیسه، برابر با ۱۸۰ تا است، از این‌جا به بعد اعداد خود را به شما تحمیل می‌کنند.

اکنون اجازه دهید به راه‌حل «جبری» که در فعالیت گوی‌ها به شما تحمیل شد نگاهی بیاندازیم:

$$\left.\begin{array}{l}O_1+O_3=180^\circ\\ O_2+O_3=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow O_1=O_2$$

این عبارت‌ها، دقیقاً همان عبارت‌هایی است که ما به دانش‌آموز خود (در مسئله‌ی زاویه‌های متقابل به رأس) تحمیل کرده‌ایم و این دلیل دوم من برای طرح آن چنانی فعالیت گوی‌ها است. توجه کنید که O_1 ، O_2 و O_3 «وجودی دارند مستقل از اشیای مشخصی که به نمایندگی آن‌ها مورد قبول قرار گرفته‌اند»

> با جدا کردن نمادها از زمینه‌هایی که به آن‌ها معنی می‌بخشند و یا با اتصالِ نابه‌جای نمادها به آن زمینه‌ها، همه‌ی فرصت‌های زدنِ نشانی به این بزرگی را از دست داده‌ایم

(دانتزیگ، ص ۱۱۷). از طرفی «قابلیت نمادها برای انجام اعمال ریاضی» (دانتزیک، همان‌جا) امکان می‌دهد که تساوی O_1 با O_2 مستقل از معنی‌ای که ما برای O_1، O_2 (و در این‌جا O_4) قائلیم از دو تساوی $O_1 + O_3 = 180$ و $O_2 + O_3 = 180$ به دست آید.

این سکوت نمادها نسبت به زمینه‌ای که به آن‌ها معنی می‌بخشد همه‌یَ قدرت جبر نمادین است. اما همین سکوت، «چشم اسفندیار» آموزش جبر است؛ جبری که یا پیوند خود را از زمینه بریده یا پیوند معنی‌داری با زمینه برقرار نکرده است؛ آموزشی که با گرفتن موضوعِ صحبت از دانش‌آموز، تأکید بر آسان صحبت کردن می‌کند! این چنین است که برای دانش‌آموز، سکوت نمادها نه نشانه‌ی قدرت، بلکه فریادی بی‌محتوا است.

پی‌نوشت

۱. پیشنهاد استفاده از این مثال را جدی نگیرید! توجه کنید که عبارت $\frac{a-h}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}$ در مورد ساختار هندسی متوازی‌الاضلاع هیچ چیزی نمی‌گوید و کاملاً به آن بی‌ربط است.

۲. این «فعالیت» با آگاهی از این تنظیم شده است که استفاده از عنوان «فعالیت» چیزی را تبدیل به فعالیت نمی‌کند!

منابع

1. Demby, A: (1997), Algebraic Procedures Used By 13-15-Years-Olds, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 45-70.

2. Küchemann, D. and Hoyles, C: (2005), Pupils' Awareness of Structure on Two Number/Algebra Questions, *Proceedings of the Fourth Conference of the European,* 438-448.

3. Mason, J: (2005), Frameworks for Learning, Teaching and Research: Theory and Practice, in Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.). *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

4. Sfard, A. and Linchevski, L: (1994), The Gains and the Pitfalls of Reification- The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics,* 26, 191-228.

5. Wertheimer, M: 1945, *Productive Thinking*.

۶. استیسی، کبی و اصغری، امیرحسین (۱۳۸۸): گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۹۵، صص ۱۱-۴، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۷. اصغری، امیرحسین (۱۳۷۹): بهترین شروع کدام است؟، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۵۹-۶۰، صص ۵۳-۵۲، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۸. اصغری، امیرحسین و عبدالله‌پور، مریم (۱۳۸۷): a چه خوشمزه است!، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۹۲، صص ۴۹-۴۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۹. دانتزیگ، توبیاسر (۱۳۶۱): **عدد، زبان علم**. ترجمه‌ی مهندس عباس گرمان، شرکت سهامی کتاب‌های جیبی.

۱۰. **کتاب ریاضی چهارم دبستان** (۱۳۸۶): دکتر عبدالله شیدفر، دکتر مسعود فرزان، پرویز فرهودی مقدم و دکتر رحیم کریمپور، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۱. **کتاب ریاضی سال اول راهنمایی** (۱۳۸۵): دکتر مسعود فرزان، صفر با همت شیروانه‌ده، محمد تقی دیائی و پرویز فرهودی مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۲. **کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی** (۱۳۸۳): دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی‌مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

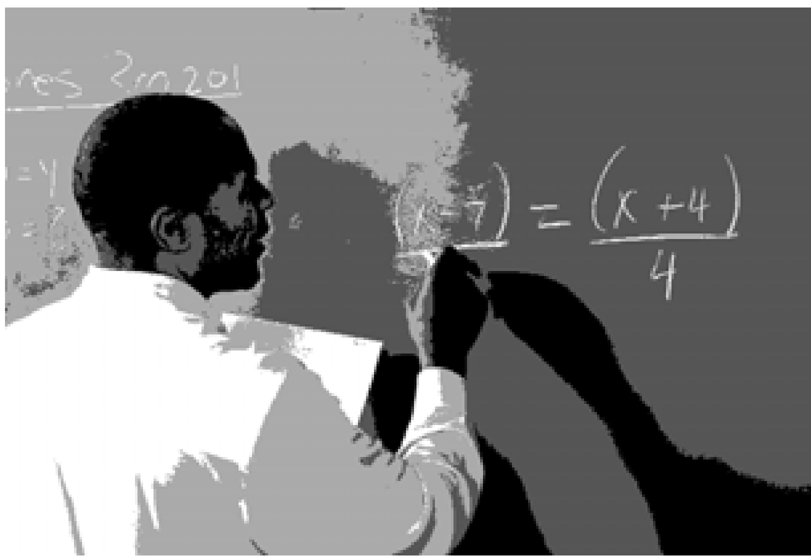
۱۳. **کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی** (۱۳۸۵): دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه‌ده، محمد تقی دیبایی و پرویز فرهودی‌مقدم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۴. **ریاضیات (۱) سال اول دبیرستان** (۱۳۸۷): شهرناز بخشعلی‌زاده، دکتر ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، دکتر فرزاد دیده‌ور، محمد تقی طاهری تنجانی، دکتر وحید عالمیان و دکتر حمید مسگرانی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۱۵. **راهنمای تدریس فصل اول کتاب ریاضی ۱**،
http://math-dept.talif.sch.ir

ریاضی‌دان‌ها به‌عنوان آموزشگران ریاضی

هیمن بَس
ترجمه: نرگس مرتاضی مهربانی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی تهران



در حال حاضر، فرهنگ درونی ریاضیات به‌وسیله‌ی قدرت اکتشافی و پردازشی که تکنولوژی به آن اعطا کرده است، به بررسی‌های عمیقش در مورد ساختارهای بنیادی عدد، فضا، حرکت اجسام[1] و غیره ادامه می‌دهد. این بررسی‌ها تا حدودی با تطور ذهنی به‌طور محض و تا اندازه‌ی زیادی به‌وسیله‌ی علوم طبیعی، به سوی ریاضیاتی رهنمون می‌شوند که برای توصیف، تجزیه و تحلیل، مدل‌سازی، شبیه‌سازی و غیره، زبان و مفاهیم را مجهز می‌کند. به علاوه، ریاضیات، ابزارهای طراحی پروژه و شبیه‌سازی را برای علوم مهندسی، تکنولوژی و فرایندهای سازمان‌دهی و تصمیم‌گیری در صنایع فراهم می‌سازد. این ابزارها و کارکردهای متنوع تفکر ریاضی در خیلی از حرفه‌ها و در میان نیروی کار فنی به‌طور فزاینده‌ای بازنمود پیدا کرده‌اند.

مرحله‌ی گذاری که در بالا به آن اشاره شد با تغییر تمرکزهای جزیی بسیاری درگیر است- تغییر تمرکز از درون[2] ریاضیات به سمت کاربردها و کار بین‌رشته‌ای با علوم طبیعی و اجتماعی، از موقعیت‌های دانشگاهی به سوی موقعیت‌های صنعتی و آزمایشگاهی، از کار خود- تنظیم‌شده‌ی فردی به سمت تلاش‌های مشارکتی و چندرشته‌ای، از ارتباطات فنی با کسانی که همگی در یک زمینه‌ی مشترک متخصص هستند به‌سوی ارتباط تخصص‌های علوم ریاضی در مرحله‌ی گذاری هستند که ممکن است ظاهراً، جزیی‌تر و/ یا با تقسیم‌بندی‌های جدید و متفاوت از قبل و گسترده‌تر جلوه کنند. ما گونه‌هایی در معرض خطر نیستیم. اما سلامتی‌مان به این بستگی دارد که بتوانیم از تمایلات تاریخی‌مان به سوی انزوا، فاصله بگیریم و برای تمام جوامع همتا و متقاضی در دسترس باشیم. امروزه، این پیام به‌طور گسترده و به شکل‌های متفاوت شنیده می‌شود.

بینابینی میان مرزهای فرهنگی و رشته‌ای و غیره.

آموزش ریاضی به این منظور طراحی شد تا برای جمعیت‌های مختلف دانش‌آموزی، دانش، درک و فهم و مهارت‌های ریاضی را فراهم آورد. در سطح بعد از دوره‌ی متوسطه[3] چنین آموزشی به دو جامعه‌ی بزرگ واگذار شد. یکی از آن‌ها در نظام دانشکده‌های دوساله و محلی[4] مستقر است. جامعه‌ی دیگر که عهده‌دار این آموزش است، شامل اساتید ریاضی دانشگاهی است که اکثر آن‌ها عمدتاً برای انجام تحقیقات ریاضی تربیت شده‌اند. این افراد، تحقیقات ریاضی را برای کسانی انجام می‌دهند که مبانی اقتصادی‌شان، به‌طور برجسته، رسالت آموزش [ریاضی] را مشخص می‌کنند.

هم‌چنین، گروهی کوچک اما سرشناس از دانش‌پژوهانی وجود دارد که با سنت پولیا درباره‌ی ریاضیات بعد از دوره‌ی متوسطه تحقیق می‌کنند و به توسعه‌ی برنامه‌ی درسی آن می‌پردازند. برای مثال، می‌توان به اد دوبینسکی[5]، جوآن فرینی-ماندی[6]، استو مانک[7] و آلن شونفیلد[8] اشاره کرد.

انتقال‌های توضیح داده شده در بالا، در حال حاضر، در تغییرات سازگار عمیق به‌وجود آمده در نقش آموزش ریاضی منعکس می‌شوند. در سال‌های بعد از جنگ جهانی دوم، یک مدل آموزشی قدرتمندطراحی کرده بودیم تا یک جامعه از صنوف اجتماعی[9] نخبه از دانش‌جویان بسیار آموزش‌دیده و با انگیزه را برای حرفه‌های فنی و علمی پیشرفته تولید کنیم. بعضی از ریاضی‌دان‌های توانا و متعهد، انرژی حرفه‌ای خود را با این وظیفه‌ی آموزشی، هم‌سو کردند. اما اکثر ریاضی‌دان‌ها، پداگوژی را رسمی، تعلیمی[10]، اغلب ماهرانه و طاقت‌فرسا می‌دیدند. این پداگوژی باعث بیزاری خیلی از دانش‌جویان شد و بسیاری به‌تدریج، مطالعه‌ی ریاضی پیشرفته را کنار گذاشتند. در این زمان، فرض شد که این دسته از دانش‌جویان نتوانستند به استانداردهای سطح بالای حرفه‌ی ما دست یابند. این دانش‌جویان به‌عنوان افرادی فاقد «جوهره‌ی واقعی»[11] تلقی می‌شدند. از آن‌جا که کشور به تعداد زیادی از متخصصان به‌طور ریاضی آموزش‌دیده، نیاز نداشت و به اندازه‌ی کافی استعداد و انگیزه‌ی ریاضی برای حفظ هر نوع پداگوژی یافت می‌شد، به همین دلیل، این نظام پالایش، بی‌خطر دانسته شد و حتی خیلی‌ها آن را مطلوب یافتند.

ظهور یک اقتصاد جهانی به شدت رقابتی و تکنولوژیکی، توقعات از آموزش ریاضی را به‌طور اساسی بالا برد. ما حالا، سطوحی از صلاحیت‌ها و سواد علمی و فنی را از نیروی کار طلب می‌کنیم که با آن‌چه که قبلاً برای تنها یک جمعیت انتخاب شده و خاص دانش‌جویی، مناسب دانسته می‌شد، برابری می‌کند. این تغییرات مشابه، موجب می‌شدند تا به‌منظور مشارکت مسئول و آگاهانه در جامعه‌ی مدرن دموکراسی‌مان از سواد فنی، انتظارات بیش‌تری داشته باشیم. این فشارها، یک وجه عملی به بحث سنتی در مورد غنی‌سازی فرهنگی و قدرتمندسازی ذهنی که ایده‌ها و تفکر ریاضی قادر به ایجاد آن هستند، اضافه می‌کند. شکست تعداد زیادی از دانش‌جویان در ریاضیات و / یا کنار گذاشتن مطالعه‌ی ریاضی- که دروازه‌ی چنین صلاحیت و سوادی است- حالا نه به‌عنوان شکست دانش‌جویان بلکه به مثابه شکست نظام آموزشی دیده می‌شود. به‌علاوه، دانش‌جویان زیان‌دیده، به‌طور نامتناسبی از جمعیت‌های اقلیت و زنان هستند که بیش‌ترین تأثیر را بر نیروی کار دارند.

زمان آن رسیده است که اساتید ریاضی نقش خود را به‌عنوان آموزشگران [ریاضی] بازبینی کنند

زمان آن رسیده است که اساتید ریاضی نقش خود را به‌عنوان آموزشگران [ریاضی] بازبینی کنند. ما حرفه‌ای را تشکیل می‌دهیم که به تخصصی بودنش و نیز بر ویژگی عملکردش با کیفیت بالا و پاسخ‌گویی قاطعش، افتخار می‌کند. هنوز اساتید ریاضی دانشگاهی- که به‌طور خاص، دست‌کم نیمی از عمر حرفه‌ای خود را صرف تدریس کرده‌اند- به‌عنوان آموزشگران [ریاضی]، به‌جز مدل‌های ایفای نقش مربی‌های‌شان، هیچ آماده‌سازی یا توسعه‌ی حرفه‌ای ندیده‌اند. یاد گرفتن آواز تک‌نفره را با شرکت در اپرا، یادگیری آشپزی را از طریق خوردن، یادگیری نوشتن را از راه خواندن، تصور کنید. بیش‌تر هنر تدریس- تفکر، مشاهدات و قضاوت‌های پویای یک معلم آموزش‌دیده- برای مشاهده‌گر بیرونی، غیر قابل رؤیت است. در هر صورت، بیش‌تر اساتید ریاضی دانشگاهی به‌ندرت موقعیتی در اختیار دارند که یک تدریس واقعاً خوب مربوط به دوره‌ی لیسانس را مشاهده کنند.

همان‌طور که آشپزی را نمی‌توان از طریق خوردن یاد گرفت،

با خواندن کتاب‌های آشپزی یا گوش کردن به سخنرانی‌ها نیز نمی‌توان آن را فراگرفت. آشپزی از طریق آشپزی کردن، معلمی کردن یک آشپز آموزش دیده و با استفاده از یک مدل کارآموزی فراگرفته می‌شود. درحقیقت، آموزش معلمان نیز با ترکیبی از آموزش کارآموزی و تعلیمی طراحی شده است. شاید توسعه‌ی حرفه‌ای اساتید ریاضی دانشگاهی به‌عنوان معلمان نیز باید به همین روش، بر یادگیری در زمینه‌ی عملی، مدل‌سازی شود به‌طوری که فقط تعداد معدودی از سبک‌های یادگیری صورت‌بندی شده که برای اکثر ما آشنا هستند را دربرگیرد. در حال حاضر، برای چنین منظوری، طرح‌های خوب یا یک روش نظام‌مند، متداول نیست. متخصصان آموزشی می‌توانند در ایجاد و تجربه‌ی چنین طرح‌هایی به ما کمک کنند.

یک تدریس کارا نیازمند این است که معلم، دانش‌آموزانش را بشناسد، نه‌تنها قادر به توضیح مطلبی به آن‌ها باشد بلکه به آن‌ها به دقت گوش دهد و آنان را درک کند. هم‌چنین، بداند که دانستن مطلبی برای خود یا برای بحث و گفت‌وگو با یک همکار متخصص، با دانستن آن مطلب به‌منظور توضیح به یک دانش‌آموز، یکسان نیست. به‌علاوه، تجربه‌ی یک دانشمند ریاضی به‌عنوان یک یادگیرنده، بهترین مدل برای یادگیری دانش‌جویانش نیست. مواردی که ذکر شد، انواع مهارت‌ها و آگاهی‌هایی هستند که توسعه‌ی حرفه‌ای می‌تواند ترویج کند.

به‌طور حتم، همیشه در رتبه‌های حرفه‌ای‌مان، بعضی معلمان خیلی کارا و حتی الهام‌بخش وجود داشته‌اند. آن‌ها از طریق ترکیبی از استعداد، تعهد شخصی، پرکاری، تمرین کردن و بدون مراجعه به آموزشگران حرفه‌ای، کارا و الهام‌بخش شده‌اند. اما آیا این افراد منزوی، مدلی برای مسئولیت‌های آموزشی حرفه‌ی ما بنا می‌نهند؟ آیا ما ـ و مردمی که به آن‌ها خدمت می‌کنیم ـ باید به شرایطی که در آن، تعداد اندکی از بین خود ما انتخاب شده‌اند تا ابتکارهای فردی را برای توسعه‌ی مهارت‌های تدریس ارایه دهند، قانع باشیم؟ برعکس، تصور کنید که آموزشِ نظام‌مند در ریاضیات برای [آموزش] محققان آینده را به یک نظامِ خودآموز فردی با آزادی مطلق واگذار کنیم، در این صورت، چگونه این نظام می‌تواند بر کیفیت جامعه‌ی تحقیقاتی ما تأثیرگذار باشد؟

گرایش بسیاری از ریاضی‌دانان به سوی مسایل آموزشی، به‌خوبی، فرهنگ حرفه‌ای آنان را بازتاب می‌دهد. این فرهنگ، به‌طور ضمنی، اهمیت و ذات پداگوژی را کوچک می‌شمارد. اساتید ریاضی، به‌طور خاص به بحث‌های آموزشی، فقط برحسب محتوای موضوعات درسی و مهارت‌های فنی می‌پردازند و «راه‌حل» [این مسایل] را به عنوان شکل جدیدی از مواد برنامه‌ی درسی ارایه می‌دهند. برنامه‌ی درسی درحقیقت، جنبه‌ی تعیین‌کننده‌ی مسئله است که برای متخصصانی که به‌طور ریاضی آموزش دیده‌اند از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. اما اغلب، این [توجه به برنامه‌ی درسی] می‌تواند بحث‌های مربوط به شناخت و یادگیری، استراتژی‌های چندگانه برای درگیر شدن فعال دانش‌آموزان با ریاضیات و نیز ارزیابی یادگیری و درک و فهم آن‌ها را نادیده بگیرد. جالب آن که آماده‌سازی ریاضی معلمان مدرسه، اغلب به همین اساتید ریاضی واگذار می‌شود که به روش‌هایی غیرحساس نسبت به جنبه‌های پداگوژیکیِ تدریس ریاضی به دانش‌آموزان جوان، آموزش دیده‌اند. پداگوژی چیزی نیست که بعداً به محتوا اضافه شود. پداگوژی و محتوا در تدریس کارا، به‌طور تفکیک‌ناپذیری درهم تنیده شده‌اند. پداگوژی مانند خود زبان، می‌تواند ایده‌ها را آزاد یا محبوس کند، می‌تواند تفکر سازنده را القا یا خاموش کند.

آموزش ریاضی با تمام عدم اطمینان و عدم قطعیت‌هایی که دارد، هدف آن فقط پرداختن به عقلانیت نیست بلکه کمک به دیگر وجوه انسانی است. آموزش ریاضی یک علم اجتماعی است که برای شواهد، روش استدلال و نظریه‌پردازی، بحث‌های حرفه‌ای و غیره، استانداردهای خاص خودش را دارد

درحقیقت، تغییرات در این حوزه، آغاز شده است و بیش‌تر آن‌ها از جنبش اصلاحات حسابان الهام گرفته‌اند. (برای یک گزارش جامع در این مورد به «ارزیابی تلاش‌های اصلاحات حسابان» نوشته‌ی آلن تاکر، MAA، ۱۹۹۵ نگاه کنید.) ریاضی‌دانان شکاک و بیرون از این فعالیت، پدیده را به‌عنوان تولیدکننده‌ی مواد جدید برنامه‌ی درسی دیده‌اند که برای تدریس حسابان، استفاده‌های نظام‌وارتری از تکنولوژی را معرفی می‌کند.

این مواد جدید، موضوع جدل‌های پرتحرک و سالم شده بوده‌اند، اگرچه بعضی از مخالفان، راجع به دو قطبی شدن بحث و جلوگیری از گفت‌وگوی منطقی، سرسختانه و کورکورانه بسیار خرده‌گیر شده بودند. از سوی دیگر، افرادی که واقعاً در تدریس اصلاحات حسابان درگیر بودند، به‌طور خاص، درک متفاوتی از اهمیت آن کسب کردند. آن‌ها به همان تردید ارایه شده توسط اساتید ریاضی در مورد برنامه‌ی درسی اشاره می‌کنند و در مورد روش و وسعت استفاده از این مواد، قضاوت حرفه‌ای مناسب را به‌کار می‌گیرند. دگرگونی شخصی و تغییر در عمل حرفه‌ای آنان به‌عنوان معلمان، مهم‌ترین چیزی بود که آن‌ها در اصلاحات یافتند. آن‌ها، عضو بودن در یک اجتماع را درک کردند، اجتماعی که عمل تدریس در آن برخلاف خود عمل حرفه‌ای ریاضی، قسمتی از آگاهی حرفه‌ای و ارتباط کاری است. ایجاد چنین اجتماع معتبری از آموزشگران- ریاضی‌دانان حرفه‌ای است که به نظر من، مهم‌ترین دستاورد جنبش اصلاحات حسابان محسوب می‌شود. این دستاوردی سزاوار حمایت و ارتقا است و جامعه می‌تواند انصافاً به آن افتخار کند. به علاوه، بنا به گزارش ACRE که در بالا به آن استناد شده، مطالعه‌ی JPBM در مورد «امتیازها و شناخت در علوم ریاضی» در این جهت، حرکت مهمی است که به‌وسیله‌ی همکاران‌شان در دیگر نظام‌ها نیز به‌طور گسترده، تصدیق و استناد شده است.

ممکن است افرادی تمایل داشته باشند تا از جنبش اصلاحات حسابان به‌عنوان موردی از بهبود تدریس، بدون کمک آموزشگران حرفه‌ای یاد کنند. برعکس، نمونه‌هایی وجود دارد که حاکی از مشاوره‌های مهم با متخصصان آموزشی است. به علاوه، ریاضی‌دان‌هایی که از اولین مراحل این جنبش، کاملاً درگیر بودند و آن‌هایی که مجبور بودند تا برای این دوره‌های جدید، برنامه‌هایی را برای آماده‌سازی گروه‌های تدریس طراحی کنند، به‌طور مؤثری به متخصصان آموزشی با تخصص‌های حرفه‌ای خاص بدل شدند. آن‌ها، قسمت اعظم وقت‌شان را صرف این توسعه کردند. (این احتمال را که ممکن است یک متخصص آموزشی، لزوماً ریاضی‌دان نباشد را رد نمی‌کنم.) از این گذشته، فلسفه‌ی پداگوژیکی که هدایت‌کننده‌ی اصلاحات حسابان بود، منعکس‌کننده‌ی فلسفه‌ای است که در تلاش اصلاحیِ پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم (K-12) آمده و از تفکر اجتماعِ آموزش حرفه‌ای سرچشمه گرفته است.

وقتی معلمان، اساتید و/ یا گروه‌های آموزشی (اغلب تحت فشار بیرونی) به ضرورت بهبود توسعه‌ی حرفه‌ای پی‌ببرند، چگونه می‌توانند به آن جامه‌ی عمل بپوشانند؟ آیا اساتید ریاضی، بدون آن‌که دوره‌های توسعه‌ی حرفه‌ای را دیده باشند، قادرند دوره‌ها و یا برنامه‌هایی را برای دانشکده‌های فعلی و آتی طراحی نمایند؟ قسمتی از جواب این است که ما به تنهایی نمی‌توانیم. تنهایی، هم به معنای اساتید ریاضیِ دورافتاده از آموزشگران حرفه‌ای باتجربه (که ممکن است خودشان به‌طور ریاضی آموزش دیده باشند) و هم به معنای اساتید ریاضی به‌صورت انفرادی، بدون حمایت‌های جمعی از جانب گروه‌های آموزشی و محیط‌های آموزشگاهی محدود است. بسیاری از اساتید ریاضی تمایل دارند تا به متخصصان آموزشی به دیده‌ی شک بنگرند و با تحقیر به آن‌ها کنایه می‌زنند؛ این موقعیت ساده‌ای نیست که ما اکنون، ناچاریم از آن‌ها بیش‌تر یاد بگیریم و به کمک حرفه‌ای آن‌ها نیازمندیم. چیزی که باقی می‌ماند فراهم کردن زمینه‌هایی برای ارتباط‌های محترمانه و مشارکت حرفه‌ای بین اساتید ریاضی و متخصصان آموزشی- از معلمان ریاضی تا محققان آموزشی است. این مسیر، اساساً، یک خیابان دوطرفه است که اساتید ریاضی می‌توانند به قدرتمند شدن رشته‌ایِ برنامه‌ی مدرسه‌ای و عمل تدریس کمک کنند و در عین حال، اجتماعات معلمی و تحقیقات آموزشی می‌توانند آگاهی پداگوژیکی و صلاحیت‌های اساتید ریاضی دانشگاهی را ارتقا دهند. آموزش ریاضی، برخلاف ریاضی، یک علم دقیق نیست، بلکه بیش‌تر، تجربی و به‌طور ذاتی، چندرشته‌ای است. با تمام عدم اطمینان و عدم قطعیت‌هایی که دارد، هدف

لازم است معلم بداند که دانستن مطلبی برای خود یا برای بحث و گفت‌وگو با یک همکار متخصص، با دانستن آن مطلب به‌منظور توضیح به یک دانش‌آموز، یکسان نیست. به‌علاوه، تجربه‌ی یک دانشمند ریاضی به‌عنوان یک یادگیرنده، بهترین مدل برای یادگیری دانش‌جویانش نیست

آن فقط پرداختن به عقلانیت نیست بلکه کمک به دیگر وجوه انسانی است. آموزش ریاضی یک علم اجتماعی است که برای شواهد، روش استدلال و نظریه‌پردازی، بحث‌های حرفه‌ای و غیره، استانداردهای خاص خودش را دارد. آموزش ریاضی هم‌چنین، دارای یک پایه‌ی تثبیت‌شده‌ی تحقیقاتی است که بسیاری از آن‌ها از دهه‌های گذشته فراگرفته شده‌اند. این پایه، تأثیراتی حیاتی بر کارکردهای آموزشی دارد که ریاضی‌دانان در قبال این کارکردها مسئول هستند.

چه نوع کارهایی باید صورت گیرند؟ حداقل، دانش‌جویان دوره‌ی فوق‌لیسانس که به‌عنوان TA یا آموزگار، مشغول به‌کار هستند، باید از آمادگی برای تدریس برخوردار شوند. این آماده‌سازی نه‌تنها برای خدمت‌شان [به‌عنوان معلم] حین تحصیل در دوره‌ی فوق‌لیسانس بلکه برای نقش‌های‌شان به‌عنوان معلمان آینده در دانشگاه یا دانشکده یا حتی مدرسه باید ارایه شود. حتی اگر مسیرهای شغلی‌شان، آن‌ها را به دنیای دانشگاهی رهنمون نسازد، بیش‌تر آن‌چه را که در مهارت‌های تدریس نیاز دارند تا یاد بگیرند، درست همان‌هایی هستند که برای برقراری ارتباط مؤثر در موقعیت‌های متفاوت، ضروری است. این امر باعث می‌شود تا آن‌ها در کار و جامعه، سخن‌گویان بهتر و مؤثرتری باشند.

توسعه‌ی حرفه‌ای تدریس و مهارت‌های ارتباطی، به‌عنوان قسمتی از هدف عمومی آموزش همه‌جانبه‌ی دانش‌جویان دوره‌ی فوق‌لیسانی، یک مؤلفه‌ی حیاتی است. درحقیقت، چنین توسعه‌ی حرفه‌ای برای دانشکده‌های ریاضی و نیز برای دانش‌جویان دوره‌ی فوق‌لیسانس مناسب است. هم‌چنین، آموزش ریاضی، گزینه‌ی مهمی در طراحی برنامه‌های حرفه‌ای جدید در دوره‌ی فوق‌لیسانس در گروه‌های آموزشی علوم ریاضی فراهم می‌آورد. برای توسعه‌ی حرفه‌ای آموزشی دانشکده‌های فعلی، باید منابع حامی چنین برنامه‌هایی فراهم شود.

چالش مهم بعدی، طراحی دوره‌های ریاضی با مشارکت اساتید ریاضی و متخصصان آموزشی است که در گروه‌های آموزشی ریاضی برگزار شوند و به آماده‌سازی ریاضی معلمان آینده اختصاص داشته باشند. مطمئناً، در این مرحله باید نیاز معلمان دوره‌ی ابتدایی را از معلمان دوره‌ی متوسطه جدا کرد. دوره‌ی ابتدایی، عرصه‌ای است که به شدت به توسعه و تجربه‌ی فکورانه‌ای نیاز دارد که به‌طور شایسته توسط اساتید ریاضی به آن پرداخته نشده است. این دوره، از مشارکت‌های جدید و خلاق ممکن ـ جایی که روش‌های قراردادی فکر کردن، مکرراً در تولید نتایج مطلوب شکست خورده است ـ استقبال می‌کند.

تلاش‌هایی از نوع بالا را می‌توان از طریق شبکه‌سازی با همکاران درگیر با تلاش‌های مشابه در دیگر دانشگاه‌ها، تسهیل نمود. فعالیت‌های مختلفی به‌وسیله‌ی شبکه‌ی اصلاحات آموزش ریاضی (MER)، سازمان‌دهی شده‌اند. در نشست‌هایی در فصل زمستان، ملاقات‌های AMS/MAA که حامی چنین شبکه‌سازی‌هایی هستند، برگزار می‌شود.

وقتی ریاضی و آموزش ریاضی در سطوح مدرسه، دانشکده و دوره‌ی فوق‌لیسانس، به‌طور تاریخی در ایالات متحده آمریکا شکاف‌های فرهنگی و حرفه‌ای دارند ـ شکاف‌های قابل مشاهده در برنامه‌های کاری و فرهنگ‌های متمایز AMS و MAA و AMATYC و NCTM ـ برای تمام کسانی که به لزوم بهبود آموزش ریاضی در آمریکا می‌اندیشند، مبرهن می‌شود که این مسئله نمی‌تواند به مؤلفه‌هایی برای چهار جامعه‌ی ذکر شده، تقسیم شود و انتظار داشت که هر کدام از این جوامع، مسئولیت‌های جداگانه و نامتوازن را برعهده بگیرند. به عنوان اساتید ریاضی، محققان آموزش ریاضی، معلمان در دانشگاه‌ها، دانشکده‌ها، دانشکده‌های منطقه‌ای و مدارس، باید دغدغه‌های‌مان را در دوره‌ی فوق‌لیسانس، لیسانس و پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم ببینیم و به آن‌ها به‌عنوان قسمت‌هایی از یک اقدام تلفیق‌شده‌ی آموزشی بنگریم که در آن مجبوریم درست همان‌طور که در تحقیقات علوم ریاضی نیز درخواست شده است، ارتباط برقرار کردن و مشارکت را در کنار مرزهای فرهنگی، رشته‌ای و آموزشگاهی یاد بگیریم.

پی‌نوشت

1. Dynamic
2. Core
3. Postsecondary
4. Community
5. Ed Dubinsky
6. Joan Ferrini-Mundy
7. Steve Monk
8. Alan Schoenfeld
9. Cadre
10. Didactic
11. The Right Stuff

منبعی که ترجمه شده است

Bass, Hyman. (1997), Mathematicians as Educators, **Notices of AMS**, Vol 44, No. 1, January 1997, pp. 18-21.

بخش دوم

یادگیری حسابان در دام مفهوم حد و نمادها

یوسف آذرنگ
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی آذربایجان غربی

اشاره
بخش اول این مقاله را در شماره‌ی گذشته ی مجله خوانده‌اید. در آن بخش، به ریشه‌های تاریخی حسابان و مشکلات یادگیری آن پرداخته شد. اینک ادامه‌ی بحث:

نمادها و نقش آن‌ها در ساختار مفهومی

پیم[1] (۲۰۰۲)، معتقد است که با هر بحث کلی در ریاضی، یک نیاز اساسی برای نمادگذاری نیز وجود دارد و لازم است که رابطه‌ی بین نمادها و چیزهای نمادگذاری شده ایجاد شود. این همان چیزی است که قبلاً اسکمپ[2] (۱۹۸۹) ابراز کرده است «قدرت ریاضیات در ایده‌های آن می‌باشد اما دسترسی به این ایده‌ها و توانایی برای انتقال آن‌ها، وابسته به نمادگذاری ریاضی است» (ص۱۰۵). و برای این کار یک نظام نمادین را که شامل موارد زیر بود معرفی کرد:

یک مجموعه از نمادها $\xrightarrow{\text{که متناظر است با}}$ یک مجموعه از مفاهیم

همراه با

یک مجموعه از روابط بین نمادها $\xrightarrow{\text{که متناظر است با}}$ یک مجموعه از روابط بین مفاهیم

در ادامه اسکمپ (۱۹۸۹) درک نمادین را جذب متقابل یک نظام نمادین و یک ساختار مفهومی می‌داند که تحت تأثیر ساختار مفهومی است.

روند تجرید و خلاصه‌سازی مفاهیم ریاضی اهمیت زیادی دارد و محققان بسیاری از جمله دریفوس[3] (۱۹۹۱)، دوبینسکی[4] (۱۹۹۱) و اسفارد (۱۹۹۱) و تال و گری (۱۹۹۴) به آن پرداخته‌اند. در ارتباط با اهمیت آن وایت و میشل‌مور[5] (۲۰۰۲) بیان می‌کنند: «با این فرض که مفاهیم مجرد در تمام مراحل رشد و توسعه‌ی ریاضی ـ از ابتدایی‌ترین رویارویی با اعداد تا موضوعات پیشرفته‌ای از قبیل حسابان ـ وجود دارند، ضروری است که برای درک بهتر یادگیری و تدریس ریاضی، فرآیند تجرید را مطالعه کنیم» (ص۲۳۵). در این‌جا به نظریه‌ی تبیین شده توسط تال و گری که به نقش نمادها و ارتباط آن با مفاهیم ریاضی، بستگی بیش‌تری دارد اشاره می‌کنم. تال (۱۹۹۶)، در معرفی آن، اظهار می‌دارد «با الهام گرفتن از متفکرانی چون دوبینسکی و اسفارد، که در

تال (۱۹۹۶) معتقد است که رویه‌ها، به اشخاص امکان انجام دادن ریاضی را می‌دهند. اما یادگیری تعداد زیادی از رویه‌ها و انتخاب مناسب‌ترین آن‌ها برای هدف خواسته شده، به‌طور فزاینده‌ای مشکل‌آفرین و خسته کننده می‌شود. در حالی که فرهوم، نه تنها به شخص امکان انجام گام‌به‌گام عملیات (رویه) را می‌دهد، بلکه به او اجازه می‌دهد که نمادها را به‌عنوان اشیای ذهنی ببیند

زمینه‌ی رشد شناختی فرآیندها و مفهوم‌های ریاضی مطالعه کرده‌اند، من این توفیق را یافتم که با تشریک مساعی با ادی گری دیدگاهی را توسعه دهم که نه تنها برای تحلیل چگونگی استفاده‌ی افراد از نمادگذاری، بلکه برای تحلیل چگونگی تعامل با دست‌ورزی نمادین کامپیوتر نیز مفید است» (ص۱۸).

تال و گری معتقدند نمادها، نقش دوگانه‌ای بین فرآیند و مفهوم بازی می‌کنند و ترکیب این دو، نیروی عظیم یادگیری مفاهیم ریاضی را موجب می‌شود (شکل زیر).

$$\text{symbol}\ \begin{array}{l}\longrightarrow\\ \longrightarrow\end{array}\ \left.\begin{array}{l}\text{process}\\ \text{concept}\end{array}\right\}\ \text{procept}$$

مطابق شکل بالا، فرهوم[۶] از ترکیب دو کلمه‌ای فرآیند و مفهوم حاصل شده است. به عقیده‌ی تال و گری یادگیری افراد و انجام دادن ریاضی می‌تواند تحت تأثیر هر یک از موارد بالا انجام شود که این هم یادگیری‌های متفاوتی را به دنبال خواهد داشت؛ مانند یادگیری در سطح رویه‌ای، فرآیندی و فرهومی.

رویه، فرایند و مفهوم

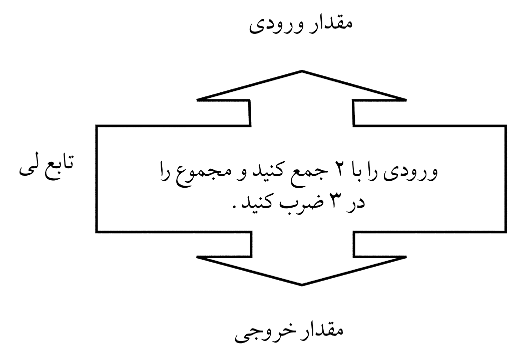
گری (۲۰۰۲)، دریافته است که «نمادها برای مردمان متفاوت، چیزهای متفاوتی معنی می‌دهند. هم‌چنین نمادها برای یک شخص در زمان‌های مختلف توسعه‌ی شناختی‌اش نیز، معانی مختلفی می‌دهند. بعضی‌ها نمادها را جهت فراخواندن رویه‌های غیرمنعطف برای حل مسائل خاص می‌بینند و بعضی دیگر نیروی عظیم‌تر و انعطاف‌پذیرتری را در استفاده از نمادها ـ هم به‌عنوان فرآیند انجام دادن ریاضی و هم به‌عنوان مفهومی برای فکر کردن در مورد آن ـ در خود ایجاد می‌کنند» (ص۲۰۵ و ۲۰۶). در جملات بالا گری به خوبی تفاوت **تفکر رویه‌ای** و **فرهومی** را در به‌کارگیری نمادها عنوان کرده است. تال و همکاران (۲۰۰۱) هم در توصیف رویه و فرآیند بیان می‌کنند که کلمه‌ی **رویه** به معنی دنباله‌ی خاصی از گام‌های مورد استفاده است که در هر زمان، تنها یک گام را اجرا می‌کند. اما اصطلاح فرآیند در مفهوم کلی‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد و شامل هر تعداد رویه‌هایی است که اساساً «نتیجه‌ی یکسانی دارند». برای مثال، فرآیند دیفرانسیل گیری تابع $\frac{1+x^2}{x^2}$ می‌تواند به وسیله‌ی رویه‌های گوناگون از جمله قاعده‌ی خارج قسمت، قاعده‌ی ضرب (برای $\frac{1}{x^2}$ و $1+x^2$) یا استراتژی‌های دیگری از قبیل ساده کردن به صورت $1+x^{-2}$ قبل از دیفرانسیل گیری انجام شود. به همین دلیل تال (۱۹۹۶) معتقد است که رویه‌ها، به اشخاص امکان انجام دادن ریاضی را می‌دهند. اما یادگیری تعداد زیادی از رویه‌ها و انتخاب مناسب‌ترین آن‌ها برای هدف خواسته شده، به‌طور فزاینده‌ای مشکل‌آفرین و خسته کننده می‌شود. در حالی که فرهوم، نه تنها به شخص امکان انجام گام‌به‌گام عملیات (رویه) را می‌دهد، بلکه به او اجازه می‌دهد که نمادها را به‌عنوان اشیای ذهنی ببیند. بدین‌ترتیب او نه تنها می‌تواند ریاضی را انجام دهد بلکه می‌تواند در مورد مفهوم‌ها نیز فکر کند. دمارویس[۷] (۲۰۰۶) هم در ارتباط با تفاوت تفکر فرهومی با تفکر رویه‌ای اظهار می‌دارد «تفکر فرهومی، فکر کردن در مورد یک مفهوم مانند تابع هم به‌عنوان فرآیند و هم به‌عنوان شیء است و در مقابل آن، تفکر رویه‌ای است که وابسته به انتخاب و انجام رویه‌های مناسب است» (ص۲).

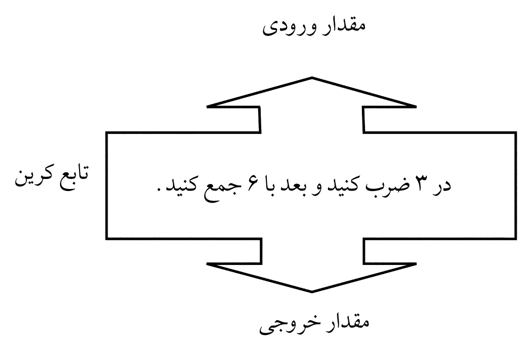
رویه، فرایند و مفهوم در حساب، جبر و حسابان

تال (۱۹۹۶) در توصیفی ساده با ذکر مثال‌هایی از حساب،

جبر و حسابان، فرآیند و مفهوم را در ارتباط با نمادها چنین بیان می‌کند «همه‌ی نمادها با نمایش یک فرآیند ریاضی که باید انجام شود و نیز نتیجه‌ی آن فرآیند، نقش دوگانه‌ای را ایفا می‌کنند. به‌عنوان مثال، ۴+۵ فرایند جمع را برای پدید آوردن مفهوم مجموع ۴+۵ که ۹ است تداعی می‌کند، $3a + 2b$ هم یک فرآیند ارزشیابی و مفهوم یک عبارت جبری است. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ فرآیند ارزشیابی یک مجموع نامتناهی برای یافتن مقدار حدی است (که عبارت است از $\frac{\pi^2}{6}$)» (ص۱۸).

تال و همکاران (۲۰۰۱) با ذکر مثالی از کار تحقیقی دمارویس (۱۹۹۸)، به تفاوت‌های رویه، فرآیند و فرهوم در جبر می‌پردازند. آن‌ها نقل می‌کنند که دمارویس (۱۹۹۸) از سه دانش‌آموز با توانایی‌های مختلف خواست تا با در نظر گرفتن تابع کرین و لی، فرم جبری آن‌ها را بنویسند و پاسخ دهند آیا دو تابع مساویند یا خیر و علت آن ها را توضیح دهند.





گری (۲۰۰۲)، دریافته است که «نمادها برای مردمانِ متفاوت، چیزهای متفاوتی معنی می‌دهند. هم‌چنین نمادها برای یک شخص در زمان‌های مختلفِ توسعه‌ی شناختی‌اش نیز، معانی مختلفی می‌دهند

جدول ۱. نتایج حاصل از تحقیق دمارویس (۱۹۹۸)

آیا توابع مساویند؟ چرا؟	تابع لی	تابع کرین	دانش‌آموزان
بله، اگر ۳ را در تابع لی، پخش کنیم همان تابع کرین به‌دست می‌آید.	۳(x + ۲)	۳x + ۶	قوی
بله، اما فرآیندها مختلف است.	(x + ۲)۳	x۳ + ۶	متوسط
خیر، زیرا اگرچه پاسخ‌ها یکسانند، اما فرآیندها متفاوتند.	x + ۲(۳)	۳x + ۶	ضعیف

تال و همکاران (۲۰۰۱)، از این پاسخ‌ها نتیجه گرفته‌اند که دانش‌آموز قوی روش دست‌ورزی جبری را دانسته و به همین دلیل، این دانش‌آموز در سطح فرهومی عمل کرده است. در حالی که دانش‌آموز متوسط نمادگذاری جبری غیر استاندارد ـ اما به وضوح با معنی ـ را به کار برده است اما فرآیندها را مختلف فرض کرده است و عملکرد وی در سطح فرآیندی است و بالاخره عملکرد دانش‌آموز ضعیف در سطح رویه‌ای ارزیابی شده است.

اما در مورد حسابان، وضعیت پیچیده‌تر از جبر و حساب است. زیرا دانش‌آموزان درگیر فرآیندهایی هستند که بالقوه نامتناهی‌اند. به‌طور مثال گری (۲۰۰۲) بیان می‌کند «دانش‌آموزان اعداد اعشاری نامتناهی را (مثلاً $\frac{\pi^2}{6}$) به عنوان فرآیندهایی می‌بینند که پیوسته ادامه دارد و هرگز پایان نمی‌یابد و آن‌ها را به عنوان کمیت‌های نامناسب که محاسبه‌ی آن‌ها هرگز پایان نمی‌یابد، تلقی می‌کنند» (ص۲۱۲). علاوه بر این، نمادهایی مانند $\frac{dy}{dx}$، از یک طرف بیانگر فرآیند دیفرانسیل گیری و از طرف دیگر نمایان‌گر مفهوم مشتق است که حرکت منعطف بین این دو حالت (ایجاد تفکر فرهومی) برای بسیاری از دانش‌آموزان مشکل است. یا نماد

در جبر و حسابان و انواع فرهوم‌ها در این حوزه‌ها و با دانستن این‌که در گذر از حساب به جبر و جبر به حسابان، فرهوم‌های جدید رخ می‌دهد، توجه به گسستگی‌های شناختی دانش‌آموزان که ممکن است در مسیر این حرکت رخ دهد، اهمیت زیادی دارد

$\int f(x)dx$ هم معرفی کننده‌ی فرآیند انتگرال‌گیری است و هم نشان‌دهنده‌ی مفهوم انتگرال است که دسترسی به مفهوم آن دشوارتر است. در واقع، به گفته‌ی تال و همکاران (۲۰۰۱)، به‌کارگیری هر دوی فرآیند و مفهوم در مقابل رویه‌ها، فرد را قادر می‌سازد که روی ویژگی‌های اساسی نمادگذاری تأکید کند و برای یادگیری تکالیف جدید، فشار زیادی متحمل نشود.

با توجه به تفاوت‌های ذکر شده در جبر و حسابان و انواع فرهوم‌ها در این حوزه‌ها و با دانستن این‌که در گذر از حساب به جبر و جبر به حسابان، فرهوم‌های جدید رخ می‌دهد، توجه به گسستگی‌های شناختی دانش‌آموزان که ممکن است در مسیر این حرکت رخ دهد، اهمیت زیادی دارد که به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. تال و همکاران (۲۰۰۱) در توصیف گذر از حساب به جبر بیان می‌کنند «برای بسیاری از دانش‌آموزان، علامت تساوی‌ها در یک معادله مانند ۵=۲+۳ به‌عنوان فرآیندی از چپ به راست دیده می‌شود که سمت چپ، سمت راست را نتیجه می‌دهد. دانش‌آموزان با چنین تعبیری شاید قادر به حل معادله‌ای نظیر $3x+1=16$ باشند و استدلال کنند که $3x+1$ می‌شود ۱۶. پس $3x$ برابر با ۱۵ است و x می‌شود ۵. اما معادله‌ی $3x+1=4x-4$ با معادله‌ی قبلی متفاوت است» (ص۱۴). گری (۲۰۰۲)، در توصیف چنین معادلاتی ابراز می‌دارد: «دانش‌آموزانی که عمدتاً نمادگذاری را یک حرکت فرآیندی می‌بینند شاید آن را به‌عنوان دو فرآیند مختلف بخوانند و تصور کنند که آن‌ها باید مساوی باشند، اما این دو، فرآیندهایی نیستند که مساوی باشند، بلکه مفاهیمی هستند که توسط دو ارزشیابی ایجاد می‌شوند» (ص۲۱۰).

تال و همکاران (۲۰۰۱)، در ادامه‌ی این مطلب توضیح می‌دهند «در روبه‌رو شدن با چنین مسائلی، بسیاری از دانش‌آموزان بر رویه‌های یادگرفته شده برای رسیدن به پاسخ، از قبیل «تغییر دو طرف و تغییر علامت»، «حرکت دادن اعداد به سمت راست» «حرکت دادن x ها به سمت چپ» و «تقسیم دو طرف بر ضریب x» تمرکز می‌کنند. در واقع دانش‌آموزان ممکن است به لحاظ رویه‌ای، قادر به انجام دادن ریاضی باشند. در حالی‌که به‌طور رابطه‌ای، آن را درک نمی‌کنند» (ص۱۴ و ۱۵). به همین دلیل است که گذر از جبر به حسابان، باعث بروز مشکلات جدیدی برای آن‌ها می‌شود. مثلاً نمادهای $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\lim_{x\to 2}(\frac{x^2-4}{x-2})$، همه فرآیندهای بالقوه نامتناهی دارد و به نظر می‌آید که «پیوسته ادامه دارند» و شاید هرگز به مقدار حد نرسند. به عقیده‌ی بندر (۱۹۹۶)، برای یک عبارت جبری مشابه a+b این ماهیت دوگانه (یعنی هم متقاضی فعالیت بودن و هم نتیجه‌ی آن فعالیت) شناخته شده و مفید است. اما زمانی که این فعالیت شامل فرآیندهای نامتناهی می‌شود، به شکست می‌انجامد. در نتیجه دانش‌آموزان از نظر خودشان درست می‌گویند که از پذیرش درستی تساوی $\frac{1}{3}=0/\overline{3}$ و $0/\overline{9}=1$ امتناع می‌کنند. آن‌ها بخش پویای ماهیت دوگانه‌ی حد را جدی می‌گیرند و به درستی، ورود به یک فرآیند نامتناهی را که در عباراتی مانند $0/\overline{9}$ وجود دارد و به مقدار حد منجر می‌شود، رد می‌کنند (ص ۷۲). تال (۱۹۹۶)، درتوضیح بیش‌تر ماهیت‌های دوگانه، به نکته‌ی ظریفی اشاره می‌کند که توجه به آن حائز اهمیت است. به گفته‌ی وی مثلاً «برای کودکی که به مجموع ۷=۴+۳ تنها به عنوان یک رویه‌ی شمارش نگاه می‌کند که در آن ۴ به اضافه‌ی ۳ عدد ۷ را می‌سازد، ممکن است دشوار باشد از عهده‌ی نمادی مانند $3x+4$ برآید که هیچ چیزی را نمی‌سازد، مگر این‌که شاید قسمت ۳+۴ را انجام دهد که برایش معنایی دارد و $7x$ را به دست آورد. این موضوع باعث سردرگمی شدید بسیاری از دانش‌آموزانی می‌شود که شروع به یادگیری جبر می‌کنند. همین‌طور، برای دانش‌آموزی که به «انجام دادن»

ریاضی با تعداد متناهی دستورالعمل عادت دارد، ممکن است دشوار باشد که با بی نهایت بالقوه در فرآیند حد کنار بیاید و ممکن است فکر کند که در پناه الگوریتم‌های نمادین در حساب و انجام آن‌ها، دست کم می‌تواند به یک «پاسخ» برسد» (ص ۲۰).

بنابراین نمادها نه تنها با چهره‌های متفاوتی از طرف دانش‌آموزان بازخوانی می‌شود بلکه برای آن‌ها معانی متفاوتی هم خواهد داشت. لذا، درک نمادین و انجام فعالیت‌های مناسب با نمادها برای بسیاری از دانش‌آموزان، کار ساده‌ای نیست. علاوه بر این، با توسعه‌ی ریاضی و وارد شدن مفاهیم و مطالب جدید، به حوزه‌ی یادگیری دانش‌آموزان نمادهای جدیدی اضافه می‌شود که برقراری ارتباط بین این نمادها و مفاهیم جدید ضرورت بیش‌تری پیدا می‌کند و عمل یادگیری را مشکل‌تر می‌سازد. همان‌گونه که می‌بینیم، دانش‌آموزان اعمال حسابی را بهتر از اعمال جبری انجام می‌دهند و در مسیر حرکت به سمت حسابان با دشواری‌های بیش‌تری مواجه می‌شوند.

جمع‌بندی

همان‌گونه که اشاره شد، بیش‌تر مفاهیم ریاضی از جمله ریاضیات مدرسه‌ای (حساب، جبر، حسابان و هندسه)، در بسترهای واقعی شکل گرفته‌اند و به مرور زمان، چون به‌کارگیری مفاهیم در قالب کلمات و الفاظ و حتی نمودارها، مشکل و وقت‌گیر بوده است، افراد مختلف در طول تاریخ نمادها را به خدمت گرفته‌اند و برای بیان مفاهیم ریاضی از نمادها استفاده کرده‌اند. امروزه قدرت ریاضی وابسته به نمادگذاری است و برای انجام دادن ریاضی مجبوریم زبان نمادها را به کار ببریم. از طرف دیگر، با به‌کارگیری نمادها، دسترسی به مفاهیم مربوط به آن‌ها هم مشکل می‌شود و به راحتی نمی‌توان، به همین سادگی که نمادها را به کار می‌بریم، مفاهیم را درک کنیم. لذا تحقیقات بسیاری از محققان حوزه‌ی آموزش ریاضی در این راستا بوده است که چگونه می‌توان پیوند معنادار و محکمی بین نمادها و مفاهیم آن ایجاد کرد. بنابر یافته‌های ذکر شده در این مقاله و پژوهش‌های دیگر، مفاهیم ریاضی و از جمله جبر و حسابان، تنها با بازنمایی نمادین و یا حتی زبان رسمی به‌کار رفته در آن‌ها قابل دسترسی نخواهد بود و دانش‌آموزان به سختی می‌توانند با صورت‌های نمادی مفاهیم ریاضی کنار آیند، مگر این‌که برای این نمادها قالب‌های ساده‌تر و ملموس‌تری توصیف کنند.

هم‌چنان که قبلاً ذکر شد، روند تجرید مفاهیم ریاضی از دیدگاه محققان مختلف، مراحل مختلفی را طی می‌کند که در اینجا به ایده‌ی فرهوم از تال و گری اشاره شد. به موازات این‌ها، محققان دیگر هم نظریه‌های مشابهی را تبیین کرده‌اند که هر یک، دسترسی به مفاهیم ریاضی از جمله حسابان را از زوایای متفاوتی توصیف کرده‌اند و در نوع خود، مفید و با اهمیت هستند. به عنوان مثال، کانفری و اسمیت (۱۹۹۴)، دیدگاه «معرفت‌شناسی و بازنمایی‌های چندگانه[۳۰]» را در ارتباط با تجرید پیشنهاد کرده‌اند. براساس این دیدگاه، رشد و توسعه‌ی ریاضی در تناظر و هماهنگ با بازنمایی چندگانه قرار دارد. بدین معنی که دانستن بخشی از ریاضی، انجام دادن عمل ریاضی به شکل بازنمایی‌های متفاوت است و سپس هم‌سنگ کردن و مقایسه‌ی این شکل‌ها به منظور برطرف کردن موقعیت‌های پیچیده می‌باشد. آن‌ها این وضعیت را مشابه حرکت‌های پاندولی می‌دانند که نوسان‌های زیادی دارد و دریافت‌های تکمیلی و معتبرتری را می‌تواند عرضه کند.

در حسابان به خوبی می‌توان چنین بستری را فراهم آورد و مفاهیم آن را می‌توان به شکل‌های مختلفی در بازنمایی‌های عددی، جبری و نموداری بیان کرد و با حرکت منعطف بین این بازنمایی‌ها و انواع دیگر آن، گامی مهم در یادگیری هرچه بهتر مفاهیم آن برداشت و مفاهیم کلیدی حسابان را از دام وابستگی به نمادها رهایی بخشید. علاوه بر این، آشنایی هرچه بیش‌تر معلمان ریاضی با نظریه‌ها و ایده‌های جدید، موجب می‌شود که آن‌ها به روش‌ها و قالب‌های سنتی و فرسوده‌ی به جامانده اکتفا نکنند و در کلاس‌های درس، میدان فکری وسیع‌تری را برای دانش‌آموزان خود ترسیم کنند.

* این مقاله از فصل دوم پایان‌نامه با عنوان «بسترهای لازم برای یاددهی و یادگیری مفاهیم حسابان در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای» گرفته شده است که با راهنمایی خانم دکتر زهرا گویا نگارش یافته است.

پی‌نوشت

1. Pimm
2. Skemp
3. Drayfus
4. Dubinsky
5. White & Mitchelmore
6. Procept

این کلمه، از ترکیب دو کلمه‌ی Process (فرآیند) و Concept (مفهوم) درست شده است.

7. Demarois
8. Epistemology & Multiple Representation

منابع

1. Akkoc, Hf. & Tall, D. (2003). The Function Concept: Comprehension And Complication.

2. Bagni, Gt. (2003). Historical Roots of Limit Notion. Development, **Canadian Journal of Sciene, Mathematics and Technology Education.**

3. Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concept, 8th International congress on Mathematics Education (ICME 8). Selected Lecture, Sevilla, 14-21.

4. Comfrey, J. &. Smith, E. (1994). Comments on James Kaputs Chapter "Democratizing Access to Calculus: New Routs to Old Roots".

5. Gray, E. (2002). Processes and Concept as "False Friends" In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence, Learning and Understanding Mathematics**, 205-217, Post Pressed, Flaxton Australia.

6. Kaput, J. (1994). Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Edited byt A.H. Schoenfeld.

7. Mc Donald' M.A. Mathews, D.M. & Strobe, K.H. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Tow Objects. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & Kaput (EDS), **Research in Collegiate. Mathematics Education** IV, (PP. 77-102), Providence, RI: American Mathematical Society.

8. Pimm, D. (2002). The Symbol Is and Isn't The Objects. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 257-271 Post Pressed Flaxton Australia.

9. Demarois, P. (2006). **Begining Algebra Student's Image of Function Concept.**

10. Skemp, R.R. (1989). **Mathematics in the Primary School**. London: Rout Iedge.

11. Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuities in Long Term Learning Schemas. In D. Tall & M. O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and Understanding Mathematics**, 151-157, Post Pressed, Flaxton Australia.

12. Tall, D. (1994). **Cognitive Difficulties in Learning Analysis.** Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

13. Tall. D. (1995). **Understanding the Calcules**. Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

14. Tall, D. & Gray, E. & Ali, M. B. & Crowley, L. & De Marois, P. & McGrowen, M. & Pitta, D. & Pinto, M. & Thomas, M. & Yusuf, Y. (2001). **Symbols and The Bifurcation Between Procedural and Concept Thinking.** Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

15. White, P. & Michelmore, M. (2002). Teaching and Learning Mathematics by Abstraction. In D. Tall & M.O.J. Thomas (EDS). **Intelligence Learning and understanding Mathematics**, 235-255, Post Pressed, Flaxton Australia.

۱۶. آرتیگ، میشل؛ دی یرم، آلوپ (۱۹۹۶). آموزش و یادگیری آنالیز مقدماتی، ترجمه‌ی علیرضا مدقالچی. (۱۳۷۹ ـ ۱۳۸۰). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۵۷، صص ۲۳ تا ۳۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۷. شهریاری، پرویز (۱۳۸۰) **سرگذشت ریاضیات**. نشر مهاجر.

۱۸. فرودنتال، هانس. (۱۹۷۹). ریاضی جدید یا آموزش جدید. ترجمه‌ی زهرا گویا و سحر ظهوری زنگنه (۱۳۸۱). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۷۰، ص ۲۹. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۹. تال، دیوید. (۱۹۹۶). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها، امکان‌ها و واقعیت‌ها، ترجمه‌ی شیوا زمانی. (۱۳۷۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

«تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» برای مفهوم «تابع»*

مهدی جوادی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

«تعریف مفهوم» عبارتی است که برای مشخص کردن آن مفهوم مورد استفاده قرار می‌گیرد

مقدمه

«اولین حقیقتی که شاید ما را متحیر کند (در صورتی که پذیرفتن آن برایمان عادی نشده باشد) این است که چطور ممکن است افرادی وجود داشته باشند که ریاضیات را نمی‌فهمند؟

اگر ریاضیات چیزی جز یک سری قوانین منطقی نیست، که توسط هر انسان عاقلی پذیرفته می‌شود، و اگر استدلال‌های آن براساس یک سری اصول است که برای همه‌ی انسان‌ها واضح است و هیچ کسی نمی‌تواند آن‌ها را منکر شود مگر این که دیوانه باشد، پس چه طور ممکن است بسیاری از افراد باشند که برای آن‌ها ریاضیات کاملاً مبهم باشد و آن را درک نکنند؟»

(هانری پوانکاره، ۱۹۰۸)

از نظر گیرالدو (۲۰۰۶)، یکی از چالش برانگیزترین جنبه‌های آموزش ریاضی این است که می‌خواهد شاخه‌هایی از دانش را مانند سازوکارهای ذهنی انسان و قوانین بی‌عیب و مستدل منطقی، کنار هم قرار دهد. به گفته‌ی او، روش‌های سنتی آموزش ریاضی اغلب براساس فرضیاتی به نظر بدیهی پایه‌ریزی می‌شوند؛ فرضیاتی هم‌چون این که «اگر این موضوع با وضوح کافی بیان شود، دانش‌آموزان آن را خواهند فهمید» یا «اگر آن‌ها معنای همه‌ی کلمات را در یک تعریف بدانند، معنای ریاضی مفاهیم تعریف شده را نیز خواهند فهمید».

پی‌آمد چنین روش‌هایی این است که بعضی از نظام‌های آموزشی، تلاش می‌کنند تا یک ساختار نظری رسمی سلسله‌مراتبی را که با اصول موضوع شروع شده و به‌ترتیب تعاریف، گزاره‌ها و قضایا را شامل می‌شود، اجرا کنند.

به این نوع رویکرد سنتی به آموزش ریاضیات شاید بتوان عنوان رویکرد صوری را اطلاق کرد.

به گفته‌ی هنا[1] (۱۹۸۳)، «در ریاضیات مدرسه‌ای، حرکتی با عنوان ریاضیات جدید در اوایل دهه‌ی ۱۹۵۰ آغاز شد و بین سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۶۵، این حرکت به اوج خود رسید. این حرکت، علاوه بر قرار دادن حوزه‌های بسیار مجردی از ریاضیات مدرن در ریاضیات مدرسه‌ای، تأکید بسیار زیادی بر ریاضیات به‌عنوان یک ساختار اصل موضوعی داشت و بر منطق و اثبات، تأکید ویژه‌ای می‌نمود» (نقل شده در خسروشاهی، ۱۳۸۶).

به عنوان مثال، آیزنبرگ[2] (۱۹۹۱) نقل می‌کند که «در دهه‌ی ۱۹۶۰ در جنبش ریاضیات جدید، پیشنهاد شد که مفهوم تابع به‌عنوان یک عامل متحدکننده (مانند نخ تسبیح[3]) در ریاضیات مدرسه‌ای به‌کار گرفته شود. اما این مسئله باعث شد که اساتید بانفوذی چون آدلر[4] (۱۹۶۶)، بِبِرمن[5] (۱۹۵۶)، بگل[6] (۱۹۶۸)

و فر[7] (۱۹۶۶)، یک رویکرد صوری (رسمی) به توابع را وارد کلاس های درس کنند. هشدارهایی از جانب دیگران هم چون کلاین[8] (۱۹۵۸)، مک لانس[9] (۱۹۶۵)، ویلدر[10] (۱۹۶۷) و باک[11] (۱۹۷۰)، در ابتدا با بی توجهی مواجه گردید، تا این که دیده شد این رویکرد منطقی به برنامه ی درسی، فاقد کارایی است و به درد نمی خورد» (ص ۱۴۰).

تال (۱۹۸۸) معتقد است که این رویکرد صوری / ساختاری به ریاضیات، نه تنها باعث اصلاح یادگیری ریاضیات نشد، بلکه مشکلات تشدید شدند و تحلیلی دقیق نشان داد که این مشکلات از کندذهنی و بی علاقگی دانش آموزان نیست؛ بلکه یک واکنش طبیعی انسانی است که نسبت به این نوع تجرید، ایجاد می شود.

از نظر گیرالدو (۲۰۰۶)، یکی از چالش برانگیزترین جنبه های آموزش ریاضی این است که می خواهد شاخه هایی از دانش را مانند سازوکارهای ذهنی انسان و قوانین بی عیب و مستدل منطقی، کنار هم قرار دهد

به گفته ی گیرالدو[12] (۲۰۰۶)، شکست این رویکرد باعث شد تا ریاضی دان ها و معلمان ریاضی به سمت پاسخ دادن به این سؤال بروند که «چه طور ممکن است افرادی وجود داشته باشند که ریاضیات را نمی فهمند؟» علاوه بر این، این مسئله موجب شد تا محققان و جامعه ی آموزشی به دنبال مدل های مؤثر جایگزین برای رویکردهای تدریس باشند، زیرا به گفته ی وینر[13] (۱۹۹۱)، «تدریس باید فرآیندهای روان شناختی رایج نسبت به یادگیری یک مفهوم و چگونگی ارائه ی استدلال منطقی توسط دانش آموزان را مورد توجه قرار دهد. لذا لازم است که برای طراحی پداگوژی مناسبی برای تدریس ریاضی، نه تنها این مسئله را مورد بررسی قرار داد که انتظار معلم از یادگیری مفاهیم ریاضی چیست، بلکه ضروری است که مطالعه شود که چگونه دانش آموزان این مفاهیم را یاد می گیرند».

پرداختن به این مسئله که دانش آموزان چگونه یاد می گیرند، محققان را به سمت تحلیل ساختارشناختی ذهن می کشاند و نیاز به داشتن مدل را برای تبیین رفتار ریاضی دانش آموزان که به قول هارل[14] (۲۰۰۴) یکی از موارد ضروری در تحقیقات بنیادین حوزه ی آموزش ریاضی به شمار می رود، ایجاد می کند. در این راستا، تال و وینر (۱۹۸۱) با تمایز قائل شدن بین نوع تفکر فرد نسبت به یک مفهوم و تعریف رسمی آن، ایده ی «تصور مفهوم»[15] و «تعریف مفهوم»[16] را ارائه کردند که به عقیده ی هارل (۲۰۰۴)، این مدل ابزاری در اختیار آموزش گران ریاضی قرار می دهد تا به کمک آن، به توصیف پاره ای از عواملی بپردازند که در تدریس و یادگیری ریاضی، نقشی تعیین کننده دارند. این مدل، حاصل درس های عمده ای است که آموزش گران ریاضی از نتایج تحقیقات دهه های گذشته به دست آورده اند. وی در ادامه توضیح می دهد که آن ها با تمایز قائل شدن بین نوع تفکر فرد از یک مفهوم و تعریف رسمی آن، در واقع بین ریاضیات به عنوان یک فعالیت ذهنی و ریاضیات به عنوان یک دستگاه صوری، تمایز قائل شدند. برای روشن تر شدن این ادعا، از توجیهی که تال و وینر (۱۹۸۱) در مورد مدل مفهومی خود ارائه داده اند کمک می گیریم. آن ها ابراز می دارند که

«مغز انسان یک واحد منطقی صرف نیست و شیوه ی پیچیده ی کارکرد آن غالباً با منطق ریاضی متفاوت است. لذا این منطق صرف نیست که به ما بینش می دهد. شانس را هم نمی توان تنها عامل بروز اشتباهات ذهنی قلمداد کرد... ما از اصطلاح «تصور مفهوم» برای توصیف ساختارشناختی کلی ای که با یک مفهوم در پیوند است استفاده می کنیم که تمامی تصاویر ذهنی و ویژگی ها و فرآیندهای مرتبط با آن مفهوم را دربرمی گیرد. تصور مفهوم به مرور زمان و در جریان مواجه شدن با انواع تجارب شکل می گیرد و تحت تأثیر محرک های جدید تغییر می کند و رشد می یابد... رشد و گسترش تصور مفهوم لزومی ندارد که به طور منسجم و به یک باره اتفاق بیفتد. درواقع، مغز بدین صورت کار نمی کند. دریافت های حسی متفاوت، مسیرهای عصبی خاصی را برانگیخته می کنند و در عین حال، از برانگیخته شدن سایر مسیرها ممانعت به عمل می آورند. بدین ترتیب، محرک های متفاوت می توانند به فعال شدن بخش های متفاوتی از تصور مفهوم منجر شوند» (تال و وینر، ۱۹۸۱).

به همین دلیل، ممکن است در زمان های متفاوتی، دیدگاه های ناسازگاری در ذهن فرد به وجود بیاید که تا زمانی که آن ها به طور هم زمان فراخوانده شوند، وی از این ناسازگاری ها آگاه نیست.

تال (۱۹۹۱) معتقد است که این مدل به همان اندازه که در دانش آموزان در حال یادگیری و رشد کاربرد دارد، در مورد ریاضی دانان حرفه ای نیز کارایی دارد. او اظهار می دارد که یک ریاضی دان نیز مصون از این ناسازگاری های درونی نیست؛ ولی

مفهوم تابع یکی از اساسی ترین مفاهیم در ریاضیات جدید به شمار می‌رود که به طور کامل، در تمامی حوزه‌ها وارد شده است. اما با وجود پایه‌ای بودن این مفهوم در ریاضی، تحقیقات نشان می‌دهد که یکی از مشکل‌ترین مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای، تابع است

قادر است بخش‌های بزرگی از دانش را در دنباله‌ای از یک استدلال استنتاجی به هم پیوند دهد. برای چنین شخصی، دسته‌بندی این دانش در یک روش ساختاریافته‌ی منطقی، به نظر آسان می‌آید و این سبب می‌شود که آن ریاضی‌دان، این دانش را که در آن منطقْ موضوع برجسته‌ای می‌باشد، برای ارائه به دانش‌آموزان مفید بداند.

از سوی دیگر، تعریف یک مفهوم مطلب دیگری است. «تعریف مفهوم» عبارتی است که برای مشخص کردن آن مفهوم مورد استفاده قرار می‌گیرد (تال و وینر، ۱۹۸۱).

این تمایز واضح، زمانی آشکار می‌شود که پیچیدگی شناختیِ مفهوم قدرتمندی مانند تابع مورد تحلیل قرار گیرد. تعریف مفهوم یک تابع ممکن است این طور باشد که «یک رابطه بین دو مجموعه‌ی A و B که در آن هر عضو A تنها با یک عضو B مرتبط می‌شود». اما برخورد با این مفهوم، جنبه‌های دیگری را نیز دربرمی‌گیرد. برای مثال، ممکن است یک تابع به‌عنوان یک عمل که برای هر عنصر x در A یک عنصر f(x) را در B تعیین می‌کند، یا به‌عنوان یک نمودار، یا به‌عنوان یک جدول مقادیر در نظر گرفته شود.

تجربیات و برخوردهای فرد در یک زمینه‌ی خاص، ممکن است باعث شود تصوری که او از یک تابع ساخته است به گونه‌ای باشد که وی، تابع را همواره به‌عنوان یک فرمول و یا شاید بیش‌تر از یک فرمول و با تعدادی متناهی فرمول در بخش‌های مختلف، در نظر بگیرد.

از نظر تال (۱۹۸۸)، معقول نیست که انتظار داشته باشیم دانش‌آموزان به‌طور کاملاً منطقی، از تعاریف مفهوم صحبت کنند، بدون این‌که تصورات مفهومی خود را دخالت دهند. او به نقل از وینر (۱۹۸۳) ادعا می‌کند که؛

«۱) برای دست‌ورزی با مفاهیم، فرد نیاز به یک تصور مفهوم دارد نه یک تعریف مفهوم.

۲) تعاریف مفهوم (زمانی که مفهوم توسط یک تعریف بیان شده باشد) غیرفعال باقی خواهند ماند و حتی ممکن است به فراموشی سپرده شوند. اما در فرآیند فکر کردن، این تصور مفهوم است که همیشه فراخوانده می‌شود» (ص ۴).

تال (۱۹۸۸) اظهار می‌دارد که با چنین ادعایی، ممکن است این سؤال مطرح شود که «چه‌طور در بین انواع مختلفی از تصورات مفهوم، یک روشِ مشخص می‌توان ارائه کرد که باعث رشد و پیشرفت در یادگیری و یاددهی ریاضیات شود؟»

وی در پاسخ بیان می‌دارد که تنوع تصورات مفهوم در فرد، نشان می‌دهد که پیش بردن دانش ریاضی به یک روش رسمی، به سادگی امکان‌پذیر نیست و جایگزین این روش، دادن فرصت پیدا کردن تجربیات غنی‌تر به دانش‌آموزان است به طوری که آن‌ها

را قادر کند تصورات منسجم‌تری را از یک مفهوم تشکیل دهند.

از نظر تال، این کار به سادگی قابل انجام نیست و دربرگیرنده‌ی ایجاد تعادلی بین انواعی از مثال‌ها و نامثال[17] هاست که هر دو، لازمه‌ی ایجاد تصور منسجمی از یک مفهوم است.

چرا تعریف‌های مفهوم برای دانش‌آموزان قابل استفاده نیستند؟

مغز انسان یک واحد منطقی صرف نیست و شیوه‌ی پیچیده‌ی کارکرد آن غالباً با منطق ریاضی متفاوت است. لذا این منطق صرف نیست که به ما بینش می‌دهد

به گفته‌ی وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، تمام مفاهیم ریاضی به‌جز مفاهیم اولیه، دارای تعریف رسمی هستند که بسیاری از آن‌ها یک یا چندبار به دانش‌آموزان معرفی می‌شوند. در حالی که معمولاً دانش‌آموزان برای تشخیص اشیای ریاضی مورد بحث به‌عنوان یک مثال یا نامثال از آن مفهوم، عملاً تعریف را استفاده نمی‌کنند و در بسیاری از موارد، بر مبنای یک تصور مفهوم، تصمیم می‌گیرند.

آن‌ها هم‌چنین اظهار می‌دارند «تصور مفهوم دانش‌آموز/ دانشجو از یک مفهوم، حاصل تجربه‌ی وی با مثال‌ها و نامثال‌هایی از آن مفهوم است. درنتیجه مجموعه‌ی اشیای ریاضی که توسط دانش‌آموز/ دانشجو به‌عنوان مثال‌هایی از مفهوم در نظر گرفته می‌شود، الزاماً همان مجموعه‌ی اشیاء ریاضی که توسط تعریف معین می‌شود، نیست. اگر این دو مجموعه یکسان نباشند، ممکن است رفتار [ذهنی] دانش‌آموز/ دانشجو با آن‌چه که مورد انتظار معلم است، فرق داشته باشد» (ص ۳۵۶). به منظور ایجاد ارتباط بین این دو مجموعه، لازم است بدانیم که چرا این یکسانی وجود ندارد. درنتیجه، برای رفع این مشکل، بایستی به‌دنبال چرایی چنین اتفاقاتی برویم.

در بین رویکردهایی که برای شناخت ساز و کارهای غالب در یادگیری مفاهیم ریاضی عرضه شده‌اند، یک مدل مفهومی توسط تال و وینر (۱۹۸۱) ارایه شده که شامل دو مجموعه[18] «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» به‌منظور ایجاد تمایز بین این دو است. البته، هم‌چنان که وینر و دریفوس (۱۹۸۹) بیان داشته‌اند، بعضی از مفاهیم ریاضی دارای جنبه‌های گرافیکی قوی‌تری هستند و بعضی دیگر چنین نیستند و این تفاوت، نوع تصورات مفهوم مربوط به آن‌ها را متفاوت می‌کند. مثلاً برای مفاهیمی مانند مفاهیم جبری که دارای جنبه‌ی گرافیکی قوی نیستند، تصور مفهوم شامل بازنمایی‌های نمادین یا فرمولی به‌علاوه‌ی مجموعه‌ای از تمام ویژگی‌های مرتبط با آن می‌باشد. در صورتی که مفهوم تابع، علاوه بر جنبه‌های گرافیکی قوی، دارای جنبه‌های غیر گرافیکی قوی نیز هست و به‌عنوان یک مفهوم زیربنایی ریاضی، از پیچیدگی‌های زیادی برخوردار است.

مفهوم تابع در رشته‌ی ریاضی و فیزیک دبیرستان در کتاب‌های ریاضی ۲ (معرفی اولیه)، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بررسی قرار گرفته است.

در کتاب حسابان، برای تعریف مفهوم تابع، ابتدا فرصت‌های متعددی برای ساختن تصوراتی از مفهوم تابع برای دانش‌آموزان فراهم شده است و سپس تعریف رسمی ارائه گردیده است. این نوع ورود به مبحث تابع، هم‌سو با یافته‌های تحقیقی در مورد چگونگی توسعه‌ی مفاهیم ریاضی در دانش‌آموزان/ دانشجویان است و با توجه به نقش مرجعی که کتاب درسی در نظام متمرکز آموزشی ایران دارد، می‌توان امیدوار بود که چنین ورودی به مطلب بتواند تصور مفهوم دانش‌آموزان را تقویت کند و زمینه‌ی مساعدی برای فهمیدن تعریف مفهوم فراهم آورد. اما تجربه‌ی تدریس نگارنده نشان می‌دهد که دانشجویان در رابطه با درک مفهوم تابع در دانشگاه، دچار مشکل هستند.

چرا شناخت تصور مفهوم دانش‌آموزان، اهمیت دارد؟

به گفته‌ی آیزنبرگ (۱۹۹۱)، مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضیات جدید به شمار می‌رود که به طور کامل، در تمامی حوزه‌ها وارد شده است. اما با وجود پایه‌ای بودن این مفهوم در ریاضی، تحقیقات نشان می‌دهد که یکی از مشکل‌ترین مفاهیم در ریاضیات مدرسه‌ای، تابع است.

دریفوس و آیزنبرگ[19] (۱۹۸۲) به نقل از بویر[20] (۱۹۴۶) بیان می‌کنند که متخصصان تاریخ ریاضی بیان داشته‌اند که معرفی تابع در قرن ۱۷، اثر بی‌نهایت سودمندی بر رشد و گسترش ریاضیات داشت. آن‌ها دلیل این مسئله را ماهیت یگانه‌ی تابع می‌دانند و مثالی که می‌آورند این است که در بسیاری از برنامه‌های درسی مدرسه‌ای، مفهوم تابع با جبر، مثلثات و هندسه گره خورده است. این مفهوم در تمامی ریاضیات شبیه ریسمانی، ریاضیات مدرسه‌ای را به هم متصل می‌کند.

هم‌چنین، تابع از مفاهیمی است که از جنبه‌های مختلف می‌توان به آن توجه کرد. مثلاً در سطح تعریف، مفهوم تابع را

می‌توان در زمینه‌های متعددی از طریق نمودار، جدول، توصیف جبری یا به‌عنوان یک جعبه‌ی ورودی-خروجی، جفت‌های مرتب و مانند این‌ها معرفی کرد. لذا انتظار می‌رود که شناسایی تصورات مفهوم و تعاریف مفهوم دانش‌آموزان/ دانشجویان، به شناخت فهم و درک آن‌ها از تابع کمک کند. هم‌چنین، به سبب این شناسایی، معلمان و مؤلفان کتاب‌های درسی می‌توانند مثال‌ها و نامثال‌های این مفهوم را طوری سازمان‌دهی کنند که تصورات مفهوم دانش‌آموزان به سمت تعریف مفهوم تابع نزدیک و نزدیک‌تر شود.

ما از اصطلاح «تصور مفهوم» برای توصیف ساختارشناختی کلی‌ای که با یک مفهوم در پیوند است استفاده می‌کنیم که تمامی تصاویر ذهنی و ویژگی‌ها و فرآیندهای مرتبط با آن مفهوم را دربرمی‌گیرد

به اعتقاد وینر (۱۹۸۳)، در اهمیت بررسی تصورات و تعاریف مفهوم، می‌توان به این نکته اشاره کرد که گاهی اوقات، وقتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود به توضیح مفاهیم ساده‌ای مانند زاویه‌ی قائمه، محور مختصات، ارتفاع در یک مثلث و مشابه آن بپردازند، اغلب این مفاهیم اولیه را نمی‌شناسند یا تصورات نادرستی از آن‌ها دارند. وینر، در ادامه توضیح می‌دهد که این تصورات ممکن است نتیجه‌ی برخورد یادگیرنده‌ها با مجموعه‌ی خاصی از مثال‌ها باشد که در آموزش ریاضی مدرسه‌ای به آن‌ها ارائه شده است. بدین جهت، به جای ایجاد تصورات صحیح و غنی از آن مفهوم، برای آن‌ها در حد یک تمثیل باقی مانده است. به این دلیل، آشکار کردن تصورات مفهوم دانش‌آموزان برای تدریس مهم است و کاربردهای مستقیمی در آموزش دارد، زیرا هم برای معلم، شناخت بهتری از دانش‌آموزان و نوع فهم و درک آن‌ها ایجاد می‌کند و هم باعث می‌شود که معلمان، اصلاحاتی در تدریس خود انجام دهند که از شکل‌گیری چنین تصورات مفهومی اشتباه جلوگیری کند. بالاخره توجه و دقت معلم را نسبت به نوع مثال‌هایی که انتخاب می‌کند نیز بیش‌تر می‌کند.

پی‌نوشت

* این مقاله، از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد نگارنده که با راهنمایی دکتر زهرا گویا تدوین شده است، استخراج شده است.

1. Hana
2. Eisenberg
۳. بدین معنی که مفهوم تابع در همه‌جای ریاضیات مدرسه‌ای وجود دارد و از دوره‌ی ابتدایی تا پیش‌دانشگاهی، موضوعات مختلف ریاضی را به هم متصل می‌کند.
4. Adie
5. Beberman
6. Begle
7. Fehr
8. Kline
9. Mac Lance
10. Wilder
11. Buck
12. Giraldo
13. Vinner
14. Harel
15. Concept Image
16. Concept Definition
۱۷. non-examples: مثال‌هایی که در تعریف مفهوم مورد نظر نمی‌گنجند.
۱۸. وینر (۱۹۸۳) آن‌ها را با عنوان دو سلول در نظر می‌گیرد.
19. Dreyfus & Eisenberg
20. Boyer

منابع

۱. خسروشاهی، لیلا. (۱۳۸۶). ریاضیات اصل موضوعی؛ قالبی نامناسب، اما موضوعی مناسب برای آموزش. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**. شماره‌ی ۸۷، صص ۳۹ تا ۴۷. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

2. Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). ‘Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions’. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13, pp. 360-380.

3. Eisenberg, T. (1991). ‘Function and associated learning difficulties’. in Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking.*, Kluwer: Holand, pp. 140-152.

4. Giraldo, V. (2006). ‘Concept images, cognitive roots and conflicts: Building an alternative approach to calculus’. *Presented at Charles University, Prague in Retirement as Process and concept; A festschrift for Eddie Gray and David Tall*, pp. 91-99.

5. Harel, G. (2004). Perspective on "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity". *In Carpenter, T., Dossey, J., Koehler, J (Ed.), Classics in Mathematics Education Research*. The National Council of Teachers of Mathematics, INC. pp. 98-108.

6. Poincaré, H. (1908) *Science et Méthode, Kimé,* Paris 1999.

7. Tall D., (1988). ‘Concept Image and Concept Definition’, *Senior Secondary Mathematics Education,* (ed. Jan de Lange, Michel Doorman), OW & OC Utrecht, pp. 37-41.

8. Tall, D. (Ed.), (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, in Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holand, pp. 3-21.

9. Tall, D. O. & Vinner, S., (1981). ‘Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity’, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 151-169.

10. Vinner, S. & Dreyfus T., (1989). ‘Images and Definitions for the Concept of Function’, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, No. 4, pp. 356-366.

11. Vinner, S., (1983), ‘Concept definition, concept image and the notion of function’, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 14, pp. 239-305.

12. Vinner, S. (1991), ‘The role of definition in the teaching and learning of mathematics'. in Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking.*, Kluwer: Holand, pp. 65-81.

علی غلامیان
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر ریاضی بجستان

اثبات نامساوی‌ها به کمک توابع محدب (۱)

اشاره

مطلب حاضر ضمن معرفی توابع محدب، برخی نامساوی‌های مهم را به کمک این توابع اثبات می‌کند. این مقاله در دو بخش تنظیم شده است که بخش اول آن را در این شماره می‌خوانید.

توابع محدب ابزار قدرتمندی برای اثبات رده‌ی بزرگی از نامساوی‌ها هستند. در این مقاله قصد داریم شما را با این موضوع آشنا کنیم. از این‌رو، نخست به بیان نامساوی مشهور ینسن می‌پردازیم و سپس آن را با استفاده از توابع محدب اثبات می‌کنیم.

توابع محدب

تابع حقیقی مقدار f روی بازه‌ی I، **محدب**[۱] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $y \in I$ و x و $\lambda \in [0,1]$؛

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (1)$$

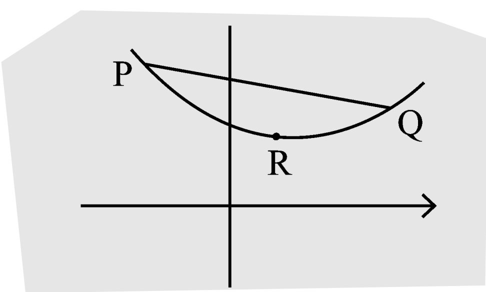
تابع f را اکیداً محدب[۲] می‌نامیم هرگاه برای هر $y \in I$ و x که $x \neq y$ و $\lambda \in (0,1)$؛

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (2)$$

توجه: f مقعر (اکیداً مقعر[۳]) روی I نامیده می‌شود اگر f- روی I محدب (اکیداً محدب) باشد.

مفهوم هندسی تحدّب

f کاملاً محدب است اگر و تنها اگر برای هر دو نقطه‌ی $P = (x, f(x))$ و $Q = (y, f(y))$ روی نمودار f و به ازای هر z بین x و y؛ نقطه‌ی $R = (z, f(z))$ زیر پاره‌خط PQ قرار گیرد.



نمودار یک تابع محدب

چگونه یک تابع محدب را بدون کشیدن نمودار آن، تشخیص دهیم؟

برای تشخیص محدب بودن یا نبودن یک تابع، می‌توانیم مستقیماً از (۱) استفاده کنیم. اما آزمون زیر اغلب اوقات بسیار مفید است.

آزمون تحدّب توابع

فرض کنید f یک تابع دو بار مشتق‌پذیر روی بازه‌ی I باشد. در این صورت

- f روی I محدب است، اگر برای هر $x \in I$ ، $f''(x) \geq 0$.
- f روی I اکیداً محدب است اگر برای هر x درون I، $f''(x) > 0$.

تبصره‌ها

- اگر f یک تابع پیوسته روی I باشد، آن‌گاه f محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_2 \in I$ و x_1 ؛

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

و f اکیداً محدب است و اگر و تنها اگر برای هر $x_2 \in I$ و x_1 و $x_1 \neq x_2$ ؛

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

- اگر f یک تابع محدب روی $[a,b]$ باشد، آن‌گاه f ماکزیمم خود را در a یا b (یا شاید هر دو) اختیار می‌کند.

مثال‌هایی از توابع اکیداً محدب

- $f(x) = x^r$ ، $x > 0$ و $r > 1$ ؛
- $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)^r}$ ، $x > -a$ و $r > 0$ ؛
- $f(x) = \tan x$ ، $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ؛
- $f(x) = e^x$ ، $x \in \mathbb{R}$.

مثال‌هایی از توابع اکیداً مقعر

- $f(x) = \sin x$ ، $x \in [0, \pi]$ ؛
- $f(x) = \cos x$ ، $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ؛
- $f(x) = \mathrm{Ln}x$ ، $x \in (0, \infty)$ ؛
- $f(x) = x^r$ ، $x > 0$ و $r \in (0,1)$.

توجه کنید که

- تابع خطی $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ هم محدب و هم مقعر است؛
- جمع دو تابع محدب (یا به ترتیب مقعر)، یک تابع محدب (یا به ترتیب مقعر) است.

نامساوی ینسن[4]

نامساوی ینسن توسیعی از نامساوی (۱) است. ینسن (۱۹۲۵-۱۸۵۹) ریاضی‌دان دانمارکی، نخستین کسی است که این نامساوی را در سال ۱۹۰۵ ثابت کرد.

نامساوی ینسن: فرض کنید $f: I \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. هم‌چنین فرض کنید $x_1, x_2, \ldots x_n \in I$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ به‌طوری‌که $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = 1$. در این صورت

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \quad (3)$$

اثبات: از استقراء ریاضی برای اثبات نامساوی استفاده می‌کنیم. به‌وضوح نامساوی برای حالت $n = 1$ برقرار است.

اکنون فرض کنیم که نامساوی برای $n = k$ درست باشد، در این صورت نشان می‌دهیم که برای $n = k + 1$ نیز برقرار است. فرض کنیم $x_{k+1} \in I$ و $x_1, \ldots, x_k$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \geq 0$ به‌طوری‌که $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$. در این صورت حداقل یکی از λ_i ها $(1 \leq i \leq k+1)$ باید کمتر از یک باشد. بدون این‌که از کلیت مسئله کم شود فرض می‌کنیم $\lambda_{k+1} < 1$. در این صورت قرار می‌دهیم

$$u = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k$$ داریم

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}+\ldots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}=1$$

و هم‌چنین $\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_{k+1}x_{k+1}=(1-\lambda_{k+1})u+\lambda_{k+1}x_{k+1}$.
به‌وضوح $\min\{x_1,\ldots,x_k\}\le u\le \max\{x_1,\ldots,x_k\}$ در نتیجه $u\in I$. اکنون چون f محدب است، داریم

$$f((1-\lambda_{k+1})u+\lambda_{k+1}x_{k+1})\le(1-\lambda_{k+1})f(u)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

با توجه به فرض استقراء داریم

$$f(u)\le\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}f(x_1)+\ldots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}f(x_k)$$

حال با ترکیب دو نامساوی بالا، حکم برای $n=k+1$ برقرار می‌شود.

بنابراین طبق استقرای ریاضی، نامساوی موردنظر برای هر عدد صحیح مثبت n برقرار است.

تبصره‌ها

- برای توابع اکیداً محدب تساوی در (۳) برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=x_2=\ldots=x_n$.
- اگر $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ ، آن‌گاه (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \qquad (۴)$$

- اگر f یک تابع مقعر باشد، آن‌گاه نامساوی‌های (۳) و (۴) به صورت زیر می‌شوند

$$f(\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_n x_n)\ge\lambda_1 f(x_1)+\ldots+\lambda_n f(x_n) \qquad (۳')$$

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\ge\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \qquad (۴')$$

مثال‌ها

مثال ۱. اگر $a,b>0$ و $a+b=2$ ، آن‌گاه

$$(1+\sqrt[9]{a})^5+(1+\sqrt[9]{b})^5\le 2^6$$

حل. با استفاده از نامساوی (۴′) با تابع اکیداً مقعرِ $f(x)=(1+\sqrt[9]{x})^5$ روی $(0,\infty)$
(زیرا $f''(x)=4(1+\frac{1}{\sqrt[9]{x}})^3(\frac{-1}{5\sqrt[9]{x^6}})<0$ روی $(0,\infty)$)
داریم

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\left(1+\sqrt[9]{\frac{a+b}{2}}\right)^5\ge\frac{(1+\sqrt[9]{a})^5+(1+\sqrt[9]{b})^5}{2}$$

حال با توجه به این که $a+b=2$ ، نامساوی مطلوب برقرار است.

تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که $a=b=1$.

مثال ۲. اگر $a,b,c>0$ ، آن‌گاه

$$a^a.b^b.c^c\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$$

حل. نامساوی بالا هم ارز است با

$$Ln(a^a.b^b.c^c)\ge Ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$$

یا

$$aLna+bLnb+cLnc\ge(a+b+c)Ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

با استفاده از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدبِ $f(x)=xLnx$ روی $(0,\infty)$ (زیرا $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ روی $(0,\infty)$)
داریم

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\ge f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\frac{aLna+bLnb+cLnc}{3}\ge\frac{(a+b+c)}{3}Ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

یا

$$aLna+bLnb+cLnc\ge(a+b+c)Ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

در نتیجه نامساوی مطلوب برقرار است.

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a=b=c$.

مثال ۳. اگر $a,b,c>0$ آن‌گاه

$$\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}\ge\frac{3}{7}$$

حل. فرض کنید $s=3(a+b+c)$ و $f(x)=\frac{x}{s-x}$ ، $x\in(0,s)$.

در این صورت تابع f روی $(0,s)$ اکیداً محدب است زیرا روی $(0,s)$ ، $f''(x)=\frac{2s}{(s-x)^3}>0$. حال با قرار دادن $x_1=2a$ ، $x_2=2b$ و $x_3=2c$ در نامساوی (۴) داریم

$$f\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)\le\frac{f(2a)+f(2b)+f(2c)}{3}$$

$$\frac{\frac{2a+2b+2c}{3}}{s-\frac{2a+2b+2c}{3}}\le\frac{1}{3}\left[\frac{2a}{s-2a}+\frac{2b}{s-2b}+\frac{2c}{s-2c}\right]$$

$$\frac{a+b+c}{3s-2(a+b+c)}\le\frac{1}{3}\left[\frac{a}{s-2a}+\frac{b}{s-2b}+\frac{c}{s-2c}\right]$$

یا

$$\frac{3(a+b+c)}{3s-2(a+b+c)}\le\frac{a}{s-2a}+\frac{b}{s-2b}+\frac{c}{s-2c}$$

با توجه به این که $s=3(a+b+c)$ ، نامساوی مطلوب برقرار است.

تساوی وقتی برقرار است که a=b=c .

مثال ۴. اگر $a_1,a_2,\dots,a_n\ge 1$ ، آن‌گاه

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\ge\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1\dots a_n}}$$

حل. فرض کنیم $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ، $x\in[0,\infty)$. در این صورت تابع f روی $[0,\infty)$ اکیداً محدب است زیرا روی $(0,\infty)$ ، $f''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}>0$. با استفاده از نامساوی (۴) داریم

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\ge nf\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+e^{x_i}}\ge\frac{n}{1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}}$$

با قرار دادن $x_i=\mathrm{Ln}\,a_i$ به ازای $i=1,2,\dots,n$ ، نامساوی خواسته شده به‌دست می‌آید. تساوی زمانی برقرار است که $a_1=a_2=\dots=a_n$.

مثال ۵. برای یک مثلث با زاویه‌های α و β و γ ، نامساوی‌های زیر برقرار است

الف) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ؛

ب) $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ ؛

پ) $\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ؛

ت) $\sec\frac{\alpha}{2}+\sec\frac{\beta}{2}+\sec\frac{\gamma}{2}\ge 2\sqrt{3}$ ؛

ث) $\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\le\frac{1}{8}$ ؛

حل. برای قسمت‌های (الف)، (ب) و (پ) به‌ترتیب از توابع اکیداً مقعر sinx ، $\sqrt{\sin x}$ و Lnsinx روی $(0,\pi)$ در نامساوی (۴) استفاده می‌کنیم و برای قسمت (ت)، از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $\sec\frac{x}{2}$ روی $(0,\pi)$ استفاده می‌کنیم. در قسمت (ث) اگر α ، β و γ حاده باشند، آن‌گاه از نامساوی (۴) با تابع اکیداً مقعر Lncosx روی $(0,\frac{\pi}{2})$ استفاده می‌کنیم؛ در غیر این صورت با توجه به این که فقط یکی از زوایای α و β و γ می‌تواند قائم یا بزرگ‌تر باشد، در نتیجه $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le 0$. لذا نامساوی به‌وضوح برقرار است.

در تمام قسمت‌های فوق حالت تساوی وقتی برقرار است که $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۳}$.

مثال ۶ . (India ، ۱۹۹۵) فرض کنید $x_۱,\dots,x_n$ $(n\ge ۲)$ عدد مثبت باشند که مجموع آن‌ها برابر یک است. در این صورت ثابت کنید

$$\frac{x_۱}{\sqrt{۱-x_۱}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{۱-x_n}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-۱}}$$

حل . با استفاده از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x}}$ روی $(۰,۱)$ داریم

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\ge f(\sum_{i=۱}^{n}\frac{x_i}{n})$$

$$\frac{۱}{n}(\frac{x_۱}{\sqrt{۱-x_۱}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{۱-x_n}})\ge\frac{\frac{۱}{n}}{\sqrt{۱-\frac{۱}{n}}}$$

یا

$$\frac{x_۱}{\sqrt{۱-x_۱}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{۱-x_n}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-۱}}$$

تساوی وقتی برقرار است که $x_۱=x_۲=\dots=x_n$.

مثال ۷ . فرض کنید $x,y,z>۰$ و $x+y+z=۱$. در این صورت ثابت کنید

$$(۱+\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{y})(۱+\frac{۱}{z})\ge ۶۴$$

حل . با استفاده از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x)=Ln(۱+\frac{۱}{x})$ روی $(۰,\infty)$ (زیرا $f''(x)=\frac{۲x+۱}{(x^۲+x)^۲}>۰$ روی $(۰,\infty)$) داریم

$$f(x)+f(y)+f(z)\ge ۳f(\frac{x+y+z}{۳})$$

$$Ln(۱+\frac{۱}{x})+Ln(۱+\frac{۱}{y})+Ln(۱+\frac{۱}{z})\ge ۳Ln۴$$

یا

$$Ln(۱+\frac{۱}{x})+(۱+\frac{۱}{y})+(۱+\frac{۱}{z})\ge Ln۴^۳$$

$$(۱+\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{y})(۱+\frac{۱}{z})\le ۶۴$$

تساوی وقتی برقرار است که $x=y=z$

مثال ۸ . فرض کنید a و b و c اعداد مثبت باشند به طوری که $ab+bc+ca=abc$ در این صورت

$$\sqrt[a]{a}\sqrt[b]{b}\sqrt[c]{c}(a+b+c)\ge abc$$

حل . چون $ab+bc+ca=abc$ پس $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۱$.

بنابراین با انتخاب $\lambda_۱=\frac{۱}{a}$ ، $\lambda_۲=\frac{۱}{b}$ ، $\lambda_۳=\frac{۱}{c}$ ، $x_۱=ab$ ، $x_۲=bc$ ، $x_۳=ca$ و به کار بردن نامساوی ′۳ با تابع اکیداً مقعر $f(x)=Lnx$ روی $(۰,\infty)$ داریم

$$f(\lambda_۱x_۱+\lambda_۲x_۲+\lambda_۳x_۳)$$
$$\ge\lambda_۱f(x_۱)+\lambda_۲f(x_۲)+\lambda_۳f(x_۳)$$

$$Ln(a+b+c)\ge\frac{۱}{a}Lnab+\frac{۱}{b}Lnbc+\frac{۱}{c}Lnca$$

یا

$$Ln(a+b+c)\ge Ln(ab)^{\frac{۱}{a}}+Ln(bc)^{\frac{۱}{b}}+Ln(ca)^{\frac{۱}{c}}$$

یا

$$a+b+c\ge a^{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}}+b^{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}+c^{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}$$

اکنون با توجه به این که $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۱$ داریم

$$a+b+c\ge a^{۱-\frac{۱}{b}}.b^{۱-\frac{۱}{c}}.c^{۱-\frac{۱}{a}}$$

یا

$$a+b+c \ge \frac{a}{\sqrt[b]{a}}\cdot\frac{b}{\sqrt[c]{b}}\cdot\frac{c}{\sqrt[a]{c}}$$

یا

$$\sqrt[b]{a}\cdot\sqrt[c]{b}\cdot\sqrt[a]{c}\,(a+b+c) \ge abc$$

تساوی زمانی برقرار است که $a=b=c$

مسائلی برای حل

۱. اگر ABC یک مثلث با زوایای α و β و γ باشد، آن‌گاه

الف) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ؛

ب) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$ ؛

پ) $\tan^p_\alpha+\tan^p_\beta+\tan^p_\gamma \le 3\sqrt{3}$ ($p\ge 1$ و α و β و γ حاده هستند).

راهنمایی. اگر قرار دهیم $\alpha'=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}, \beta'=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$ و $\gamma'=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ آن‌گاه $\alpha',\beta',\gamma'=(0,\pi)$ و $\alpha'+\beta'+\gamma'=\pi$.

حال با جایگزین کردن α' و β' و γ' بجای α و β و γ در قسمت‌های (پ) و (ث) از مثال (۵) به ترتیب (الف) و (ب) حاصل می‌شود. برای قسمت (پ) از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x)=\tan^p x$ $x\in(0,\frac{1}{2})$ و $p\ge 1$ استفاده کنید.

۲. اگر a و b و c اندازه‌ی ضلع‌های یک مثلث باشند، آن‌گاه

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3$$

راهنمایی. از نامساوی (۴) با تابع اکیداً محدب $f(x)=\frac{x}{s-x}$ که $x\in(0,s)$ و $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ استفاده کنید.

۳. برای هر $x>0$ ثابت کنید $x^x \ge (\frac{x+1}{x})^{x+1}$.

راهنمایی. از تابع اکیداً محدب $f(x)=xLnx$ روی $(0,\infty)$ و نامساوی (۳) با انتخاب $x_1=x$ ، $x_2=1$ و $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ استفاده کنید.

۴. فرض کنید a و b و c اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a+b+c=1$. در این صورت

$$a^{a(a+2b)}\cdot b^{b(b+2c)}\cdot c^{c(c+2a)} \ge \frac{1}{3}$$

راهنمایی. از تابع کاملاً مقعر $f(x)=Lnx$ روی $(0,\infty)$ و با به‌کار بردن نامساوی (′۳) با انتخاب $\lambda_1=a^2$ ، $\lambda_2=b^2$ ، $\lambda_2=c^2$ ، $\lambda_4=2ab$ ، $\lambda_5=2bc$ ، $\lambda_6=2ca$ ، $x_1=\frac{1}{a}$ ، $x_2=\frac{1}{b}$ ، $x_3=\frac{1}{c}$ ، $x_4=\frac{1}{a}$ ، $x_5=\frac{1}{b}$ و $x_6=\frac{1}{6}$ مسئله را حل کنید.

۵. برای اعداد حقیقی مثبت a و b و c ثابت کنید

$$(\frac{2a}{b+c})^{\frac{2}{3}}+(\frac{2b}{c+a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{2c}{a+b})^{\frac{2}{3}} \ge 3$$

راهنمایی. از تابع اکیداً محدب $f(x)=(\frac{2x}{s-x})^{\frac{2}{3}}$ روی $(0,s)$ که در آن $s=a+b+c$ است در نامساوی (۴) استفاده کنید.

پی‌نوشت

1. Convex
2. Strictly Convex
3. Concave (Strictly Concave)
4. Jensen Inequality

منابع

[۱] والتر رودین، اصول آنالیز ریاضی، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۲، صفحه‌ی ۱۲۶.

[2] Hrimiuc Dragos, Inequalities for convex functions (part I), "π in the Sky" Magzine, December 2001.

[3] Kedlaya Kiran, A<B (A is less than B), based on notes for the math olympiad program (MOP) version 1.0, last revised August, 1999

[4] Mildorf, T.J, Olympiad Inequalities, December 22, 2005.

[5] Popescu, P.G and Diaz-Barrero, J.L, Certain inequalities for convex functions, J. Ineq. Pure and Appl. math. 7(2) Art.41, 2006.

روش‌های نو در آموزش ریاضی

فاطمه تکاملی ماسوله
کارشناس ارشد مدیریت آموزشی و معلم ریاضی
مدارس راهنمایی استان گیلان

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم چنان ادامه پیدا می‌کند.

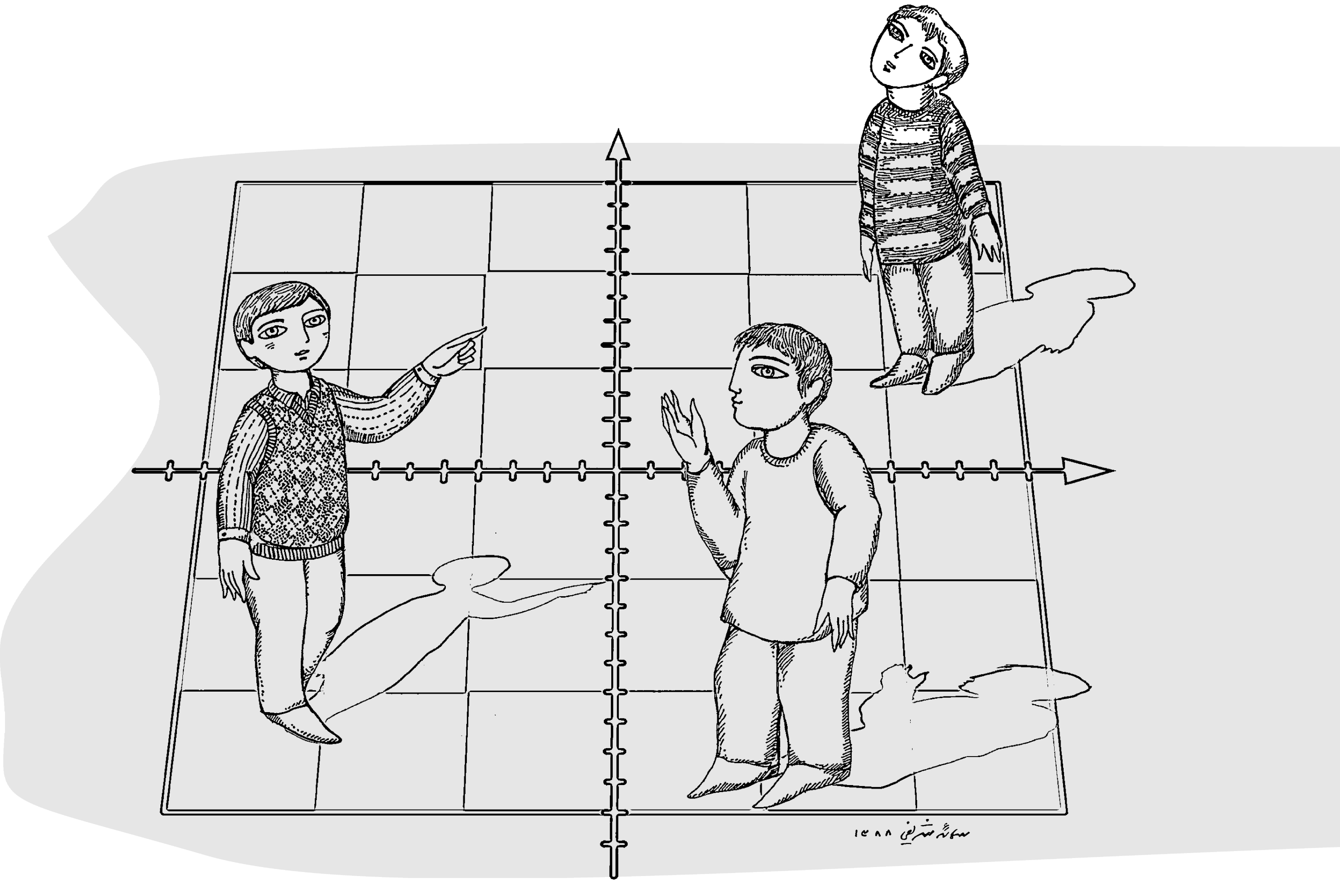
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

مختصات چیست؟ آیا مختصات نقاط را می‌شناسید؟ محورهای مختصات یعنی چه؟ طول و عرض نقاط یعنی چه؟

این‌ها سؤالاتی بود که در ابتدای کلاس روی تخته نوشتم. آن روز درس من درباره‌ی مختصات بود. علی‌رغم میل باطنی‌ام مجبور بودم به روش سال‌های گذشته و به صورت نظری درس را ارائه دهم. و لی در پایان درس متوجه شدم تعدادی از دانش‌آموزان، هنوز آن‌طور که باید، درس را یاد نگرفته‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به دفتر مدرسه فرستادم تا تابلوی مختصات را که به‌عنوان یک وسیله‌ی کمک‌آموزشی در دفتر مدرسه موجود بود، به کلاس بیاورد. دوباره درس دادم و توضیحات مفصلی را درباره‌ی مختصات، بیان کردم. اما متأسفانه هنوز چشم‌های نگرانی به من می‌گفت: درس را نفهمیدیم! هر ساله در این قسمت کتاب با همین مشکل مواجه می‌شدم. این موضوع فکر مرا مشغول کرد و به دنبال پیدا کردن راهی برای تفهیم هرچه بهتر این درس بودم.

تا این‌که، شب به اتاق پسرم رفتم. او مشغول خواندن درس جغرافی بود. کنار او



نشستم. دیدم درس او در مورد طول و عرض جغرافیایی شهرها است. این موضوع توجه مرا جلب کرد و از او خواستم طول و عرض جغرافیایی چند شهر را روی نقشه به من نشان دهد. سپس به این فکر افتادم که نقشه می‌تواند وسیله‌ی خوبی برای تدریس مختصات باشد.

بعد از اتمام درس، فرزندانم مشغول بازی شطرنج بودند که این بار صفحه‌ی چهارخانه‌ی شطرنج توجه مرا جلب کرد و برای تدریس بهتر همان درس مختصات، از نو برنامه‌ریزی کردم. فردای آن روز، وقتی که به مدرسه رفتم، با مدیر مدرسه درباره‌ی طرحم صحبت کردم. او نیز طرح مرا پذیرفت و با همکاری یکی از اولیاء دانش‌آموزان و هماهنگی من، یک چهارخانه در گوشه‌ای از حیاط بسیار بزرگ مدرسه کشیده شد.

این چهارخانه شامل دو محور عمود بر هم قرمزرنگ و تعدادی خطوط افقی و عمودی سفیدرنگ بود. محورهای قرمز در چهار جهت شماره‌گذاری شده بودند. جلسه‌ی بعد دانش‌آموزان را به حیاط بردم. آن‌ها با دیدن این چهارخانه، حدس‌های زیادی زدند و برای آن کاربردهای متفاوتی را برشمردند. من با جهت دادن به نظرات دانش‌آموزان، برای آن‌ها توضیح دادم که محورهای قرمزرنگ محورهای مختصات هستند. محور افقی، محور طول‌هاست و از محل تقاطع محورها به سمت راست، اعداد با طول مثبت و به سمت چپ، اعداد با طول منفی را داریم. سپس محور عمودی را به آن‌ها نشان دادم و به آن‌ها گفتم که از محل تقاطع محورها به سمت بالا، اعداد با عرض مثبت و در سمت پایین، اعداد با عرض منفی را داریم و محل تقاطع خط‌های سفید در واقع جایگاه‌هایی است که نقاط با مختصات صحیح می‌گیرند. به‌عنوان نمونه در چند جای مختلف قرار گرفتم و چگونگی خواندن طول و عرض را با توجه به محورها برایشان توضیح دادم. سپس از دانش‌آموزان خواستم که هر یک به‌ترتیب جایگاهی را انتخاب کند و از آن‌ها طول و عرض محل استقرارشان را پرسیدم. با این کار، آن‌ها مختصات را به‌خوبی فهمیدند و به این اطمینان رسیدم که دیگر دانش‌آموزی در کلاسم نیست که نداند طول و عرض یک نقطه یعنی چه!

آشنایی با مسابقه ریاضی

کانگورو

مریم سعیدی و سپیده چمن آرا

در اردی‌بهشت ماه امسال، مسابقه‌ای تحت عنوان «المپیاد ملی ریاضی»، در پایه‌های پنجم دبستان و اول تا سوم راهنمایی، به همت باشگاه دانش پژوهان جوان، برگزار شد. سؤال‌های این مسابقه، ترجمه‌ی سؤال‌های مسابقه‌ای ریاضی با نام «کانگورو» بود که به صورت بین المللی در بسیاری از کشورهای جهان، برگزار می‌شود. از آن‌جا که این مسابقه، اولین مسابقه‌ی برگزار شده توسط باشگاه دانش پژوهان جوان ـ که نهادی رسمی وابسته به آموزش و پرورش است ـ برای پایه‌های پنجم دبستان و اول تا سوم راهنمایی بود و از آن‌جا که سؤال‌های آن، دقیقاً برگرفته از سؤالات مسابقه‌ی دیگری بود، هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی تصمیم گرفت تا دبیران ریاضی را با تاریخچه و اهداف مسابقه‌ی اصلی آشنا ساخته و سؤال‌های مسابقه‌ی امسال را ـ که نمونه‌ای از سؤال‌های «زیبای» ریاضی برای چالش فکری دانش‌آموزان در هر سطحی هستند ـ در اختیار آن‌ها قرار دهد. امیدواریم برگزاری این مسابقه در ایران، ضمن هم‌سویی با اهداف اصلی مسابقه‌ی ریاضی کانگورو، تداوم یابد.

تاریخچه‌ی مسابقه‌ی ریاضی کانگورو

در سال ۱۹۸۰ پیترهالورن (۱۹۹۴-۱۹۳۱)، یک معلم ریاضی استرالیایی و بانی AMOC (کمیته‌ی المپیاد ریاضی استرالیا)، یک مسابقه‌ی ریاضی برای دانش‌آموزان پایه‌های مختلف (از دوم دبستان تا سال آخر دبیرستان) راه‌اندازی کرد. این مسابقه به گروه خاصی از دانش‌آموزان تعلق نداشت؛ بلکه هر کس با هر سطحی از توان ذهنی می‌توانست در این مسابقه ـ البته در پایه‌ی مربوط به خودش ـ شرکت کند.

سؤالات این مسابقه ذهن دانش‌آموز را کاملاً درگیر مسئله می‌کند و تفکر مدار است. سؤالات در مقوله‌های حساب و جبر و هندسه و منطق، بر دانش ریاضی‌ای که دانش‌آموزان هر پایه بر آن اِشراف دارند مبتنی است.

در سال ۱۹۹۱ این ایده در پاریس ـ فرانسه ـ مورد توجه قرار گرفت و این مسابقه در آن کشور نیز برگزار شد و به سرعت این مسابقه در بسیاری از کشورهای اروپایی دیگر مورد توجه قرار گرفت و آن کشورها نیز به این مسابقه پیوستند.

در حال حاضر، هر ساله حدود ۵ میلیون نفر در دنیا در این مسابقه‌ی ریاضی شرکت می‌کنند. از آن‌جا که این مسابقه اولین بار در کشور استرالیا برگزار شد، نام **کانگورو** بر آن گذاشته شده است.

هدف اصلی شکل گیری این مسابقه، ایجاد انگیزه و علاقه در دانش‌آموزان برای یادگیری بهتر و بیش‌تر ریاضی است که این امر با سؤال‌های جالب و متفاوت و نه لزوماً مشکل، انجام می‌پذیرد.

برای تشویق دانش‌آموزان شرکت کننده در این مسابقه، در هر کشور جوایز و دیپلم‌های افتخاری به آن‌ها داده می‌شود و البته، نتایج مسابقه بین کشورها مقایسه نمی‌شود و نفرات برتر تنها در کشور خودشان تعیین شده و جایزه می‌گیرند. این جوایز توسط بنیادهای مستقلی که بانی اجرای این مسابقه در کشورشان بوده‌اند ـ در صورت وجود ـ تهیه می‌شود.

زمان برگزاری مسابقه‌ی بین‌المللی ریاضی کانگورو، در اردیبهشت‌ماه (ماه مارس) است. در پاییز همان سال، کنفرانسی در یکی از کشورهای شرکت کننده؛ برگزار می‌شود که ریاضی‌دانان و متخصصان کشورهای مختلف شرکت کننده در این کنفرانس، سؤالات مسابقه‌ی سال بعد را طرح و انتخاب خواهند کرد.

برای آشنایی بیش‌تر با این مسابقه و جزئیات ضوابط و مقررات آن، به سایت اینترنتی آن، مراجعه کنید.

در ادامه، سؤال‌های مسابقه‌ی کانگورو برای پایه‌های (۵و۶) و (۷و۸) را می‌بینید. ترجمه‌ی حاضر، از دفترچه‌ی آزمون که توسط باشگاه دانش‌پژوهان جوان تهیه شده است، اقتباس شده است.

اولین مسابقه‌ی ملی ریاضی ویژه‌ی پایه‌های پنجم دبستان و اول راهنمایی تحصیلی ۱۳۸۸/۲/۱۷

۱. کدام یک از عددهای زیر زوج است؟

الف) ۱۳۸×۷   ب) ۱+۳+۸+۷

ج) ۱۳۸−۷   د) ۱۳۸۷

ه) ۱۳۸ + ۷

۲. بین ۵/۰۵ و ۱۹/۰۳ چند عدد صحیح وجود دارد؟

الف) ۱۶   ب) ۱۷   ج) ۱۴

د) ۱۵   ه) بیش‌تر از ۱۷

۳. از عدد ۱۲۳۲۳۱۴ دست‌کم چند رقم برداریم تا وقتی عدد حاصل را از راست به چپ یا از چپ به راست می‌خوانیم، با هم فرقی نداشته باشند؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳

د) ۴   ه) ۵

۴. در شکل روبه‌رو، جای صورتک خندان کجاست؟

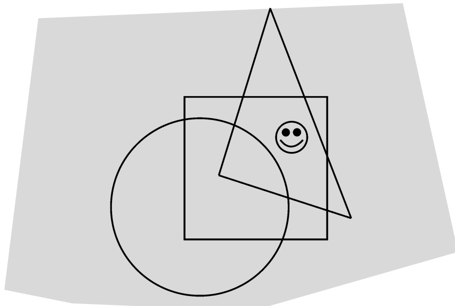
الف) در دایره و مثلث است اما در مربع نیست.

ب) در دایره و مربع است اما در مثلث نیست.

ج) در مثلث و مربع است اما در دایره نیست.

د) در دایره است اما در مربع یا در مثلث نیست.

ه) در مربع است اما در دایره یا در مثلث نیست.



۵. سه جعبه داریم: سفید، قرمز و سبز. در یکی از آن‌ها یک شکلات و در دیگری یک سیب است. سومی هم خالی است. اگر بدانیم شکلات در یکی از جعبه‌های سفید یا قرمز است و سیب در جعبه‌های سبز و قرمز نیست، شکلات در کدام جعبه است؟

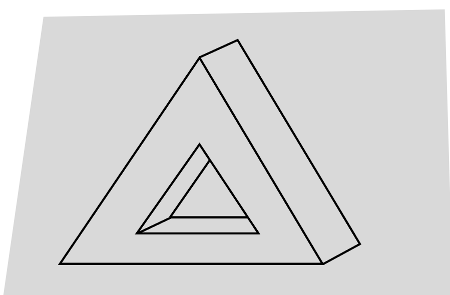
الف) سفید   ب) قرمز   ج) سبز

د) قرمز یا سبز   ه) نمی‌توان مشخص کرد.

۶. چند وجه شکل مقابل دیده نمی‌شود؟

الف) ۳   ب) ۵   ج)۶

د) ۸   ه) ۴



۷. روی رودخانه‌ای، یک پل ساخته شده است. عرض رودخانه ۱۰۰ متر است. یک چهارم پل روی ساحل سمت چپ رودخانه و یک چهارم پل روی ساحل سمت راست رودخانه قرار دارد. طول پل چقدر است؟

الف) ۱۵۰ متر   ب) ۱۸۰ متر

ج) ۲۱۰ متر   د) ۲۰۰ متر

ه) ۲۷۰ متر

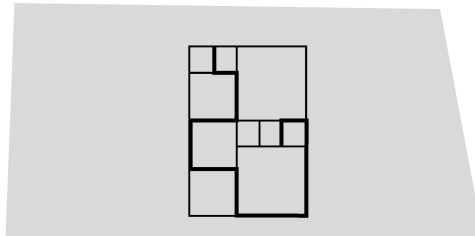
۸. در شکل روبه‌رو، مربع‌هایی با سه اندازه‌ی مختلف وجود دارد. طول ضلع کوچک‌ترین مربع، ۱۰ سانتی‌متر است.

طول قسمت پررنگ شده چند است؟

الف) ۱۹۰ سانتی‌متر ب) ۲۱۰ سانتی‌متر

ج) ۴۲۰ سانتی‌متر د) ۴۰۰ سانتی‌متر

ه) ۲۲۰ سانتی‌متر



۹ . تعدادی مرغ و گوسفند در یک مزرعه هستند. تعداد دست و پای گوسفندها، هشت برابر تعداد سر مرغ‌هاست. در این صورت، تعداد گوسفندها:

الف) دو برابر تعداد مرغ‌هاست.

ب) برابر با تعداد مرغ‌هاست.

ج) نصفِ تعداد مرغ‌هاست.

د) $\frac{۱}{۴}$ تعداد مرغ‌هاست.

ه) چهار برابر تعداد مرغ‌هاست.

۱۰ . همان‌طور که می‌بینید، برای ساختن ارقام از قطعه چوب‌های هم‌اندازه استفاده شده است. در ساختن یک عدد، تعداد چوب‌های به‌کار رفته را وزن آن عدد می‌گوییم. وزن سنگین‌ترین عدد ۳ رقمی چیست؟

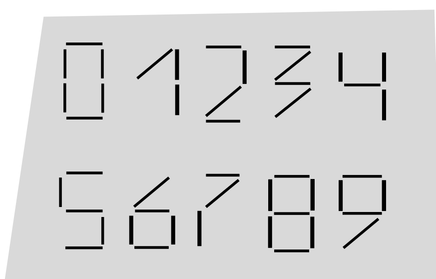
الف) ۱۴

ب) ۲۱

ج) ۲۸

د) ۱۳

ه) ۱۲



۱۱ . شکل‌های زیر با استفاده از طناب ساخته شده‌اند. کدام یک از آن‌ها از یک قطعه طناب تشکیل شده است؟

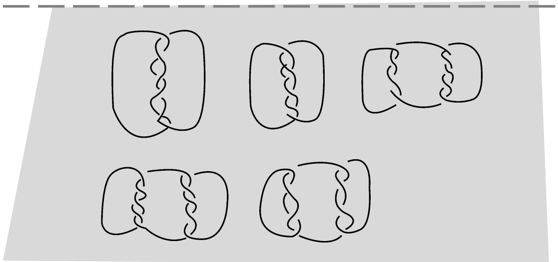
الف) ۱و۲و۴

ب) هیچکدام از گزینه‌ها

ج) ۲و۴و۵

د) همه‌ی آن‌ها

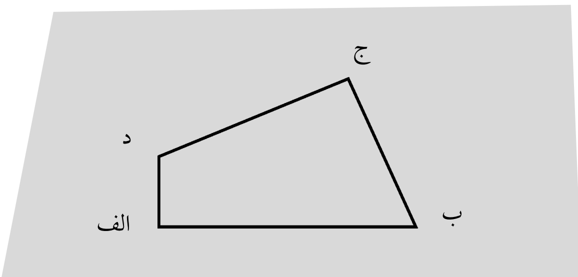
ه) ۲و۴



۱۲ . چهار ضلعی روبه رو دارای ضلع‌هایی به طول ۶=الف ب و ۴=ج ب و ۵= دج و ۲ = د الف است. این چهار ضلعی در دو زاویه الف و ج قائمه است. مساحت این چهارضلعی را بیابید.

الف) ۱۷ ب) ۱۹ ج) ۴۸

د) ۱۶ ه) ۳۲



۱۳ . در یک گروه محافظت از محیط زیست، ۱۲ دختر و ۲۰ پسر عضو هستند. هر هفته ۶ پسر و ۸ دختر به این گروه اضافه می‌شوند. بعد از مدتی، در این گروه، تعداد پسرها و دخترها، مساوی خواهد شد. در این صورت، تعداد پسرها و دخترها چند نفر خواهد بود؟

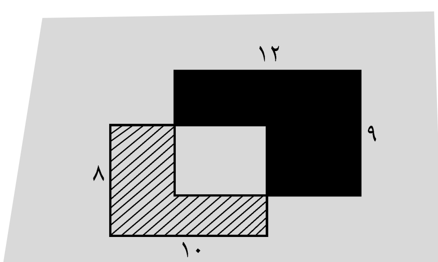
الف) ۸۰ ب) ۸۸ ج) ۵۶

د) ۶۵ ه) ۷۶

۱۴ . دو مستطیل ب اندازه‌های ۱۰×۸ و ۱۲×۹ تا حدودی یکدیگر را پوشانده‌اند. مساحت قسمت هاشور زده ۴۰ است. مساحت قسمت خاکستری چند است؟

الف) ۶۰ ب) ۶۸ ج) ۶۴

د) ۶۵ ه) ۶۶



۱۵ . هشت کارت که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۸ نوشته شده

است در دو جعبه به رنگ‌های سفید و سیاه طوری ریخته شده‌اند که جمع اعداد روی کارت‌ها در هر دو جعبه با هم مساوی است. اگر در جعبه‌ی سفید فقط ۳ کارت وجود داشته باشد، در این صورت می‌توان مطمئن بود که:

الف) روی سه کارت موجود در جعبه‌ی سیاه، اعداد فرد نوشته شده است.

ب) روی چهار کارت موجود در جعبه‌ی سیاه، اعداد زوج نوشته شده است.

ج) کارتی که روی آن عدد ۱ نوشته شده، در جعبه‌ی سیاه است.

د) کارتی که روی آن عدد ۲ نوشته شده، در جعبه‌ی سیاه نیست.

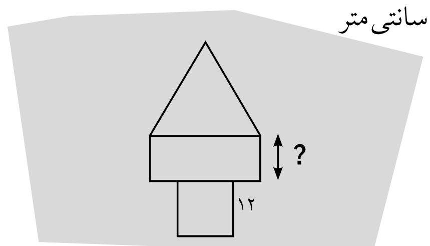
ه) عدد ۵ در جعبه‌ی سیاه است.

۱۶. این **برج** از مربع، مستطیل و مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. محیط این شکل‌ها با هم مساوی است. طول ضلع مربع ۱۲ سانتی‌متر است. طول ضلع خواسته شده چند است؟

الف) ۴ سانتی‌متر　　ب) ۵ سانتی‌متر

ج) ۶ سانتی‌متر　　د) ۷ سانتی‌متر

ه) ۸ سانتی‌متر



۱۷. می‌خواهیم جعبه‌ای به ابعاد ۴۰×۳۰×۳۰ را با مکعب‌های توپرِ هم‌اندازه، پر کنیم. کم‌ترین تعداد مکعب‌های لازم کدام است؟

الف) ۳۰　　ب) ۳۶　　ج) ۴۵

د) ۷۵　　ه) ۱۵

۱۸. امروز، جمعه است. علی امروز خواندن یک کتابِ ۲۹۰ صفحه‌ای را شروع کرد. او به جز روزهای جمعه که ۳۰ صفحه کتاب می‌خواند، بقیه‌ی روزهای هفته هر روز ۴ صفحه از کتابش را می‌خواند. چند روز طول می‌کشد تا علی کتابش را تمام کند؟

الف) ۵　　ب) ۳۶　　ج) ۴۰

د) ۳۵　　ه) ۴۱

۱۹. کامران، احسان، مهدی و آرش در مسابقات دوره‌ای شمشیربازی، مقام‌های اول تا چهارم را کسب کرده‌اند. اگر رتبه‌های کامران، احساس و آرش را با هم جمع کنید، حاصل ۶ می‌شود. اگر رتبه‌های مربوط به احسان و مهدی را جمع کنید به همان عدد می‌رسید. اگر رتبه کامران بهتر از رتبه احسان باشد، چه کسی رتبه اول را کسب کرده است؟

الف) کامران　　ب) احسان　　ج) مهدی

د) آرش　　ه) نمی‌توان مشخص کرد.

۲۰. امیر، ۲۰۹ قطعه‌ی مربعی شکل هم‌اندازه دارد. آن‌ها را کنار هم به شکل یک مستطیلِ توپر چیده است. او چند مستطیل مختلف می‌تواند بسازد؟

الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۳

د) ۵　　ه) ۱۰

۲۱. در مورد یک عدد، چهار توضیح زیر داده شده است:

بر ۳ قابل قسمت است.

بر ۱۱ قابل قسمت است.

بر ۳۳ قابل قسمت است.

کم‌تر از ۱۰ است.

می‌دانیم که فقط دو تا از این توضیحات درست و بقیه نادرست هستند. در این صورت عدد برابر است با:

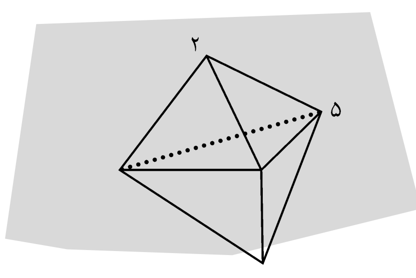
الف) صفر　　ب) ۳　　ج) ۳۳

د) ۱۱　　ه) ۶

۲۲. شکل زیر، جسمی را نشان می‌دهد که از ۶ وجهِ مثلثی شکل ساخته شده و روی هر رأس آن، یک عدد نوشتهٔ شده است. که دو تا از آن‌ها ۲ و ۵ هستند، سه عدد نوشته شده روی سه رأس هر مثلث را با هم جمع می کنیم تا حاصل جمع بدست آید. اگر بدانیم که این حاصل جمع‌ها با هم برابرند مجموع تمام پنج عدد نوشته شه روی رأس‌ها چند است؟

الف) ۹　　ب) ۱۷　　ج) ۱۹

د) ۱۸　　ه) ۲۴

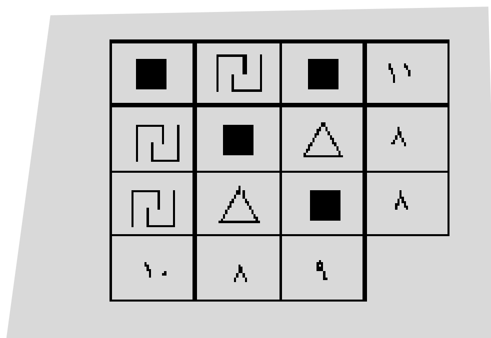


۲۳ . هتلی دارای ۳ طبقه است و هر طبقه ۳۵ اتاق دارد. اتاق‌ها با اعداد ۳ رقمی شماره گذاری شده‌اند. اولین رقم، طبقه را مشخص می‌کند و دو رقم بعدی شماره‌ی اتاق را نشان می‌دهد. مثلاً، شماره‌ی ۱۲۵ نشان دهنده‌ی اتاق ۲۵ در اولین طبقه است. بنابراین اتاق‌ها در طبقه‌ی اول از ۱۰۱ تا ۱۳۵ شماره گذاری شده‌اند، برای شماره گذاری تمام اتاق‌های این هتل چندبار از رقم ۲ استفاده شده است؟

الف) ۶۰ ب) ۶۵ ج) ۶۲
د) ۶۳ ه) ۷۷

۲۴ . در جدول زیر، مجموع هر سطر و هر ستون در انتهای آن داده شده است. مقدار ∆ ـ ■ را حساب کنید.

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵
د) ۶ ه) ۷



۲۵ . در یک جدول ۲×۴، در ردیف اول، دو عدد نوشته شده است. اعداد نوشته شده در هر کدام از ردیف‌های بعدی، مجموع و اختلاف اعداد نوشته شده در ردیف‌های قبلی است (به شکل نگاه کنید). یک جدول ۲×۷ به همین روش، پر شده است که عددهای آخرین ردیف آن ۸۰ و ۶۰ است. مجموع اعداد موجود در اولین ردیف را به دست آورید.

۱۰	۳
۱۳	۷
۲۰	۶
۲۶	۱۴

الف) ۲۰ ب) ۱۷/۵ ج) ۸
د) ۱۰/۵ ه) ۱۲

اولین مسابقه‌ی ملی ریاضی ویژه‌ی دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم راهنمایی تحصیلی، ۱۳۸۸/۲/۱۷

۱ . کدام یک از عددهای زیر، زوج است؟

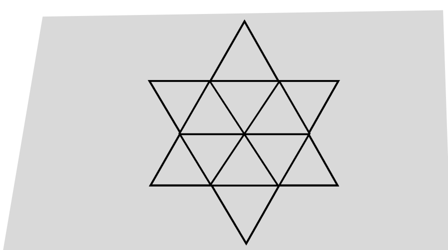
الف) ۱۳۸×۷ ب) ۱+۳+۸+۷
ج) ۱۳۸-۷ د) ۱۳۸۷
ه) ۱۳۸+۷

۲ . در یک سری مسابقات دوستانه‌ی شطرنج، ۴ دانش‌آموز دبستان و ۴ دانش‌آموز راهنمایی شرکت داشتند. روز اول مسابقه، دانش‌آموزان راهنمایی فقط با دانش‌آموزان دبستانَ مسابقه دادند و دبستانی‌ها هم فقط با دانش‌آموزان راهنمایی مسابقه دادند. در پایان روز اول، از همه‌ی آن‌ها پرسیدیم که با چند نفر مسابقه داده‌اند؟ دانش‌آموزان راهنمایی این جواب‌ها را دادند: ۳، ۱، ۲، ۲. سه تا از دانش‌آموزان دبستان گفتند: ۳، ۲، ۲. دانش‌آموز دبستانی دیگر چه عددی را گفته است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲
د) ۳ ه) ۴

۳ . ستاره‌ای که در شکل می‌بینید، از ۱۲ مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک شبیه به هم تشکیل شده است. محیط ستاره ۲۴ سانتی‌متر است. محیط شش ضلعیِ هاشور خورده چه قدر است؟

الف) ۶cm ب) ۱۲cm ج) ۱۸cm
د) ۲۴cm ه) ۳۰cm



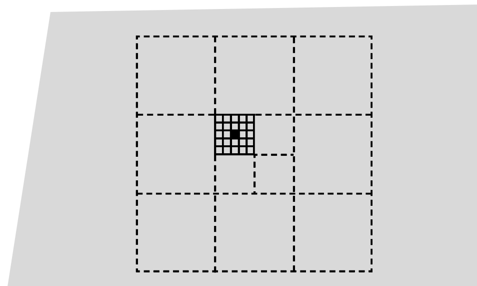
۴ . علی بسته‌هایی را در خیابان بهار توزیع می‌کند. او باید بسته‌ها را بین تمام خانه‌هایی که پلاک فرد دارند، توزیع کند. پلاک اولین خانه ۱۷ و پلاک آخرین خانه، ۵۵ است. علی باید بسته‌ها را به چند خانه برساند؟

الف) ۱۹ ب) ۲۰ ج) ۲۷
د) ۳۸ ه) ۵۳

۵ . محیط مربع بزرگ ۱ است . محیط مربع کوچکِ سیاه کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۱۰}$ ب) $\frac{۱}{۶۰}$ ج) $\frac{۱}{۳۰}$

د) $\frac{۱}{۱۰۰}$ ه) $\frac{۱}{۹۰}$



۶ . حاصل ضرب چهار عدد طبیعیِ مثبت مختلف، ۲۲۵ شده است . مجموعِ آن عددها چِیست؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۲۴

د) ۱۸ ه) ۲۰

۷ . تعدادی مرغ و گوسفند در یک مزرعه هستند . تعداد دست و پای گوسفندها، هشت برابر تعداد سر مرغ‌هاست . در این صورت، تعداد گوسفندها :

الف) دو برابر تعداد مرغ هاست .

ب) برابر با تعداد مرغ‌هاست .

ج) نصفِ تعداد مرغ‌هاست .

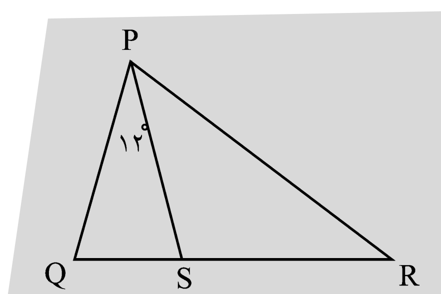
د) $\frac{۱}{۴}$ تعداد مرغ‌هاست .

ه) $\frac{۱}{۶}$ تعداد مرغ‌هاست .

۸ . در شکل سمت چپ، QSR یک خط راست است، $\hat{QPS}=۱۲^\circ$ و PQ=PS=RS . اندازه‌ی $\hat{SRP}$ چه قدر است؟

الف) ۳۶° ب) ۴۲° ج) ۵۴°

د) ۶۰° ه) ۸۴°



۹ . ظرفیت یک آسانسور، ۱۲ نفر بزرگ‌سال و یا ۱۶ نفر کودک است . اگر ۹ نفر بزرگ‌سال در آسانسور باشند، حداکثر چند کودک می‌توانند وارد آسانسور شوند؟

الف)۳ ب)۴ ج)۵ د)۶

ه)۸

۱۰ . شکل‌های زیر با استفاده از طناب ساخته شده‌اند . کدام‌یک از آن‌ها از یک قطعه طناب تشکیل شده است؟

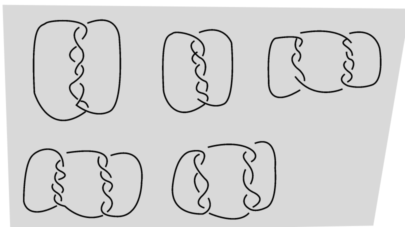
الف)۱ و ۲ و ۴

ب)هیچکدام از گزینه‌ها

د)همه‌ی آن‌ها

ج) ۲ و ۴ و ۵

ه)۲ و ۴



۱۱ . چند عدد طبیعی مثبت وجود دارد که تعداد رقم‌های مربع‌شان با تعداد رقم‌های مکعب‌شان برابر نیست؟

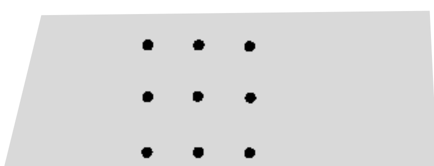
الف)صفر ب)۳ ج)۴ د)۹

ه)بی‌شمار

۱۲ . کم‌ترین تعداد نقطه‌ای که می‌توان از شکل زیر حذف کرد تا بین نقاط باقی مانده، هیچ چهار نقطه‌ای روی یک مربع نباشد، چند تاست؟

الف)۱ ب)۲ ج)۳ د)۴

ه)۷



۱۳ . نوید، همه‌ی زاویه‌های دو مثلث را اندازه گرفت . یکی از مثلث‌ها همه زاویه‌هایش تند و دیگری دارای زاویه‌ای باز بود . او چهار تا از این زاویه‌ها را به یاد می‌آورد : ۱۲۰° ، ۸۰° ، ۶۵° و ۱۰° . کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلثی که تمام زاویه‌هایش تند است، چه‌قدر است؟

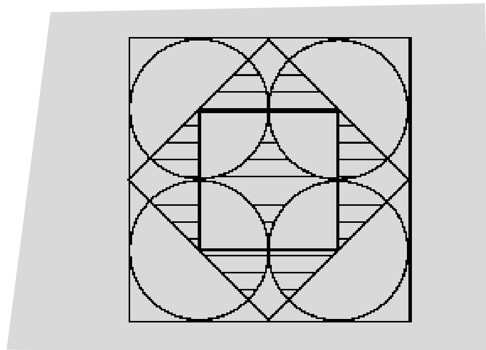
الف) ۵° ب) ۴۵° ج) ۳۵°

د) ۶۵° ه) نمی‌توان آن را مشخص کرد .

۱۴ . چه کسری از مربعِ بزرگ، هاشور نخورده است؟

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{\pi}{۶}$ ج) $\frac{\pi}{۸}$

د) $\frac{۱}{۳}$ ه) $\frac{۳}{۴}$



۱۵ . در جزیره‌ی راستگوها و دروغ‌گوها، ۲۵ نفر پشت سر هم در یک صف ایستاده‌اند. همه‌ی آن‌ها به جز نفر اول می‌گویند که نفر جلوی آن‌ها در صف، دروغ‌گو است. نفر اول هم می‌گوید همه‌ی کسانی که پشت سرش ایستاده‌اند، دروغ‌گو هستند. در این صف، چند نفر راست‌گو هستند؟ (راست‌گوها همیشه راست و دروغ‌گوها همیشه دروغ می‌گویند.)

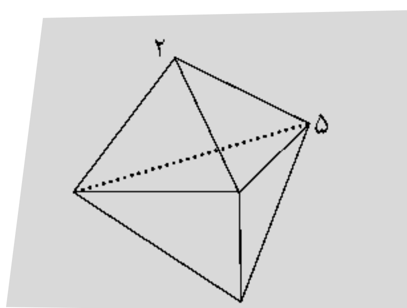
ال)صفر ب) ۱۲ ج) ۱۳ د) ۲۴

ث) نمی‌توان آن را مشخص کرد.

۱۶ . شکل روبه‌رو، جسمی را نشان می‌دهد که از ۶ وجه مثلثی شکل ساخته شده و روی هر رأس آن، یک عدد نوشته شده است. که دو تا از آن‌ها ۲ و۵ هستند، سه عدد نوشته شده روی سه رأس هر مثلث را با هم جمع می‌کنیم تا حاصل جمع به‌دست می‌آید. اگر بدانیم که این حاصل جمع‌ها با هم برابرند مجموع تمام پنج عدد نوشته شده روی رأس‌ها چند است؟

الف) ۹ ب) ۱۷ ج) ۱۹

د) ۱۸ ه) ۲۴

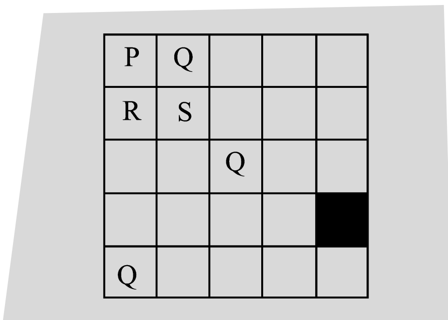


۱۷ . می‌خواهیم مربع‌های کوچک موجود در این شکل را با استفاده از رنگ‌های P، Q، R و S رنگ کنیم، طوری که مربع‌های همسایه، هم‌رنگ نباشند. (اگر دو تا مربع، در یک رأس یا یک ضلع مشترک داشته باشند، همسایه هستند.) بعضی از مربع‌ها، همان‌طور که در شکل نشان داده شده، رنگ شده‌اند. کدام امکان برای رنگ کردن مربع هاشور خورده وجود ندارد؟

الف) Q ب) S

ج) این رنگ‌آمیزی غیرممکن است. د) R

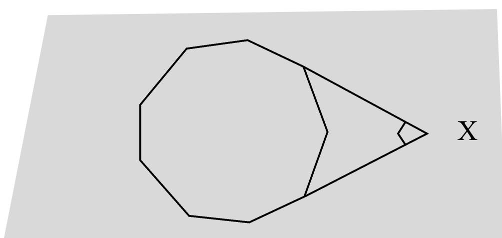
ه) R وP



۱۸ . شکل مقابل یک ۹ ضلعی منتظم را نشان می‌دهد. اندازه‌ی زاویه‌ی X که در شکل مشخص شده، کدام است؟

الف) °۴۰ ب) °۴۵ ج) °۵۰

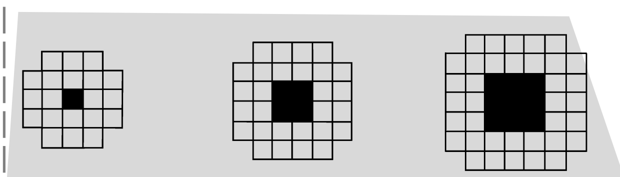
د) °۵۵ ه) °۶۰



۱۹ . سه شکلِ اول یک الگو را می‌بینید. هر یک از این شکل‌ها، با استفاده از تعدادی مربعِ واحد ساخته شده است و در هر شکل، بخش خاکستری توخالی است. برای ساختن شکل نهمِ این الگو چند مربع واحد لازم داریم؟

الف) ۷۶ ب) ۸۰ ج) ۸۴

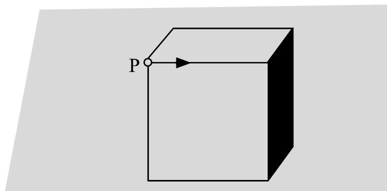
د) ۹۲ ه) ۱۰۰



۲۰ . با شروع از نقطه‌ی P، روی ضلع‌های این مکعب حرکت می‌کنیم. جهت اولین حرکت روی شکل با استفاده از فلش نشان داده شده است. در پایانِ اولین ضلع، دو انتخاب داریم: حرکت به راست یا حرکت به چپ. در پایانِ ضلع دوم نیز باید یکی از این دو جهت را انتخاب کنیم و این کارَ هم چنان ادامه دارد. ما به نوبت، یک‌بار جهت راست و بارِ دیگر جهت چپ را انتخاب می‌کنیم. اگر در پایان اولین ضلع جهت راست را انتخاب کرده باشیم، پس از طی کردنِ چند ضلع، برای اولین‌بار دوباره به نقطه‌ی P خواهیم رسید؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶

د) ۹ ه) ۱۲



۲۱ . چند عدد ۸ رقمی می‌توان نوشت که تنها از ارقام ۱، ۲ و ۳ تشکیل شده باشند و اختلاف هر رقم با رقم کناری‌اش، ۱ باشد؟

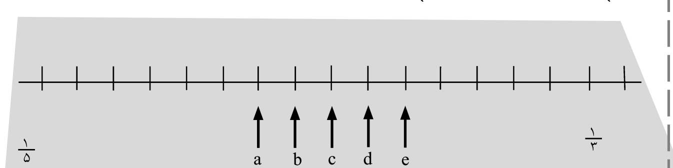
الف) ۱۶ ب) ۳۲ ج) ۶۴

د) ۸۰ ه) ۱۰۰

۲۲ . جایِ کسرهای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۵}$ روی محورِ اعداد مشخص شده است. کسرِ $\frac{۳۱}{۱۲۰}$ در کدام یک از مکان‌های a، b، c، d یا e قرار دارد؟

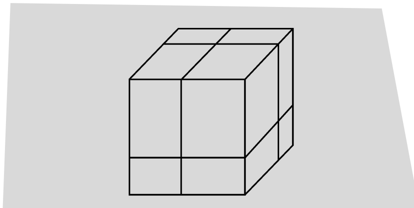
الف) a ب) b ج) c

د) d ه) e



۲۳ . یک مکعب بزرگ را با استفاده از سه بُرش، به هشت مکعب مستطیل کوچک تبدیل کرده‌ایم. اگر این هشت مکعب مستطیل را از هم جدا کنیم، نسبت مجموع مساحت‌های این هشت مکعب مستطیل، به مساحت مکعب اولیه چه قدر است؟

الف) ۱ به ۱ ب) ۴ به ۳ ج) ۳به۲ د) ۲به ۱ ه) ۴ به ۱



۲۴ . تمام مقسوم علیه‌های عدد N، به جز خود N و ۱ را نوشته‌ایم. از بین این مقسوم علیه‌ها، بزرگ‌ترین شانَ ۳۵ برابرِ کوچک‌ترینِ آن‌هاست. چند تا عدد N، چنین شرایطی را دارند؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲

د) بیش از ۲ ه) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۵ . دارا تعدادی عدد طبیعی متفاوت کم‌تر از ۱۰ را در یک ردیف نوشت. سارا با دقت کردن در این اعداد، متوجه شد که در هر جفت عددی که در کنار هم نوشته شده‌اند، یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. دارا حداکثر چند عدد را در این ردیف نوشته است؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸

د) ۹ ه) ۱۰

پاسخ‌های سؤالات پایه‌های (۵و۶)		
۱. الف	۱۱. هـ	۲۱.
۲. ج	۱۲. د	۲۲. ج
۳. ب	۱۳. ب	۲۳. هـ
۴. ج	۱۴. ب	۲۴. الف
۵. ب	۱۵.	۲۵. ب
۶. هـ	۱۶. هـ	
۷. د	۱۷. ب	
۸. ب	۱۸. ج	
۹. الف	۱۹. الف	
۱۰. ب	۲۰. ب	

پاسخ‌های سؤالات پایه‌های (۷و۸)		
۱. الف	۱۱. هـ	۲۱. ب
۲. ب	۱۲. ج	۲۲. الف
۳. ب	۱۳. ج	۲۳. ج
۴. ب	۱۴. هـ	۲۴. د
۵. ج	۱۵. ب	۲۵. د
۶. ج	۱۶. ج	
۷. الف	۱۷.	
۸. ب	۱۸. هـ	
۹. ب	۱۹. ج	
۱۰. هـ	۲۰. ج	

دیدگاه

استقبال از تغییر یا مقاومت در برابر آن!

یوسف آذرنگ
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی سردشت

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. درضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح شده، الزاماً هم‌سو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

رشد آموزش ریاضی

تغییر و اصلاح کتاب‌های درسی از ضروریات مهم برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای است. شکی نیست که هر کتاب درسی بعد از گذشت چند سال، بنا به دلایلی از جمله: تغییر مخاطبان، رشد روزافزون اطلاعات، تولید روش‌های جدید آموزشی، به روز کردن اطلاعات، پاسخ‌گویی به نیاز مخاطبان و غیره باید دست‌خوش تغییر و تحول شود. وقتی که نیاز به چنین تغییری احساس می شود طبیعتاً برنامه‌ها و اهداف عالی‌تری هم مد نظر برنامه‌ریزان درسی هست تا در سایه‌ی آن بتوانند چشم‌انداز مطلوب‌تری برای برنامه‌های درسی مدرسه‌ای ترسیم کنند. تغییر یک کتاب درسی در هر قالبی که صورت پذیرد حتماً به دنبال جبران کمبودها و نارسایی‌های کتاب قبلی است.

از نقطه‌ی شروع این کار و تدوین اهداف و برنامه‌های جدید تا پیاده کردن آن‌ها در کلاس‌های درس، مسیر پیچیده‌ای طی می‌شود که در آن مسیر، معلمان نقش محوری دارند. بدین معنی که برآوردن اهداف جدید بر دوش معلمانی است که در کلاس‌های درس، کتاب جدید را تدریس می‌کنند. با شروع سال تحصیلی جدید*، کتاب جدیدالتألیف ریاضی (۱) جای کتاب قبلی را گرفت و شاید با این کار، آرزوی بسیاری از معلمان و دانش‌آموزان هم برآورده شد. زیرا مدت‌ها بود آرزوی چنین تغییری را در سر می‌پروراندیم.

حال سؤال این است، استقبال از کتاب جدید ریاضی(۱) و تغییرات آن چگونه بوده است؟ تا چه اندازه می‌توان امیدوار بود که دیدگاه‌های معلمان ریاضی هم متناسب با اهداف پیش‌بینی شده در این کتاب تغییر کند؟ آیا معلمان ریاضی می‌توانند درصد قابل قبولی

از این اهداف را در کلاس‌های درس تحقق بخشند؟

برای بسط و توصیف این سؤال‌ها و سؤال‌هایی مشابه آن، لازم است به نکاتی در این زمینه اشاره شود.

قبل از هر چیز باید بپذیریم در مسیر اجرای برنامه‌ها و محقق شدن اهداف تبیین شده در برنامه‌های درسی، معلمان نقش یک پل ارتباطی را بازی می‌کنند. نقش این پل آن‌چنان مهم است که در صورت لرزان بودن آن نه تنها سیاست‌ها و برنامه‌های تدوین شده به اجرا در نمی‌آیند بلکه ممکن است نتایج معکوسی هم به دنبال داشته باشد. به راستی معلمان چگونه می‌توانند نقش مؤثر خود را ایفا کنند؟ یکی از روش‌های موجود در این راستا، برگزاری دوره‌های ضمن خدمت معلمان بوده است که هر ساله برای درس‌های مختلفی انجام می‌شود.

آن‌گونه که پیدا است، از مهم‌ترین اهداف این دوره‌ها این است که معلمان را با کتاب‌های درسی و تغییرات آن‌ها آشنا کرده و ارتباط آن‌ها را با مؤلفان و برنامه‌ریزان درسی نزدیک‌تر کند.

حال اگر این دوره‌ها از کیفیت مطلوبی برخوردار نباشد، نقش محوریی که برای معلمان تعریف شده است خود به خود زیر سؤال می‌رود و معلمان هم نمی‌توانند هم‌سو با اهداف و برنامه‌های جدید پیش بروند.

در ارتباط با کتاب جدیدالتألیف ریاضی (۱) و جهت آشنایی معلمان ریاضی با تغییرات جدید آن، دوره‌ای ۴۰ ساعته در نظر گرفته شده بود و هم‌چنان که همکاران مطلع هستند، این دوره در تمام نقاط کشور برگزار شد تا معلمان علاوه بر آشنایی با کتاب جدید و نحوه‌ی تغییرات آن، با ابزارها و روش‌های جدیدی آشنا شوند تا در سایه‌ی این‌ها، قالب بهتری به تدریس و آموزش مفاهیم آن بدهند و بتوانند یادگیری دانش‌آموزان را تسهیل کنند.

اجرای این دوره هم، مشابه تمام دوره‌های قبلی، با کم و کاستی‌های زیادی همراه بود و جوابگوی تمام نیازها نبوده است. هرچند که این دوره در نوع خود ارزشمند بوده و نمی‌توان منافع و برخی قابلیت‌های آن را نادیده گرفت، ولی با وجود اهمیت واقعی دوره‌های تخصصی ضمن خدمت، متأسفانه بافت این دوره‌ها به گونه‌ای بوده است که کمتر مفید بوده‌اند و در مواردی ارزش آن‌ها با یک گواهی چند ساعته هم برابری نکرده است!**

این که چرا دوره‌های ضمن خدمت جدی گرفته نمی‌شود یا اجرای آن‌ها در قالبی خشک و بدون برنامه‌ریزی مناسب صورت می‌گیرد و یا کمتر با استقبال واقعی معلمان ریاضی همراه بوده است، جای بحث بیش‌تری دارد که در این مقوله نمی‌گنجد.

اما مطلوب نبودن کیفیت برگزاری دوره‌های ضمن خدمت، تغییرات مطلوبی را هم به دنبال نخواهد داشت و نه تنها دیدگاه‌های معلمان را هم‌سو با تغییر کتاب و به نحو مفیدی اصلاح و تغییر نمی‌دهد، بلکه در مقابل تغییرات مقاوم‌تر هم خواهد کرد. در مواردی [که کم نبوده‌اند] دیده‌ایم و شنیده‌ایم که نوع و مشکل تغییرات کتاب‌های درسی را زیر سؤال برده‌اند و گاهاً بدون هیچ توجیه منطقی، آن‌ها را به باد انتقاد گرفته‌اند.

با این اوصاف اگر هر سال هم کتاب‌های درسی را عوض کنند، بی‌فایده خواهد بود. به راستی، دنبال کدام حلقه‌ی گم شده هستیم؟ چه نوع تغییری مطلوب برنامه‌ی درسی ماست؟ از کدام تغییر باید بیش‌تر استقبال کرد؟ در مقابل تغییر کتاب‌های درسی تا چه اندازه باید به تغییر دیدگاه‌های معلمان هم اهمیت داد؟ اگر ما معلمان می‌پذیریم که تغییر کتاب‌های درسی در نوع خود لازم و مفید است، باید بپذیریم که اصلاح دیدگاه‌های خودمان هم در همین راستا ارزشمندتر است.

اگر [به عنوان مثال] دل خوشی از نحوه‌ی تغییر و اصلاح کتابی مانند ریاضی (۱) نداریم، شاید به این دلیل است که هنوز نمی‌دانیم تغییر در چه راستایی مفید است و حذف و اضافه کردن مطالب درسی با چه انگیزه‌هایی انجام می‌شود. به‌طور قطع ما نیازمند ابزارهای بهتری برای نقد و بررسی کتاب‌های درسی هستیم. عدم آشنایی با چارچوب‌های موجود در کتاب‌ها و اصول حاکم بر سازمان‌دهی محتوای آن‌ها، موجب می‌شود که ما هم نتوانیم متناسب با این چارچوب‌ها حرکت کنیم و در بسیاری از موارد، همان تدریس کلیشه‌ای را که همواره در ذهن داشته‌ایم با خود حمل می‌کنیم و نه تنها تغییر را با تغییر پاسخ نمی‌دهیم، بلکه هر نوع تغییر و سنت‌شکنی را هم زیر سؤال می‌بریم و خود را متقاعد می‌کنیم که تغییر و اصلاحات جدید در کتاب‌ها، غیر مطلوب و غیرقابل اجراست!

بنابراین بهتر است گاه‌گاهی یک بازنگری کلی به نحوه‌ی تدریس خود داشته باشیم و چارچوب‌های جدید و مناسب‌تری برای آن تعریف کنیم و آمادگی لازم برای چنین دگرگونی‌هایی را در خود ایجاد کنیم تا با کسب آگاهی‌های بیش‌تر و آشنایی با دیدگاه‌های نظری جدید بتوانیم با تدریس مطلوب خود گامی مؤثر در جهت برآوردن اهداف تبیین شده در برنامه‌ی درسی برداریم.

از طرفی دیگر، اگر قرار است برنامه‌ای برای آموزش معلمان وجود داشته باشد، بهتر است در شکل مطلوب برگزار شود؛ زیرا برگزاری دوره‌های ضمن خدمت با این شکل و شمایل دردی را دوا نخواهند کرد و معلمان را بیش‌تر از قبل سرخورده و بی‌تفاوت نگه خواهند داشت.

پی‌نوشت

* منظور سال تحصیلی ۸۸-۸۷ است.

** برای گروه ریاضی دفتر تألیف، این حق محفوظ است که پاسخ خود را در همین ستون به چاپ برساند.

دوره‌ی

تحلیل و روش تدریس ریاضی ۲ متوسطه و بازآموزی علمی آن

دیدگاه

مرداد ۱۳۸۸ تهران، مرکز احمد آرام

علی روزدار

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی چهار محال و بختیاری ـ لردگان

این دوره با حضور بیش از دویست نفر از دبیران منتخب ریاضی سراسر کشور و مؤلفان کتاب درسی ریاضی ۲ در «مرکز آموزش و توسعه‌ی منابع انسانی استاد احمد آرام» در تهران برگزار شد. این تعداد در دو گروه سازمان یافتند. گروه اول شامل نیمی از دبیران منتخب بود که در پنج کلاسِ حدوداً بیست نفری از دوم تا هفتم مرداد ماه ۱۳۸۸ آموزش دیدند. (گروه دیگر قرار شد از دهم تا چهاردهم همان ماه آموزش ببینند). هر کلاس توسط یکی از مؤلفان در مدت یک و نیم ساعت اداره می‌شد. در هر جلسه، مؤلف محترم به دفاع از محتوای کتاب و شیوه‌ی تألیف آن، که مورد نقد جدی همکاران قرار داشت، می‌پرداخت. این دبیران، می‌بایست در مناطق خود به آموزش محتوا و شیوه‌ی تدریس این کتاب اقدام کنند. از دیگر موارد قابل توجه در این دوره، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) نکات مثبت

۱. در انتخاب دبیران ریاضی برای شرکت در این دوره، به سوابق و توانایی آنان در آموزش به خوبی توجه شده بود. به نظر می‌رسید موفق‌ترین دبیران ریاضی در این دوره حضور داشتند و این امر، در ارایه‌ی نقد و نظراتشان نمایان‌تر می‌شد.

۲. حضور به موقع تعدادی از مؤلفان در کلاس‌ها که خود و کتابشان را در معرفی نقد مستقیم معلمان قرار دادند، از دیگر نکات مثبت این دوره به حساب می‌آید.

۳. مجریان دوره و مسئولان مرکز استاد احمد آرام امکانات پذیرایی و رفاهی خوبی در اختیار شرکت‌کنندگان قرار دادند و رفتار شایان تقدیری در برخورد با همکاران فرهنگی داشتند.

ب) نکات منفی

۱. شرکت‌کنندگان از سوابق کاری، تحقیقی و تألیفاتی مؤلفان اطلاع چندانی نداشته و ندارند. به نظر می‌رسید این کتاب درسی برای تعدادی از این مؤلفان، اولین اثر یا جزء معدود آثار آنان باشد.

۲. برخی از مؤلفان به موقع سر کلاس‌های خود حاضر نمی‌شدند و این امر، مورد اعتراض تعدادی از شرکت‌کنندگان قرار گرفت. مثلاً از چهار جلسه کلاس گروه ۳ در روز شنبه دوم مرداد، تنها یک جلسه و از پنج جلسه روز یکشنبه، تنها دو جلسه برگزار شد.

۳. برخی از مؤلفان تسلط کافی بر مباحث آموزشی و ریاضی انتخابی خود نداشتند و این امر، در مباحث چالش‌انگیز در کلاس‌ها بارزتر می‌شد.

۴. از هیچ گونه وسیله‌ی کمک

آموزشی استفاده نشد و همه‌ی مؤلفان به شیوه‌ی سخنرانی به آموزش پرداختند!

۵. به فرایند تألیف این کتاب درسی به خوبی پرداخته نشد. مدیر گروه ریاضی دفتر تألیف گفتند که «از آبان ماه کار گروه برای تألیف این کتاب آغاز شد». ولی به نظر می‌رسد این مدت، برای تألیف یک کتاب درسی زمان کافی نیست چرا که برای تدوین و نوشتن یک پایان‌نامه کارشناسی ارشد با تیمی قوی‌تر از گروه تألیف مورد اشاره، زمان بیشتری صرف می‌شود، در صورتی که مخاطبان این دو اثر، به لحاظ کمیت و کیفیت قابل مقایسه نیستند. تا آنجایی که اطلاع دارم، یک کتاب درسی لازم است قبل از آن‌که برای دانش‌آموزان سراسر کشور تجویز شود، اجرای آزمایشی (پایلوت) شود و در چندین کلاس درس تدریس موقت شود و در صورت تأیید، به تیراژ میلیونی برسد. تعدادی از مؤلفان به جلساتی که با گروه‌های آموزشی دبیران ریاضی تهران و مراکز استان‌ها داشتند اشاره کردند، ولی بعضی از همین دبیران که در دوره‌ی اخیر نیز حضور داشتند، بر عدم دخالت نظراتشان در ویرایش کتاب توسط مؤلفان تأکید کردند. از جمله این نظرات، اصرار بر عدم تغییر برخی مباحث از جمله ماتریس و بردار و آنالیز ترکیبی بود که نه معلم در ارایه‌ی آن‌ها براساس کتاب قبلی به مشکلی برمی‌خورد و نه دانش‌آموز مشکلی در فهم آن‌ها داشت.

۶. یکی از مؤلفان (دکتر عالمیان) به ملاقاتش با برخی بزرگان علمی و پژوهشی کشور در فرایند تألیف این کتاب اشاره کرد. وی گفت: «از جلسه‌ی یک و نیم ساعته با رییس پژوهشکده‌ی رویان تنها یک صفحه در این کتاب آورده شده»، (مقدمه‌ی بخش توابع نمایی و لگاریتم). با این حال، در کتاب اشاره نشده که در کشف یا تکثیر سلول‌های بنیادی، چگونه از توابع نمایی یا لگاریتم استفاده می‌شود.

۷. اشکالات عدیده‌ی علمی، آموزشی، دستوری و نگارشی در این اثر وجود دارد که آن را از اعتبار کتاب درسی می‌اندازد. تعدادی از این اشکالات عبارتند از:

۷- الف) در فصل «هنر شمارش»! یک مقدمه‌ی شش صفحه‌ای برای یک اصل ساده و قابل فهم (اصل ضرب) آورده شده که توضیح مفصلی در مورد DNA است، ولی نقش و تأثیر آن در اصل ضرب مشخص نشده است. جالب است که بعد از این مقدمه‌ی طولانی‌تر از متن! اصل ضرب با مثال‌های ابتدایی کتاب قبل شروع شده است.

۷- ب) برخلاف ادعای مؤلفان و مانور آن‌ها بر خودآموز نبودن این کتاب، بسیاری از مطالب آن را دانش‌آموز می‌تواند بدون نیاز به معلم، در سطح انتظار کتاب فراگیرد. به طور مثال، فصل‌های ماتریس، بردار، الگویابی و دنباله‌ها، و نیمی از فصل‌های تابع، توابع خاص و توابع نمایی و لگاریتمی اینگونه‌اند. ضمناً تأکید مؤلفان، بر رویکرد حل مسئله در تألیف این کتاب بوده که با مروری بر نحوه‌ی ارایه‌ی مطالب در این کتاب، این ادعا نیز رنگ می‌بازد.[1]

۷- پ) در برخی از فصول، تعریف‌های غیردقیق و گاهی غیرعلمی از موضوعات ریاضی ارایه شده است که می‌توان به تعریف تابع، ماتریس و بردار اشاره کرد.

۷- ت) برخی از مطالب کتاب از منابع مختلفی از جمله کتاب‌های کنونی متوسطه و مجلات رشد آموزش ریاضی آورده شده ولی هیچگونه ارجاعی صورت نگرفته است.

۷- ث) یکی از انتقادهایی که به کتاب ریاضیات ۱ و ۲ قبلی وارد بود، بالا بودن نمک تجرید! موضوعاتی چون مثلثات و تابع بود که به عقیده‌ی آموزشگران، این «تجرید زودرس به عقیم‌کردن آموزش ریاضیات می‌انجامد!!»، ولی از یاد نبریم که تأکید بیش از اندازه بر شکر شهود! نیز، دانش‌آموز را به عنوان شهروندان دانشمند فردا، از بخش جذاب ریاضیات محروم می‌کند.

خلاصه این‌که برای تألیف و تدوین کتب درسی، لازم است حساسیت‌ها بیش از این باشد. کتابی که میلیون‌ها خواننده‌ی دقیق و موشکاف دارد و قشر عظیمی از مردم لازم است مطالب آن‌را بیاموزند و براساس آن، ارزیابی شوند، شایسته نیست کوچک‌ترین اشکال (حتی نگارشی) داشته باشد.

پی‌نوشت

۱. نویسنده‌ی این گزارش، پایان‌نامه کارشناسی ارشد خود را در مورد حل مسئله زیر نظر اساتید آموزش ریاضی در طول یک‌ونیم سال به اتمام رساند و مقالاتی را نیز در این زمینه ارائه داد. خواننده می‌تواند برای آگاهی اجمالی از چیستی حل مسئله به مجله‌ی رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۸۶ مراجعه کند.

y وای؛ نه ایگرگ!

ندا مهدوی غروی، دبیر ریاضی شهرستان محمودآباد

چند سال پیش، وقتی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض بودم، در محضر استاد گرانقدر «قاسم علیزاده افروزی»[1] دروس آنالیز حقیقی و مختلط، آنالیز تابعی و آنالیز تابعی کاربردی را می‌گذراندم. یادم هست به محض این‌که y را ایگرگ می‌خواندیم، ایشان در نهایت جدیت می‌فرمودند «وای؛ نه ایگرگ». به‌طوری که بنده در شروع هر جلسه روی ورقه‌ای می‌نوشتم «وای» و آن را در معرض دیدم قرار می‌دادم تا اشتباهاً y را به جای «وای»، «ایگرگ» نخوانم و استاد به من تذکر ندهند. آن روزها آن چنان محو تدریس زیبای آن استاد فرزانه بودم که نه من و نه هم‌کلاسی‌هایم هیچ‌وقت نپرسیدیم «چرا ایگرگ نه؟»

البته در هنگام تدریسم در کلاس درس، هم‌چنان به ایگرگ گویی ادامه می‌دادم. تا این‌که روزی در کلاس ریاضی (۱) وقتی یکی از دانش‌آموزان گفت «ایگرگ»، به تقلید از استادم گفتم: «وای؛ نه ایگرگ» و از آن پس این دانش‌آموزانم بودند که به محض ادای این کلمه به من تذکر می‌دادند. آن‌ها خیلی سریع توانستند این تغییر را اعمال کنند و علت آن هم واضح بود. چرا که یکی دو سالی بیش‌تر نبود که آن‌ها با ایکس و ایگرگ در ریاضی آشنا شده بودند، در حالی که از نخستین برخورد من با دو یار مجهول، ۱۵ ـ ۱۶ سالی می‌گذشت. مطابق انتظارم، برای دانش‌آموزان سال‌های بالاتر، y را «وای» خواندن سخت‌تر بود.

برایم بسی مایه‌ی خوشوقتی بود که کسی نمی‌پرسید: «چرا ایگرگ نه؟» ولی اگر می‌پرسیدند چه جوابی داشتم؟ تصمیم گرفتم در این مورد تحقیق کنم.

در فرهنگ معین آمده: «ایگرگ. شرح: ۱ـ نام حرف بیست و پنجم الفبای فرانسه ۲ـ حرفی که در معادلات ریاضی نشان‌دهنده‌ی مجهول است ۳ـ مجهولی دیگر».

حالا فهمیدم چرا استاد با ایگرگ مخالف بودند. طبق اطلاعاتم ایشان تحصیل کرده‌ی انگلستان بودند و احتمالاً به همین دلیل با زبان و حروف فرانسه، غیرمأنوس.

اما چرا ما y را به فرانسه تلفظ می‌کنیم؟ مقاله‌ی «مروری بر کتاب‌ها و برنامه‌ریزی ریاضی کشور در گذشته‌ی دور و نزدیک» را مطالعه کردم. در قسمتی از این مقاله آمده: «... از سال ۱۳۱۵ به بعد یک سری کتب دبیرستانی موسوم به «کتاب‌های وزارتی» که از طرف وزارت آموزش و پرورش چاپ شده بود. وارد مدارس شد.

کتب ریاضی و علوم در این برهه از زمان شدیداً متأثر از فرهنگ علمی فرانسه بود. دلیل آن نیز:

ـ جزوات فرانسوی باقیمانده از دارالفنون؛

ـ جزوات فرانسوی دبیرستان‌های رازی و سن لوئی؛

ـ آشنایی بیش‌تر تحصیل کرده‌های ایران با زبان فرانسه بود...

در مهرماه ۱۳۲۶ کتاب‌های ریاضی تألیف آقایان قربانی و صفاری برای اولین بار وارد دبیرستان‌های کشور شد. این کتاب‌ها نسبت به سلف خود ساده‌تر می‌نمود و با الهام از منابع دبیرستانی فرانسه تنظیم شده بود...» [۱]

به نظر می‌رسد، زمان آن رسیده که y را «وای» تلفظ کنیم. به چند دلیل:

ـ زبان انگلیسی، زبان بین‌المللی پذیرفته شده است. هم‌چنین در دانشگاه‌های کشور، زبان تخصصی ای که ارائه می‌شود (به جز در رشته‌های خاص) انگلیسی است و به کاربردن حرف فرانسوی حین خواندن انگلیسی، جالب نیست.

ـ حروف زبان فرانسه از نظر تعداد و نوشتار با زبان انگلیسی یکسان و از نظر تلفظ در برخی موارد متفاوت است.

اگر ما می‌خواهیم مجهول‌های ریاضی را به فرانسه تلفظ کنیم، پس باید وقتی W را به عنوان مجهول استفاده می‌کنیم، آن را «دوبْلِ وِ»[2] بخوانیم یا H را «اَش»[3]. البته بماند که برخی از حروف فرَانسه در زبان فارسی، معادل آوایی ندارند، مثل U.

پی‌نوشت

۱. ایشان در حال حاضر ریاست دانشگاه مازندران را به عهده دارند.

2. /dublave/

3. /aS/

مراجع

[۱] جلیلی، میرزا: مروری بر کتاب‌ها و برنامه‌ریزی ریاضی کشور در گذشته دور و نزدیک. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی** ـ شماره‌ی ۷۶، ص ۵۱، دفتر انتشارات کمک آموزشی.

[۲] پارسایار، محمدرضا: **فرهنگ معاصر فرانسه ـ فارسی** (۲۰۰۲).

[۳] معین، محمد: **لغت‌نامه معین**.

عدد جادویی

گردآوری : **فاطمه تکاملی ماسوله**

۱۴۲۸۵۷

یک نفر از اساتید دانشکده‌ی شهر آتن، پایتخت یونان، چندی پیش عددی را کشف کرد که ویژگی‌های عجیبی دارد. آن عدد، ۱۴ ۲۸ ۵۷ است که

ـ اگر عدد مذکور را در دو ضرب کنیم، حاصل ۲۸۵۷۱۴ می‌شود (به ارزش مکانی ۱۴ توجه کنید)؛

ـ اگر این عدد را در سه ضرب کنیم، حاصل ۴۲۸۵۷۱ می‌شود (به ارزش مکانی ۱ توجه کنید)؛

ـ اگر این عدد را در چهار ضرب کنیم، حاصل ۵۷۱۴۲۸ می‌شود (به ارزش مکانی ۵۷ توجه کنید)؛

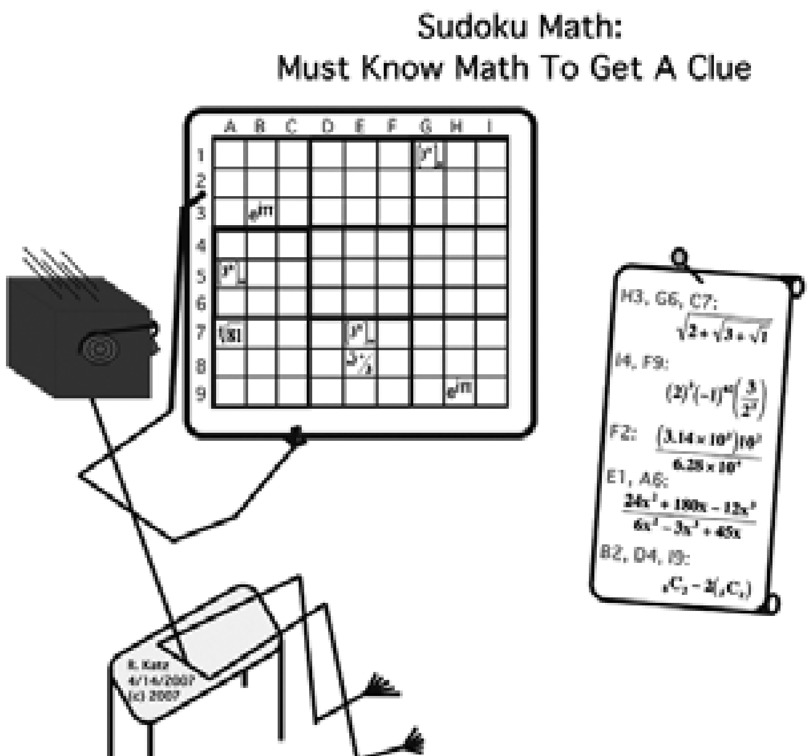
ـ اگر این عدد را در پنج ضرب کنیم، حاصل ۷۱۴۲۸۵ می‌شود (به ارزش مکانی ۷ توجه کنید)؛

ـ اگر این عدد را در شش ضرب کنیم، حاصل ۸۵۷۱۴۲ می‌شود (سه رقم اول با سه رقم دوم جابه‌جا شده است)؛

ـ و بالاخره، اگر این عدد را در هفت ضرب کنیم حاصل ۹۹۹۹۹۹ می‌شود!

منبع : مجله‌ی تخته سیاه

شوخی



گزارش خبر

محور اصلی سی و سومین کنفرانس بین‌المللی

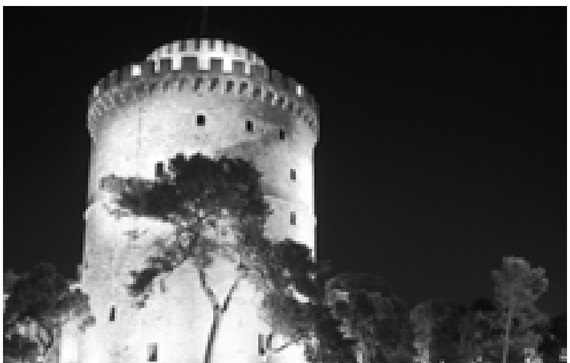
PME
تحقیق برای نظریه‌های آموزش ریاضی

عکس و گزارش: مانی رضائی
دانشجوی دکتری آموزش ریاضی

سی‌وسومین کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME33) از ۱۹ تا ۲۴ جولای ۲۰۰۹ در دانشگاه ارسطو[1] و با همکاری دانشگاه ماسادونیا[2] در شهر تسالونیکی[3] برگزار شد.

تسالونیکی دومین شهر بزرگ یونان است. نام این شهر، منتسب به نام دختر اسکندر است و بناهای تاریخی متعددی از همن دوران، در شهر به چشم می‌خورد. بروز زلزله‌ای قوی، شهر قدیمی را در قرن گذشته ویران کرده است و بعد از مرمت آثار باستانی، بقیه‌ی شهر ویران شده را درهم کوبیده و شهر کنونی را بر آن بنا کرده‌اند. بدین علت سطح شهر حدود دو تا سه متر از سطح بناهای تاریخی بالاتر است. این نکته باعث شده تا دسترسی مردم به آثار باستانی ناممکن شده است، در عین حال این آثار در دیدرس رهگذران قرار دارند.

قدمت تاریخی و جاذبه‌های گردشگری این شهر موجب شده تا اقتصاد شهر به این صنعت وابسته باشد. با این همه، بافت تاریخی شهر در لابه‌لای ساختمان‌های مکعبی و بزرگ هشت تا ده طبقه‌ی آن چشم‌اندازی نامتناسب به شهر داده است.


برج تاریخی تسالونیکی

برنامه‌ی افتتاحیه‌ی کنفرانس، عصر روز ۱۹ جولای (۲۸ تیر) با سخنرانی فولای لین، رییس PME شروع شد. وی در

ابتدای سخنرانی خود، به اهمیت تفکرات ارسطو اشاره کرد. سپس لین با توجه به پذیرش ۴۱۴ مقاله، اعلام کرد: از این کنفرانس نسبت به کنفرانس PME32 استقبال خوبی شده است. وی تأکید کرد: نظرات ارایه شده در «نشست عمومی مباحث روز»[۴] می‌توانند شروع خوبی برای مطالعات باشند. وی از شرکت‌کنندگان دعوت کرد که از ابتدا تا انتهای کنفرانس، فعالانه در آن شرکت کنند.

فولای لیس، رییس PME

در ادامه، رییس دانشکده‌ی علوم تربیتی دانشگاه ارسطو ضمن خوش‌آمدگویی به حاضران، گفت: پیروان افلاطون معتقدند که ریاضی خارج از ذهن وجود دارد، در حالی که پیروان ارسطو ریاضی را محصول تجربه‌ی مستقیم افراد با اشیای ریاضی می‌دانند. چند دهه است که این اعتقاد وجود دارد که ریاضی یک فعالیت انسانی است ... چگونگی مفهوم‌پردازی ریاضی در ذهن موجب شده تا با تمرکز بر روان‌شناسی، جامعه‌شناسی و ریاضیات، توجه بیش‌تری به نظریه‌های آموزش ریاضی بشود. امیدوارم با مشارکت همه، کنفرانس پرباری را در پیش داشته باشیم.

رییس دانشکده‌ی علوم تربیتی دانشگاه ارسطو

رییس گروه آموزش پیش دبستان، در این مراسم ضمن خوش‌آمدگویی گفت: هدف اصلی تشکیل این گروه، آموزش معلمان ابتدایی است. ما در دوره‌ی سختی قرار داریم که با تجزیه و تحلیل دیدگاه‌های قدیم و جدید می‌خواهیم به یک هویت نو برسیم. وی ابراز امیدواری کرد روزهای خوب و مولدی را در این محل بگذرانید که برای اهداف علمی شما مفید و پرثمر باشد. گروه آموزش پیش از دبستان در دانشکده‌ی علوم تربیتی در سال ۱۹۸۴ تأسیس شده است.

سپس مسئول منطقه‌ای آموزش‌وپرورش در دوره‌های ابتدایی و متوسطه استان ماسادونیا به نمایندگی از آموزش‌وپرورش، رو به حاضران گفت: حضور شما باعث افتخار ماست. توسعه‌ی تفکر ریاضی در کشور ما به زمان‌های دور برمی‌گردد... ما می‌خواهیم آینده‌ای را در نظر بگیریم که یونان مهد ریاضی و فن‌آوری در جهان باشد. تأکید وزیر آموزش‌وپرورش یونان و هدف این وزارتخانه آن است که کتاب‌های درسی ارتقا پیدا کند و معلمان و دانش‌آموزان ما در عرصه‌های بین‌المللی ممتاز باشند. ... من مطمئن هستم که از این کنفرانس می‌توانیم برای تجزیه و تحلیل نظرات‌مان نسبت به ریاضی محض و کاربردی استفاده کنیم. به دبیر کمیته‌ی علمی برای تدارک چنین کنفرانسی تبریک می‌گویم. هم‌چنین به مسئولان بین‌المللی و دیگر دست‌اندرکاران هم تبریک می‌گویم. امیدوارم فرصت آشنایی با فرهنگ ما را در این شهر پیدا کنید. با همکاری و مسئولیت‌پذیری، انتظار داریم که نتایج کنفرانس به تقویت و توسعه‌ی رشته‌های بین رشته‌ای و انجام تحقیقات در آن‌ها در کشور ما بیانجامد.

ماریانا زکاکی، دبیر کنفرانس

ماریانا زکاکی[۵]، دبیر کمیته‌ی علمی کنفرانس به عنوان آخرین فرد، از طرف کمیته‌ی بین‌المللی و کمیته‌ی محلی برگزاری کنفرانس به همه خوش‌آمد گفت. وی اشاره کرد: برای ما برگزاری این کنفرانس در یونان یک چالش بزرگ بود. این کنفرانس به شرکت‌کنندگان بومی فرصت دسترسی به قلب PME و

فعالیت‌هایش را می‌دهد ولی هرگز فکر نمی‌کردیم که این کار تا این حد سخت باشد. ما با انتخاب محور اصلی «تحقیق برای نظریه‌های آموزش ریاضی» برای این کنفرانس، خواهان آن بودیم تا بتوانیم بر دستاوردهای باستانی خود تکیه کنیم و از آن به عنوان آستانه‌ای برای ورود به دنیای جدید تحقیقی و چالش‌های آن کمک بگیریم. ... برگزاری کنفرانس با نقاط قوت و ضعفی نیز همراه است که خواهش می‌کنم ضعف‌ها را فراموش کنید و قوت‌ها را بهتر ببینید.

به دنبال مراسم افتتاحیه، اولین سخنرانی عمومی توسط آندریاس دمتریو[۶] ارایه شد. در معرفی وی اشاره شد، پروفسور دمتریو استاد روان‌شناسی رشد در دانشگاه قبرس وزیر آموزش‌وپرورش قبرس است. وی پیش از این در دانشگاه ماسادونیا مشغول به کار بوده است. تلاش وی برای نظریه‌پردازی در روان‌شناسی انسانی است و سخنرانی خود را با عنوان «ریاضی در ذهن: معماری، توسعه و الزامات آموزشی» ارایه کرد. دمتریو سخنرانی خود را چنین آغاز کرد: دوستان علمی‌ام مرا محکوم می‌کنند که وارد سیاست شده‌ام و دوستان سیاسی‌ام محکومم می‌کنند که بیش‌تر کار علمی می‌کنم و سیاست را جدی نگرفتم... من در این سال‌ها در این دو دانشگاه در مورد روان‌شناسی شناختی کار تحقیقی کرده‌ام. وی افزود سنت شناختی در روان‌شناسی بیش از پنجاه سال است که به‌وجود آمده است، از منظر این سنت، ریاضیات شامل فعالیت‌های زیر است:

ـ فرایند حل مسئله مانند:

❍ بازنمایی فضای مسئله؛

❍ ظرفیت بازنمایی مانند کار ذهنی[۷]؛

❍ رهیافت‌های حل مسئله مانند طرح نقشه؛

❍ نمایش خودتنظیمی؛

ـ بُعد تفاوت‌های فردی که مربوط است به:

❍ هوش عمومی یا IQ؛

❍ فرایندهای خاص ذهنی؛

ـ توسعه‌ی معنا که ذهن توسعه‌گر می‌سازد:

❍ درونی‌سازی فعالیت‌ها بر روی اشیا؛

❍ هماهنگی اعمال ذهنی؛

❍ به دست آوردن روابط زمینه‌ای آن‌ها؛

❍ به دست آوردن ضرورت‌های منطقی؛

❍ ساختن صعودی ساختارهای مجرد.

آندریاس دمتریو، سخنران مدعو روز نخست

دمتریو گفت: فکر می‌کنم زمان مناسبی است که به سمت مدلی برای ذهن انسان باشیم تا بتواند کارکردهای ذهنی و فرایندهای آن را توجیه کند. کار من ۳۲ سال پیش شروع شد و هدفم تدوین مدلی فراگیر[۸] بود. وی با معرفی مدلی استوانه‌ای، ابتدا عوامل مؤثر در کارآمدی حل مسئله را برشمرد:

ـ سرعت. با چه سرعتی یک پدیده را تشخیص می‌دهید؛

ـ خستگی. اگر در مجموعه‌ی نورون‌های خود معنا نسازید، دچار خستگی می‌شوید؛

کنترل عوامل بیرونی. ذهن انسان این توانایی را دارد که در لحظه، متمرکز باقی بماند و عوامل یا اطلاعات بیرونی را نادیده بگیرد.

وی جاده‌های اصلی توسعه‌ی ذهن را چنین معرفی کرد:

۱. توسعه، از دریافت‌های حسی و محدود به عمل تا خودنظمی، بازتاب و خودآگاهی؛

۲. حرکت از تعداد کمی بازنمایی مبتنی بر واقعیت به بازنمایی‌های متقابل و متعدد؛

۳. از فرایندهای ذهنی کلی و با انسجام کم به فرایندهای خاص و در عین حال منسجم؛

۴. با توسعه، ذهن به طور فزاینده‌ای منعطف‌تر شده و قابلیت انتقال از یک دیدگاه به دیدگاه دیگر را می‌یابد.

و هسته‌ی اصلی توانایی‌های ریاضیات را در سه جزء خلاصه کرد:

ـ شمارش تصویری[۹]؛

ـ اعمال اصلی حسابی (جمع و تفریق)؛

ـ محور اعداد ذهنی.

دمتریو در ادامه به تجزیه و تحلیل تفکر ریاضی پرداخت. وی چنین جمع‌بندی کرد: سرعت پردازش، یکی از مهارت‌های بسیار مهم شناختی است. پس تفاوت فردی در عملکرد ریاضی،

ناشی از تفاوت در سرعت پردازش افراد است. وی گفت: شاید بتوانیم بگوییم ما واقعاً چیزی در مدرسه یاد نمی‌دهیم! می‌توانیم مواد را به دانش‌آموزان بدهیم و بگوییم خودتان آن‌ها را بخوانید! پس نقش «کارآمدی پردازش» در یادگیری فردی چیست؟ هر چه دانش‌آموز از نظر پردازش ناکارآمدتر باشد، به معلمش بیش‌تر وابسته است. وی نتیجه‌گیری کرد ابزار بسیار قوی برای برنامه‌ریزان و معلمان، آگاهی از تحقیقات روان‌شناسی شناختی و نتایج آن است، به گونه‌ای که بتوانند آن نتایج را در برنامه و تدریس به‌کار گیرند. این نتایج، نیازمند ساختار کلاس درسی بسیار متفاوت هستند. اگر وزیر آموزش‌وپرورش نبودم، می‌توانستم به معصومیت تظاهر کنم و کار خودم را انجام بدهم. اما اکنون وزیر هستم و نمی‌توانم از کنار آن بگذرم. می‌دانم که به‌کارگیری این نتایج دشوار است. البته باز هم می‌توانم بگویم که مقصر وضع موجود، اتحادیه‌های معلمان، محققان، دانشکده‌های علوم تربیتی و سیاست‌مداران هستند و باز هم ادای بی‌گناهان را درآورم!

بعد از این سخنرانی، برنامه‌ی افتتاحیه با اجرای تئاتر و نمایش عروسکی به پایان رسید. جالب آن‌که برنامه‌ی نمایش به زبان یونانی بود، اما در مورد موضوع نمایش، هیچ توضیحی برای حاضران داده نشد (!!)

نمایش عروسکی سایه‌گردانی در مراسم افتتاحیه

روز دوم کنفرانس

روز دوم با سخنرانی عمومی پاول ارنست[10] با عنوان «اولین فلسفه‌ی آموزش ریاضی کدام است؟» آغاز شد. ارنست ادعا کرد: در غرب، فلسفه‌ی اجتماعی هیچ‌گاه به یک نقطه‌ی تمرکز تبدیل نشده است. وی تأکید کرد که در فلسفه‌ی ریاضی باید این موارد را در نظر گرفت: معرفت‌شناسی؛ نظریه‌های ریاضی؛ هستی‌شناسی؛ روش‌شناسی تاریخی؛ کاربردها و ارزش‌ها؛ دانش فردی و یادگیری. یکی از پیامدهای وسیع‌تر کردن فلسفه‌ی ریاضی، ارایه‌ی مبنایی برای تمرکز اصلی آموزش ریاضی، تدریس و یادگیری ریاضی است. بحث ارنست با بررسی سیر تاریخی فلسفه و فلسفه‌ی ریاضی ادامه یافت. وی مدعی شد فلسفه‌ی مطلق‌گرایی سنتی به ارزش‌های اقتدارگرایانه انجامید و بدین‌ترتیب، تصوری اقتدارگرایانه از ریاضی مدرسه‌ای ایجاد شده است. در پاسخ به این سخنرانی، شلومو وینر[11] سخنرانی بازتابی خود را با بررسی تحلیلی سخنرانی ارنست، ارایه کرد.

از چپ به راست: پاول ارنست، شلومو وینر و استفان لرمن

پس از دو سخنرانی، برنامه‌ی روز دوم کنفرانس با ارایه‌ی گزارش‌های تحقیقی و سخنرانی‌های کوتاه ادامه یافت. در روزهای کنفرانس، علاوه بر سخنرانی‌های عمومی و میزگرد علمی آن (که روز چهارم تشکیل شد و در ادامه به آن خواهیم پرداخت)، در سنت‌های برگزاری کنفرانس‌های PME، فعالیت‌های علمی زیر به چشم می‌خورد:

ـ ارایه‌های فردی

- مجمع تحقیقاتی[12]؛
- گزارش تحقیقی[13]؛
- سخنرانی کوتاه[14]؛
- ارایه‌ی پوستر[15].

ـ فعالیت‌های گروهی

- گروه مباحثه[16]؛
- گروه کاری[17].

در کنفرانس PME33، برنامه‌ی ارایه‌ی ملی[18] با عنوان «تحقیقات آموزش ریاضی در یونان و قبرس» گنجانده شده بود. در این بخش، برنامه‌ی آموزش معلمان در قبرس معرفی شد که در آن، شرایط ضروری برای انتخاب معلم، مراحل آموزشی

دهه‌های اخیر بررسی شد. سپس نتایج قبرس و یونان در ارزشیابی بین‌المللی تیمز[19] و پیزا[20] اعلام شد و اقداماتی که پس از بررسی نتایج در این دو کشور انجام شده است، تشریح شد بخش دیگر برنامه‌ی ارایه‌ی ملی، بررسی وضعیت فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری آموزش ریاضی در قبرس و آینده‌ی این رشته در این دو کشور بود که در میزگردی مورد بررسی قرار گرفت.

باقی‌مانده‌ی قصر گلاریوس در تسالونیکی

فعالیت‌های علمی IGPME

گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی IGPME[21] در بیش از ۶۰ کشور جهان بین ۷۰۰ تا ۸۰۰ عضو دارد و کنفرانس این گروه، هر سال در یک کشور متمایز، طی ۵ روز برگزار می‌شود. به علاوه این گروه هر سال دو نشریه منتشر می‌کند که از طریق الکترونیکی در منزلگاه آن قابل دسترسی است. خلاصه‌ای از فعالیت‌های علمی کنفرانس PME33، همراه با ویژگی‌های اجرایی آن‌ها در ادامه‌ی این بخش آمده است.

● مجمع تحقیقاتی

برنامه‌ریزی برای برگزاری مجمع‌های تحقیقاتی با هدف تبادل‌نظر بین آموزشگران ریاضی انجام می‌شود. در PME33 پنج مجمع تحقیقاتی تشکیل شد که هر کدام یک یا چند هماهنگ‌کننده داشت. عنوان این مجمع‌ها به شرح زیر است:

۱. دانش معلم و تدریس: تفکر ترکیبی نسبت به سه چشم‌انداز متفاوت؛

۲. دورنماهای بحرانی در گروه‌های پرسش‌گری کلاس ریاضی؛

۳. وعده‌ها و ره‌آوردهای ریاضی: جست‌وجو و توسعه؛

۴. چارچوب‌های اجتماعی در تحقیقات آموزش ریاضی؛

۵. نظریه عملگرایی شناختی و تحقیقات آموزش ریاضی: پی‌آمدهای گذشته، پرسش‌های امروز و راه‌های آینده.

این مجمع‌های تحقیقاتی به صورت موازی و در دو نوبت ۹۰ دقیقه‌ای اجرا شدند. در هر جلسه، بحث و بررسی موضوع موردنظر با مشارکت حاضران انجام شد. مجریان مجمع، با دعوت از حاضران برای مشارکت در تحقیق و ارتباط بیش‌تر با یکدیگر، از آن‌ها برای انجام تحقیق و تألیف مقاله‌های تحقیقی دعوت کردند.

بخشی از دیوار شهر باستانی تسالونیکی

● سخنرانی کوتاه

شرایط ارایه‌ی مقاله برای سخنرانی کوتاه، مشابه گزارش تحقیقی (نوع الف) است، متن سخنرانی‌های کوتاه با شرایطی مشابه گزارش تحقیقی اما دقیقاً در ۱ صفحه پذیرفته و در مجموع مقالات کنفرانس منتشر می‌شود. در PME33 در این بخش، ۱۷۰ مقاله پذیرفته شد که در ۵ بخش ۴۵ دقیقه‌ای و در گروه‌های سه‌تایی ارایه شدند. هر گروه سه‌تایی شامل ۱۰ دقیقه سخنرانی و ۵ دقیقه پرسش و پاسخ برای هر یک از سه سخنران بود که زمان پرسش و پاسخ‌ها، با توجه به هدایت رییس جلسه به صورت

متوالی یا جدا از هم اختصاص می‌یافت.

● **ارایه‌ی پوستر**

موضوعات مطرح شده در پوستر، عمدتاً برخاسته از تجربه‌ی تدریس است. در این بخش، ۷۲ مقاله پذیرفته شد که در ۲ بخش ۶۰ دقیقه‌ای ارایه شدند. تهیه‌کنندگان پوستر در این مدت در کنار مقاله‌ی پوستر شده‌ی خود ایستاده و توضیحات تکمیلی را به علاقه‌مندان ارایه می‌کردند. شرایط چاپ مقاله‌های پوستر همانند مقاله‌های سخنرانی کوتاه است.

● **گروه مباحثه**

در PME33، ده گروه مباحثه پذیرفته شد که عنوان آن‌ها چنین است:

۱. جریان آموزش معلمان ریاضی؛

۲. بازی‌های احتمالی و منطقی. کاربرد آموزشی و تحلیل آموزشی؛

۳. دورنمای معلمان ابتدایی در عمل: به دنبال قابلیت‌ها و محدودیت‌ها؛

۴. نتایج تبادل در کلاس ریاضی: تک صدای مجازی در مقابل ابزارهای بازتابی؛

۵. برابری و گفتمان در کلاس‌های ریاضی: با تمرکز بر دانش‌آموزان؛

۶. پیش دبستان و آموزش ریاضی: تحقیقات و یافته‌ها؛

۷. مطالعه‌ی تدریس معلمان از طریق ویدیو؛

۸. گذر از تحقیقات؛

۹. ریاضیات و معلمان مهد کودک. از رقابت تا تحقیق؛

۱۰. تناسب روان‌شناسی و اوضاع اجتماعی یادگیری در کلاس درس.

برنامه‌ریزی برای تشکیل یک گروه مباحثه، توسط متقاضیان و با معرفی یک هماهنگ‌کننده و دستیاران آن آغاز می‌شود که همگی باید جزو اعضای فعال PME باشند. هدف گروه‌های مباحثه‌ای، ایجاد فرصتی برای ارتباط افراد با یکدیگر است و برنامه‌ی گروه می‌تواند با ارایه‌ی خلاصه‌ای کوتاه از یک کار تحقیقی، یا مجموعه‌ای فشرده از پرسش‌های هدف‌مند، یا موارد انگیزه‌بخش (مانند یک ویدیو کلیپ کوتاه) شروع شود که هدف آن، تشویق شرکت‌کنندگان به مشارکت در هر یک از این گروه‌های مباحثه‌ای است. پیشنهاده‌ی[۲۲] تشکیل گروه مباحثه‌ای، باید به صورت خلاصه‌ای یک صفحه ارایه شود که پس از داوری در کمیته‌ی بین‌المللی و تصویب آن، در برنامه‌ی کنفرانس اعلام می‌شود و با ارسال خبر آن به اعضای PME از شرکت‌کنندگان کنفرانس برای حضور در آن دعوت می‌شود.

● **گروه کاری**

گروه‌های کاری نیز با هدف ایجاد شرایطی برای تبادل نظر و اطمینان از تشریک مساعی اعضای PME تشکیل می‌شود. بنابراین گروه کاری باید شامل موضوعاتی باشد که جزو اهداف PME است و به گونه‌ای برنامه‌ریزی شود که بیش‌تر شرکت‌کنندگان کنفرانس بتوانند در آن مشارکت داشته باشند. شرایط پذیرش پیشنهاده‌ی گروه‌های کاری مشابه گروه‌های مباحثه‌ای است. در PME33 هفت گروه کاری تشکیل شده که فهرست آن به شرح زیر است:

۱. یادگیری و یاددهی ریاضیات در کلاس‌های درس چند زبانی؛

۲. تحقیق معلمان با استادان دانشگاه؛

۳. اشارات حسی ـ حرکتی ـ زبانی در یادگیری ریاضی؛

۴. دورنمای بین‌المللی: جنسیت و آموزش ریاضی؛

۵. اثبات نوعی: پرده‌برداری از ایده‌های اصلی اثبات؛

۶. نقش نظریه در تحقیقات آموزش ریاضی دانشگاهی؛

۷. نقش مسئله در تدریس ریاضیات: پایداری یک مبنای نظری برای تحقیق.

اولین جلسه‌ی گروه‌های کاری در روز دوم کنفرانس و به صورت موازی برگزار شد. هر یک از اعضای گروه برای حاضران موضوع مورد بحث را از دیدگاه خود ارایه کردند و به پرسش‌های مطرح شده پاسخ دادند و ادامه‌ی بحث را به جلسه‌ی دوم موکول کردند که در روز پنجم تشکیل می‌شد.

در پایان این روز، شرکت‌کنندگان کنفرانس، در گروه‌های کوچک‌تر در تورهای پیاده‌روی گردشگری شرکت کردند و با تاریخ شهر تسالونیکی آشنا شدند.

● **گزارش تحقیقی**

مقاله‌های تحقیقی ارایه شده به کنفرانس حول یکی از هدف‌های کلان IGPME با عنوان‌های گزارش‌های تحقیقی ارایه می‌شود. در شرایط تهیه‌ی این مقالات، از نویسنده(ها) درخواست شده است تا تحقیق خود را براساس ساختار تحقیق‌های پیشین یا جهت‌گیری‌های جدید بنویسند. در کنفرانس PME33 در مجموع ۲۴۲ مقاله در این بخش پذیرفته شد که در ۱۴ بخش

۴۰ دقیقه‌ای (برای هر مقاله) ارایه شد. از این مدت، ۲۰ دقیقه برای سخنرانی و ۲۰ دقیقه به پرسش و پاسخ اختصاص داده شد. فهرست هدف‌های IGPME و تعداد مقاله‌های تحقیقی که در بخش پذیرفته شده بودند، به شرح زیر است:

ـ جبر و تفکر جبری (۲۳ مقاله)
ـ تفکر ریاضی (۲۱ مقاله)
ـ تفکر هندسی و فضایی (۱۰ مقاله)
ـ تجسم و تصور (۸ مقاله)
ـ توسعه‌ی فهم و درک (۱۳ مقاله)
ـ مفهوم اعداد و عملگرها (۱۱ مقاله)
ـ تابع (۴ مقاله)
ـ مدل‌سازی ریاضی (۵ مقاله)
ـ فراشناخت (هیچ مقاله)
ـ حل مسئله (۷ مقاله)
ـ اثبات (۹ مقاله)
ـ اندازه‌گیری (۱ مقاله)
ـ زبان و ریاضیات (۱۱ مقاله)
ـ باورهای آموزشی (۱۹ مقاله)
ـ توسعه‌ی برنامه درسی (۴ مقاله)
ـ ارزیابی و ارزشیابی (۸ مقاله)
ـ کامپیوتر و فن‌آوری (۱۷ مقاله)
ـ عدالت آموزشی (۳ مقاله)
ـ جنسیت (هیچ مقاله)
ـ احتمال و استدلال آماری (۶ مقاله)
ـ مطالعات اجتماعی ـ فرهنگی (۲۱ مقاله)
ـ ریاضی وابسته به مشاغل (۱ مقاله)
ـ توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان (۱۶ مقاله)
ـ دانش معلمی، تفکر و باورها (۲۴ مقاله)

تعیین این محورها، به عنوان هدف‌های IGPME و براساس تحقیقاتی است که پیش از آن انجام شده است. در دو زمینه‌ی «فراشناخت» و «جنسیت» در PME33 هیچ مقاله‌ای ارایه نشد. در کنفرانس‌های PME، دو نوع مقاله به عنوان گزارش‌های تحقیقی پذیرفته می‌شود که شرایط آن‌ها در سایت PME چنین اعلام شده است:

نوع الف) گزارش مطالعاتی (مشاهده‌ای، قوم‌نگاری، تجربی، شبه‌تجربی و مطالعات موردی) که باید لااقل موارد زیر در آن انجام شده باشد:

ـ بیان مقاله متمرکز و منسجم باشد؛
ـ چارچوب نظری آن براساس مطالعه‌ای منتشر شده باشد؛
ـ به ادبیات موضوع مرتبط ارجاع داده شود؛
ـ روش‌شناسی مورد استفاده قابل دفاع باشد؛
ـ برخی داده‌های نمونه و نتایج آن‌ها ارایه شود؛
ـ دارای تجزیه و تحلیل نهایی باشد.

نوع ب) مقاله‌ی نظری و فلسفی که باید لااقل شامل موارد زیر باشد:

ـ بیان مقاله متمرکز و منسجم باشد؛
ـ حول یک چارچوب نظری یا چارچوب فلسفی متمرکز باشد که در مقاله توسعه می‌یابد؛
ـ به ادبیات موضوع مرتبط ارجاع داده شود؛
ـ هر بند مقاله واضح باشد و حول محور یا هدف مقاله باشد؛
ـ مفاهیم مقاله در تحقیقات این حوزه، به‌کار رود.

در سنت PME متن مقاله‌های ارایه شده باید دقیقاً در ۸ صفحه و مطابق قالب معرفی شده‌ی کنفرانس، تهیه شود که در مجموعه مقالات کنفرانس منتشر می‌شود. رعایت قالب مقاله، برای همه‌ی ارایه‌کنندگان مقاله (حتی سخنرانان مدعو) الزامی است، و از آن‌جا که تدوین و اصلاح مجموعه مقالات کنفرانس، هم‌زمان با داوری مقاله‌ها انجام می‌شود، مجموعه‌ی مقاله‌های کنفرانس، (که در PME33 بیش از ۲۵۰۰ صفحه در ۵ جلد تهیه شده بود) هم‌زمان با برگزاری کنفرانس، در اختیار شرکت‌کنندگان قرار می‌گیرد. به علاوه امسال، متن کامل مجموعه مقالات در یک CD تهیه شده و توزیع شد. در CD این کنفرانس، می‌توان به مقالات ارایه شده، براساس ترتیب انتشار آن‌ها در مجلدات پنج‌گانه؛ فهرست نویسندگان؛ یا رده‌بندی موضوعی دسترسی پیدا کرد که امکان استفاده از مجموعه مقالات را به بهترین شکل ممکن فراهم می‌کند.

برای داوری مقالات کنفرانس، هر مقاله برای سه داور ارسال می‌شود و در صورتی که تأیید حداقل دو داور را داشته باشد، برای ارایه و چاپ پذیرفته می‌شود. در این دوره بیش از ۲۸۰ نفر در سراسر جهان برای داوری مقالات با PME33 همکاری دارند.

روز سوم کنفرانس

سخنرانی سیندیا مورگان[23] با عنوان «درک عمل تدریس در آموزش ریاضی: ساختار و کتاب درس» شروع برنامه‌ی سومین روز کنفرانس بود. وی یکی دیگر از سخنرانان مدعو کنفرانس بود.

سیندیا مورگان، سخنران روز سوم

مورگان در بحث خود سطوح متنوع و فراگیر عمل تدریس ریاضی را مورد توجه قرار داد: از تمرین‌های فردی دانش‌آموزان گرفته تا بازتاب‌هایی که معلم بر عملکرد کلاس درس دارد؛ یا ساختار مدرسه؛ ویژگی‌های و مواد برنامه درسی؛ برنامه‌ی توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان؛ نظام‌های بین‌المللی؛ ملی و منطقه‌ای آموزشی؛ و حتی ارزیابی و ارزشیابی. وی با بررسی ویژگی‌های هر یک از این سطوح آموزشی، به ارتباط بین آن‌ها پرداخت. در این سخنرانی وی با مثال‌های مختلفی که ارایه کرد، ابزارهای نظری مورد استفاده برای شناسایی و مطالعه‌ی ارتباط بین این سطوح متنوع را معرفی کرد.

ادامه‌ی برنامه‌ی روز سوم، با تشکیل نخستین جلسه‌ی مجمع‌های تحقیقاتی همراه شد که به صورت موازی اجرا شد. سطح مشارکت افراد در بحث‌های این جلسه‌ها متفاوت بود. برای مثال، در یکی از آن‌ها مشارکت وسیع شرکت‌کنندگان به توسعه‌ی بحث و تبادل نظر زیاد افراد انجامید، و در همان زمان، موضوع جلسه‌ای دیگر به دلیل اختصاصی بودن موضوع بحث آن، با استقبال کمتری روبه‌رو شده بود.

طبق روال برنامه‌ی کنفرانس، در این روز نیز جلسه‌هایی موازی برای ارایه‌ی سخنرانی‌های گزارش تحقیقی، برگزار شد. اما اشاره به برگزاری نشست سیاست‌گذاری‌های PME در این روز، ضروری است. در این جلسه، بحث بر سر چگونگی برنامه‌ریزی، با هدف فراهم کردن شرایط مناسبی برای مشارکت حداکثری از سراسر جهان بود. یکی از موضوعات مورد اشاره، همکاری و مساعدت کمیته‌ی برگزاری کنفرانس، برای صدور روادید و کمتر کردن محدودیت‌های موجود برای نحوه‌ی پرداخت حق ثبت‌نام کنفرانس بود. در حال حاضر کوتاه بودن زمان مهلت پرداخت، و نحوه‌ی پرداخت، برای کشورهایی که محدودیت‌هایی در نظام بانکی آن‌ها وجود دارد، مشکلاتی را برای متقاضیان شرکت در کنفرانس ایجاد کرده است. طرح این موضوع از سوی دکتر گویا موجب شد تا بخش عمده‌ای از زمان جلسه، به یافتن راه‌کارهای عملی برای حل آن و توصیه به مسئولان کنفرانس‌های بعد اختصاص یابد. روز سوم با برگزاری یک برنامه‌ی فرهنگی به پایان رسید.

موزه‌ی ورجینا

روز چهارم کنفرانس

برنامه‌ی روز چهارم شامل یک میزگرد و دو نوبت زمانی برای ارایه‌ی گزارش‌های تحقیقی بود.

عنوان میزگرد روز چهارم «آموزش معلمان ریاضی» و هماهنگ‌کننده‌ی آن، دیوید کلارک[۲۴] از استرالیا بود. هر یک از شرکت‌کنندگان میزگرد، در پاسخ به سه پرسش اصلی میزگرد، مقاله‌های خود را ارایه کردند:

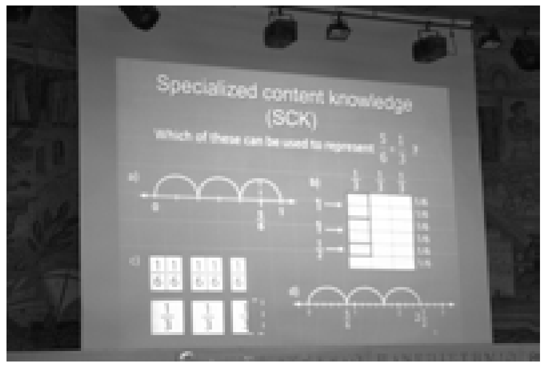
پرسش ۱) چه چیزی باعث می‌شود تا برای آموزشی معلمان ریاضی خواهان نظریه(ها) باشیم؟

پرسش ۲) تا چه حد تحقیقاتی که توسط معلمان ریاضی عضو مجامع تحقیقاتی (تحقیق تدریس یا هر نوع دیگر)، در آموزش معلمان ریاضی مورد توجه است؟

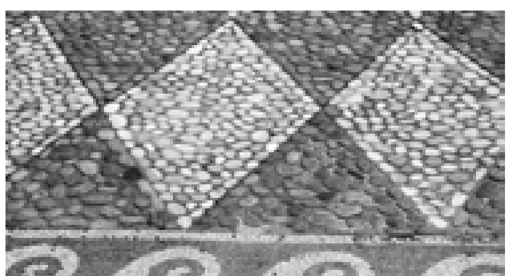
پرسش ۳) چگونه نظریه می‌تواند کیفیت آموزش را مشخص کند و تشریح ویژگی‌های آن کمک کند؟

میزگرد روز چهارم (از چپ به راست): خوآ پدرو داپونت، باربارا یوورسکی، دیوید کلارک، مینورو اوتانی، دبورا لوونبرگ بال

ابتدا کلارک سخنرانی خود را با عنوان «نقش نظریه‌ها در آموزش معلمان ریاضی» ارایه کرد. سپس دبورا لوونبرگ بال[۲۵] از امریکا مقاله‌ی خود را که با همکاری مارک هوور تامس، هیمن‌بس، لاری اسلیپ، جنیفر لوئیس، و جفری فلپس تهیه کرده بود با عنوان «دانش ریاضی مورد نیاز معلمان» ارایه کرد. سخنران بعدی، خوآ پدرو داپونت[۲۶] از پرتغال بود که درباره‌ی «نظریه‌هایی خارج، داخل و در تعامل با آموزش معلمان ریاضی» به بحث پرداخت. مینورو اوتانی[۲۷] از ژاپن «تحقیق درباره‌ی دورنماهای نظری «تحقیق عمل» در ریاضیات» را بررسی کرد. سخنران پایانی این میزگرد، بارابارا یوورسکی[۲۸] از انگلستان بود که «شاخص محوری» را مورد توجه قرار داد.



پیش از ظهر، برنامه‌ی علمی کنفرانس در این روز به پایان رسید تا شرکت‌کنندگان کنفرانس امکان پیوستن به برنامه‌ی «گشت کنفرانس» را بیابند. در این برنامه، برخی از مکان‌های تاریخی یونان معرفی و سوابق تاریخی آن بیان شد. نقش ایرانیان در تکوین تاریخ یونان چنان پررنگ می‌نمود که برای نگارنده، شکوه و عظمت تاریخی ایرانیان در حین بازگویی تاریخ کهن یونان، دو چندان شد.



بخشی از سنگفرش قصر فیلیپ دوم در شهر پلا

روز پنجم کنفرانس

برنامه‌ی روز پنجم با تشکیل جلسه‌ی دوم گروه‌های کاری آغاز شد و سخنران عمومی نداشت اما در چندین نوبت، جلسه‌های ارایه‌ی گزارش‌های تحقیقی و سخنرانی‌های کوتاه برگزار شد.

آخرین برنامه‌ی این روز، برگزاری مجمع عمومی PME بود که در ابتدا، کارکرد کمیته‌ی بین‌المللی در سال گذشته، توسط فولای لین ارایه شد. سپس بازرس PME گزارش مالی کمیته‌ی بین‌المللی را ارایه کرد که به دلیل کمبود وقت و اعتراض چند نفر، قرار شد اسناد مربوط به هزینه‌ها، در سایت منتشر شود و پس از مطالعه‌ی آن توسط اعضای PME، در کنفرانس بعد، بحث و رأی‌گیری برای تصویب آن انجام شود. آخرین برنامه‌ی این جلسه، انتخابات کمیته‌ی بین‌المللی PME بود.

اعضای کمیته‌ی بین‌المللی ۱۶ نفر هستند که هر یک ۴ سال برای عضویت در این کمیته، توسط اعضای PME انتخاب می‌شوند. مهم‌ترین وظیفه‌ی کمیته‌ی بین‌المللی، نظارت علمی و اجرایی بر کنفرانس است. هم‌چنین تخصیص حمایت مالی بنیاد اسکمپ از شرکت‌کنندگان جهان سوم برعهده‌ی این کمیته است. از آن‌جا که هر سال، دوره‌ی عضویت چهار نفر به پایان می‌رسد، انتخابات برای گزینش ۴ عضو جدید انجام می‌شود. امتیاز این اقدام، آن است که همواره تعدادی از اعضای باسابقه در کمیته‌ی بین‌المللی، برای انتقال تجارب باقی می‌مانند. در انتخابات امسال، از میان ۷ نامزد، سیلویا آلاتوره[۲۹] از مکزیک، ساموئل آنتونینی[۳۰] از ایتالیا، مارسیا پینتو[۳۱] از برزیل، و تیم‌رولند[۳۲] از انگلستان انتخاب شدند.

نامزدهای انتخابات کمیته‌ی بین‌المللی در مجمع عمومی PME

آخرین روز کنفرانس

رادولف اشترایزر[33] آخرین سخنران مدعو این کنفرانس بود. عنوان سخنرانی وی «ابزارهای یادگیری و تدریس ریاضی: تلاشی برای نظریه‌پردازی درباره‌ی نقش کتاب‌های درسی، کامپیوتر و دیگر دست‌سازه‌ها برای آموزش و یادگیری ریاضیات» بود. وی با نگاهی به تدریس و یادگیری ریاضیات، نقش انواع کارها و ابزارهایی را که برای یاددهی و یادگیری ریاضی به کار می‌رود (مانند وسایل کمک‌آموزشی و استفاده از زبان و مکتوبات) مورد توجه قرار داد. وی معتقد است، صرف نظر از به‌کارگیری شناخت‌شناسی موضوع، این‌که الگوها و ساختارهایی در ریاضی را می‌توان در این ابزارها جستجو کرد، مهم است. هم‌چنین این‌که دست‌سازه‌های آموزشی برای نمایش و بازنمایی مفاهیم ریاضی به‌کار می‌رود، مورد توجه وی قرار گرفت. اشترایزر، در سخنرانی خود، این موقعیت را برای دلیل «پیدایش ابزار» نظریه‌پردازی کرد. وی انجام تحقیق تجربی روی ابزارهای یاددهی ـ یادگیری سنتی را بسیار با اهمیت می‌داند و تأکید کرد که باید بررسی جامعی روی انواع وسایل فن‌آوری مدرن (کامپیوترها و برخی نرم‌افزارهای آموزشی) انجام شود. وی معتقد است باید به تأثیر نمونه‌های اولیه این ابزارها و سیر تکاملی هر یک توجه شود و محتوای نظری چیزی که نمایش داده می‌شود بررسی شود. اشترایزر با ارایه‌ی چند مثال بحث خود را به پایان رساند.

دانشکده‌ی تعلیم و تربیت دانشگاه ارسطو، محل برگزاری PME33

برنامه‌ی روز ششم کنفرانس تا ظهر ادامه داشت. در این مدت، جلسه‌ی دوم مجمع‌های تحقیقاتی و سپس دومین نوبت گروه‌های مباحثه برگزار شد. اختتامیه‌ی کنفرانس در حالی برگزار شد که تعداد زیادی از شرکت‌کنندگان برای بازگشت آماده می‌شدند. در این مراسم، از حاضران برای شرکت در PME34 که از ۱۸ تا ۲۳ جولای ۲۰۱۰ در برزیل برگزار می‌شود، دعوت شد.

بدین ترتیب، پرونده‌ی سی‌وسومین کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی، ظهر روز جمعه ۲۴ جولای (۲ مرداد ۱۳۸۸) بسته شد.

پی‌نوشت

1. Aristotle
2. Macedonia
3. Thessaloniki
4. Agenda General Meeting
5. Marianna Tzekaki
6. Andreas Demetriou
7. Working Memory
8. Overarching
9. Subitization
10. Paul Ernest
11. Shlomo Vinner
12. Research Forum
13. Research Report
14. Short Oral Communication
15. Poster Presentaion
16. Discussion Group
17. Working Group
18. National Presentation
19. TIMSS
20. PISA
21. International Group for the Psychology of Mathematics Education
22. Proposal
23. Candia Morgan
24. David Clarke
25. Deborah Loewenberg Ball
26. Joao Pedro de Ponte
27. Minoru Ohtani
28. Barbara Jaworski
29. Silvia Alatorre
30. Samuele Antonini
31. Marcia Pinto
32. Tim Rowland
33. Rudolf Straesser

گزارش

کارگاه آموزش ریاضی

چهلمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه صنعتی شریف ۲۶ مردادماه ۱۳۸۸

گزارشگر: بهزاد اسلامی مسلّم

چهلمین کنفرانس ریاضی کشور از دوشنبه ۲۶ مردادماه ۱۳۸۸ در دانشگاه صنعتی شریف آغاز به کار کرد و در روز ۲۹ مرداد به کار خود خاتمه داد. کنفرانس ریاضی که از قدیمی‌ترین کنفرانس‌های علمی کشور است گردهمایی چندمنظوره‌ی بزرگ‌ترین اجتماع ریاضی‌کاران کشور نیز محسوب می‌شود. علاوه بر برنامه‌های علمی این گردهمایی، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران، میزگردهایی درباره‌ی مسائل جاری جامعه‌ی ریاضی کشور در کنفرانس برگزار می‌کند. برنامه‌ی علمی کنفرانس شامل سخنرانی‌های اصلی و دعوتی و نیز جلسات ارائه‌ی سخنرانی‌های تخصصی است.

یکی از بخش‌های این کنفرانس، کارگاه آموزش ریاضی بود. محققان آموزش ریاضی، تعداد زیادی مقاله برای ارائه در این کارگاه فرستادند که پس از داوری، از میان آن‌ها دو مقاله و یک پوستر پذیرفته شد. از این کارگاه به خوبی استقبال شد و متخصصان و دانش‌آموختگان آموزش ریاضی و معلمان، فارغ‌التحصیلان و دانشجویان ریاضی در آن شرکت کردند. کارگاه، صبح سه‌شنبه ۲۸ مرداد ۱۳۸۸ شروع شد و بعدازظهر همین روز، خاتمه یافت. سخنرانی‌های این کارگاه به شرح زیر بودند:

۱. دکتر زهرا گویا؛ دانش محتوایی ـ پداگوژی برای تدریس ریاضی.

۲. بهزاد اسلامی مسلّم؛ بررسی درک و فهم دانشجویان از مفهوم گروه خارج قسمتی.

۳. مانی رضائی؛ معرفی یک مطالعه: سطوح تفکر ترکیباتی.

۴. دکتر سهیلا غلام‌آزاد؛ اثبات‌های ریاضی.

۵. دکتر امیرحسین اصغری؛ آموزش ریاضی از دریچه‌ی ریاضی ۱ و ۲ (و برعکس).

طی سخنرانی اول، دانش محتوایی ـ پداگوژیکی معرفی شد. این دانش، وجه مشترک دانش محتوایی و دانش پداگوژیکی است، به این معنی که به این سؤال‌ها پاسخ می‌گوید که چه

رویکردهای آموزشی‌ای مناسب تدریس محتوای مشخص‌اند و برای بهبود یادگیری، اجزای محتوا را چگونه باید مرتب کرد. همان‌طور که از موضوع سخنرانی‌های دوم تا پنجم برمی‌آید، سخنرانی اول، تا حدودی نمایانگر محور کارگاه بود.

سخنران دوم براساس چارچوبی نظری، سطوح فهم دانشجویان را از مفهوم گروه خارج‌قسمتی و مشکلات و بدفهمی‌های مربوط به این مفهوم را بررسی و نتایج تحقیقش در این مورد را بیان کرد.

سخنران سوم توضیح داد که چگونه می‌توان نوع برخوردهای یادگیرندگان و ریاضی‌دانان با مسائل ترکیبات را سطح‌بندی کرد و مشخصاتی برای این سطوح برشمرد.

سخنران چهارم، به بیان نظریات مختلف درباره‌ی نقش اثبات در ریاضی با محوریت محتوای ریاضی عمومی ۱ دانشگاهی پرداخت و پرسش‌های رایج در این موضوع را طرح کرد. او از شنوندگان خواست که هر یک، به زبان خود بر روی برگه‌ای بنویسند که اثبات چیست، سپس قضیه‌ای از درس ریاضی ۱ دانشگاهی را بیان و ثابت کنند. سپس پیشینه‌ی اثبات در ریاضی و نگرش‌های نظری و آموزشی به آن را شرح داد. پرسش‌های انتهایی این بود که آیا اثبات در ریاضی عمومی دانشگاهی جایگاهی دارد یا خیر و اگر دارد، این اثبات‌ها چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند. حاضران، به بحث درباره‌ی این پرسش‌ها پرداختند.

سخنران پنجم، پس از توضیح نگرش‌های ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی به تحول در آموزش حسابان (Calculus Reform)، تجربه‌ی خود در تغییر دیدگاه و روش تدریس درس ریاضی عمومی ۲ دانشگاهی را بیان کرد، که بر مشاهداتی درباره‌ی مشکلات تدریس و یادگیری این درس در نیم‌سال‌های فرد بنا شده بود.

چکیده‌های پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد

موضوع: بررسی جایگاه کتاب‌های کمک‌آموزشی ریاضی در آموزش مدرسه از دیدگاه معلمان ریاضی و دانش‌آموزان دوره متوسطه

پژوهشگر: محسن تنده

استاد راهنما: دکتر احمد شاهورانی

استاد مشاور: دکتر زهرا گویا

تاریخ دفاع: تابستان ۱۳۸۸

دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی جایگاه کتاب کمک‌آموزشی در آموزش مدرسه‌ای از دیدگاه معلمان ریاضی و دانش‌آموزان پرداخته‌ایم. برای این کار ابتدا به بررسی پیشینه‌ای از این کار پرداختیم. در پیشینه تحقیق فعالیت‌هایی که در حوزه کتاب‌های کمک‌آموزشی در ایران انجام گرفته است را مورد بررسی قرار دادیم.

برای انجام این پایان‌نامه دو پرسش‌نامه طراحی کردیم. که پرسش‌نامه‌ی اول برای دانش‌آموزان و پرسش‌نامه‌ی دوم مربوط به معلمان ریاضی بود.

پرسش‌نامه‌ی دانش‌آموزان دارای ۱۴ سؤال بود و در آن به بررسی ۳ فرضیه پرداختیم. نتایجی که از هر دو پرسش‌نامه برای ما ایجاد شد، تأیید کننده‌ی استفاده از کتاب کمک‌آموزشی در فرایند آموزش مدرسه‌ای است.

به نظر دانش‌آموزان کتاب کمک‌آموزشی نقش زیادی در افزایش توانایی حل مسئله و ارتباط ریاضی در دانش‌آموزان و تأثیر متوسطی در افزایش توانایی نمایش ریاضی دارد. از دیدگاه معلمان ریاضی کتاب کمک‌آموزشی به اندازه‌ی کتاب درسی در آموزش مدرسه‌ای نقش دارد. در افزایش توانایی حل مسئله و ارتباط ریاضی دانش‌آموزان نقش زیادی دارد.

واژگان کلیدی: کتاب درسی، کتاب کمک‌آموزشی، کتاب آموزشی، دانش‌آموزان، معلمان ریاضی.

گزارشی از دوره‌ی تأمین مدرس

طرح غنی سازی تجارب یاددهی- یادگیری ریاضی

زهره پندی

چندی است دفتر آموزش راهنمایی تحصیلی معاونت آموزش و پرورش نظری و فن آوری، کار بر روی طرحی با عنوان «غنی سازی تجارب یادگیری دروس علوم تجربی و ریاضی» را آغاز کرده است. ارزشمند کردن فرصت‌های یادگیری، ایجاد زمینه برای اندیشه‌ورزی دانش آموزان و بها دادن به عاملیت معلم و مدیر در فرآیند یاددهی ـ یادگیری از پیش فرض‌های اصلی این طرح به شمار می‌رود. در این طرح، اثربخش نمودن تجارب یادگیری در پنج محور مورد توجه قرار گرفته است:

- سودمند یا مفید ساختن برنامه‌ی درسی؛
- به کار بستن فعالیت‌های فکری و عملی (مهارت‌های فرآیندی و دست‌ورزی)؛
- ایجاد فرهنگ یادگیری از همیاران و همکاران؛
- یادگیری فعال؛
- سنجش برای یادگیری.

قرار است در سال تحصیلی جاری، این طرح به صورت آزمایشی برای سال اول دوره‌ی راهنمایی در حدود ۷۰۰ مدرسه به اجرا درآید. برای این منظور اقدامات زیر انجام شده است:

- تحلیل محتوای کتاب‌های درسی؛
- تألیف محتوای اولیه‌ی مورد نیاز برای غنی سازی تجارب یادگیری.

دوره‌ی تأمین مدرس برای این طرح نیز در تاریخ ۱۳۸۸/۵/۲۵ تا ۱۳۸۸/۵/۲۸ در مرکز تربیت معلم شهید شرافت تهران برگزار شد. در این دوره نمایندگانی از همه‌ی استان‌های کشور حضور داشتند. قرار است این نماینده‌ها که به قول یکی از خودشان، ژنرال‌های استان خود هستند، پیغام‌رسان این طرح در استان‌های خود باشند و دوره‌ای شبیه این دوره را برای معلمین مجری طرح در استان‌های محل خدمت خود اجرا کنند. پس از آن مجری، نماینده و رابط دفتر آموزش راهنمایی تحصیلی برای نظارت و ارزیابی کیفیت و نتایج اجرای طرح در استان‌ها باشند.

در این جا خلاصه‌ای از **برنامه‌های دوره‌ی تأمین مدرس طرح غنی سازی تجارب یادگیری** در بخش ریاضی که توسط خانم‌ها زهره پندی، سپیده چمن آرا، نسرین حسن پور و فیروزه فروزبخش اجرا شد، آمده است:

روز اول:

- بیان اهداف و انتظارات دوره‌ی آموزشی با حضور اعضای شورای راهبری؛
- کارگاه حل مسئله؛
- بحث نظری درباره‌ی رویکردهای یاددهی ـ یادگیری؛
- انجام کار گروهی برای مقایسه‌ی شیوه‌های تدریس با دو رویکرد رفتارگرایی و ساخت و سازگرایی؛
- بحث نظری پیرامون تفاوت‌های دو رویکرد رفتارگرایی و ساخت و سازگرایی.

روز دوم

- انجام کار گروهی و اجرای تعدادی از فعالیت‌های طرح شده در محتوای اولیه‌ی تألیف شده در راستای اهداف طرح غنی سازی؛
- مرور قسمت‌های دیگری از محتوای اولیه‌ی تألیف شده؛
- کارگاه حل مسئله؛
- انجام کار گروهی جهت شناخت ویژگی‌های فعالیت‌های غنی و طراحی فعالیت‌های جدید (علاوه بر محتوای ارائه شده در این دوره) در راستای طرح.

روز سوم

- انجام کار گروهی برای ارزیابی فعالیت‌های طرح شده‌ی هر گروه در گروه‌های دیگر و بحث بیش‌تر درباره‌ی ملاک‌های طراحی یک فعالیت غنی؛
- مرور دیگر قسمت‌های محتوا و نقد فعالیت‌ها با توجه به ملاک‌های بحث شده؛
- بحث نظری پیرامون ارزشیابی و شیوه‌های آن؛
- طراحی فعالیت به صورت انفرادی.

روز چهارم

- انجام کار گروهی برای نقد، ارزیابی و اصلاح فعالیت‌های طرح شده در روز گذشته توسط هریک از اعضای گروه؛
- بحث و تبادل نظر درباره‌ی چگونگی برگزاری دوره و اجرای طرح در استان‌ها با مشارکت جمعی از شرکت کنندگان در دوره.

نامه‌ها و مطالب دوستان زیر تا پایان مهر ۸۸ به دست ما رسیده است.

از همه‌ی آن‌ها سپاسگزاریم و هم‌چنان منتظر مطالب شما هستیم.

ندا مهدوی‌غروی، از آمل؛ **عزیزه احمدی**، از زنجان؛ **زینب کریمائی**، از قزوین؛ **عزیزالله حاجی‌زاده**، از خوزستان؛ **محسن یزدان‌فر**، از شیراز؛ **لیلا قربانلو**؛ **مجید حق وردی**؛ **حسین محمدی قناتغستانی**؛ از نیشابور؛ **هاجر سلیمانی**، از کرمان؛ **مرتضی بیات و زهرا خاتمی و هوشنگ اوصانلو**، از زنجان؛ **عفت رحمانیان**، از اصفهان؛ **زهره یوسفی مراغه و اکبر رجب‌زاده**، از بُناب؛ **سلیم متقین**، از مشهد؛ **اعظم اکبرشاهی**، از قزوین؛ **حمیدرضا دافعی**، از زنجان.

البته غیر از این عناوین، برنامه‌های دیگری نیز در این دوره از سوی برگزارکنندگان برای هر دو گروه ریاضی و علوم تجربی تدارک دیده شده بود. از آن جمله می‌توان به سخنرانی‌های علمی هر روز صبح و جلسات نشست مدرسان استان‌های هم‌جوار در بعدازظهرها اشاره کرد.

شنیدیم که در طول دوره، برنامه‌های غیررسمی تا پاسی از شب هم ادامه داشته است. برنامه‌هایی شامل طراحی فعالیت‌های جدید و حل مسئله‌های مشکل. یکی از شرکت‌کنندگان در روز آخر کتابچه‌ای از مسائل حل‌شده در این شب‌ها را همراه داشت که می‌شد در آن بسیاری از مسئله‌های چالش‌برانگیز ریاضی دوره‌ی راهنمایی را در کنار راه‌حلشان دید.

در مجموع این چند روز به‌غیر از مرور مباحث نظری، آماده شدن مدرسان برای برگزاری دوره برای معلمان مجری طرح در استان‌ها و طراحی فعالیت‌های جدید برای کامل‌تر شدن محتوای تألیف شده جهت غنی‌سازی کتاب ریاضی اول راهنمایی که از اهداف اصلی دوره‌ی تأمین مدرس بود، برکات دیگری هم داشت که هنگام خداحافظی به‌خوبی حس می‌شد. نزدیکی فکری هرچه بیش‌تر شرکت‌کنندگان و برگزارکنندگان دوره، پدید آمدن موضوعات جدیدی برای تأمل و تفکر در جهت غنی‌سازی تجارب یادگیری و باور این نکته که نتیجه‌ی حاصل از هم‌افزایی تجربه‌های همکاران بیش از حاصل جمع تجربه‌هاست، نمونه‌هایی است که می‌توان به آن‌ها اشاره کرد.

به امید آن‌که با افزایش تعداد این قبیل کارگاه‌ها و بهبود کیفیت آن‌ها، شاهد هرچه غنی‌تر شدن تجارب یادگیری دانش‌آموزان در سطح کشور باشیم.

Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd
Mathematics 98
Education Journal

Vol. 27 No. 2 2009 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir