وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

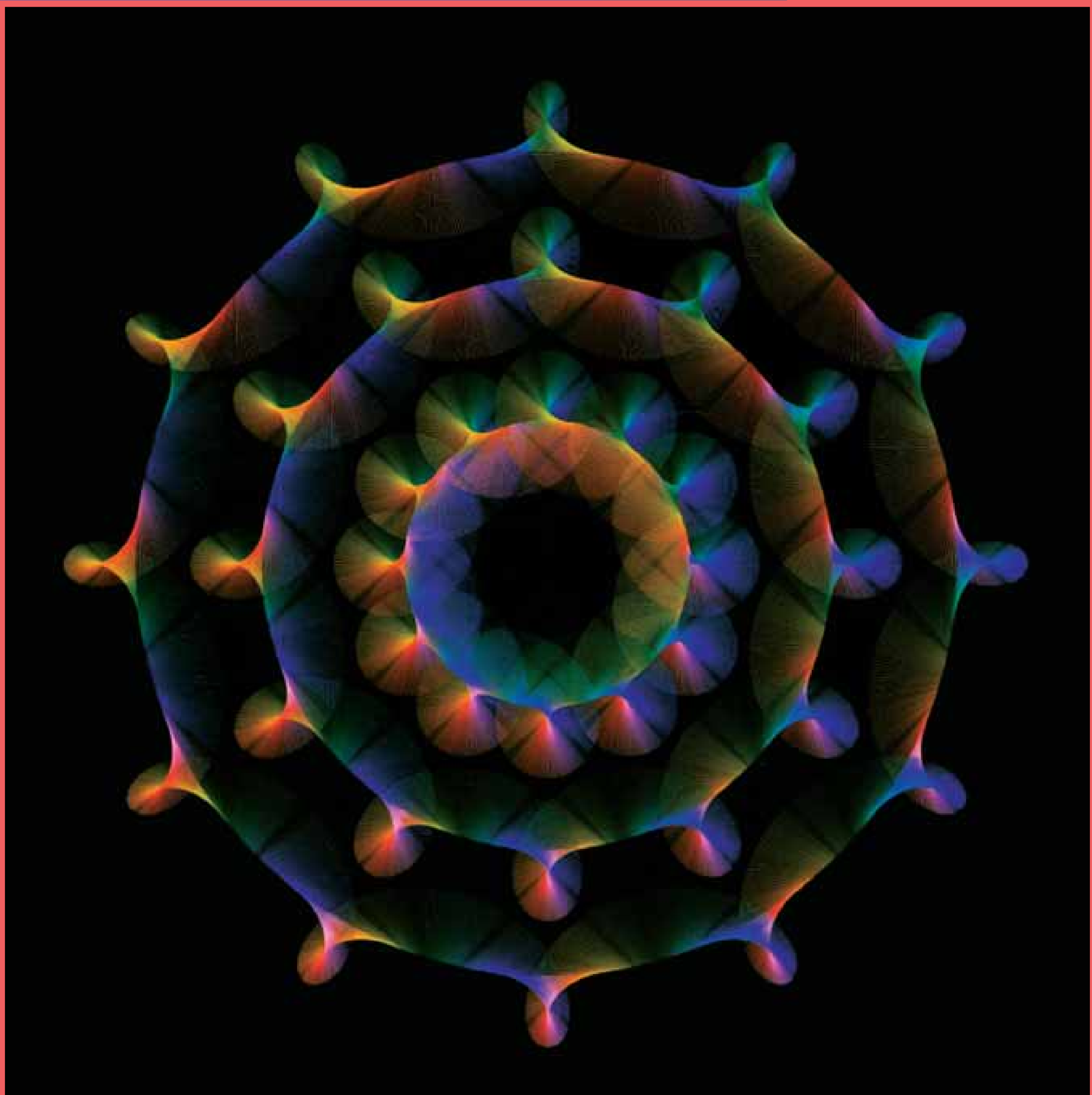
رشد آموزش ریاضی

۱۲۹

ISSN:1606-9188

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی | برای معلمان، مدرسان و دانشجویان
دورهٔ سی و پنجم | شمارهٔ ۳ | بهار ۱۳۹۷ | ۶۴ صفحه | ۱۴۵۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳
w w w . r o s h d m a g . i r

شار توابع با مقادیر مختلط



ان– ام– بِرنز، دانشگاه لانگ آیلند، بروکویل، نیویورک
(برگرفته شده از تقویم ۲۰۱۷ انجمن ریاضی آمریکا با عنوان تقویم تصویرهای ریاضی)

تابعــی با مقدار مختلط و به‌عنــوان یک میدان بــرداری روی دامنه آن، فرصت‌های سرشاری برای تولید تصویرهای جذاب بصری، ایجاد می کند.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۱۲۹

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای معلمان، مدرسان و دانشجویان
دورهٔ سی و پنجم | شمارهٔ ۳ | بهار ۱۳۹۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. ● تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر مجله: ۸۸۴۹۰۳۱۶-۰۲۱ ● صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ ● تلفن امور مشترکین: ۸۸۸۶۷۳۰۸-۰۲۱ ● وبگاه: www.roshdmag.ir ● پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir
● : http://telegram.me/roshdmag ● :roshdmag ● شمارگان: ۵۳۰۰ ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود. ● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود. ● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. هم‌چنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

آنچه که بر سر آموزش ریاضی ایران آمده است!

زهرا گویا

چاره‌ای ندارم جز اینکه باز هم در مورد وضعیت کنونیِ ریاضی در ایران بنویسم! حوزه‌ای که از شروع تمدن مکتوب در جهان، در آن درخشیده‌ایم و در زمانی که نزدیک بود امیدمان را به درخشش ستاره‌ای دیگر در جهان ریاضی از دست بدهیم، مریمی پیدا شد که آرش‌وار، جان عزیزش را در چلۀ کمانِ وجود نابغه‌اش گذاشت، درد استخوان‌سوز را به جان خرید و ریاضیات نابی تولید کرد که در حقیقت، می‌تواند رنسانس دیگری را در جهان ریاضی باعث شود. کسی که به گفتۀ یکی از دوستان نزدیکش، تا واپسین روزهای عمر، از مصرف داروی مسکن و مورفین خودداری کرد و می‌گفت که «خیلی کارها را باید به سرانجام برسانم و این داروها، روی مغزم تأثیر می‌گذارند و فرصت را از دست می‌دهم»! این خاطرات باید ثبت و ضبط شوند تا بدانیم چرا مردم ایران و جهان، در برابر بزرگیِ اثری که وی آفرید و روح بلندی که داشت، سرِ تعظیم فرود آوردند و همه، در ستایش مریم میرزاخانی نوشتند و گفتند؛ می‌نویسند و می‌گویند!

موفقیت مریم میرزاخانی، توجه جهان ریاضی را به غنای آموزشی و فرهنگی که باعث شناخت چنین استعداد و نبوغی شد، جلب نمود. بسیاری کنجکاوند بدانند که بستر آموزشی‌ای که مریم در آن نشو و نما کرد، چگونه بوده است؟ برای خیلی‌ها، علاقه ایرانیان به ریاضی، رشد روزافزون دانش‌آموزانِ علاقه‌مند به خصوص دختران به انتخاب رشتۀ ریاضی و ارزش معنوی که جامعه و فرهنگ ایران برای ریاضی قائل بوده، تحسین‌برانگیز بوده است. این علاقه، بعد از تلاش‌های حساب شده وزارت آموزش‌وپرورش برای جلب و جذب دانش‌آموزان به رشتۀ ریاضی-فیزیک، منجر به اقداماتی نظیر شرکت در المپیادهای بین‌المللی ریاضی، تأسیس مجلۀ رشد آموزش ریاضی و به دنبال آن، مجلۀ برهان و در ادامه، شکل‌گیری خانه‌های ریاضیات و همکاری دانشگاهیان با آموزش‌وپرورش برای کمک به شناسایی استعدادهای ویژۀ ریاضی و کلاس‌های المپیاد شد. نتیجۀ همۀ این تلاش‌ها، در موفقیت نخبگان ایرانی در المپیادهای ریاضی بین‌المللی و افزایش ورودی‌ها به رشتۀ ریاضی-فیزیک شد، تا جایی که در اواخر دهۀ ۸۰، درصد ورودی‌ها به رشتۀ ریاضی-فیزیک و علوم تجربی، به حدود ۳۰٪ رسید. دانش‌آموزانی که رشتۀ ریاضی-فیزیک را انتخاب می‌کردند، علاوه بر علاقه، با ظرفیت‌ها و قابلیت‌های ریاضی آشنا بودند و نیک می‌دانستند که با داشتن پایه‌ای قوی در ریاضی، فرصت‌های تحصیلی و شغلی بیشتری را برای خود فراهم می‌کنند.

اما به ناگهان در عرض چند سال، و همزمان با تغییرات پی‌درپی آموزشی و افزایش تبلیغاتِ وسیع رسانه‌ای در رابطه با سختیِ درس‌های ریاضی و ضرورت استفاده از منابع کمکی برای تسهیل یادگیری آن، خبر رسید که درصد ورودی‌ها به رشتۀ ریاضی به طرز ناباورانه‌ای کاهش یافته و در عوض، هجوم دانش‌آموزان به سمت رشتۀ علوم تجربی، نگران‌کننده شده است. بعضی‌ها تقصیر را به گردن جذابیت شغلی حرفۀ پزشکی انداختند! بعضی دیگر، بی‌آیندگیِ شغلی فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی را عامل چنین افتی معرفی کردند و گمانه‌زنی‌ها بدون مستندات پژوهشی، بیشتر شد. ولی چرایی تغییر چنین موازنه‌ای بین رشته‌ها، مطالعات جدی را می‌طلبد. زیرا بعید است که در شرایط دستکاری نشده و عادی، ناگهان عدد حدود ۳۰٪، به حدود ۶٪ سقوط کند. مگر می‌شود؟

ما را چه شده است که در کمتر از یک دهه، موقعیت ریاضیاتمان به گونه‌ای سقوط کرده که ریاضی از شهره بودن به‌عنوان یکی از مهم‌ترین معارف بشری و ارزش‌های والای انسانی، تبدیل به هیولایی برای دوریِ دانش‌آموزان از آن شده است؟ چه کرده‌ایم که ریاضی را گام به گام و پله به پله، با «تخم مرغ آب‌پز» و «نیمروی ساده» شروع کرده و تا

«املــت معمولی» و «املــت قارچ» پیش رفته‌ایم و این معجون عجیب را، می‌خواهیم با هر زوری که شــده، به خورد دانش‌آموزان بدهیم؟ این همه ادا و اصول و شــعائر بی‌معنا، تا کی و کجا می‌خواهد ادامــه یابد؟ و تا کِی این صنعت عظیم، تحت نام آموزش همــهٔ درس‌ها و به‌خصــوص ریاضی مدرسه‌ای، می‌خواهد قربانی بگیرد؟

آلودگــی تبلیغاتــی از طریــق بعضی تولیدات آموزشــی، از آلودگی هوا بــرای روح‌های لطیــف کودکان و دانش‌آمــوزان، خطرناک‌تر اســت. تشــویق بــه رقابت‌هــای بی‌دلیل و فرســاینده، آزمون‌هــای مــداوم و بی‌منطق، ترس از ناکامی، اضطراب از عدم موفقیت، خستگی و سردرگمی، و ده‌ها معضل دیگــر، دانش‌آموزان و معلمان و خانواده‌هــا را از پا درآورده است. معلمان ریاضی، چندین ساعت مفید تدریس را طی سال تحصیلی، به‌خاطر آماده کردن دانش‌آموزان برای گذراندن انواع آزمون‌های تحصیلی و بیرونی و موفقیت در آن‌ها، از دســت می‌دهنــد[1]. تقریبــاً، در قــراردادی نانوشــته، مدارس خود را موظف به «خریــد» آزمون‌ها می‌کننــد و در حقیقت، برای چیزی که به مدارس و دانش‌آموزانشان صدمه می‌زند، هزینه هم می‌پردازند.

ایــن آزمون‌ها، انــرژی معلمان ریاضی را مستهلک نموده و تا کنون، مطالعــهٔ قابل اعتنایی هــم در ایران انجام نشــده تا شــواهد موثقی برای تداوم برگــزاری آن‌ها، ارائه دهد. این در حالی اســت که در سطح جهانی، مطالعات متعددی انجام شده که نشان می‌دهند برگزاری آزمون‌ها، ساعت‌ها از وقت مفید تدریس را می‌بلعد و برای معلمان، مزاحمت ایجــاد می‌کند و حتی تعداد قابل‌توجهی از آنان را وادار می‌کند که با وجود عبث دانستن این قبیل آزمون‌ها، یکی از وظایف خود را، آماده کردن دانش‌آموزان برای برتری در آزمون، تعریف کنند.

علاوه بر این، آزمون‌های بیرونی، پدران و مادران را درگیر احساســِ آمــوزش فرزندان خویــش نموده و از طــرف دیگــر، آنان را نســبت به نظام آموزشــی متوقع کرده و انتظار پاســخ‌گویی بی‌ضابطه را از مدارس، افزایش داده است. در حقیقت، توهمی در جامعه شکل گرفته که موفقیت در آزمون را تجلی یادگیری می‌داند و از آن، به شــکلی افراطی برای تبلیغ و مجاب کردن خانواده‌ها جهت هزینه کردن آموزش فرزندانشــان، استفاده شــده اســت. در این تبلیغات، از هر امکان بالقوه‌ای بهره گرفته شــده و می‌شود؛ ابتدا واژه‌های ناب فرهنگی نظیــر «درخــت دانــش» و «چرخ نیلوفری» باب شدند و به تدریج که این واژه‌ها به دلایل زیادی رنگ باختند، انواع خوراکی‌هــا، میوه‌ها، تنقلات و بعد، پرندگان و چرنــدگان و هر چه که امکان جلب توجه شــنوندگان و بینندگان را داشت، به میدان آمدند! اخیراً هم که نوید داده می‌شود که از طریق دستورات آشپزی و توصیه‌های اخلاقی و حرکات مــوزونِ بندری و روش‌هــای بادبادکــی و نظایر آن‌ها، مشکلات درک و فهمِ حد و پیوستگی و مشــتق و مثلثــات و تمام مفاهیم ریاضی مدرســه‌ایِ دانش‌آموزان در کسری از دقیقه یا حتی ثانیه، برطرف خواهد شد[2]!

تازه، این‌ها تمام داستان نیست! یــک طــرف چرتکه‌هــا و تقویــت ذهنی، هوش‌ربا شــده است و بعضی خانواده‌هــا، آینده فرزنــدان خود را در گرو مهارت‌های محاســباتی آنان می‌داننــد. از طرف دیگــر، چگونگیِ موفقیت در کنکور و پیروزِ میدان به ظاهر پر رقیب و در واقع، بدون رقیب آن شدن، پدران و مادران را مستأصل و دانش‌آموزان را خســته و فرسوده کرده اســت. البته لازم اســت که به این‌ها، آرزوی والدین را برای گرفتن سند تیزهوشی طفلان معصوم خود از قبل از ورود به مدرســه و از طریق آزمون گرفته تا آزمون‌های ورودی به انواع مدارس خاص را هم اضافه کنیم. اگر همه این‌ها و بسیاری موارد دیگر را که در ایــن مقال نمی‌گنجد، کنار هم بگذاریم، آیا جای شک و شبهه‌ای باقــی می‌ماند که چــرا ورودی‌ها به رشــته ریاضی، در حال کم شدن با شیب تند هستند؟ این در حالی است که بــه آزمون‌های آمادگی برای انواع المپیادها و مسابقات عدیده و کثیره، اشاره‌ای نشده است!

البتــه که کانــون اصلــی این التهاب‌ها، درس «ریاضی» است! اگر کســی شــک دارد، به انواع تبلیغات آموزشی تنها به‌طور گذرا توجه کند. آیا غیر از این، چیــزی می‌بیند؟ آیا تعــداد کتاب‌های کمکــی ریاضی، فیلم‌های به اصطلاح آموزشی ریاضی، تدریس خصوصی‌هــای ریاضی، وزن و نقش ریاضی در تمــام آزمون‌های ورودی مدارس ویژه، پشــتیبان این ادعا نیست؟ اگر چنین است- که بنا به شواهدی که جمع‌آوری کرده‌ام، برای خودم پاسخ مثبت است- راه خروج از این بحران چیست؟

قرائن نشــان می‌دهند که طی چند ســال اخیر، چیزی که ریاضی نامیده می‌شــده و هدف از یادگیری آن، ارتقای شعور به معنای عام مورد نظر بوده، آنقدر چهره‌اش عوض شده که گاهــی، دانش‌آمــوزان نمی‌دانند چیست! و به این دلیل، از این هیولای دست‌ســاز و دستکاری شــده، بیزار شده‌اند! ولی چه راه‌حل‌های احتمالی پیشِ رو داریم؟

به نظرم می‌رســد کــه یکی از مهم‌ترین اقداماتی که می‌تواند به حل مسئله عدم توازن آموزشی و از جمله، معضــل کاهــش ورود دانش‌آموزان به رشــته ریاضی- فیزیک بیانجامد، توجه و گسترش تحقیقات آموزشی هدفمند، دقیــق، و برآمده از میدان عملِ واقعی باشد.

پی‌نوشت‌ها

۱. دایانــا راویــچ (۲۰۱۶) در تحقیق خود، به این موضوع مهم اشاره کرده است که این آزمون‌ها، زمان‌بر است و دانش‌آمــوزان قبل از آزمون اضطراب دارند و پس از آن، خسته‌اند.

۲. بــدون ذره‌ای اغراق، مســتندات تمــام موارد، در دفتــر مجله موجود اســت. البته از رســانه‌ها نیز مداوم، این تبلیغات شــنیده می‌شود و روی بیل‌بوردهای شــهری و بین‌شهری، عبورکنندگان می‌توانند آن‌ها را ببینند و بخوانند و مجذوب شوند!

تیمز؛ آینه‌ای برای دیدن خود!

مروری کوتاه بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ چهارم ایران در تیمز ۲۰۱۵

حمیدرضا پژمان، کارشناس ارشد آموزش ریاضی
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

در پاییز ۲۰۱۶ (۱۳۹۵)، نتایج تیمزِ ۲۰۱۵ (۱۳۹۴) در سطح جهان منتشر شد و نظام آموزشی ایران نیز، بدان‌ها دست یافت. بررسی نتایج این مطالعه به‌خصوص در ریاضی پایهٔ چهارم، اهمیت ویژه‌ای می‌تواند برای برنامه‌ریزان و سیاستگزاران آموزشی در رابطه با درس ریاضی داشته باشد. زیرا به‌طور مشخص، دانش‌آموزان پایهٔ چهارم ایران که در تیمز ۲۰۱۵ شرکت کردند، از پایه اول، با برنامه و کتاب‌های تازه تغییر یافته آموزش دیده بودند و این نتایج، فرصت ویژه‌ای ایجاد کرده است تا بتوان از ابعاد مختلف، به تجزیه و تحلیل یافته‌های اولیه پرداخت.

کلید واژه‌ها: تیمز ۲۰۱۵، ریاضی پایهٔ چهارم، تغییرات برنامه و کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا چهارم در ایران

مقدمه

نتایج تیمز ۲۰۱۵، در پاییز ۲۰۱۶ میلادی (۱۳۹۵) برای دو درس ریاضی و علوم و در دو پایهٔ چهارم و هشتم، منتشر شد. با توجه به تغییرات وسیعی که در کمتر از یک دهه، در محتوا و روش و ساختار نظام آموزشی ایران رخ داده است، تجزیه و تحلیل نتایج اولیه از منظرهای گوناگون، می‌تواند در ارزیابی و در مواقع ضروری، دوباره‌نگری در آنچه که انجام شده، مورد استفاده مسئولان قرار گیرد.

در این میان، نتایج به‌دست آمده از عملکرد دانش‌آموزان در درس ریاضی پایهٔ چهارم در ایران، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا از سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴ (۲۰۱۱ تا ۲۰۱۵)، علاوه بر تغییر ساختار، کتاب‌های درسی ریاضی به ترتیب، از پایهٔ اول تغییرات اساسی داشته‌اند و سال انجام تیمز ۲۰۱۵ (۱۳۹۴)، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آن، همگی با برنامه و کتاب‌های تغییریافته، آموزش دیده بودند. بدین سبب، یکی از امتیازهای شرکت در این تیمز، در حقیقت فرصت ارزیابی تغییرات برنامه و کتاب درسی پایه‌های اول تا چهارم بود. باشد که از این فرصت طلایی، به نفع یاددهی- یادگیری ریاضی در دورهٔ ابتدایی، بیشترین بهره‌ها گرفته شود.

● **حوزه‌های موضوعی(محتوایی) در ریاضی پایهٔ چهارم**، شامل اعداد، اشکال هندسی، اندازه‌گیری، و نمایش داده‌ها بود که در زیر، هرکدام توضیح داده می‌شوند.

○ **حـــوزۀ موضوعی اعداد در پایۀ چهارم:** درک ارزش‌مکانی، راه‌های مختلف نمایش اعداد و روابط عددی

○ **حوزۀ موضوعی اشکال و اندازه‌های هندسی در پایۀ چهارم:** بررسی ویژگی‌های اشکال هندسی مانند اندازۀ طول و ضلع، اندازۀ زاویه، اندازه‌گیری مساحت و حجم

○ **حوزۀ موضوعی نمایش داده‌ها در پایۀ چهارم:** جمع‌آوری داده‌ها از نمایش‌های مختلف، تفسیر این داده‌ها، درکِ چگونگی سازمان‌دهی و نمایش داده‌ها در قالب نمودار برای پاسخ به سؤال‌ها

● **حوزۀ شناختی؛** شامل سه حیطۀ «دانستن»، «به کار بستن» و «استدلال» است.

○ **حیطۀ دانستن:** دانستن حقایق، رویه‌ها و مفاهیمی است که دانش‌آموزان، برای سهولت کاربرد ریاضی، بدان‌ها نیاز دارند.

○ **حیطۀ به کار بستن:** توانایی دانش‌آموزان در به‌کارگیری دانش و درک مفهومی خود در انجام دادن و حل مسئله ریاضی است.

○ **حیطۀ استدلال:** از حل مسائل عادی فراتر رفته و به وضعیت‌های ناآشنا و زمینه‌های پیچیده و مسائل چند مرحله‌ای می‌پردازد. استدلال ریاضی مستلزم توانایی تفکر منطقی و نظام‌مند است و شامل استدلال شهودی و استقرایی بر مبنای الگوهایی است که می‌توان از آن‌ها برای رسیدن به راه‌حل مسائل غیرمعمولی استفاده کرد. دانش‌آموزان به احتمال زیاد با آن‌ها آشنا نیستند. این حیطه شامل توانایی مشاهده، فرضیه‌سازی، استنتاج‌های منطقی بر مبنای قواعد، و توجیه درستی نتایج است.

جدول (۱): کشورهای شرکت‌کننده در آزمون سال ۲۰۱۵

۱. استرالیا	۱۱. دانمارک	۲۱. ایرلند	۳۱. نیوزلند	۴۱. سنگاپور
۲. بحرین	۱۲. انگلستان	۲۲. ایتالیا	۳۲. ایرلندشمالی	۴۲. اسلواکی
۳. بلژیک	۱۳. فنلاند	۲۳. ژاپن	۳۳. نروژ	۴۳. اسلونی
۴. بلغارستان	۱۴. فرانسه	۲۴. اردن	۳۴. عمان	۴۴. آفریقای‌جنوبی
۵. کانادا	۱۵. گرجستان	۲۵. قزاقستان	۳۵. لهستان	۴۵. اسپانیا
۶. شیلی	۱۶. آلمان	۲۶. کره	۳۶. پرتغال	۴۶. سوئد
۷. چین تایپه	۱۷. هنگ‌کنگ	۲۷. کویت	۳۷. قطر	۴۷. ترکیه
۸. کرواسی	۱۸. مجارستان	۲۸. لتونی	۳۸. روسیه	۴۸. امارات
۹. قبرس	۱۹. اندونزی	۲۹. مراکش	۳۹. عربستان	۴۹. آمریکا
۱۰. چک	۲۰. ایران	۳۰. هلند	۴۰. صربستان	

قابل توجه اســت که داده‌های مربوط به هر دوره از برگزاری تیمز از اولین که در ســال ۱۹۹۵ (۱۳۷۴) انجام شــد تا آخرین که در پاییز ۲۰۱۶ (۱۳۹۵) منتشــر شدند، از طریق آدرس اینترنتی www.timssandpirls.bc.edu قابل دسترسی هستند.

روند مطالعه

در این مطالعه، نتایج ریاضی دانش‌آموزان پایۀ چهارمِ ایران در تیمز ۲۰۱۵، استخراج شد و پس از بررسی و مقایسه با میانگین جهانی، نقاط ضعف و قوت هر کدام به اجمال، مشخص گردید. کار مشابهی نیز با داده‌های تیمز ۲۰۱۱ انجام شد تا بستری مناسب برای مقایسۀ نتایج آن با یافته‌های تیمز ۲۰۱۵ در رابطه با دانش‌آموزان پایۀ چهارمِ ایران فراهم گردد. بدین منظور، پس از بررسی نقاط ضعف و قوت

در آزمون ۲۰۱۱ ، متن سؤال‌ها برای پیدا کردن موارد مشابه در دو تیمز متوالی، مورد نیاز بود. در این جست‌وجوها، معلوم شد که از ۱۴ بلوک مربوط به سؤال‌های آزمون تیمز ۲۰۱۵، تنها بلوک‌های ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ قابل انتشار هستند.

با عنایت به این موضوع، ابتدا، نقاط قوت و ضعف سؤال‌هایی که دارای ویژگی‌های برنامه‌ای عالی بودند، شناسایی شدند. بعد آن سؤال‌ها، در دو دسته «قابل انتشار» و «غیرقابل انتشار» قرار گرفتند. سپس به سؤال‌های قابل انتشار به صورت مستقیم و به سؤال‌های غیرقابل انتشار، بر اساس دانستن موضوع و شکل سؤال، به‌طور غیرمستقیم ارجاع داده شد.

در مرحلهٔ بعد، بررسی شد که چه سؤال‌های مشابهی از این دو دسته، در تیمز ۲۰۱۱ هم بوده است که معلوم شد برای بعضی از آن‌ها، مورد مشابهی در تیمز ۲۰۱۱، وجود نداشت. مبنای مقایسه، نتایج عملکرد دانش‌آموزان پایهٔ چهارم ایران در سؤال‌هایی بود که نتایج متفاوت یا ویژه‌ای در دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ داشتند و تغییر عملکرد، قابل ملاحظه بود. این روش، امکان مطالعهٔ تغییرهای (مثبت یا منفی) ناگهانی را در کتاب‌های درسی پایه‌های اول تا چهارم، فراهم نمود. این مطالعه نشان داد که تغییرات ایجاد شده در کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های اول تا چهارم، اساسی بوده و عملکرد دانش‌آموزان دو دورهٔ تیمز نیز که متناظر با برنامه‌های قبل از تغییرات دههٔ ۹۰ و بعد از آن بوده، تفاوت چشمگیری دارند.

کتاب‌های درسی ریاضی که دانش‌آموزان در تیمز ۲۰۱۵، از طریق آن‌ها آموزش دیده بودند، به ترتیب عبارت‌اند از:

- کتاب ریاضی پایهٔ اول ابتدایی چاپ سال ۱۳۹۰؛
- کتاب ریاضی پایهٔ دوم ابتدایی چاپ سال ۱۳۹۱؛
- کتاب ریاضی پایهٔ سوم ابتدایی چاپ سال ۱۳۹۲؛
- و کتاب ریاضی پایهٔ چهارم ابتدایی چاپ سال ۱۳۹۳.

کتاب‌های درسی ریاضی همین چهار پایه نیز که دانش‌آموزان در تیمز ۲۰۱۱ (۱۳۹۰)، از طریق آن‌ها آموزش دیده بودند، به ترتیب عبارت‌اند از:

- کتاب ریاضی پایهٔ اول ابتدایی چاپ سال ۱۳۸۷؛
- کتاب ریاضی پایهٔ دوم ابتدایی چاپ سال ۱۳۸۸؛
- کتاب ریاضی پایهٔ سوم ابتدایی چاپ سال ۱۳۸۹؛
- و کتاب ریاضی پایهٔ چهارم ابتدایی چاپ سال ۱۳۹۰.

استدلال ریاضی مستلزم توانایی تفکر منطقی و نظام‌مند است و شامل استدلال شهودی و استقرایی بر مبنای الگوهایی است که می‌توان از آن‌ها برای رسیدن به راه‌حل مسائل غیرمعمولی استفاده کرد

توضیح کدگذاری‌ها

در این مقاله، هر کدام از سؤال‌ها با دو شناسه ارائه شده‌اند که مربوط به سؤال‌های نظیرشان در تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ هستند. این کار برای تسهیل کار محققان و متخصصانی است که می‌خواهند از این تحقیق، برای کارهای بعدی خود استفاده کنند. این کدها با حرف M آغاز می‌شوند که نشان می‌دهد سؤال مورد نظر، مربوط به ریاضی است (برای سؤال‌های علوم از حرف S و برای سؤال‌های تیمز نیومرسی، از حرف N استفاده شده‌است.) در کد نوع اول، پس از حرف M اعدادی آمده است که توضیحی در گزارش‌های منتشر شده از طرف IEA در مورد آن‌ها داده نشده است. در کدهای نوع دوم (سؤال‌های قابل انتشار)، پس از حرف M، شمارهٔ بلوک سؤال آمده است که بین ۰۱ تا ۱۴ متغیر است و پس از آن، یک خط تیره و بعد، شمارهٔ سؤال در آن بلوک، نوشته شده است.

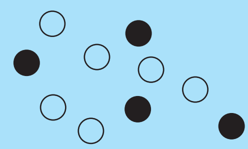
نقاط قوت در آزمون تیمز ۲۰۱۵

در بررسی نتایج تیمز ۲۰۱۵ ، ابتدا سؤال‌هایی که عملکرد دانش‌آموزان پایهٔ چهارم ایران، از میانگین جهانی بالاتر بود مشخص شد و به آن‌ها، به عنوان نقاط قوت تغییرات کتاب‌ها در ایران، ارجاع داده شد. در زیر، به چند سؤال پرداخته می‌شود.

۱. این سؤال مربوط به بلوک ۷ و در «حوزهٔ موضوعی اعداد» و «حوزهٔ شناختی دانستن» است که مورد مشابهی در تیمز ۲۰۱۱ نداشته است.

نمودار ۱

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۴۱۲۹۸ (M۰۷~۰۴)	دانستن	اعداد	۶۰	۵۵



چه کسری از این ۱۰ دایره سیاه است؟

پاسخ:

بررسی کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا چهارم که شرکت‌کنندگان در آزمون سال ۲۰۱۵، با آن‌ها تحت آموزش بوده‌اند، نشان داد که توجه زیادی به موضوع «کسر» شده و تمرین‌های مشابهی هم در کتاب‌ها آمده که نتیجهٔ تأکید بر کسرها، در تغییرات جدید، نمایان شده است.

۲. این سؤال، از بلوک ۵، حوزهٔ شناختیِ «کاربرد» و حوزهٔ موضوعی «نمایش داده‌ها» است.

نمودار ۲

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۴۱۱۸۲ (M۰۵~۱۲)	کاربرد	نمایش داده‌ها	۷۰	۸۴

خانم محمدی از دانش‌آموزان خود خواست تا رنگ مورد علاقهٔ خود را نام ببرند. او پاسخ‌های دانش‌آموزان را روی تخته سیاه نوشت:

سارا - سبز	**زهرا - زرد**
مریم - آبی	**فاطمه - سبز**
رویا - قهوه‌ای	**نرگس - قرمز**
تینا - قرمز	**سبا - قهوه‌ای**
مرجان - سبز	**الهام - قرمز**
درسا - آبی	**لاله - آبی**
سوسن - زرد	**ناهید - قرمز**
لیلا - آبی	**هدیه - زرد**

سپس خانم محمدی از دانش‌آموزان خواست تا جدولی درست کنند که این نتایج را نشان دهد. حالا شما این جدول را کامل کنید.

رنگ	تعداد دانش‌آموزانی که این رنگ را دوست دارند
آبی	۴
قهوه‌ای	
سبز	۳
قرمز	۴
زرد	

با توجه به تمرین‌ها و فعالیت‌هایی که در چهار کتاب درسی و مخصوصاً در مباحث آشنایی با نمودارها بیان شده‌است، این سؤال، دانش‌آموزان را خیلی به چالش نمی‌کشد و جای تعجب اینجاست که چرا درصد ایران، کمتر از میانگین جهانی است.

۳. این سؤال، از بلوک ۱۱، حوزهٔ شناختی «دانستن» و از حوزهٔ موضوعی اعداد است.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۰۷۵ (M۱۱~۰۲)	دانستن	اعداد	۶۶	۴۶

این ســـؤال در بلوک ۱۱ قرار دارد و چون جزو سؤال‌های غیرقابل انتشار است، امکان دسترسی به اصل ســـؤال برای عموم نیست. این سؤال، در رابطه با تشخیصِ برابری عدد اعشاری با کسر به گونه‌ای اســـت که در صورت ســـؤال یک عدد اعشاری مانند ۰/۵ به دانش‌آموز داده شده و از او خواسته شده تا کسر برابر با آن را از بین گزینه‌ها، انتخاب کند. در تغییرات اخیر، مبحث اعداد اعشاری فقط در کتاب ریاضی پایه چهارم مطرح شـــده اســـت و در کتاب‌های قبلی، به آن پرداخته نشده است. در کتاب پایهٔ چهارم ابتدایی، حدود ۱۲ صفحه به معرفی و تمرین و فعالیت حول مباحثی مانند برابری اعداد اعشاری با کسرها، کاربردهای اعداد اعشاری و ارزش مکانی اعشاری، آن هم تنها در بخش ارزش مکانی، پرداخته شده‌است و با این وجود، دانش‌آموزان ایرانی توانسته‌اند نتیجه خوبی کسب کنند.

سؤال‌هایی که دارای مورد مشابه در دورهٔ قبل هستند و در نتیجه دارای تغییر زیاد بوده‌اند

ســـؤال‌هایی که در این قسمت آورده می‌شـــوند، در رابطه با آشنایی دانش‌آموزان با ساعت و جمع و تفریق زمان اســـت. «ســـاعت» و خواندن ساعت، از جمله مهارت‌هایی است که معمولاً خانواده‌ها، به کودکان خود آموزش می‌دهند. در نتیجه اگر دانش‌آموز در مدرسه هم با آن آشنایی پیدا نکند، از طریق خانواده‌اش آن را یاد می‌گیرد. با این وصف، سؤالی که در دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ در مورد جایگاه ساعت و جمع و تفریق زمان در کتاب‌های درسی ریاضی آمده، بررسی و نتایج آن با هم مقایسه شد.

جایگاه ساعت و جمع و تفریق زمان در کتاب‌های درسی ریاضی پایهٔ چهارم

الف) قبل از تغییر برنامه

در کتاب ریاضی پایهٔ اول و چهارم ابتدایی چاپ ســـال‌های ۱۳۸۷ و ۱۳۹۰ در رابطه با ســـاعت و خواندن ساعت، مطلبی بیان نشده است. ولی در کتاب ریاضی پایهٔ دوم ابتدایی چاپ ۱۳۸۸، ساعت را در صفحهٔ ۷۰ در سه صفحه معرفی کرده است و بعد از آن هم به‌صورت پراکنده، تعدادی تمرین در رابطه با ساعت آورده شده که در آن‌ها، از دانش‌آموز خواسته شده است که زمانِ مشخص شده روی ساعت را زیر آن بنویسد که همگی این زمان‌ها، دقیقهٔ صفر دارند. به‌عنوان مثال، ساعت دقیقاً ۵ است و دقیقه‌ای ندارد و نیاز به بیان آن نیست. در صفحه ۱۱۳ کتاب هم در تمرینی روی ساعت، مشخص شده است که مثلاً ۷ دقیقهٔ دیگر، ساعت ۵ می‌شود و از دانش‌آموز پرسیده شده که ۷ دقیقهٔ دیگر، ساعت چند است، و در هیچ جای دیگری از کتاب، از ساعت استفاده‌ای نشده است.

در کتاب ریاضی پایهٔ سوم ابتدایی چاپ سال ۱۳۸۹، در صفحهٔ ۱۴۱ مفهوم دسته‌بندی را با تمرینِ خواندنِ دقیقه و ساعت، بیان کرده است و دیگر مطلبی در مورد ساعت، بیان نشده‌است.

ب) بعد از تغییر برنامه

در کتاب ریاضی پایهٔ اول ابتدایی چاپ ســـال ۱۳۹۰، در صفحهٔ ۱۱۲ از دانش‌آموزان خواسته شده که با نگاه‌کردن به یک ساعتِ عقربه‌ای، اعداد درون ساعت را در شکلِ پیش رویش بنویسند. سپس در صفحهٔ ۱۴۶ کتاب، از آنان خواسته شده که زمانِ ساعت‌هایی را که در شکل نشان داده شده است، در کنار آن بنویسند و در صفحهٔ بعد، خواسته شده که بگوید ساعت‌هایِ نشان داده شده، بین کدام ساعت‌ها هستند. برای نمونه، ساعت '۵:۳۰ نشان داده شده و از دانش‌آموز انتظار می‌رود که بگوید ساعت بین ۵ و ۶ است. در صفحه‌های ۱۵۲ و ۱۶۴ نیز، تمرین‌هایی در رابطه با ساعت و خواندن زمان آورده شده‌است.

در کتاب ریاضی پایهٔ دوم ابتدایی چاپ ۱۳۹۱، در صفحهٔ ۴، باز هم ساعت یادآوری شده است و در صفحه ۲۹ برای تمرینِ الگویابی، ساعت مورد استفاده قرار گرفته است. پس از آن نیز در ۱۵ صفحه از کتاب، تمرین‌ها و فعالیت‌هایی در رابطه با ساعت و خواندن ساعت، به‌صورت پراکنده آورده شده است.

هم در کتاب‌های قبل از چاپ ۹۰ و هم کتاب‌های بعد از چاپ ۹۰، تقریباً به یک اندازه، به موضوع جدول ارزش مکانی بها داده شده است. اما نتایج دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ در زمینهٔ ارزش مکانی، بسیار با هم متفاوت‌اند. بنابراین،احتیاج به بررسی‌های عمیق‌تری هست و به‌طور طبیعی،مسئلهٔ چگونگی چینش و سازمان‌دهی محتوا، بیش از همه برجسته می‌شود

در کتاب ریاضی پایه سوم ابتدایی چاپ ۱۳۹۲، در صفحه‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸، شش تمرین مرتبط با جمعِ ساعت و محاسبهٔ زمان آورده شده است. در صفحهٔ ۵۰ کتاب هم، برای طرح فعالیتی درمورد کسر، از ساعت استفاده شده است. همچنین در صفحهٔ ۱۲۴ کتاب هم، تمرینی دربارهٔ نمودار دایره‌ای و ساعت آورده شده است.

در کتاب ریاضی پایهٔ چهارم ابتدایی چاپ ۱۳۹۳، در فصل دوم کتاب که مربوط به کسرهاست، در صفحهٔ ۲۴ طی چند تمرین، از دانش‌آموزان خواسته شده تا بگویند مثلاً یک ربع بعد از ساعت دو، چه ساعتی را نشان می‌دهد؟ در صفحهٔ ۴۳ کتاب هم در تمرین‌های آخر فصل، سه تمرینِ مربوط به کسرها با استفاده از ساعت آورده شده است. در فصل چهارم کتاب در صفحه‌های ۸۶ و ۸۷ ، مبحثی با عنوان اندازه‌گیری زمان مطرح شده‌است. در این تمرین با استفاده از محور اعداد، جمع دقیقه‌ها به دانش‌آموزان گفته شده و از آن‌ها خواسته شده تا عقربه‌های ساعت را در ساعت‌های سمت چپ و راست محور اعداد، ترسیم کنند و زمان اولیه و ثانویه را پس از گذشت دقایقی که روی محور نشان داده شده، نشان دهند. در صفحه‌های ۸۸ و ۸۹ نیز تمرین‌هایی در رابطه با تبدیل دقیقه به ساعت و ثانیه به دقیقه و محاسبهٔ زمان و جمع و تفریق ساعت، ارائه شده است. پس طبیعی است که با این همه تأکید- که البته دلیل برنامه‌ای آن توضیح داده نشده- نتیجهٔ دانش‌آموزان در تیمز ۲۰۱۵ در رابطه با سؤال‌هایی که مربوط به «ساعت» و «محاسبهٔ زمان» است، نسبت به آزمون سال ۲۰۱۱ بهبود قابل‌توجهی داشته باشد، ولی چنین نشده است.

سؤال تیمز ۲۰۱۱ در مورد «ساعت» و «محاسبهٔ زمان»

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۳۱۰۳۴ (M۰۷~۰۸)	کاربرد	اعداد	۳۳	۵۱

قطاری تهران را ساعت ۸:۴۵ صبح ترک کرد. این قطار پس از ۲ ساعت و ۱۸ دقیقه به قم رسید.
قطار چه ساعتی به قم رسیده است؟

(الف) ۱۱:۱۵ صبح
(ب) ۱۱:۱۳ صبح
(ج) ۱۱:۰۳ صبح
(د) ۱۰:۵۳ صبح

سؤال تیمز ۲۰۱۵ در مورد «ساعت» و «محاسبهٔ زمان»

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۰۵۵ (M۰۳~۰۳)	کاربرد	اعداد	۴	۲۵

قطار، شهر زرین را در ساعت ۷:۵۲ صبح ترک می‌کند و در ساعت ۱۱:۰۶ صبح همان روز به شهر صنعتی می‌رسد.
این سفر چند ساعت طول می‌کشد؟

پاسخ: ______________ ساعت و ______________ دقیقه

مقایسهٔ دو نتیجهٔ ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵، قابل تأمل است و لازم است که به دلایل آن از منظرهای مختلف، پرداخته شود.

سؤال مربوط به حوزهٔ اعداد و استدلال در تیمز ۲۰۱۵

این سؤال در بلوک ۶ از سؤال‌های تیمز ۲۰۱۵ قرار دارد و از حوزهٔ موضوعی اعداد و حوزهٔ شناختی استدلال است.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۱۱۱ (M۰۶~۰۳)	استدلال	اعداد	۳	۲۹

۵ ۴ ۳ ۲

در هر مربع یک کارت را طوری قرار دهید که وقتی جمع می‌کنید، بزرگ‌ترین جواب به دست آید. از هر کارت فقط یک بار استفاده کنید.

$\square\square + \square\square$

مقایسهٔ نتایج سؤال مربوط به موضوع ارزش مکانی و کاربرد آن در دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵

این سؤال، مربوط به موضوع ارزش مکانی و کاربرد آن است. ابتدا سؤال مشابه در سال ۲۰۱۱ بیان شده و بعد، جایگاه جدول ارزش‌مکانی در کتاب‌های درسی ریاضی- قبل و بعد از تغییرات- به اجمال، مرور می‌شود.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۴۱۰۰۳ (M۰۳~۰۴)	دانستن	اعداد	۴۵	۴۸

آرزو کارت‌های اعداد زیر را دارد.

۲ ۵ ۶ ۸ ۱

کوچک‌ترین عدد سه رقمی که او می‌تواند با این کارت‌ها بسازد کدام است؟
او از هر کارت فقط یک بار می‌تواند استفاده کند.

پاسخ: ________

در بعضی نمونه‌ها، بیشتر شدن توجه به برخی موضوع‌ها، موجب پیشرفت در عملکرد شده است که از آن جمله، می‌توان به مواردی مانند توجه به کسرهای رنگ شده از شکل‌ها و الگویابی‌های عددی اشاره نمود. این نتیجه، نشان می‌دهد که هر جا به‌صورت اصولی وارد کار شده‌ایم، توانسته‌ایم پیشرفت کنیم. البته توجه به الگویابی چیزی فراتر از اصول را شامل می‌شود

جایگاه جدول ارزش مکانی قبل از تغییرات

در کتاب ریاضی پایهٔ اول ابتدایی چاپ ۱۳۸۷، از صفحهٔ ۱۰۰ به بعد با استفاده از مفهوم دسته‌بندی، ارزش مکانی یکی و ده‌تایی را بیان کرده است.

در کتـــاب ریاضی پایهٔ دوم ابتدایی چاپ ۱۳۸۸، در صفحه‌های ۵ تا ۷ یادآوری‌ای از جدول ارزش مکانی صورت گرفته است و از صفحهٔ ۷۳، بعد از معرفی دسته‌های صدتایی، ارزش مکانی صدگان هم به جدول اضافه شده است.

در کتاب ریاضی پایهٔ سوم ابتدایی چاپ ۱۳۸۹، مانند کتاب دوم، ابتدا برای یادآوری جدول ارزش مکانی در ابتدای کتاب تمرین‌هایی آورده شده است و در صفحهٔ ۲۴، بعد از معرفی دسته‌های هزارتایی،

ارزش مکانی هزارگان هم به جدول افزوده شده است. البته در بقیه مواردِ محاسباتی در کتاب، دیگر از دسته‌های هزارتایی صحبتی به میان نیامده و به همان صدگان، ختم شده است.

در کتاب ریاضی پایه چهارم ابتدایی چاپ ۱۳۹۰، در هر جایی از کتاب که با استفاده از دسته‌بندی‌ها مطلبی توضیح داده شده‌است، از جدول ارزش مکانی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در این کتاب، اغلب مفاهیم جدید بر پایه دسته‌بندی‌ها، ارائه شده است.

جایگاه جدول ارزش مکانی بعد از تغییرات

این سؤال در بلوک ۶ از سؤال‌های تیمز ۲۰۱۵ قرار دارد و از حوزهٔ موضوعی اعداد و حوزهٔ شناختی استدلال است که به موضوع ارزش مکانی مرتبط است.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۱۱۱ (M۰۶~۰۳)	استدلال	اعداد	۳	۲۹

۵	۴	۳	۲

در هر مربع یک کارت را طوری قرار دهید که وقتی جمع می‌کنید، بزرگ‌ترین جواب به دست آید. از هر کارت فقط یک بار استفاده کنید.

$\square\square + \square\square$

در کتـــاب ریاضی پایهٔ اول ابتدایی چاپ ۱۳۹۰، در صفحهٔ ۱۲۸ کتاب، جدول ارزش مکانی یکانی و دهگانی معرفی و در قالب تمرین، از دانش‌آموزان خواسته شده تا جدول را بر اساس شکل‌های داده شده، تکمیل کنند. در صفحهٔ ۱۳۵ کتاب نیز چنین تمرینی تکرار شده است.

در کتاب ریاضی پایهٔ دوم ابتدایی چاپ ۱۳۹۱، از صفحهٔ ۵ تا ۷ تمرین‌هایی برای یادآوری جدول ارزش مکانی یکانی و دهگانی ارائه شده است. در صفحهٔ ۵۹ که اعداد سه رقمی معرفی شده‌اند، صدگان هم به این جدول اضافه شـــده است و ســـپس چند تمرین داده شده است. در صفحهٔ ۶۴ کتاب، برای معرفی و بیان موضوع عددهای سه رقمیِ تقریبی، از جدول ارزش مکانی استفاده شده است. در صفحهٔ ۹۳ برای موضوع مقایسهٔ اعداد از جدول ارزش مکانی استفاده شده است و در صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۳ هم مباحث جمع و تفریق در جدول ارزش مکانی عنوان شده است.

در کتاب ریاضی پایهٔ سوم ابتدایی چاپ ۱۳۹۲، در صفحهٔ ۳۱ کتاب بعد از معرفی دستهٔ هزارتایی‌ها، از جدول ارزش مکانی با هزارگان، استفاده شده است و تا صفحهٔ ۱۰۱ که یک تمرین مقایسه‌ای آمده، از این جدول اســـتفاده‌ای نشده است. در صفحهٔ ۱۳۴ کتاب، تمرینی مشابه با سؤال آزمون آمده است که از دانش‌آموزان خواسته شده تا با استفاده از کارت‌های داده شده، عددهای خواسته شده را بسازند.

در کتاب ریاضی پایهٔ چهارم ابتدایی چاپ ۱۳۹۳، در صفحهٔ ۵ کتاب، در یک تمرین از جدول ارزش مکانی اســـتفاده شده است که تا مرتبهٔ ده‌هزارتایی را شامل می‌شود. در صفحهٔ ۱۱۲ کتاب نیز مبحث ارزش مکانی اعداد اعشاری عنوان شده است که تنها مرتبهٔ دهم را شامل می‌گردد.

همان‌طور که از نتیجهٔ بررسی‌ها برمی‌آید، هم در کتاب‌های قبل از چاپ ۹۰ و هم کتاب‌های بعد از چاپ ۹۰، تقریباً به یک اندازه، به موضوع جدول ارزش مکانی بها داده شده است. اما نتایج دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ در زمینهٔ ارزش مکانی، بســـیار با هم متفاوت‌اند. بنابراین، احتیاج به بررســـی‌های عمیق‌تری هست و به‌طور طبیعی، مسئلهٔ چگونگی چینش و سازمان‌دهی محتوا، بیش از همه برجسته می‌شود. مثلاً برای فهم و درک عمیق‌تر ارزش‌مکانی اعداد، چقدر لازم است که ابتدا، دسته‌بندی‌های مناسب به دانش‌آموزان نشان داده شود؟ یا ده‌ها سؤال دیگری که هر یک، موضوعی ضروری، برای مطالعه است.

نمونه‌ای از حوزهٔ موضوعی نمایش داده‌ها و حوزهٔ شناختی کاربرد در تیمز ۲۰۱۵

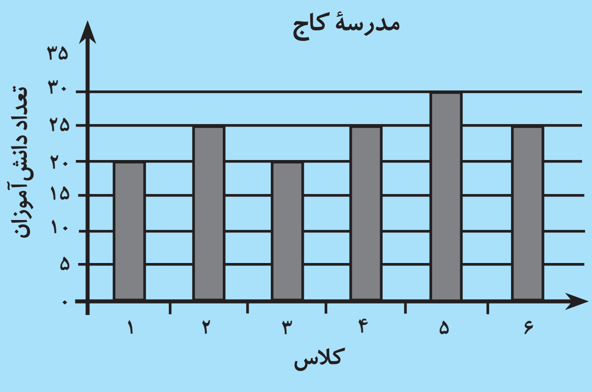
کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۵۰۷ (M۱۳~۰۹)	کاربرد	نمایش داده‌ها	۵	۲۸

این سؤال مربوط به بلوک ۱۳ از سؤال‌های آزمون تیمز است و غیرقابل انتشار است. این سؤال، یک مسئلهٔ دو قسمتی است که هر قسمت آن، بر اساس نمودار ستونی داده شده، قابل پاسخگویی است. در قسمت دوم سؤال، از دانش‌آموزان خواسته شده تا تعداد مواردی را از روی نمودار که برابر یا بزرگ‌تر از یک مقدار مشخص است، بیان کنند. برای این کار، آن‌ها باید فراوانیِ مربوط به چند ستون را با یکدیگر جمع کنند تا بتواند پاسخ درست را به‌دست آورند.

نمونهٔ مشابه از حوزهٔ موضوعی نمایش داده‌ها و حوزهٔ شناختیِ کاربرد در تیمز ۲۰۱۱

این سؤال، در بلوک ۲ از سؤال‌های آزمون ۲۰۱۱ قرار دارد و از حوزهٔ موضوعی نمایش داده‌ها و حوزهٔ شناختی استدلال است.

نمودار زیر تعداد دانش‌آموزان کلاس‌های مختلف «مدرسهٔ کاج» را نشان می‌دهد.



در «مدرسهٔ کاج»، هر کلاس برای ۲۰ دانش‌آموز جا دارد.

این مدرسه چند دانش‌آموز دیگر می‌تواند داشته باشد؟

(الف) ۲۰
(ب) ۲۵
(ج) ۳۰
(د) ۳۵

با توجه به توضیحات داده شده در مورد جایگاه موضوع نمودارها و شناخت و کاربرد آن‌ها در کتاب‌های درسی قبلی و جدید، نتایج کسب شده در دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵، با میزان توجه به این موضوع در کتاب‌ها، همخوانی ندارد. این مشاهده، دست‌کم نشان می‌دهد که میزان یا کمیت توجه به یک موضوع در کتاب درسی، با بهتر شدن یا بدتر شدن نتیجه عملکرد دانش‌آموزان، رابطه مستقیم ندارد و در نتیجه، پرداختن به ابعاد کیفی برنامه، از اهمیت بیشتری برخوردار است.

نمونه‌های قابل توجه

در زیر، چند سؤال که نتایج آن‌ها در دو تیمز ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ ویژه بودند، آورده شده است؛ این سؤال‌ها به ترتیب، در بلوک ۸ از سؤال‌های آزمون تیمز ۲۰۱۵ و بلوک ۲ از سؤال‌های آزمون ۲۰۱۱ قرار دارند و از حوزهٔ موضوعی اعداد و حوزهٔ شناختی دانستن هستند.

الف)

تیمز ۲۰۱۵: حاصل‌ضرب ۴۳×۲۷ را بیابید.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۶۱۲۷۳ (M۰۸~۰۲)	دانستن	اعداد	۴۴	۵۱

تیمز ۲۰۱۱: حاصل‌ضرب ۱۹×۲۳ را بیابید.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۲۰۳ (M۰۲~۰۵)	دانستن	اعداد	۴۵	۴۱

هر دو سؤال بالا، ضرب دو عدد دو رقمی است و میانگین پاسخ درست در هر دو دوره، تقریباً به یک اندازه است. اما تفاوت اصلی این است که در سال ۲۰۱۱، میانگین درصد ایران بالاتر از میانگین جهانی است و در سال ۲۰۱۵ میانگین درصد پاسخ صحیح ایران پایین‌تر از میانگین درصد جهانی است. در سال ۲۰۱۱ به شکل معناداری از میانگین جهانی بالاتر نیستیم و در سال ۲۰۱۵ هم به شکل معناداری از میانگین پایین‌تر نیستیم، اما افزایش ده درصدی میانگین جهانی معنادار است و نیازمند مطالعات بعدی است.

ب)

تیمز ۲۰۱۵: حاصل‌عبارت ۳۸۵+۵۸۷۶ را بیابید.

این سؤال‌ها به ترتیب در بلوک‌های ۹ و ۵ آزمون‌های تیمز ۲۰۱۵ و ۲۰۱۱ قرار دارند و از حوزهٔ شناختی دانستن و حوزهٔ موضوعی اعداد هستند.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۵۱۲۰۶ (M۰۹~۰۱)	دانستن	اعداد	۴۶	۶۶

تیمز ۲۰۱۱: حاصل عبارت ۲۸۶+۵۶۳۱ را بیابید.

کد سؤال	حوزهٔ شناختی	حوزهٔ موضوعی	درصد ایران	میانگین درصد جهان
M۰۳۱۱۲۸ (M۰۵~۰۱)	دانستن	اعداد	۷۵	۷۲

هر دو سؤال مربوط به جمع یک عدد چهار رقمی با یک عدد سه رقمی است. اما نتیجهٔ به‌دست آمده، متفاوت است. تغییری که در کتاب‌ها در این زمینه صورت گرفته، آن است که در کتاب‌های ریاضی چاپ قبل از سال ۹۰ (قبل از تغییر)، جمع اعداد چند رقمی، از راست به چپ آموزش داده شده، در صورتی‌که در کتاب‌های ریاضی چاپ بعد از سال ۹۰ (بعد از تغییر)، جمع اعداد چند رقمی از چپ به راست بیان شده و این درصورتی است که تا قبل از آن، در هیچ‌یک از کتاب‌های درسی ایران، عملیات جمع و تفریق، با این رویکرد آموزش داده نشده بود و این ابتکار، از سال ۹۰ وارد کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی شد.

توضیح: سؤال‌های مربوط به تیمز ۲۰۱۵ که در این بخش به آن‌ها اشاره شد، هر دو در بلوک‌های غیرقابل انتشار قرار دارند، ولی بر اساس توضیح‌هایی که مبتنی بر داده‌های مربوط به درصدهای درست در سایت رسمی آزمون‌های تیمز و پرلز منتشر شده، این سؤال‌ها آورده شده است.

جمع‌بندی

در این مقاله، تنها به چند نمونه از عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در آزمون تیمز ۲۰۱۵ و مقایسهٔ آن با تیمز ۲۰۱۱، اشاره شد. در بعضی نمونه‌ها، بیشتر شدن توجه به برخی موضوع‌ها، موجب پیشرفت در عملکرد شده است که از آن جمله، می‌توان به مواردی مانند توجه به کسرهای رنگ شده از شکل‌ها و الگویابی‌های عددی اشاره نمود. این نتیجه، نشان می‌دهد که هر جا به‌صورت اصولی وارد کار شده‌ایم، توانسته‌ایم پیشرفت کنیم. البته توجه به الگویابی چیزی فراتر از اصول را شامل می‌شود. مثلاً در مورد کسرهای رنگ شده از شکل‌های هندسی، در کتاب اول ابتدایی نمونه‌های ساده‌ای را بدون اشاره مستقیم از این مورد آورده‌ایم و به مرور در کتاب‌های بعدی، آن را پیشرفت داده‌ایم تا جایی که دانش‌آموز می‌تواند خودش کسر رنگ شده از یک شکل را تشخیص دهد و آن را بنویسد.

این در حالی است که در الگویابی، با افراط زیاد این آموزش ارائه شده و برای بیان مطالب دیگر نیز، از الگویابی به وفور استفاده شده است، تا جایی که تعداد زیادی از دانش‌آموزان، وقتی با موضوع جدیدی هم روبه‌رو می‌شوند، به دنبال کشف یک الگو برای حل مسئله می‌گردند. برای مثال، حتی برای توضیح جدول ارزش مکانی، اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم، ساعت و نظایر آن، از الگویابی به‌عنوان رویکرد اصلی به یاددهی و یادگیری ریاضی دوره ابتدایی اســـتفاده شده است و نتیجهٔ منفی آن در نتایج تیمز ۲۰۱۵، به وضوح قابل مشاهده است.

در قســـمت‌هایی مانند موضوع جمع کسرها که روند قبلی تغییر اساسی نکرده است، تفاوت جدی ایجاد نشده است.

همچنین مشاهده می‌شود که در بعضی موارد، توجه به بعضی موضوع‌ها، نه تنها باعث بهبود عملکرد دانش‌آموزان نشده، بلکه همان توجه، باعث مداخله در شهود و عقل سلیم آنان شده و نتیجه را بدتر کرده است که از آن جمله، مباحث محاسبهٔ زمان و جمع و تفریق ساعت و کار با نمودارهاست که جدول زیر، حسن ختام این بحث است.

موضوع	زمینه شناختی	میانگین درصد ایران در ۲۰۱۱	میانگین درصد جهانی در ۲۰۱۱	میانگین درصد ایران در ۲۰۱۵	میانگین درصد جهانی در ۲۰۱۵
نمایش داده‌ها	دانستن	۴۷	۵۵/۷۵	۳۵/۳۳	۶۳
نمایش داده‌ها	کاربرد	۴۵/۵	۶۴	۳۳/۰۷	۵۴/۶۴
نمایش داده‌ها	استدلال کردن	۵۰	۶۵/۶۶	۳۰	۵۵/۲۵
شکل‌ها و اندازه‌های هندسی	دانستن	۴۲/۵۴	۵۵/۵۴	۴۲/۱۹	۵۷/۸
شکل‌ها و اندازه‌های هندسی	کاربرد	۳۹/۵	۵۱/۳	۲۷/۴۸	۴۳/۶۴
شکل‌ها و اندازه‌های هندسی	استدلال کردن	۱۳	۲۶	۳۷/۸۳	۵۲/۷۵
اعداد	دانستن	۴۰/۱۴	۵۱/۰۷	۴۱/۰۴	۵۸/۲۲
اعداد	کاربرد	۳۸/۴۶	۵۶/۶۶	۳۱/۸۴	۴۸/۵۶
اعداد	استدلال کردن	۱۸/۱	۳۲/۷	۱۶	۳۴/۷

در الگویابی، با افراط زیاد این آموزش ارائه شده و برای بیان مطالب دیگر نیز، از الگویابی به وفور استفاده شده است، تا جایی که تعداد زیادی از دانش‌آموزان، وقتی با موضوع جدیدی هم روبه‌رو می‌شوند، به دنبال کشف یک الگو برای حل مسئله می‌گردند

نظریهٔ ون‌هیلی

دربارهٔ سطوح تفکر و استدلال هندسی

اشرف صفابخش چکوسری، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی
مقطع متوسطهٔ اول استان گیلان
نرگس یافتیان، استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

چکیده

نظریهٔ ون‌هیلی یکی از نظریه‌های مطرح در زمینهٔ آموزش هندسه است. این نظریه توسط یک زوج هلندی به نام‌های پیره ماری ون‌هیلی و دینا ون‌هیلی گلداف برای نخستین بار در سال ۱۹۵۷ میلادی عنوان گردید و تا به امروز تغییرات و اصلاحاتی نیز در آن انجام گرفته است. نظریهٔ ون‌هیلی، سطح استدلال هندسی را در افراد دسته‌بندی می‌نماید، برای هر سطح مشخصه‌هایی ارائه می‌دهد و بدین وسیله تلاش می‌کند تا توضیحی برای ناتوانایی‌های برخی دانش‌آموزان در فهم روابط و استدلال‌های هندسی ارائه دهد. مطابق این نظریه، سطح تفکر هندسی افراد بیش از آنکه به رشد بیولوژیکی وابسته باشد، معلول شیوهٔ آموزشی است. نظریهٔ ون‌هیلی به این بسنده نکرده، راهکارهایی را زیر عنوان «فازهای یادگیری» به منظور کیفیت بخشی به آموزش هندسه و کمک به منظور بالا بردن سطح تفکر هندسی افراد، ارائه کرده است. البته همهٔ وجوه این نظریه در این مقاله بازگو نشده‌اند و هدفِ این مقاله، تنها شرح و توصیف یکی از جنبه‌های این نظریه، یعنی دسته‌بندی سطوح تفکر هندسی افراد است.

کلید واژه‌ها: آموزش هندسه، نظریهٔ ون‌هیلی، سطوح تفکر هندسی

مقدمه

آیا تا به حال دانش‌آموزانی در کلاس داشته‌اید که مربع را می‌شناسند ولی نمی‌توانند مربع را تعریف کنند؟ توجه کرده‌اید که بعضی از دانش‌آموزان درک نمی‌کنند که مربع نوعی مستطیل است؟ چند بار هنگام اثبات مطلبی نظیر اینکه «دو قطر مستطیل، هم‌اندازه‌اند» با این پرسش دانش‌آموزان مواجه شده‌اید که «چرا باید چیزی را که می‌دانیم، ثابت کنیم»؟ این پرسش‌ها، کم و بیش همان پرسش‌هایی است که مری کراولی[۱] (۱۹۸۷) در آغاز نوشتار خود با عنوان *مدل ون‌هیلی دربارهٔ ارتقای تفکر هندسی*[۲] مطرح کرده است؛ و کمتر کسی است که با آموزش هندسه سر و کار داشته باشد و چنین موقعیت‌هایی را در کلاس خود تجربه نکرده باشد. بسیاری از ما به‌عنوان معلمان ریاضی، برای مقابله با چنین موقعیت‌هایی، به مرور درس پرداخته‌ایم یا پیشنهاد حل تمرین‌های بیشتر را مطرح کرده‌ایم ولی

اگـــر بخواهیم به اندازهٔ کافـــی صراحت به خرج دهیم، باید اذعان کنیم که این روش‌ها به ندرت توانســـته‌اند در بهبود چنان کاستی‌هایی سودمند واقع گردند. شاید اندکی تســـکین‌بخش باشـــد اگر بدانیم که ما در این تجربهٔ ناخوشایند، تنها نبوده‌ایم و پژوهش‌های علمی و گزارش‌های مستند و تجربی گواه آن است که آموزش هندســـه تقریباً در همه جای دنیا با چالش‌هایی نظیر آنچه بیان شـــد، مواجه بوده است[۳]. یافته‌های تیمز[۴] در ســـال ۲۰۱۱ نیز، نشانگر آن بود که در میان حوزه‌های موضوعی ریاضیات، هندسه با کم‌ترین میزان موفقیت در ســـطح جهانی روبه‌رو بوده است (نتایج بین‌المللی تیمز ۲۰۱۱ در ریاضیات[۵]، ۲۰۱۲). گواه دیگر این ادعا، داســـتان پیدایش نظریه‌ای است که این مقاله در صدد معرفی آن است.

در دههٔ ۶۰ میلادی یک زوج هلندی که به آموزش ریاضی و هندســـه در مدارس هلند اشتغال داشتند، در اثر رویارویی مکرر با بدفهمی‌های دانش‌آموزان در درس هندسه، به فکر ریشه‌یابی و چاره‌جویی برآمدند. ناتوانی و مشکلات دانش‌آموزان در درک مفاهیمی هندسی که بارها و بارها توضیح داده شده بود، پیره ماری ون‌هیلی[۶] و دینا ون‌هیلی گلداف[۷] را به جست‌وجوی سرچشمهٔ این مشـــکلات برانگیخت و آنچه از دل این جست‌وجو زاده شـــد، نظریه‌ای بود که امروزه به نـــام این دو، به نظریهٔ ون‌هیلی مشهور است. پیره ون‌هیلی (۱۹۸۶)، به زیبایی چگونگی تبلور ایدهٔ این نظریه را بیان می‌کند:

> خیلی زود پس از آن که شغلم را به‌عنوان معلم ریاضی آغاز کردم، دریافتم که این حرفه، حرفهٔ سختی است. مباحثی بود که من می‌توانستم بارها و بارها توضیح دهم در حالی که دانش‌آموزان همچنان این مباحـــث را درک نمی‌کردند. در طول ســـال‌های پس از آن، توضیحاتم را بارها و بارها عوض کردم ولی آن مشکلات، همچنان باقی ماندند. همواره این‌گونه بود که گویی من به زبان دیگری صحبت می‌کردم و همین ایده بود که سبب کشف راه‌حل شد: سطوح متفاوت تفکر (ساختار و بینش[۸]، صفحهٔ ۳۹؛ نقل شده در اَدِل[۹] ۱۹۹۸).

وضعیتی در زندگی روزمره را در نظر بگیرید که در آن دو نفر که به دو کشـــور متفاوت تعلق دارند و به دو زبان متفاوت صحبت می‌کنند و با دو فرهنگ متفاوت بزرگ شده‌اند، بخواهند با هم ارتباط کلامی برقرار کنند. ناگفته پیداست که چنین ارتباطی، لبریز از برداشت‌های اشتباه و کج‌فهمی‌ها خواهد بود و چه بسا که حتی از همان آغاز به بن‌بست برسد. آنچه زوج ون‌هیلی، هوشمندانه به آن اندیشیدند آن بود که این بیگانگی ممکن است در نوع نگرش و استدلال دو نفر هم وجود داشته باشد و در چنین حالتی دور از انتظار نیست اگر هر دو به یک چیز نگاه کنند و دو چیز کاملاً متفاوت ببینند.

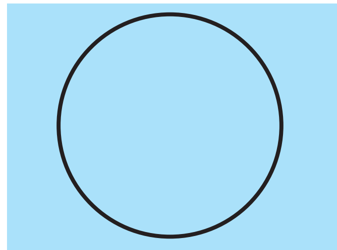
دســـتاورد کوشش این دو پژوهشـــگر را می‌توان در دو بخش کلی خلاصه کرد: (۱) ریشه‌یابی و شناسایی مشکل و (۲) ارائهٔ راهکاری برای درمان یا دست‌کم بهبود آن. آن‌ها برای تحقق نخستین بخش، کوشیدند که برای نوع نگرش استدلالی افراد، یک طبقه‌بندی ارائه دهند و برای آنکه بتوانند در عمل، افراد را در این طبقات دسته‌بندی کنند، برای هر طبقه، ویژگی یا مشـــخصه‌هایی در نظر بگیرند. همچنین به‌منظور محقق ســـاختن بخش دوم، به ارائهٔ الگوریتمی در جهت ارتقا از یک سطح به سطح بالاتر پرداختند. در اینجا بی‌آنکه قصد داشته باشیم به میزان کارآمدی یا ناکارآمدی این نظریه بپردازیم، می‌کوشیم بخش‌هایی از آن را بیان و تا حد امکان تشریح کنیم.

سطوح تفکر هندسی در نظریهٔ ون‌هیلی

پیـــش از معرفی ســـطوح ون‌هیلی، توضیـــح نکته‌ای ضروری به نظر می‌رســـد. در معرفی این بخش از نظریه، از منابعی که در پایان مقاله فهرست شده‌اند به‌صورت تلفیقی استفاده گردیده است و به‌منظور ملموس‌تر ساختن نظریه، گاهی مثال‌ها و توضیحاتی که نویســـندگان مقالهٔ حاضر با تکیه بر تجربهٔ شـــخصی فراهم آورده‌اند، افزوده شده است. روال معمول و ســـاختار مقاله‌نویسی چنین حکم می‌کند که منبع هر بخش بلافاصله پس از بازنویســـی متن مورد اشاره، آورده شود؛ ولی از آنجا که ذکر منابع متعدد لابه‌لای سطور نوشتار، گاهی در روند خواندن متن توسط خوانندگان عمومی، وقفه و گسستگی ایجاد می‌کند و با توجه به اینکه هدف نویسندگان مقالهٔ حاضر، توصیف سطوح ون‌هیلی به بیانی ساده و تا حد ممکن روان و بی‌تکلف بوده است، دست به ساختارشـــکنی زده و تنها به ذکر منابع در پایان مقاله بسنده کرده‌اند.

سطح ۱: (تجسم یا شناســـایی[۱۰]). بیاییم توضیح ویژگی‌های این ســـطح را با بررســـی یک مثال آغاز کنیم. شکل ۱ را در نظر بگیرید. حال کودکی را در نظر بگیرید که از او نام این شکل را پرسیده‌ایم و پاسخ او «دایره» بوده است. از این کودک سؤال کردیم که چرا به شکل ۱، نام دایره داده است و پاسخی که دریافت کردیم چنین بود: «چون شبیه توپ یا خورشـــید اســـت». اصرار ما به ارائهٔ توضیح یا دلیل

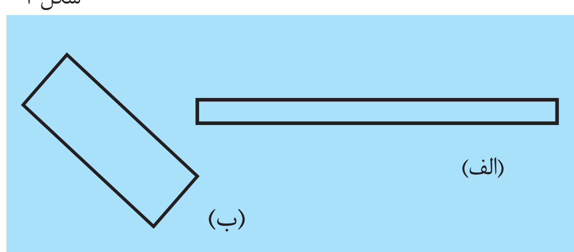
بیشتر به اینجا انجامید که این کودک جملهٔ پیشین خود را به شکل‌های مختلف تکرار کند و یا استدلالی به این گونه ارائه دهد: «این شکل یک دایره است چون گرد است» یا حتی استدلال خود را برای تشخیص دایره بودنِ شکل این گونه بیان کند که «چون یک دایره است»!



شکل ۱

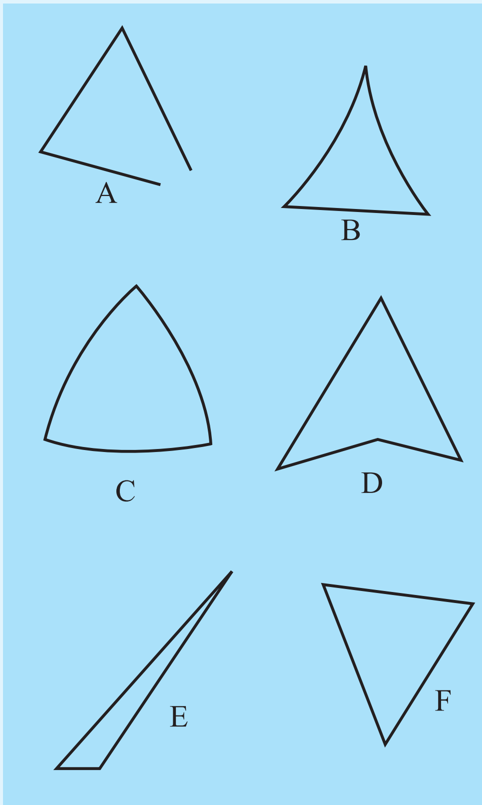
این دلایل چیزهایی نیستند که بیشتر ما به‌عنوان معلمان و آموزشگران ریاضی، با رضایت به آن‌ها نام استدلال بدهیم، ولی اگر «دلیل آوردن» را به‌عنوان تعریف واژهٔ استدلال بپذیریم، لزومی در درست بودن، ریاضی‌وار بودن یا منطقی بودن یک استدلال وجود ندارد. شیوه‌ای که این کودک برای استدلال به کار می‌برد، بر ظاهر شکل و الگوهای فیزیکیِ مشابه آن (در اینجا خورشید یا توپ) متکی است. کودک چیزی دربارهٔ «ویژگی‌های» دایره نمی‌داند و درک نمی‌کند. اگر به او گفته شود که «کتاب» یا «پنجره» به شکل مستطیل هستند، احتمالاً همین اشیاء را هم بعدها به‌عنوان معیاری برای سنجش مستطیل بودن یا نبودنِ یک شکل هندسی دیگر به کار خواهد برد. حتی دور از انتظار نیست کودکی که چنین استدلال می‌کند، پس از دیدن شکل ۲، هیچ‌کدام را مستطیل نداند؛ (الف) چون خیلی درازتر از آن است که مستطیل باشد و (ب) چون کج است! در واقع هیچ‌کدام از این دو تصویر، شبیه یک «در» در وضعیت معمول آن، نیستند.

شکل ۲



در نظریهٔ ون‌هیلی، چنین استدلال‌هایی که تنها مبتنی بر ظاهر و کلیت شکل و بدون توجه به اجزا و ویژگی‌های آن هستند، در سطح اول دسته‌بندی شده‌اند. به دلیلِ همین قضاوتِ مبتنی بر ظاهر فیزیکی شکل، به این سطح از استدلال، عنوان تجسم یا شناسایی داده‌اند.

شکل ۳ مربوط به مثالی است که در سایت ویکی‌پدیا[11] و در توضیح سطوح ون‌هیلی آورده شده است. جالب است که در اینجا، کودکی که توانایی استدلال او در حد سطح اول است، شکل‌های C ،B، A و D را مثلث می‌داند. شکل F از نظر او، یک مثلث وارونه است و شکل E، اصلاً مثلث نیست!



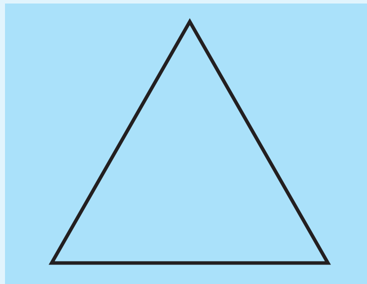
شکل ۳ (ویکی‌پدیا[12])

چرا او چنین پاسخ می‌دهد؟ چون از نگاه او، یک مثلث، شکلی است شبیه چیزی که ما به آن «مثلث متساوی‌الاضلاع» می‌گوییم و البته مثلث متساوی‌الاضلاعی که روی یکی از قاعده‌های خود قرار گرفته است (شکل ۴). این الگو[13]، معیار او برای تشخیص مثلث‌هاست. هر چه شکلی به این الگو شبیه‌تر باشد، امکان آنکه از نظر این کودک به‌عنوان مثلث شناخته شود، بیشتر است. بنابراین شکل‌های C ،B ،A و D، با آنکه اصلاً مثلث نیستند، چون کلیت آن‌ها به این الگوی ذهنی شبیه است، از دید او مثلث هستند. شکل E با آنکه یک مثلث است چون یکی از ضلع‌های آن در مقایسه با دو ضلع دیگر، بیش از اندازه کوچک است، شبیه الگوی

آنچه زوج ون‌هیلی، هوشمندانه به آن اندیشیدند آن بود که این بیگانگی ممکن است در نوع نگرش و استدلال دو نفر هم وجود داشته باشد و در چنین حالتی دور از انتظار نیست اگر هر دو به یک چیز نگاه کنند و دو چیز کاملاً متفاوت ببینند

ذهنی کودک نیست و شـــکل F هم با کمی ارفاق، مثلث است.

شکل ۴



سطح ۲: (تجزیه و تحلیل[۱۴]). می‌خواهیم پا به پای کودکی که دیدگاه او در سطح پیشین مورد بررسی قرار گرفت، سطوح ون‌هیلی را پشت سر بگذاریم. همان کودک را در نظر بگیرید که توانسته است پس از کسب مهارت کافی در ســطح اول، اندک اندک این سطح را پشت سر گذاشته و به درک بالاتری دست یابد. این بار اگر از او دلیل مستطیل بودنِ یک شکل را بپرسید، پاسخ متفاوتی خواهید شنید. او ممکن است بگوید «این شکل یک مستطیل است چون ضلع‌های روبه‌روی آن با هم، هم‌اندازه‌اند». به بیان دیگر، او در این مرحله، به «اجزای» شکل و «ویژگی‌های» آن اجزا توجه می‌کند. باید بگوییم او با اســتناد به یک تعریف ریاضی، به این شــناخت از مستطیل‌ها نرسیده، بلکه مقایسه، اندازه‌گیری، برش، تا زدن و به‌طور کلی «تجربه و مشاهده» راه‌هایی است که او را متقاعد ساخته‌اند که یک مستطیل چنین ویژگی‌ای دارد. یعنی پایهٔ استدلال او در این مرحله، بر آزمایش و استقرا بنا نهاده شده است. او هنوز درکی از «تعریف‌ها» و «اســتدلال‌های استنتاجی» ندارد. این موضوع منجر به پدید آمدن وضعیت‌هایــی نظیر آنچه در ادامه بیان می‌شود خواهد شد.

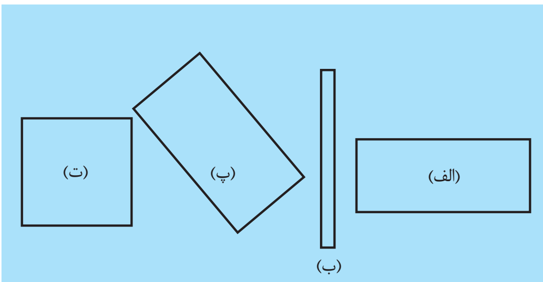
شما به‌عنوان معلم ریاضی، تعریفی از مستطیل ارائه می‌دهید:

مســتطیل یک چهارضلعی اســت که هر دو ضلع روبه‌روی آن با هم، هم‌اندازه‌اند و همچنین، چهار زاویهٔ قائمه دارد.

دانش‌آموزان سری تکان می‌دهند و تأیید می‌کنند. استنباط شما این اســت که آن‌ها منظور شما را درک کرده‌اند. سپس چند مستطیل متفاوت رسم می‌کنید و ســعی می‌کنید این ویژگی‌ها را در هــر یک از این مستطیل‌ها نشان دهید (شکل ۵). همه چیز به خوبی پیش می‌رود تا زمانی که به شــکل (۵-ت) می‌رسید. اینجاســت که برخــی از دانش‌آموزان‌تــان از پذیرش مستطیل بودن این شکل، سر باز می‌زنند چون این شکل یک مربع اســت. اگر از آن‌ها دربارهٔ دلیل مخالفت‌شـــان بپرسید، آنچه می‌گویند مشابه این جمله‌هاست:

«چون دو تا از ضلع‌های مســـتطیل درازتر از دو ضلع دیگرش است ولی همهٔ ضلع‌های مربع هم‌اندازه‌اند. از طرفی این شکل (مربع) خودش دارای یک نام است و چیزی را که مربع است، چگونه می‌توان مستطیل نامید؟»

شکل ۵



اگر دانش‌آموزان شـــما چنین استدلالی را ارائه دهند، توانایی اســـتدلال آن‌ها به احتمال نزدیک به یقین، از حد ســـطح دوم ون‌هیلی فراتر نرفته است. این ممکن است به آن دلیل باشـــد که در سال‌های پیشین، آموزش مناسبی دریافت نکرده‌اند یا مباحث کتاب و مطالبی که به آن‌ها ارائه می‌کنید، فراتر از سطح استدلال آن‌هاست. در هر دو حالت، شما با تکرار این مطلب که مربع نوعی مستطیل است، شاید تنها بتوانید آن‌ها را به ســمت به خاطر سپردن این مطلب سوق دهید ولی نمی‌توانید انتظار داشته باشید که آن‌ها این موضوع را همان‌طور که شما درک کرده‌اید، درک کنند.

می‌دانیـــم که در چهارچوب هندســـهٔ اقلیدســـی، در چهارضلعـــی‌ای که اندازهٔ هر دو ضلع روبـــه‌روی آن با هم برابرند، قائمه بودن یکی از زاویه‌ها، قائمه بودن ســـه زاویهٔ دیگر را ایجاب خواهد کرد. همچنین همین که شرایط بیان شده در تعریف مستطیل، برقرار گردند، برابری اندازه‌های دو قطر نتیجه‌ای ناگزیر اســـت. ولی اگر از دانش‌آموزی که در حد سطح دوم استدلال می‌کند بخواهید یک مستطیل را معرفی کند، ممکن است بگوید:

«یک مســـتطیل، شـــکلی اســـت که اندازهٔ ضلع‌های روبـــه‌روی آن با هم برابرند؛ همـــهٔ زاویه‌های آن قائمه‌اند و قطرهای آن نیز با هم، هم‌اندازه‌اند.»

در این تعریف، ویژگی «چهارضلعی بودن» بیان نشده اســـت (حذف شـــرط ضروری)؛ و از طرفی هم‌اندازه بودنِ قطرهـــا، که بیان آن در تعریف، ضروری نیســـت، به‌عنوان بخشی از تعریف مســـتطیل آورده شده است (بیان شرط زائد). این به آن سبب است که در این سطح، هنوز شرط‌های

لازم و کافی و رابطه‌های میان ویژگی‌های مختلف یک شکل، درک نمی‌شوند.

پس در یک جمع‌بندی می‌تـــوان گفت، دانش‌آموزانی که به اجزای شـــکل‌ها توجه می‌کنند و استدلالی مبتنی بر اجزا و ویژگی‌های آن‌ها ارائه می‌دهند، ولی هنوز تعریف‌ها، تداخل شکل‌ها و روابط بین ویژگی‌های اجزا را نمی‌بینند، در دسته‌بندی ون‌هیلی در سطح دوم قرار می‌گیرند.

سطح ۳: (استنتاج غیررسمی). کودک پیشین که اکنون دیگر شـــاید بهتر باشد او را کودک ننامیم[15]، توانسته است با گذر از سطح پیشین، به درک عمیق‌تری از استدلال دســـت یابد. او در سطح قبلی، مستطیل بودنِ یک مربع را می‌پذیرد، چون مســـتطیل یک چهارضلعی است که چهار زاویـــهٔ ۹۰ درجـــه دارد و مربع نیز این ویژگی را داراســـت. همچنین مربع یک لوزی هم هست؛ در واقع از نظر او، مربع یک نوع لوزی با برخی ویژگی‌های اضافی است. او اگرچه در این سطح تعریف‌ها را درک می‌کند، ولی هنوز اهمیت نقش آن‌ها را در پی‌ریزی ریاضیات درنیافته اســـت. او می‌تواند با دانستن اینکه مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است، استدلالی برای مجموع زاویه‌های یک چهارضلعی ارائه دهد. استدلال او شاید به این گونه باشد که چون یک چهارضلعی را می‌توان به دو مثلث تقسیم کرد، پس مجموع زاویه‌های داخلی آن نیز، دو برابر مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث اســـت. با این حال اگـــر از او بخواهید که چنین اثباتی را به زبـــان ریاضی و یا با نظم منطقی ارائه دهد، احتمالاً هنوز از عهدهٔ این کار برنمی‌آید. در نظریهٔ ون‌هیلی از چنین اثباتی که بر ویژگی‌های اجزا و منطق ریاضی استوار است ولی هنوز از دقت کافی در بیان برخوردار نیســـت، با عنوان «استنتاج غیررسمی» یاد شده اســـت که در برابر «استنتاج رسمی» قرار دارد. استنتاج رسمی، همان شیوهٔ استنتاجی اصولی و منطقی ریاضی است که در آن گام‌های استدلال استنتاجی با بهره‌گیری از اصول، تعاریف، حقایق پذیرفته شده و قضیه‌های اثبات شدهٔ پیشین، به دقت و به‌طور سلسله مراتبی تنظیم گردیده‌اند.

فردی که سطح استدلال کردن او از سطح سوم ون‌هیلی فراتر نرفته است، ممکن است حتی بتواند مراحل یک اثباتِ انجام شده را بفهمد، ولی هنوز نظم منطقی بین گام‌های این اثبات را درک نمی‌کند. این امر زمانی آشکارتر می‌گردد که از او بخواهید برای مسئله‌ای که پیش از این اثبات آن را ندیده اســـت، اثباتی ارائه دهد و یا تغییر کوچکی در داده‌های یک مسئلهٔ اثباتیِ حل شده، به‌وجود آورید و از او بخواهید اثبات جدیدی بر اســـاس این تغییرات تنظیم کند. حتی درک او از مسئله‌های اثباتی حل شده نیز، چندان گسترده نیست و محدود به اثبات‌هایی با گام‌های محدود است و چه بسا نتواند یک اثبات انجام شدهٔ پیچیده را دنبال کند. این فرد افزون بر آنکه توانایی ارائهٔ یک استنتاج رسمی را ندارد، بسیار محتمل است که هنوز قادر به تفکیک استدلال‌های استقرایی (تجربی) و استنتاجی نباشـــد و در ارائهٔ یک اثبات، هر دوی این‌هـــا را با هم درآمیزد؛ به‌طور مثال با تکیه بر این دریافت استقرایی که قطرهای یک مستطیل، یکدیگر را نصف می‌کنند، از آن برای اثبات هم‌اندازه بودن دو قطر استفاده کند. با این حال، این سطح از استدلال، سرآغاز درک استنتاج قضیه‌ها و منطق میان رابطه‌هاست.

سطح ۴: (استنتاج رسمی). اگر دانش‌آموز به این سطح از استدلال دست یابد، از او انتظار می‌رود که افزون بر توانایی ارائهٔ استدلال استنتاجی، از چنین استدلالی برای اثبات قضیه‌ها استفاده کند و بتواند گام‌های چنین اثباتی را به‌صورتی دقیق و با نظم منطقی بنویســـد. او می‌تواند نه تنها اثبات‌های داده شـــده را به خوبی درک کند، یا اثباتی مشـــابه یک مسئلهٔ دیده شده ارائه دهد، بلکه قادر است برای یک مسئلهٔ تازه که پیش از این اثباتی برای آن ندیده است، اثباتی تنظیم کند. در این سطح، فرد شرط‌های لازم و کافی را درک می‌کند و بنابراین می‌تواند تعریف‌هایی جامع ارائه دهد که در آن‌ها از بیان شرایط غیرضروری دوری شده باشد.

در این سطح، اهمیت اصول، استنتاج‌ها و رابطه‌های منطقی میان قضیه‌ها به خوبی درک می‌شوند و فرد به خوبی هندسهٔ اقلیدسی را درک می‌کند. با این حال، هنوز توانایی استدلال او به بالاترین حد تکامل نرسیده است، چرا که از نظر فردی، تفکر او محدود به ســـطح چهارم اســـت. اصولی که پایهٔ یک سیســـتم ریاضی را تشکیل می‌دهند. حقایقی «تغییرناپذیر» انگاشته می‌شوند و به این دلیل، برای وی که در این ســـطح قرار دارد، متفاوت بودن سیستم‌های اصل موضوعی، قابل درک نیست.

با اســـتناد به مباحث کتاب‌های درسی در دهه‌های اخیر، این ســـطح بالاترین ســـطحی است که دستیابی بـــه آن تا پایان دورهٔ دبیرســـتان انتظار می‌رود. پذیرش اینکه با تغییر اصول هندسی پذیرفته شده، ممکن است مثلث‌هایی با مجموع زاویه‌های داخلی بیشتر (و یا کمتر) از ۱۸۰ درجه تعریف کرد، برای کسی که در این سطح می‌اندیشد و استدلال می‌کند، درک شدنی نیست.

سطح ۵: (دقت موشکافانه). در این سطح از تفکر، قضیه‌ها در سیستم‌های اصل‌موضوعیِ گوناگون مطرح می‌شوند و شخص قادر است این سیستم‌های متفاوت را تجزیه، تحلیل و مقایســـه کند. اصول موضوع که در

سطح پیشین به‌عنوان اجزای تغییرناپذیر هندسی درک می‌شدند، می‌توانند به‌طور اساسی تغییر کنند. برای مثال، هندسه‌های نااُقلیدسی می‌توانند درک شوند. مطالعهٔ هندسه در سطح پنجم به شدت مجرد است. این سطحی است که در آن، فرد در سطح تفکر یک ریاضی‌دان به هندسه نگاه می‌کند. او درک می‌کند که تعاریف، قراردادی‌اند و ممکن است قابل انتساب به دریافت‌های عینی و جهان واقعی نباشند.

ویژگی‌های سطوح ون‌هیلی

پدیدآورندگان نظریهٔ ون‌هیلی، علاوه بر معیارهایی که برای تشخیص سطوح ارائه داده‌اند، ویژگی‌هایی مشترک میان سطوح تفکر برشمرده‌اند.

۱. سلسله مراتبی بودن[16] سطوح. زمانی می‌توان از شخص، عملکرد خوبی را در یک سطح انتظار داشت که وی به سطوحِ پیش از آن، دست یافته باشد. به‌عنوان نمونه نمی‌توان از کسی که سطح اول را نگذرانده است، انتظار داشت که به تفکر سطح دوم دست یابد.

۲. پیشروی[17] در سطوح. پیشرفت کردن یا نکردن در سطوح، بیش از آنکه به سن یادگیرنده بستگی داشته باشد، به آموزشی که دریافت می‌کند وابسته است. برخی از شیوه‌های آموزشی به ارتقای سطوح تفکر، کمک کرده در حالی که برخی دیگر سیر پیشرفت را کند می‌سازند. به گفتهٔ ون‌هیلی، هیچ رویکرد آموزشی‌ای نمی‌تواند سبب جهش از روی یک سطح شود. با این حال، وی اشاره می‌کند که می‌توان مهارت‌هایی بالاتر از سطحِ تفکر واقعیِ یک دانش‌آموز را به وی آموزش داد، چنانکه دانش‌آموز می‌تواند فرمول به دست آوردن مساحت یک شکل را به خاطر بسپارد یا این رابطه را که «هر مربع، یک مستطیل است» حفظ کند. در این صورت تنها مبحث مورد آموزش، به سطحی پایین‌تر از سطح واقعی خود تنزل یافته است و مبحث مورد نظر فهمیده نشده است. برای توضیح این مطلب، فرض کنید دانش‌آموزی که هنوز در سطح دوم تفکر به سر می‌برد، به اقتضای برنامهٔ درسی مجبور به یادگیری مطالبی شود که درک آن‌ها به توانایی استدلال در سطح سوم نیازمند است. این دانش‌آموز درکی از تعاریف ندارد و تداخل دسته‌های اشکال هندسی را نیز درک نمی‌کند ولی مجبور است به‌طور مثال بپذیرد که هر مربع، یک مستطیل یا لوزی است. او پس از بارها تکرار این مطلب در کلاس توسط معلم و دیگر دانش‌آموزان، بالاخره این موضوع را به خاطر می‌سپارد بی‌آنکه عمیقاً درک کرده باشد. از این رو، هر از چند گاهی ممکن است ببینیم که چنین دانش‌آموزانی این مطلب را به‌صورت «هر لوزی یک مربع است» نیز بیان می‌نمایند.

اگر معلم بتواند مسیر فکری دانش‌آموز را در ارائهٔ استدلالی نادرست دنبال کند، می‌تواند در رفع بدفهمی دانش‌آموز و یا کاستی شیوهٔ آموزشی، بهتر و مؤثرتر عمل نماید

۳. ماهیت ذاتی و بیرونی[18]. کودکی را در نظر بگیرید که سطح تفکر هندسی او در سطح اول ون‌هیلی است. این کودک در تشخیص مربع بودنِ یک شکل، ممکن است از شباهت آن به اشیای پیرامون خود کمک بگیرد، با این حال برابری چهار ضلع و راست بودن گوشه‌ها در درک مربع بودنِ شکل نقش دارند. البته کودک به‌صورت آگاهانه به این ویژگی‌ها توجه نمی‌کند چون آن‌ها در کلیت مربع حل شده‌اند (ذاتی بودن ویژگی‌ها). در سطح دوم، همین ویژگی‌ها به‌عنوان معیاری برای تشخیص مربع بودن یک شکل به‌کار می‌روند. یعنی فرد، پیش از مربع دانستنِ یک شکل، به هم‌اندازه بودن ضلع‌ها و راست بودن زاویه‌ها به‌صورت مستقل از کلیت شکل، توجه می‌کند و تنها در صورتی که این روابط برقرار باشند، مربع بودن شکل تأیید می‌گردد (بیرونی شدن ویژگی‌ها). این یعنی با آنکه هر شکل با اجزا و ویژگی‌های خود معین می‌شود ولی در سطح اول، تنها کلیت شکل‌ها درک می‌شود و به اجزای آن‌ها توجه نمی‌شود. این در حالی است که همین اجزا، در سطح دوم، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. پژوهشگران این موضوع را به این شکل بیان می‌کنند که اشیای ذاتی یک سطح، اشیای مورد مطالعه در سطح بعدی را تشکیل می‌دهند.

۴. زبان‌شناسی[19]. هر سطح، نمادها، زبان و روابطِ مخصوص به خود را داراست و بنابراین روابطی که در یک سطح، درست هستند، ممکن است در سطح بعدی، اصلاح گردند. به‌طور مثال، در سطح سوم، یک شکل را می‌توان با نام‌هایی متفاوت نامید. در سطح سوم این موضوع که هر مربع، یک مستطیل و یا یک متوازی‌الاضلاع است، پذیرفتنی است در حالی که چنین روابطی برای کسی که در سطح دوم تفکر هندسی قرار دارد، درک ناشدنی است.

۵. ناهماهنگی[20]. اگر دانش‌آموزی که در یک سطح معینِ ون‌هیلی قرار دارد، آموزشی در سطحی بالاتر یا پایین‌تر از سطح تفکر خویش دریافت کند، یادگیری و پیشرفت مورد انتظار، رخ نمی‌دهد. به‌ویژه اگر سطح تدریس معلم، مبحث آموزشی، واژگان یا عوامل دیگر مؤثر در یادگیری، در سطحی بالاتر از سطح تفکر دانش‌آموز باشند، یادگیری مفهومی رخ نمی‌دهد. به‌طور مثال، دانش‌آموزی که هنوز در سطح اول یا دوم تفکر، استدلال می‌کند، درکی از شرایط لازم و کافی ندارد. بنابراین از دیدگاه نظریهٔ ون‌هیلی کاملاً بدیهی است اگر چنین دانش‌آموزی، تعریف مربع یا مستطیل را به آن صورتی که در کتاب آورده شده، درک نکند و در یادگیری دسته‌بندی‌های تداخلی شکل‌ها با مشکل روبه‌رو گردد.

نتیجه‌گیری

به صورت کلی، توانایی استدلال (شهودی، استقرایی و استنتاجی) بخشی اساسی از ریاضیات مدرسه‌ای را تشکیل می‌دهد. به‌طور ویژه، در مباحث ریاضی و هندسهٔ دبیرستانی، دستیابی به توانایی ارائهٔ استدلال استنتاجیِ دقیق (یا اثبات)، یکی از هدف‌های کتاب‌های درسی این مقطع است. تجربه‌های معلمان و نیز تجربهٔ شخصی نگارندگان، گواه این واقعیت است که مشکلات یادگیری در ریاضیات و هندسه، در مسائلی که حل آن‌ها مستلزم برخورداری از توانایی استدلال است نسبت به مسائلی که با دانستن چند روش یا فرمول مشخص حل می‌شوند، خیلی بیشتر نمود می‌یابد. در بسیاری از موارد مشابه، آزمودن روش‌های رایج، همچون تکرار و تمرین چندان اثربخش نبوده و به نظر می‌رسد این بدفهمی‌ها باید به گونه‌ای عمیق‌تر شناسایی، بررسی و ریشه‌یابی گردند. از این رو نظریهٔ ون‌هیلی که خاستگاه نخستینِ آن، کلاس‌هایی با چنین مشکلاتی بوده‌اند، شایستهٔ توجه و معرفی است. این نظریه ممکن است پاسخگوی همهٔ مشکلات یادگیری هندسه و ریاضی نباشد، همچنان که از هیچ نظریهٔ دیگری چنین انتظاری نمی‌رود، ولی رویکرد آن در برابر مشکلات یادگیری مفهومی هندسه، قابل تأمل است. آگاهی معلمان ریاضی از این نظریه، شاید بتواند به آن‌ها در درک شیوهٔ تفکر دانش‌آموزان کمک کند. بدیهی است اگر معلم بتواند مسیر فکری دانش‌آموز را در ارائهٔ استدلالی نادرست دنبال کند، می‌تواند در رفع بدفهمی دانش‌آموز و یا کاستی شیوهٔ آموزشی، بهتر و مؤثرتر عمل نماید. ایدهٔ تفاوت سطوح تفکر و توانایی استدلال کردن در افراد مختلف، ضمن آنکه منطقی و پذیرفتنی به نظر می‌رسد، می‌تواند ناکارآمدی شیوه‌های تکرار و تمرین را در بهبود برخی چالش‌های یادگیری توجیه نماید. در این نوشتار کوشش شد، نظریهٔ ون‌هیلی که پیش‌تر نیز در برخی مقاله‌ها و پایان‌نامه‌های آموزش ریاضی معرفی و بررسی گردیده بود، به زبانی ملموس‌تر که برای معلمان ریاضی، به‌عنوان مخاطبان اصلی، قابل درک و استفاده باشد، معرفی گردد. نگارندگان امیدوارند که چنان مقصودی حاصل شده باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. Mary Crowley
2. The van Hiele Model of The Development of Geometric Thought

۳. به‌طور مثال پیوزی (۲۰۰۳)؛ فایز، گِدس و تیشلر (۱۹۸۸).

4. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)
5. TIMSS 2011 International Results in Mathematics
6. Pierre Marie Van Hiele
7. Dina Van Hiele-Geldof
8. Structure and Insight
9. Adele
10. Visualization or Recognition
11. https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Hiele_model
12. https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Hiele_model#/media/File:Van_Hiele_triangle_examples.png
13. prototype
14. analysis

۱۵. ون‌هیلی تأکید می‌کند که سطوح ون‌هیلی با سن بیولوژیکی فرد ارتباط چندانی ندارند، با این‌حال با توجه به ساختار کتاب‌های درسی، آنچه در وضعیت عادی انتظار می‌رود، آن است که افراد در سال‌های پس از ابتدایی و در آغاز دورهٔ نوجوانی به درک استدلال‌های استنتاجی دست یابند.

16. Sequential
17. Advancement
18. Intrinsic and extrinsic
19. Linguistics
20. Mismatch

منابع

1. Adele, G. H. (1998). The van Hiele model of geometric thinking implications for teaching k-8. Retrieved November 15, 2015 from www.webpages.uidaho.edu.
2. Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. *A research companion to principles and standards for school mathematic*s, 151- 178.
3. Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry*, K-12, 1- 16.
4. Fuys, D. (1984). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.
5. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, i-196.
6. Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning in Mathematics ,20, 27- 46.
7. Mason, M. (2009). The van Hiele levels of geometric understanding. *Colección Digital Eudoxus*, 1(2).
8. Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 *international results in mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.
9. Pusey, E. L. (2003). The van Hiele model reasoning in geometry: a literature review.
10. Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, 243 -252.

استدلال در مورد تساوی و تشابه

ترجمه: شیوا زمانی
دانشگاه صنعتی شریف

اشاره

تساوی و تشابه مفاهیم ارتباطی مرکزی در مطالعهٔ هندسه هستند. درک این روابط، به دانش‌آموزان ابزاری برای بررسی و تحلیل روابط بین شکل‌ها و خواص آن‌ها، از قبیل تبدیلات، ارائه می‌دهد. این روابط هندسی کمک می‌کند که بسیاری از مفاهیم در هندسه با هم ارتباط پیدا کنند و خود هندسه هم به زمینه‌های دیگر ریاضیات و به مسائل دنیای اطراف ما مرتبط شود. به‌عنوان مثال، مفهوم تشابه به استدلال‌های نسبت و تناسبی، عامل‌های مقیاس، رشد و زوال، و اندازه‌گیری غیرمستقیم ارتباط بسیار نزدیکی دارد. این ارتباطات و نظایر آن مطالعهٔ تساوی و تشابه را در کانون برنامهٔ درسی هندسه قرار می‌دهد.

تمرکز دو فعالیتی که در این فصل ارائه شده، بر تساوی و تشابه به این ترتیب است که درک این مفاهیم برای معنا بخشیدن به فعالیت‌ها و توسعه دادن استدلال محکمی برای جواب مسائل متناظر حیاتی است. مفاهیم هندسی دیگری که در فعالیت اول، دوران مربع، آمده است، شامل ایده‌هایی است مرتبط با مجموع زاویه‌های چندضلعی، دوران‌ها، و مساحت. فعالیت دوم فصل، میدان دید، شامل ارتباطاتی است با اندازه‌گیری، تحلیل داده‌ها، و توابع خطی.

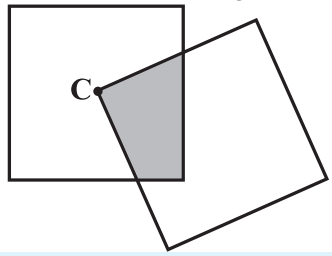
اگرچه معلم‌ها و جلسات کلاسی که این فصل ارائه می‌کند تخیلی است، این فعالیت‌ها در بسیاری از کلاس‌های درس، با طیف گسترده‌ای از دانش‌آموزان انجام شده است. جلسات، استدلال دانش‌آموزان و هدایت و راهنمایی واقعی معلم‌ها را بازتاب می‌دهد، اگر چه کمی ایده‌آل‌سازی و هموار شده‌اند تا خواندنشان راحت باشد.

کلیدواژه‌ها: استدلال، تساوی، تشابه، برنامهٔ درسی

دوران مربع

مسئلهٔ دوران مربع، دو مربع برابر را در وضعیت نشان داده شده در شکل ۱ نمایش می‌دهد.

شکل ۱. مسئله دوران مربع



دوران مربع

دو مربع مساوی (n در n) مانند شکل ۱ هم‌پوشانی دارند. رأس C از یکی از مربع‌ها مرکز مربع دیگر است. اگر مربع به رأس C بتواند حول مرکز C از مربع دیگر دوران پیدا کند، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ناحیهٔ هاشورخوردهٔ هم‌پوشانی دو مربع چیست؟

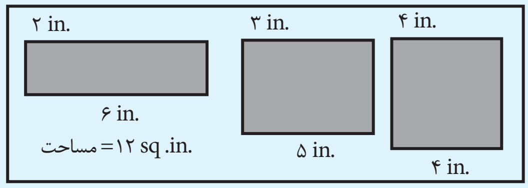
در کلاس درس

آقای لی از دانش‌آموزان کلاس هندسه خود (ترکیبی از دانش‌آموزان کلاس‌های ۹، ۱۰ و ۱۱) می‌خواهد

که وضعیت را در فعالیت دوران مربع بررسی کنند و حدسی را توسعه دهند. او همچنین از آن‌ها می‌خواهد که فکر کنند چگونه می‌خواهند حدس‌هایشان را برای هم‌کلاس‌هایشان توجیه کنند یا توضیح دهند. آقای لی دانش‌آموزانش را به گروه‌های سه نفره تقسیم می‌کند تا بر روی مسئله کار کنند.

دانش‌آموزان گروه ۱ بلافاصله شروع می‌کنند به کشیدن وضعیت‌های ممکن دیگری برای مربع دورانی و متوجه می‌شوند که در یک نقطه، ناحیهٔ هم‌پوشانی یک مربع خواهد بود که مساحتش دقیقاً $\frac{1}{4}$ مساحت مربع اصلی است. یکی از اعضای گروه حدس زد که این بیشترین مساحت ممکن است، زیرا قبلاً در یک فعالیت، دانش‌آموزان خودشان کشف کرده بودند که مربع، بیشترین مساحت را دارد و از آن، برای انجام این فعالیت، استفاده کردند. (برای دیدن یک مثال، شکل ۲ را ببینید).

شکل ۲. مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ اینچ

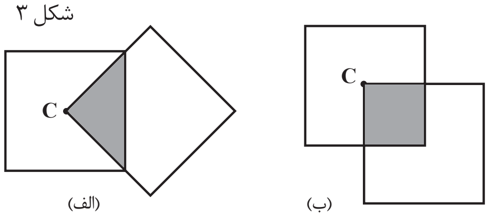


در گروه ۲، یک دانش‌آموز برای تجسم اینکه شکل ناحیهٔ هاشورخورده چگونه با دوران مربع بالایی تغییر می‌کند مشکل دارد. دانش‌آموز دیگری دو مربع مساوی را از کاغذ شطرنجی برید و از نوک مداد خود استفاده کرد تا رأس مربع دورانی را در مرکز مربع دیگر نگه دارد. او با کمک مدل فیزیکی خود به اعضای دیگر گروه نشان می‌دهد که شکل ناحیهٔ هم‌پوشانی چگونه تغییر می‌کند. یکی از اعضای گروه کنجکاو می‌شود که ببیند آیا گروه می‌تواند روشی برای شمارش مربع‌های کاغذ شطرنجی پیدا کند تا مساحت هم‌پوشانی دو مربع را به دست بیاورد. آقای لی مدل فیزیکی ساخته شده توسط گروه ۲ را می‌بینند و از آن‌ها می‌خواهد تا آن را به بقیهٔ کلاس نشان دهند. او فکر می‌کند بقیه هم ممکن است از ساختن چنین مدلی استفاده کنند.

پس از ده دقیقه دیگر بحث و اکتشاف، آقای لی از تمام گروه‌ها می‌خواهد که ایده‌ها و حدس‌های اولیه خود را با همهٔ کلاس در میان بگذارند:

کلسی: [به نمایندگی از گروه ۱] ما چند محل دیگر را برای مربع چرخان امتحان کردیم. دیدیم که این [او به ناحیهٔ هاشورخورده در شکل ۳ اشاره می‌کند] ممکن

شکل ۳



است یک مربع، یک مثلث، یا فقط یک چهارضلعی کلی شود. وقتی یک مربع و یک مثلث باشد، ما مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را $\frac{1}{4}$ مربع بزرگ به دست آوردیم. ما فکر می‌کنیم که این بزرگ‌ترین مقداری است که به دست می‌آید.

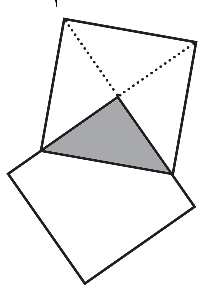
تولو: [به نمایندگی از گروه ۳] ما هم این را دیدیم، اما مطمئن نبودیم که چگونه می‌توانیم مساحت شکل‌های چهارضلعی دیگر را به‌دست آوریم. ممکن است آن‌ها بزرگ‌تر از مربع و مثلث باشند.

آقای لی: خب. آیا کسی راهی برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی‌های کلی‌تر به‌دست آورده است؟ آیا شما می‌توانید به دانش‌آموزان گروه ۳ کمک کنید؟ کس دیگری هست که در این مورد ایده‌ای داشته باشد؟

نیکول: [به نمایندگی از گروه ۴] من یک سؤال متفاوت اما مرتبط دارم. از کجا می‌دانید که شکل مثلثی $\frac{1}{4}$ مربع است؟ از کجا می‌دانید که وقتی مربع بالایی را می‌چرخانید، مثلثی را می‌سازد که دقیقاً از گوشه‌های مربع پایینی می‌گذرد؟

کِلسی: اوه، من می‌توانم پاسخ دهم چون خودم هم همین سؤال را داشتم. بنابراین در موردش فکر کردم، و [با بالابردن رسمش برای اینکه آن را به بقیه کلاس نشان دهد؛ شکل ۴ را ببینید] متوجه شدم اگر مرکز مربع زیری [اشاره به مربع ثابت] را به گوشه‌های این مربع وصل کنیم [با نشان دادن اینکه گروهش چطور پاره‌خط کشیده بود]، یک گوشه راست در مرکز خواهید داشت. و مربع بالایی [اشاره به مربع چرخان] هم یک گوشه راست دارد، بنابراین اگر شما آن را به اندازه بچرخانید باید دقیقاً در آن فضا جا بشود. پس اضلاعش باید از مرکز به گوشه‌های مربع زیری برسد.

شکل ۴. رسم کلسی که نشان می‌دهد مثلث $\frac{1}{4}$ مربع است



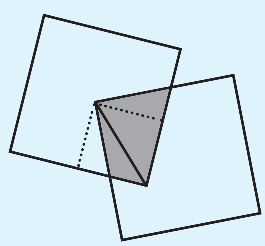
آقای لی: مشاهده خوبی بود. [به نیکول:] می‌بینی؟ [به کلاس:] همــه آن را می‌بینند؟ یادتان باشــد، ما می‌دانیم که قطرهای یک مربع بر هم عمود هستند. در این مثال، کلسی از این اطلاعات استفاده می‌کند تا نشان دهد که مربع دورانی می‌تواند طوری جای‌گذاری شود که دقیقاً بین دو قطر قرار گیرد، و ناحیهٔ هاشورخورده مثلثی خواهد بود که $\frac{۱}{۴}$ مربع زیری است. خوب، حالا اگر ناحیهٔ هاشورخورده چهارضلعی کلی‌تری باشد چه؟ آیا کسی راهی برای یافتن مساحت پیدا کرده است؟

آبرام: [به نمایندگــی گروه ۲] من فکر می‌کنم ما چیزی به‌دســت آورده‌ایم. ما ایــن دو مربع را از کاغذ شطرنجی بریدیم [مدل فیزیکی را که قبلاً ساخته شده بود بالا می‌گیرد]. و این گوشــه را در مرکز مربع دیگر قرار دادیم و مربع بالایی را چرخاندیم. ســپس ســعی کردیم با شــمردن تمام این مربع‌هــای کوچک روی کاغذ مســاحت جایی را که هم‌پوشانی داشتند برآورد کنیم. ممکن است اشتباه کرده باشیم، اما فکر می‌کنیم هر طور که مربع بالایی را بچرخانیم مساحت تغییری نمی‌کند. اعداد ما دقیقاً یکی نبــود، اما آن‌ها در همهٔ حالت‌ها تقریباً یکی بودند و ما فقط داشــتیم تخمین می‌زدیم.

ناتان: [به نمایندگی از گروه ۵] ما به روش متفاوتی این کار را انجام دادیم، اما به همین نتیجه رســیدیم- اینکه ناحیهٔ هاشورخورده همیشه $\frac{۱}{۴}$ مربع بزرگ زیری اســت. ما دیدیم که وقتی مربع بالایی را می‌چرخانیم، مقداری که در یک جهت وارد مربع می‌شــود مقداری است که شما در جهت دیگر از دست می‌دهید. نمی‌دانم که این حرف معنایی دارد یا نه ... توضیح دادنش سخت است.

آقای لی: می‌توانی به ما نشان دهی؟ بپر بیا [به ناتان می‌گوید که به جلوی کلاس بیاید]

ناتان: تــلاش خودم را می‌کنــم. [جلوی کلاس می‌رود و از شــکلی که آقای لــی اول کار روی تخته رسم کرده بود استفاده می‌کند. او چند پاره‌خط دیگر را به شــکل اضافه می‌کند، که در شکل ۵ نشان داده شده است. با اشــاره به پاره‌خط‌های متعامدی که در شکل با نقطه‌چین مشخص شده‌اند، او مشاهده خود را به اشــتراک می‌گذارد.] ما این خط‌ها را کشــیدیم چون می‌خواســتیم مساحت را [با اشــاره به ناحیهٔ هاشورخورده] با استفاده از مثلث‌ها به دست بیاوریم، و به ارتفاع دو مثلث نیاز داشــتیم. سپس من متوجه شدم که این مثلث‌های کوچک، یکی درون و دیگری بیرون ناحیهٔ هاشورخورده، یکی هستند. بنابراین، ما فکر کردیم که اگر با یک مربع شــروع کنیم [اشــاره به ناحیه هم‌پوشــانی به شکل یک مربع] و سپس آن را به راســت بچرخانیم [در خــلاف جهت عقربه‌های ساعت]، در این صورت، مقداری که چرخانده می‌شود یا مقداری که به دست می‌آید، به اندازهٔ همان مقداری اســت که از دست می‌دهید. پس مقدار این مساحت، همیشه ثابت است.



شکل ۵

چند دانش‌آموز: آهــا، حالا می‌فهمم. من با ناتان موافقم. من فکر می‌کنم این مســاحت همیشه یکی خواهد بود.

آقای لی: خب، چه کســی فکر می‌کند می‌توانیم حدسی در این مورد بنویسیم؟ آماده‌ایم که آن را جور کنیم؟ تولو؟

تولو: بله. وقتی دو مربع مساوی هم‌پوشانی داشته باشــند، مانند شــکل، آن‌گاه مقداری که هم‌پوشانی دارند همیشه یکی است، حتی اگر مربع بالایی حول مرکز دوران کند. آه، و مساحت $\frac{۱}{۴}$ مربع زیری است.

بحث در مورد کار دانش‌آموزان روی مسئلهٔ دوران مربع

همان‌طور که در اکتشاف کلاسی نشان داده شد، دانش‌آموزان می‌توانند گســتره‌ای از روش‌ها را برای حل مسئله مربع دورانی استفاده کنند. دانش‌آموزانی که برای تجسم موقعیت به کمک نیاز دارند می‌توانند به ســرعت یک مدل فیزیکی از کاغذ یا مقوا بسازند. دانش‌آموزان دیگر ممکن است بتوانند با مداد و کاغذ و بدون دســتورزی یک مدل کار کنند، در حالی‌که عــده‌ای دیگر ممکن اســت بتوانند موقعیــت را در ذهنشــان، بدون نیاز به شکل مجسم کنند. ابزار مفید دیگر یک بسته نرم‌افزار هندسه تعاملی است. یک مدل کامپیوتری پویا، ایده‌آل اســت چون به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد شکلی مانند آنچه در شکل ۱ نشان داده شده بسازند، مساحت مورد نظر را اندازه‌گیری کنند، و به سرعت «جواب» سؤال مساحت ماکسیمم را بیابند. دانش‌آموزانی که در برنامه‌های هندسی تعاملی ماهرند

می‌توانند به سرعت دو مربع بسازند، در حالی که ساختن تنها یک مربع ممکن است برای سایر دانش‌آموزان چالشی باشد. ساختن یک مربع دیگر هم که با اولی مساوی باشد، یک رأس آن در مرکز اولی باشد و بتواند بچرخد ممکن است بعضی از دانش‌آموزان را به چالش بکشد، اما انجام این کارها می‌تواند برای پشتیبانی و معرفی تساوی شکل‌های هندسی عالی باشد.

وقتی دانش‌آموزان با هر وسیله‌ای مدل‌ها را بسازند، سؤال‌هایی پدید می‌آید که لازم است خودشان یا با کمک هم‌کلاسی‌ها یا یک معلم پاسخ دهند. به‌عنوان مثال، دانش‌آموزان باید بفهمند که چگونه «مرکز» مربع ثابت را پیدا کنند. آن‌ها ممکن است سؤال‌هایی بپرسند از قبیل اینکه، «مرکز یک چندضلعی را چطور تعریف می‌کنید؟ آیا برای همهٔ چندضلعی‌ها یک تعریف داریم؟ یا تنها برای چندضلعی‌های منتظم؟» یا «جای مرکز یک چندضلعی منتظم را چگونه پیدا می‌کنید؟ آیا فرآیند پیدا کردن مرکز برای چندضلعی‌های منتظم مختلف فرق می‌کند؟ چطور می‌توانیم چک کنیم که مرکز را پیدا کرده‌ایم؟» دانش‌آموزان ممکن است به سؤال‌های دیگری هم برسند، مانند اینکه آیا ناحیهٔ هاشورخورده همیشه چهارضلعی است، و آیا ممکن است متوازی‌الاضلاع بشود.

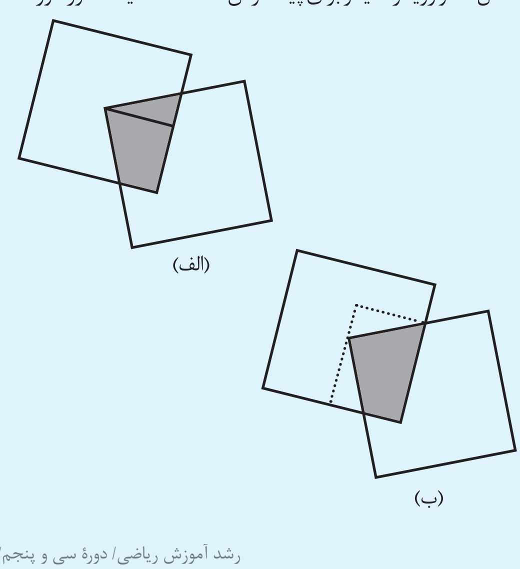
سؤال جالب دیگری که دانش‌آموزان می‌توانند با اکتشاف و در نظر گرفتن خواص مربع‌ها به آن جواب دهند همان است که نیکول در سناریوی کلاس جرقه‌اش را زد: ممکن است ناحیهٔ هاشورخورده مثلثی را پدید بیاورد که از رئوس مربع ثابت عبور نکند؟ اثبات رسمی این گزاره که اضلاع ناحیهٔ هم‌پوشانیِ مثلثی از رئوس مجاور مربع ثابت عبور می‌کنند ممکن است مورد نظر ما نباشد. اما، استدلال غیررسمی که کلسی و معلم کردند به همهٔ دانش‌آموزان کمک می‌کند که ارتباطاتی را با مفاهیم قبلی شکل دهند و فرضی را که خیلی از دانش‌آموزان ممکن است در نظر گرفته باشند توجیه کنند. در این حالت خاص، کلسی قطرهای مربع ثابت را کشید و فهمید که این قطرها یک گوشه راست می‌سازند. تحلیل او از موقعیت، نه تنها با استفاده از اطلاعات داده شده، بلکه با استفاده از ساختار مخفی، به او اجازه داد ارتباط مفیدی با پاسخ یک پرسش برقرار کند و درستی آن را توجیه کند. این‌ها همه عادت‌های استدلال باارزشی هستند که معلمان باید به‌طور منظم در کلاس درس پرورش دهند. بعد آقای لی با روشن کردن و بیان رابطه‌های آموخته شده قبلی (اینکه قطرهای یک مربع بر هم عمودند) از پاسخ کلسی پشتیبانی کرد.

اگرچه دانش‌آموزان به این سؤال که چگونه می‌توان مساحت یک چهارضلعی را در حالت کلی پیدا کرد، با فهمیدن اینکه این مساحت همان مساحت مربع کوچک است، به‌طور غیرمستقیم پاسخ دادند، این سؤال چیزی است که می‌توان آن را با عمق بیشتری با دانش‌آموزان اکتشاف کرد. به‌عنوان مثال، اگر ناتان دو مثلث مساوی را در شکل کشف نکرده بود، معلم می‌توانست با کمک به دانش‌آموزان برای یافتن مساحت چهارضلعی‌های کلی آن‌ها را پیش براند. یافتن مساحت شکل‌های کلی‌تر اغلب با شکستن آن‌ها به شکل‌های آشناتری که مساحتشان راحت‌تر محاسبه می‌شود امکان‌پذیر است. ناتان و اعضای گروهش تلاش کردند چهارضلعی را به دو مثلث تقسیم کنند. یک رویکرد دیگر می‌توانست تقسیم چهارضلعی به یک مثلث راست گوشه و یک ذوزنقه باشد با رسم خط عمودی از مرکز مربع ثابت به یکی از اضلاع آن (شکل ۶. (الف) را ببینید). رویکرد دیگر می‌توانست تشکیل یک مستطیل باشد با اضافه کردن دو مثلث راست گوشه به چهارضلعی هاشورخورده، پیدا کردن مساحت مستطیل، و کم کردن مساحت دو مثلث اضافه شده (شکل ۶. (ب) را ببینید). دانش‌آموزان همچنین ممکن است متوجه شوند که این دو مثلث کوچک اضافه شده مثلث‌های راست گوشهٔ برابری هستند. به اشتراک گذاشتن طیفی از رویکردها به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد رویکردی را انتخاب کنند که برای آن‌ها معقول‌تر به نظر می‌رسد.

سؤال‌ها و نکته‌های قابل بحث ممکنی که در بندهای قبل پیشنهاد شد تنها تعداد کمی از سؤالاتی

وقتی دانش‌آموزان با هر وسیله‌ای مدل‌ها را بسازند، سؤال‌هایی پدید می‌آید که لازم است خودشان یا با کمک هم‌کلاسی‌ها یا یک معلم پاسخ دهند. به‌عنوان مثال، دانش‌آموزان باید بفهمند که چگونه «مرکز» مربع ثابت را پیدا کنند

شکل ۶. دو رویکرد دیگر برای پیدا کردن مساحت ناحیهٔ هاشورخورده



(الف)

(ب)

هستند که لازم است خود دانش‌آموزان در مورد آن‌ها فکر کنند. پاسخ این پرسش‌ها به دانش‌آموزان کمک می‌کند موقعیتی را که بررسی می‌کنند بفهمند. بدون درک محکمی از اینکه چه چیزی دارد اتفاق می‌افتد و چرا، دانش‌آموزان نمی‌توانند استدلال عمیق‌تری را که برای توجیه جواب مسئله نیاز دارند توسعه دهند. جدول ۱ بعضی از عناصر کلیدی هندسه و عادت‌های استدلالی (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) را که با این مسئله و کار اولیهٔ دانش‌آموزان روی آن به نمایش درآمد مشخص می‌کند.

جدول ۱. عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی نمایان در مسئله دوران مربع

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در هندسه

حدس زدن در مورد اشیاء هندسی

استدلال استنتاجی و استقرایی با استفاده از طیفی از نمایش‌ها

ساختن و ارزیابی برهان‌های هندسی

پیشبرد برهان‌های (غیر رسمی) برای توجیه یک حدس

رویکردهای هندسی چندگانه

تحلیل یک موقعیت با استفاده از رویکردهای تبدیلی و ترکیبی

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

جست‌وجوی ساختار مخفی با رسم خط‌های کمکی

جست‌وجوی الگوها و رابطه‌ها

- آزمون نظام‌مند حالت‌ها
- در نظر گرفتن حالت‌های خاص

ساختن حدس‌های ابتدایی

تأمل روی یک جواب

توجیه یا تحقیق درستی یک جواب از طریق اثبات غیررسمی

بخش بعد نشان می‌دهد که دانش‌آموزان کلاس آقای لی از حدس فراتر می‌روند و با هم کار می‌کنند تا یک برهان رسمی (یا اثبات) برای آن بیابند. اگرچه یک اثبات رسمی همیشه هدف یک درس نیست و ممکن است انتظار مناسبی از همهٔ دانش‌آموزان نباشد، نگاه اجمالی که به دانش‌آموزان در حال فرموله کردن اثبات حدس دوران مربع شده است، نشان می‌دهد که وقتی استدلال و معنایابی در کلاس ریاضی پرورانده شود چه چیزهایی ممکن می‌شود.

نگاه اجمالی که به دانش‌آموزان در حال فرموله کردن اثبات حدس دوران مربع شده است، نشان می‌دهد که وقتی استدلال و معنایابی در کلاس ریاضی پرورانده شود چه چیزهایی ممکن می‌شود

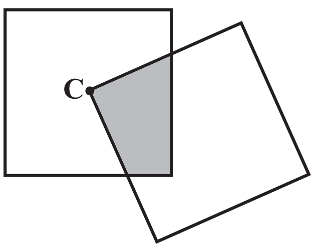
اثبات حدس مربوط به مسئله دوران مربع

آقای لی از دانش‌آموزانش خواست تا با توجیه حدسی که در شناسایی موقعیت شکل ۷ فرموله کرده‌اند قدم بعدی را در اکتشاف بردارند.

اثبات حدس

حدس خود را از اکتشاف دوران مربع- یعنی اینکه مساحت ناحیهٔ هاشورخورده همواره $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع غیردورانی به مرکز C است و به شکل ناحیهٔ هاشورخورده بستگی ندارد ثابت کنید.

شکل۷. حدس دوران مربع: مساحت ناحیهٔ هاشورخورده همیشه $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع غیردورانی به مرکز C است.



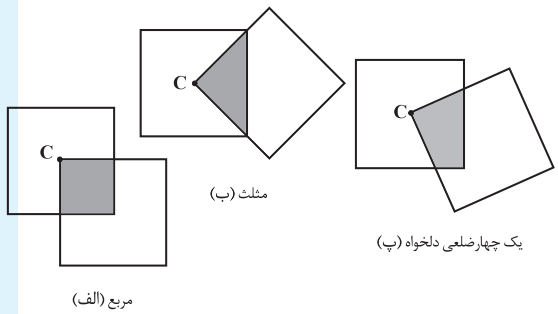
در کلاس درس

آقای لی حدس را روی تخته نوشت و همهٔ دانش‌آموزان را به گروه‌هایشان برگرداند تا روشی را برای اثبات حدس توسعه دهند. او از دانش‌آموزان خواست از چیزهایی که از همکلاسی‌های دیگرشان دیده یا شنیده‌اند استفاده کنند تا روشی برای متقاعد کردن دیگران- شاید کسی که در کلاس نیست- به اینکه حدس درست است پیدا کنند.

دانش‌آموزان گروه ۱ به کار اصلی خود بازمی‌گردند و تصمیم می‌گیرند طیفی از حالت‌ها- یعنی وضعیت‌های متنوعی برای مربع چرخان را نشان دهند. آن‌ها برنامه‌ریزی می‌کنند که مساحت ناحیه هم‌پوشانی را برای هر حالت محاسبه کنند و نشان دهند که همواره $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع ثابت است. دانش‌آموزان گروه ۳ همین خط فکری را دنبال می‌کنند. آن‌ها در مورد راه‌های به‌دست آوردن مساحت ناحیهٔ هاشورخورده

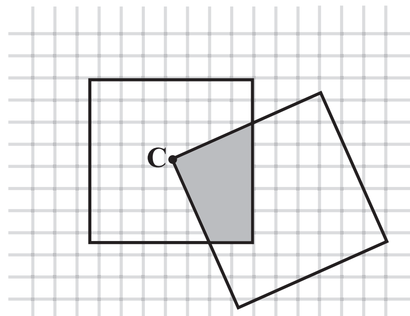
در حالت کلی با هم بحث می‌کنند. یک دانش‌آموز می‌خواهد بداند آیا نشان دادن اینکه مساحت این ناحیه در سه حالت مختلف $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع ثابت است کافی است- یعنی، وقتی ناحیهٔ هم‌پوشانی (الف) یک مربع، (ب) یک مثلث، (پ) یک چهارضلعی دلخواه است- همان‌طور که در شکل ۸ نشان داده شده است.

شکل۸. سه حالت ممکن برای ناحیهٔ هاشورخورده



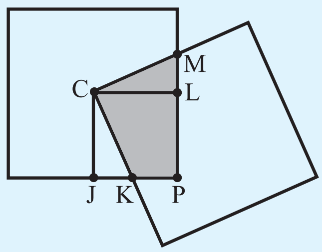
یک دانش‌آموز در گروه ۲ می‌خواهد بداند آیا مساحت‌هایی که گروه با استفاده از کاغذ شطرنجی تخمین زده است به اندازه کافی قانع‌کننده است؟ اعضای گروه در مورد این روش مطمئن نیستند. آن‌ها شمارش همه مربع‌های ریز شطرنجی و سپس تخمین زدن مربع‌هایی را که کاملاً مشمول ناحیهٔ هاشورخورده نیستند کار سختی دیده‌اند (شکل ۹. را ببینید). گروه تصمیم می‌گیرد که روش‌های دیگری را برای اثبات حدس جست‌وجو کند.

شکل ۹. استفاده از کاغذ شطرنجی برای به دست آوردن مساحت



گروه‌های ۴ و ۵ با یکدیگر کار می‌کنند و ایده‌هایی را که مربوط به کشف ناتان است با یکدیگر به اشتراک می‌گذارند، اینکه وقتی مربع چرخان از یک وضعیت به وضعیت دیگری حرکت می‌کند مقدار مساحتی که ناحیهٔ هاشورخورده از دست می‌دهد برابر است با آنچه به دست می‌آورد. ناتان نمودار خود را دوباره می‌کشد، بعضی از پاره‌خط‌های غیرلازم را کنار می‌گذارد و نقاط تقاطع مهم را برچسب می‌زند، همان‌طور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، و دانش‌آموزان وارد بحث زیر می‌شوند:

شکل۱۰. رسم ناتان با برچسب‌ها



نیکول: خب، حالا می‌بینم وقتی ما شکل مربع و شکل مثلث را داریم، مساحت هم‌پوشانی $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع زیری است. اما ناتان، من هنوز نمی‌فهمم که تو در مورد از دست دادن یک مقدار مساحت و به‌دست آوردن مقدار دیگر وقتی آن را می‌چرخاندی چی می‌گفتی.

زِن: فکر می‌کنم، من می‌توانم به تو نشان دهم. به این مربع نگاه کن، با رئوس C، J، P، و L. به این ترتیب مربع CJPL را داریم، و این ناحیه هم‌پوشانی است. اما وقتی تو مربع بزرگ بالا را این مقدار [به زاویهٔ JCK که از دوران مربع بالایی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به وجود می‌آید اشاره می‌کند] حرکت می‌دهی، به همان مقدار از سمت دیگر حرکت می‌کند [به زاویهٔ LCM اشاره می‌کند]. به این ترتیب مثلث JCK و مثلث LCM را داریم، و هر دو مساحت یکسانی دارند. ما تنها باید دیگران را متقاعد کنیم که درست می‌گوییم، همان‌طور که آقای لی گفت.

ناتان: خب، آن دو مثلث ارتفاع یکسانی دارند. چون هر دو در زوایای J و L راست گوشه هستند، و پاره‌خط CJ طولی برابر با پاره‌خط CL دارد. هر دو نصف طول یک ضلع مربع‌اند. اما چطور می‌توانیم دیگران را متقاعد کنیم که قاعده‌های دو مثلث یکی است؟ چرا JK برابر LM است؟

ویل: آن‌ها برابرند دیگر. مثل همان چیزی که زِن گفت. وقتی شما مربع بالایی را این مقدار حرکت می‌دهید، به همان مقدار از سمت دیگر حرکت می‌کند.

ناتان: اما می‌دانی آقای لی چه می‌خواهد بگوید... «چرا؟» «از کجا می‌دانید؟» از کجا مطمئنیم که پاره‌خط‌های JK و LM برابرند؟ آیا این را قبلاً جایی دیده‌ایم؟

نیکول: من دو مثلث را می‌بینم، JKC و LMC. آیا می‌توانیم با استفاده از قسمت‌های دیگر، نشان دهیم که

این دو مثلث مساوی‌اند؟ ناتان گفت پاره‌خط‌های CJ و CL با هم مساوی‌اند و هر دو مثلث در J و L گوشه‌های راست دارند. حالا، در کنار پاره‌خط‌های JK و LM، قطعهٔ سوم برای نشان دادن تساوی مثلث‌ها چیست؟ در مورد یک جفت دیگر از زاویه‌ها، مانند زاویه‌های JKC و LCM چه فکر می‌کنید؟

زِن: بله، من فکر می‌کنم که تو درست می‌گویی. زاویهٔ JCK و زاویهٔ KCL یک زاویهٔ راست می‌سازند. همین‌طور زاویهٔ LCM و زاویهٔ KCL. بنابراین اگر ما اندازهٔ زاویهٔ KCL را از زاویه‌های راست کم کنیم، این دو زاویه را به دست می‌آوریم (به JKC و LCM اشاره می‌کند) که یک اندازه‌اند.

اولیویا: فکر می‌کنم حالا می‌توانیم همه چیز را در کنار هم قرار دهیم. اگر نشان دهیم که این دو مثلث کوچک با استفاده از ض ز ض برابرند، نشان داده‌ایم که مساحت تکهٔ هاشورخورده همیشه یکی است. همان چیزی که ناتان گفت، فرق نمی‌کند که شما چقدر مربع بالایی را می‌چرخانید، آنچه شما در مثلث JKC از دست می‌دهید، در مثلث LMC به دست می‌آورید.

بحث در مورد یافتن اثبات توسط دانش‌آموزان

این فعالیت ثانویه دانش‌آموزان را وادار کرد در مورد حدس مربوط به دوران مربع عمیق‌تر فکر کنند. تمام گروه‌ها ایده‌هایی برای دست‌یابی به برهانی برای اثبات داشتند. دانش‌آموزان این ایده‌ها را بر کار قبلی خود در توسعه حدس و به اشتراک گذاشتن و بحث کردن کلاسی به دنبال اکتشافات اولیه‌شان بنا گذاشته بودند. اگر چه برهانی که توسط گروه‌های ۴ و ۵ در بخش بالا توسعه پیدا کرد از یک روش خاص پیروی می‌کند- یک رویکرد ترکیبی به یک اثبات صوری- بقیهٔ گروه‌ها در جهت‌های کمی متفاوت حرکت کردند. دو رویکردی که دانش‌آموزان یا معلم در سناریوی بالا صریحاً به آن‌ها اشاره نشد، رویکرد تحلیلی (یا مختصاتی) و رویکرد تبدیلی‌اند.

رویکرد تحلیلی به اثبات، از صفحهٔ مختصات xy استفاده می‌کند. چنین رویکردی از عملیات حساب و جبری استفاده می‌کند و به برقراری ارتباط با کار قبلی دانش‌آموزان در این زمینه‌ها کمک می‌کند. یک اثبات تبدیلی از این واقعیت استفاده می‌کند که مربع بالایی حول یک مرکز داده شده می‌چرخد. دانش‌آموزان می‌توانند سپس استدلال کنند که پاره‌خط‌های CJ و CL در نمودار ناتان به یک اندازه حول مرکز C دوران کرده‌اند، بنابراین اندازهٔ زاویهٔ JKC برابر با اندازهٔ زاویهٔ LCM است. این یک راه جایگزین برای نشان دادن چیزی است که اولیویا با استفاده از کم کردن زاویه‌ها یا زاویه‌های متمم انجام داد. یک برهان تبدیلی دیگر می‌تواند از چهار دوران ۹۰ درجه‌ای متوالی ناحیهٔ هاشورخورده به دست بیاید که نشان می‌دهد ناحیهٔ هاشورخورده $\frac{۱}{۴}$ کل مربع زیری است.

تمرکز این فعالیت بر این است که به دانش‌آموزان کمک کند برهان‌های هندسی خود را توسعه دهند و ارزیابی کنند. پس در حالی‌که دانش‌آموزان با هم کار می‌کنند، به جای اینکه آنچه را که درست به نظر می‌رسد بدون اثبات بپذیرند باید ایده‌های خودشان و دیگران را زیر سؤال ببرند. این فرایند در پرسش‌های ناتان از خودش و از اعضای گروهش در مورد اینکه چرا می‌توان گفت پاره‌خط‌های JK و LM برابرند، مشهود است. با بازتاب یک تذکر آشنا از معلم- «از کجا می‌دانید؟» ناتان اعضای گروهش را تشویق کرد که ادامه دهند تا برهان محکمی برای این حدس بیابند. این سؤال ساده، «از کجا می‌دانید؟» سؤال مهمی است برای کمک به دانش‌آموزان در استفاده از عناصر کلیدی استدلال و معنایابی و توسعه عادت‌های استدلالی، همان‌طور که در جدول ۲ (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) خلاصه شده است.

جدول۲. عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی به نمایش درآمده در اثبات حدس

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در هندسه

ساخت و ارزیابی برهان‌های هندسی

در نظر گرفتن نقش شهود تجربی

توسعهٔ یک برهان استنتاجی صوری برای حصول اطمینان ریاضی

رویکردهای چندگانهٔ هندسی

تحلیل یک موقعیت با استفاده از رویکردهای ترکیبی و تبدیلی

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

جست‌وجوی الگوها و رابطه‌ها

اجرای یک استراتژی

سازماندهی ایده‌ها برای یک جواب

انجام استنتاج‌های منطقی بر پایه پیشرفت فعلی

تأمل روی یک جواب

در نظر گرفتن معقول بودن یک جواب

موجه کردن یک جواب از طریق اثبات رسمی

میدان دید- یافتن معنای تشابه

در فعالیتی که می‌آید، دانش‌آموزان مسئله میدان دید را کشـــف می‌کنند (اقتباس شــده از مسئلۀ لولۀ مشاهده [کونی و همکاران، ۱۹۹۶، ص. ۴۶])

میدان دید

بیشتر ما یک وقتی از یک لولۀ مقوایی یا پلاستیکی به‌عنوان تلسکوپ اســـتفاده کرده‌ایم. اگرچه لوله واقعاً چیـــزی را که می‌بینیم بزرگ نمی‌کند، اما به ما کمک می‌کند بر یک میدان دید باریک تمرکز کنیم. در این مسئله، شـــما روابط بین متغیرهای مرتبط با این لولۀ مشاهده و میدان دیدی را که توسط لوله فراهم می‌شود، کشف می‌کنید.

رویکرد دانش‌آموزان به این مســئله از طریق سه فعالیت که به آن‌ها اجازه می‌دهد در زمینه‌های ریاضی متنوعی کار کنند، اتفاق می‌افتد.

فعالیت ۱

در اولین فعالیت مربوط به مسئلۀ میدان دید، کار با لوله‌های مشـــاهده دانش‌آموزان را مشغول گردآوری داده‌ها و اندازه‌گیری می‌کند و به آن‌ها نگاهی اجمالی به الگوها و جبر می‌دهد.

فعالیت ۱: با اســـتفاده از لولۀ مشاهده‌ای که به شما داده شــده، داده‌ها را جمع‌آوری کنید تا رابطه‌ای بین فاصله چشم بیننده از یک دیوار عمودی و میدان دید بیننده از آن دیوار به دست بیاورید.

خوب اســـت دانش‌آموزان در فعالیت ۱ از لوله‌هایی با طول و قطر یکســـان استفاده کنند. در این صورت دانش‌آموزان گروه‌های مختلف می‌توانند داده‌ها را با هم مقایسه و ترکیب کنند تا حدس‌ها را بسازند. قبل از اینکه دانش‌آموزان داده‌های خود را گردآوری کنند، معلمـــان می‌توانند میدان دید را مســـاحت دایره‌ای تعریف کنند که روی دیوار عمودی از طریق لوله قابل مشاهده است. یا برای ساده‌تر کردن ریاضیات مسئله ممکن اســـت ترجیح دهند که آن را قطر (یا شعاع) دایرۀ قابل مشاهده با لوله تعریف کنند. راه دیگر این اســـت که اجازه دهند، با فکر خودشان میدان دید را تعریف کنند و آن را اندازه بگیرند.

در کلاس درس

خانم وَن لِدجه لوله‌های دستمال توالت، نوار چسب، و مترهـــای چوبی را بین گروه‌های ســـه یا چهارتایی دانش‌آموزان کلاس هندسه خود تقسیم می‌کند. با این مواد، به علاوۀ مداد و کاغذ برای ثبت داده‌ها، هر گروه یک فضای خالی روی دیوار کلاس پیدا می‌کند. خانم ون لدجه پیشـــنهاد می‌کند که از چسب نواری برای نشان دادن قطر میدان دید استفاده شود. بیشتر گروه‌ها یک باریکۀ بلند از نوار را روی دیوار می‌چســـبانند، به شکل موازی با کف کلاس یا عمود بر آن.

استراتژی‌های گردآوری داده‌ها بین گروه‌ها متفاوت اســـت، اما اغلب کم‌کم فاصلۀ بیننـــده از دیوار (متغیر مستقل) را افزایش می‌دهند و از تکنیک‌های متنوعی برای اندازه‌گیری میدان دید بیننده روی دیوار (متغیر وابسته) استفاده می‌کنند. بحثی در مورد تکنیک‌های اندازه‌گیـــری بین دو گروه همســـایه در می‌گیرد. یک دانش‌آموز، اســـتیون، متوجه می‌شود که دانش‌آموزان گروه کناری فاصلۀ چشم بیننده تا دیوار را اندازه‌گیری می‌کنند، اما گروه او فاصلۀ انگشتان پای بیننده تا دیوار را اندازه می‌گیرد. استیون از اعضای گروه کناری می‌پرسد چرا ایـــن اندازه‌گیری را برای ثبت انتخـــاب کرده‌اند. خانم ون لدجه مکالمه را می‌شـــنود و تمام گروه‌ها را متوقف می‌کند تا مشاهده و سؤال استیون را با آن‌ها در میان بگـــذارد و به یک اجماع روی چگونگی گردآوری داده‌های درست برای این فعالیت برسند. معلوم می‌شود که گروه‌ها چهار طول مختلف را اندازه‌گیری می‌کنند (شکل ۱۱ را ببینید)

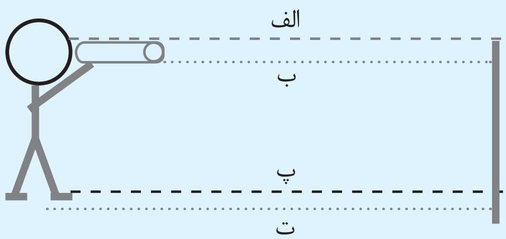
(الف) فاصلۀ چشم بیننده تا دیوار

(ب) فاصلۀ انتهای لوله (انتهای دور از چشـــم) تا دیوار

(پ) فاصلۀ انگشتان پای بیننده از دیوار

(ت) فاصلۀ پاشنۀ پای بیننده از دیوار

شکل ۱۱. کدام فاصله مفیدترین اندازه است؟



تمرکز این فعالیت بر این است که به دانش‌آموزان کمک کند برهان‌های هندسی خود را توسعه دهند و ارزیابی کنند. پس در حالی‌که دانش‌آموزان با هم کار می‌کنند، به جای اینکه آنچه را که درست به نظر می‌رسد بدون اثبات بپذیرند باید ایده‌های خودشان و دیگران را زیر سؤال ببرند

پس از بحث مختصری در مورد موضوع و بازخوانی فعالیت، همهٔ دانش‌آموزان توافق می‌کنند که فاصلهٔ چشم بیننده تا دیوار باید اندازه‌گیری شود. این مکالمه دو فرض را هم نمایان می‌کند- اینکه بدن بیننده موازی دیوار است و اینکه افق دید بیننده عمود بر دیوار است (یعنی سر به سمت پایین یا بالا خم نشده است).

در پنج دقیقه بعدی، اغلب گروه‌ها گردآوری داده‌هایشان را کامل کرده‌اند و شروع کرده‌اند به جست‌وجوی رابطه‌ای بین فاصلهٔ بیننده از دیوار و میدان دید بیننده. لئو، خان، و ملیسا تصمیم می‌گیرند که نقاط داده را روی یک صفحهٔ مختصات رسم کنند، که محور x آن فاصله از دیوار و محور y آن میدان دید را نمایش دهد. آن‌ها در مورد نمودار حاصل بحث می‌کنند:

ملیسا: خب، این دقیقاً یک خط نیست [با حرکت بین نقطه‌های رسم شده روی کاغذ رسم مقابلش]، اما من می‌گویم که ما یک رابطهٔ خطی داریم. ما فقط در اندازه‌گیری خیلی دقیق نیستیم. شاید باید یک بار دیگر تلاش کنیم و اندازه‌گیری‌هایمان را چک کنیم. من شرط می‌بندم که اگر اندازه‌گیری‌های بهتری داشتیم این شباهت بیشتری به خط داشت.

خان: معادلهٔ یک خط چیست؟ بیایید فقط آن را بنویسیم و با خانم وی چک کنیم. من نمی‌خواهم همه چیز را دوباره اندازه بگیرم.

لئو: یک دقیقه صبر کن- من دو سؤال دارم. اول، این کلاس هندسه است، پس چرا ما داریم نقاط داده را رسم می‌کنیم و به دنبال معادلهٔ یک خط می‌گردیم؟ این مثل جبر است. دوم، اگر قرار است رابطه‌ای بین فاصله و میدان دید پیدا کنیم، مگر قرار نیست از πr^2 استفاده کنیم، یا حداقل از قطر میدان دید؟ این کار کمی هندسه وارد کار می‌کند.

ملیسا: منظورت را می‌فهمم. اما این ممکن است به ما رابطهٔ متفاوتی بدهد، چیزی مثل یک سهمی. فکر می‌کنم خط به اندازهٔ کافی خوب است.

خان: باشد، موافقم. ما می‌توانیم از نقاطی که رسم کردیم با همان πr^2 برای به دست آوردن «میدان دید» واقعی استفاده کنیم. خط اطلاعات لازم برای این کار را به ما می‌دهد.

[خان به جست‌وجو برای یافتن معادله خطی که نقاط داده را برازش کند ادامه می‌دهد. او خط کمرنگی می‌کشد که از نزدیک مبدأ مختصات می‌گذرد و حدوداً سه نقطه از هشت نقطه را به هم وصل می‌کند. پنج نقطهٔ دیگر نزدیک خط قرار می‌گیرند، چهار تا بالای خط و یکی پایین آن. او از دوتا از نقاط داده روی خطش استفاده می‌کند تا شیب را محاسبه کند.]

خان: فکر می‌کنم این خط شبیه $y=۰/۲x$ به اضافهٔ چیز کوچکی است. ببینیم گروه استیون چه چیزی دارد.

ملیسا: بله، به نظر درست می‌آید. هر بار که من ۲۰ سانتی‌متر عقب می‌رفتم، ۳ یا ۴ سانتی‌متر بیشتر از نوار روی دیوار را می‌دیدم. این مثل شیب خط است، $\frac{۴}{۲۰}$ یا ۰/۲، معادلهٔ تو باید درست باشد.

معلم تصمیم گرفت تکنیک‌های اندازه‌گیری را قبل از اینکه آن‌ها گردآوری داده را تمام کنند به بحث بگذارد. این به دانش‌آموزان کمک کرد مجدداً بر متن فعالیت تمرکز کنند و در مورد مناسب و معقول بودن اندازه‌گیری‌هایشان انتخاب‌های درستی کنند

بحث کار دانش‌آموزان در فعالیت ۱

در شروع اکتشاف، معلم ترجیح داد که روش گردآوری داده را به خود دانش‌آموزان واگذار کند. اگرچه دانش‌آموزان به سرعت روش‌هایی برای جمع‌آوری داده پیدا کردند، زود متوجه شدند که روش‌هایشان تفاوت‌هایی با هم دارد. معلم تصمیم گرفت تکنیک‌های اندازه‌گیری را قبل از اینکه آن‌ها گردآوری داده را تمام کنند به بحث بگذارد. این به دانش‌آموزان کمک کرد مجدداً بر متن فعالیت تمرکز کنند و در مورد مناسب و معقول بودن اندازه‌گیری‌هایشان انتخاب‌های درستی کنند. برخی دانش‌آموزان ممکن است در بخش گردآوری داده‌ها در فعالیت راهنمایی بیشتری لازم داشته باشند. پیشنهاد معلم برای استفاده از نوار برای نشان دادن قطر میدان دید شروع خوبی است، اما دانش‌آموزان ممکن است به راهنمایی‌هایی هم در مورد چگونگی تغییر دادن متغیر مستقل- فاصله از دیوار- و اندازه‌گیری متغیر وابسته- قطر یا مساحت میدان دید- نیاز داشته باشند. رویکرد پایان- باز خانم ون لدجه دانش‌آموزان را وادار کرد موقعیت فیزیکی را بفهمند و روش‌هایی برای ریاضی کردن آن بیابند.

دانش‌آموزان گروه ملیسا به سرعت به یک مدل گرافیکی برای نمایش داده‌ها روی آوردند تا رابطه‌ها را جست‌وجو کنند. این مدل به ملیسا و خان کمک کرد تا یک معنای ریاضی به موقعیت فیزیکی ببخشند. ملیسا از این فرآیند یک گام فراتر رفت و تلاش کرد معنای نمایش جبری خان را با مرتبط کردن آن به داده‌ها و موقعیت فیزیکی که خودش تجربه کرده بود بیابد. به این طریق، او توانست معقول بودن حل خان را با ربط دادن شیب به متغیرهای بخش گردآوری داده‌ها، تغییر در فاصله و تغییر در قطر میدان دید،

آزمون کند (استفادهٔ بامعنا از نمادها). جدول ۳ عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی قابل مشاهده (NCTM ۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلد ۵۵) در این رویکرد را به فعالیت ۱ نشان می‌دهد.

جدول ۳ عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی به نمایش درآمده در فعالیت ۱

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در اندازه‌گیری و جبر

معقول بودن اندازه‌گیری‌ها

قضاوت در مورد اینکه آیا یک اندازه‌گیری مرتبهٔ مناسبی از بزرگی را دارد

تقریب و خطا

درک اینکه همهٔ اندازه‌گیری‌های دنیای واقعی تقریب هستند

استفادهٔ بامعنا از نمادها

انتخاب متغیرها و ساختن عبارت‌ها در متن

ارتباط دادن جبر با هندسه

نمایش موقعیت‌های هندسی به‌طور جبری

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

جست‌وجوی الگوها و رابطه‌ها

ساختن حدس و برهان‌های اولیه

اجرای یک استراتژی

استفادهٔ هدفمند از رویه‌ها

سازماندهی یک جواب از طریق نمایش داده‌ها و محاسبه

تأمل روی یک جواب

در نظر گرفتن معقول بودن یک جواب

در این زمان، همهٔ دانش‌آموزان در کلاس هندسه خانم ون لدجه توافق دارند که رابطه بین D_w (فاصله از دیوار) و F_w (قطر میدان دید بیننده روی دیوار) خطی است با شیبی حدود ۰/۲ آن‌ها همچنین توافق دارند که شیب نسبت تغییر در میدان دید به تغییر در فاصله تا دیوار را نمایش می‌دهد. اما دانش‌آموزان در مورد اینکه آیا خط نمایش‌دهندهٔ داده‌ها از مبدأ مختصات عبور می‌کند توافق ندارند. برخی می‌گویند عرض از مبدأ y برابر با قطر لوله است چون بیننده همیشه می‌تواند حداقل همین اندازه از دیوار را ببیند. بقیه مخالفند، اشاره می‌کنند که ۰ سانتی‌متر از دیوار (D_w=۰) یعنی از لوله استفاده نمی‌کنیم و بنابراین میدان دیدی هم نداریم (F_w=۰).

فعالیت ۲

خانم ون لدجه تصمیم می‌گیرد که ادامه دهد و به دانش‌آموزان فرصت دهد تا در مورد دیدگاه‌های متفاوتشان فکر کنند. روی تخته، فعالیت ۲ را که جبر را در پیشانی کار قرار می‌دهد می‌نویسد:

فعالیت ۲: لولهٔ مشاهده اصلی خود و لوله‌های مشاهدهٔ دیگری با طول و قطرهای متنوع را بررسی کنید. تمام متغیرهایی را که ممکن است رابطهٔ شما را از فعالیت ۱ تحت تأثیر قرار بدهند شناسایی کنید. یک پاسخ کلی ارائه بدهید طوری که بتوان میدان دید را برای هر لوله‌ای با هر اندازه محاسبه کرد.

در کلاس درس

خانم ون لدجه از دانش‌آموزانش می‌خواهد با در نظر گرفتن تمام متغیرهایی که داده‌های جمع‌آوری‌شده آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد کار خود را آغاز کنند. برای کمک به دانش‌آموزان، او لوله‌های دیگری را که کوتاه‌تر، بلندتر، کلفت‌تر، یا باریک‌تر بودند نمایش داد. دانش‌آموزان شروع کردند به فریاد زدن متغیرها، مثل فاصله از دیوار، قطر لوله، و طول لوله.

خانم ون لدجه: خب، همهٔ شما داده‌هایی در مورد لولهٔ اصلی دارید و حالا شما چند لولهٔ دیگر و فهرستی از متغیرهای بالقوه دارید. چه پیشنهادهایی برای یافتن یک جواب کلی‌تر دارید؟

استیون: هر گروه می‌تواند لولهٔ جدیدی بردارد و داده‌های جدیدی را گردآوری کند. بعد می‌توانیم داده‌ها را تجمیع کنیم و به دنبال یک الگوی کلی برای لوله‌ها بگردیم.

جالیسا: الگو بیشتر از دو متغیر خواهد داشت. ما چهار تا را فهرست کرده‌ایم! چه معادله‌ای چهار متغیر دارد؟ نمی‌تواند خطی باشد.

استیون: من فکر می‌کنم هنوز هم می‌تواند یک خط باشد، اما بعضی از متغیرها می‌توانند برای عرض از مبدأ یا شیب استفاده شوند، مثل معادلهٔ اولمان [به معادله‌ای که گروهشان به اشتراک گذاشته بود اشاره می‌کند: y=۰/۱ x+۳/۵، که عرض از مبدأ ۳/۵ قطر لوله را بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد].

خانم ون لدجه: [خطاب به کل کلاس] در مورد پیشنهاد استیون که دادهٔ بیشتری جمع کنیم و ببینیم به ما چه می‌گوید نظرتان چیست؟

تعدادی از دانش‌آموزان: بله، فکر خوبی است.

استیون: اما باید بدانیم داده‌ها برای کدام لوله هستند. بیایید لوله‌ها را شماره‌گذاری کنیم.

خان: نه، بیایید قطر و طول لوله‌ها را ثبت کنیم. ما گفتیم این‌ها متغیرهای دیگری هستند که باید در نظر بگیریم. بنابراین شاید این اندازه‌گیری‌ها به داده‌های جدیدی که گردآوری خواهیم کرد ربط داشته باشند.

خانم ون لدجه: مشاهده خوبی بود. حتماً ثبت کنید که برای گردآوری سری جدید داده‌هایتان از کدام لوله استفاده می‌کنید. طول و قطر لوله را بنویسید.

> توجه کنید که خانم ون لدجه فعالیت ۲ را معرفی می‌کند اما بلافاصله اجازه نمی‌دهد که دانش‌آموزان آن را شروع کنند. او ابتدا از آن‌ها می‌خواهد که مسئله را در نظر بگیرند و با طوفان فکری استراتژی‌هایی برای حل آن ارائه دهند. این کار به همهٔ دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا مسئله را تحلیل کنند و اطلاعات مرتبط را شناسایی کنند.

خانم ون لدجه لوله‌های جدید را به‌طور تصادفی پخش می‌کند و به گروه‌ها ده دقیقه فرصت می‌دهد تا حداقل پنج داده را ثبت کنند. وقتی دانش‌آموزان شروع می‌کنند به گردآوری داده‌های بیشتر، خان به ملیسا و لئو می‌گوید: «من فکر می‌کنم ما می‌توانیم بدون گردآوری داده‌های بیشتر آن را انجام دهیم. همان‌طور که استیون گفت، متغیرهای دیگر فقط رابطه‌های دیگر در معادله هستند. بیایید لولهٔ اصلی را بگیریم و طول و قطر آن را اندازه‌گیری کنیم. ممکن است نسبت این دو عرض از مبدأ باشد.»

ملیسا و لئو از پیشنهاد خان خوششان می‌آید، اما می‌دانند که باید داده‌های جدید هم جمع کنند تا آن‌ها را با کلاس به اشتراک بگذارند. آن‌ها در حالی که خان فکرش را امتحان می‌کند داده‌ها را با لولهٔ جدید گردآوری می‌کنند. سپس دانش‌آموزان همهٔ گروه‌ها داده‌های جدید را با کلاس به اشتراک می‌گذارند.

فعالیت ۳

پس از اینکه همهٔ داده‌های جدید را در دفترشان یادداشت کردند، خانم ون لدجه فعالیت ۳ را روی تخته نوشت:

فعالیت ۳: از داده‌های جدید و قدیمی استفاده کنید تا یک رابطهٔ کلی بین چهار متغیری که به این ترتیب مشخص شده‌اند پیدا کنید: طول لوله (L_t)، قطر لوله (D_t)، فاصله از دیوار (L_w)، و قطر میدان دید روی دیوار (D_w). راهنمایی: سعی کنید موقعیت فیزیکی را با هندسه مدل کنید.

این فعالیت، که تکلیف خانهٔ دانش‌آموزان خواهد بود، متکی بر مدل‌سازی هندسی، استفاده از مثلث‌های متشابه، و استدلال هندسی است.

در کلاس درس

در شروع کلاس بعد، دانش‌آموزان به گروه‌های روز قبل خود برگشتند تا جواب‌ها و برهان‌هایشان را به اشتراک بگذارند. خانم ون لدجه از هر گروه می‌خواهد تا در مورد بهترین جواب و بهترین برهان به توافق برسند و جواب‌هایشان را روی تلق‌های شفاف بنویسند تا با کلاس به اشتراک بگذارند. گروه‌ها نهایتاً سه خط متفاوت از استدلال را ارائه می‌دهند. یکی از استراتژی‌ها مبتنی بر جبر بود و دو تای دیگر مبتنی بر هندسه است.

استراتژی جبری

گروه جالیسا (و یک گروه دیگر) از ماشین‌حساب‌های گرافیکی خود استفاده کردند تا خطی را بیابند که بهترین برازش را بر داده‌های مربوط به لوله‌های مختلف داشته باشد. آن‌ها سپس به دنبال الگوهایی در میان معادله‌های خطوط و رابطه‌ای با اندازهٔ لوله‌ها گشتند. آن‌ها نتیجه گرفتند که قطر لوله متناسب با شیب خط است. یعنی، قطر لولهٔ بزرگ‌تر شیب بیشتری برای خط متناظر به دست می‌دهد. آن‌ها این نتیجه را برای همکلاس‌هایشان این‌طور توجیه کردند که یک دریچهٔ بزرگ‌تر به قطر بیشتری

برای میدان دید منجر می‌شــود، بنابراین شیب باید بیشتر باشد.

دانش‌آمــوزان در کل بــا این نتیجــه موافق‌اند. جالیســا همهٔ معــادلات خطی را روی تلق شــفاف نوشــته اســت، و همهٔ آن‌ها را به ترتیب اندازهٔ قطر لولــه در یک نمــودار مرتب کرده اســت. به راحتی می‌توان دید که نتیجه برای داده‌ها درست است. اما، نیک و دیگران متوجه می‌شــوند که دو لوله که قطر یکســانی دارند متناظر با معادلات خطی هستند که شــیب‌های متفاوتی دارند. لولهٔ کوتاه شیب بیشتری دارد. جالیسا به سرعت با یک دلیل جلو آمد.

جالیسا: بله، ما هم آن را دیدیم. اگر لوله کوتاه‌تر باشــد، دید شما خیلی بسته نمی‌شود، بنابراین مثل این است که دریچهٔ دید فراخ‌تری داشته باشید.

نیک: بنابراین، تو می‌گویی شــیب هم به اندازهٔ قطر و هم به طول لوله بستگی دارد. چون این همان چیزی اســت که ما گفتیم. مــا روش متفاوتی برای نشان دادن آن داریم.

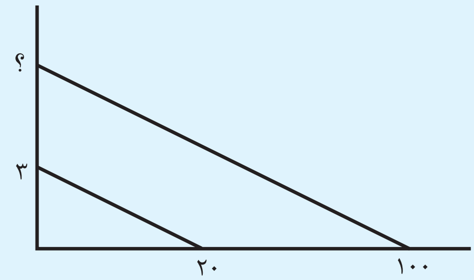
جالیسا: بله، فکر می‌کنم می‌توانی این‌طور بگویی. من مطمئن نیســتم که چطور آن را بنویســم. لولهٔ کوتاه‌تر میدان دید بزرگ‌تری می‌دهد، پس نســبت معکوس دارند، درســت اســت خانم وی؟ نمی‌دانم چطور آن را در جدولمان نشان دهم. شاید بتوانیم به نسبت قطر و طول لوله نگاه کنیم.

نیک: این چیزی است که ما سعی کردیم نشان دهیم.

خانــم ون لدجه: به نظر می‌رســد که باید آن را آزمون کنیــم. می‌خواهید این ایــده را نگه داریم و جواب‌های دیگر را ببینیم؟

استراتژی هندسی ۱

گروه لئو رویکرد دیگری را به اشتراک می‌گذارد. اعضای گروه ایده روز گذشتهٔ خان را-ایده اینکه عرض از مبدأ نســبت قطر لوله به طول آن است- بررسی کرده‌اند. آن‌ها متوجه شــدند که این رابطه درســت نیســت، اما در عوض فهمیدند که نســبت قطر لوله به طول لوله یک مقدار تقریبی برای شیب خطوطی که آن‌ها پیدا کرده‌اند به دســت می‌دهد. با توجه به پیشــنهاد خانم ون لدجه به استفاده از هندسه، لئو تصمیم گرفته است که از مثلث‌های متشابه استفاده کند تا نتیجــهٔ خان را در مورد شــیب توجیه کند چون مثلث‌های متشــابه متناســبند، همان‌طور که نسبت‌های بین متغیرها $(\frac{D_t}{L_t} \propto \frac{D_w}{L_w})$ متناسب‌اند. لئو نموداری مانند شکل ۱۲ را به اشتراک می‌گذارد و برهان خود را برای کلاس توضیح می‌دهد.



شکل ۱۲. نمودار لئو

لئو: من قطر را روی محور عمودی و طول یا فاصله را روی محور افقی قرار دادم. بنابراین ۳ یعنی قطر لوله ۳ سانتی‌متر اســت، و ۲۰ برای طول ۲۰ سانتی‌متر اســت. به این ترتیب، اگر یک متــر از دیوار فاصله داشته باشــید، یعنی ۱۰۰ ســانتی‌متر، برای یافتن میــدان دید ۱۰۰ را روی محور افقی قرار می‌دهید و مقدار مجهول را از مثلث‌های متشابه می‌یابید.

خانم ون لدجه: کسی سؤالی از لئو دارد؟

جالیسا: من. از کجا فهمیدید که باید مثلث‌های متشابه بسازید؟

لئو: همان‌طور که قبلاً گفتم، شیب نسبت قطر به طول لوله اســت. دیروز نشان دادیم که میدان دید و فاصله از دیوار هم شیب خط را نشان می‌دهند، پس این دو نسبت برابر خواهند بود. بنابراین، مثلث‌های متشابه.

جالیسا: این را فهمیدم، اما چرا مثلث‌ها را به این شکل کشیدی؟

لئــو: تنها به ایــن روش می‌توانســتم در مورد مقایسه قطر با طول فکر کنم.

خانــم ون لدجه: لئو، یا دیگرانی که به این روش فکر کردند، می‌توانید برای بقیه توضیح دهید از کجا می‌دانید مثلث‌ها متشابه‌اند؟

لئــو: من آن‌ها را این‌طور کشــیدم. من آن‌ها را طوری کشــیدم که متشابه باشــند، چون معادلات نسبت‌هایی را نشان می‌داد که صحبتش را کردم.

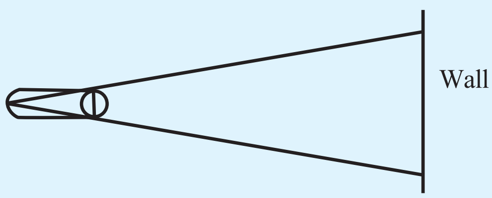
خانم ون لدجه: آیا چیز دیگری در مورد گردآوری داده‌ها یا چگونگی تحلیل داده‌ها از دیروز هست که مرتبط با مثلث‌های متشابه باشد؟

ملیســا: این قســمت مرا هم گیج کرده است. من در گروه لئو هســتم به همین دلیل می‌خواستم

منظورش را بفهمم، امـا مطمئن نبودم که بتوانیم این مثلث‌های متشـابه را بکشیم فقط به این دلیل که می‌دانیم آن‌ها باید مثلث‌های متشـابهی باشند. من می‌خواسـتم این معنای بیشتری داشته باشد... مثلاً اینکه ما مثلث‌های متشـابه را کشیدیم چون این کاری اسـت که داشـتیم انجام می‌دادیم. اما پاسخ من هم معنی نمی‌دهد. پاسخ لئو بهتر است.

استراتژی هندسی ۲

مت و آنا تلق خود را روی پروژکتور قرار می‌دهند (شکل۱۳ را ببینید). این تلق هم مثلث‌های متشابه دارد، اما رسـم آن با آنچه لئو نشـان داد متفاوت است. آنا توضیح می‌دهد که نمودار چگونه موقعیت گردآوری داده‌ها را مدل می‌کند.



شـکل۱۳. رسـم مت و آنـا از مثلث‌های متشـابه در موقعیت گردآوری داده‌ها

پایان باز فعالیت‌ها به دانش‌آموزان انعطاف و استقلال داد تا تصمیم‌گیری کنند. در عین حال، معلم این را روشن کرد که انتظار داشت دانش‌آموزان پاسخ‌هایشان را توجیه کنند

آنـا: خب اینجا لوله اسـت [به شـکل اشـاره می‌کند]، و این مثلث کوچک متشـابه را می‌سازد. از چشم شما تا سر دیگر لوله. مثلث بزرگ از چشم شما تا دیوار امتداد دارد.

مـت: و ما می‌دانیم که طبق قضیهٔ زاویه- زاویه مثلث‌ها متشابهند. ما یک زاویه در چشممان داریم، و خطوط موازی برای قطر لوله و میدان دید داریم.

آنا: خطوط موازی هسـتند چـون ما لوله را به همین صورت در دسـت گرفتیم. و خطوط موازی زاویه‌های برابر می‌سازند.

مت: پس، اگر شما طول لوله و قطر آن را بدانید، می‌توانید از تناسبی که لئو نشان داد، $\frac{D_t}{L_t} \propto \frac{D_w}{L_w}$، استفاده کنید و میدان دید را برای هر فاصله‌ای که در L_w قرار می‌دهید به دست آورید.

آنا: یـا می‌توانید از طول و قطر لوله اسـتفاده کنید تا شـیب خط را بیابید. بعـد معادلهٔ خط را بنویسـید، و از آن برای یافتن میدان دید استفاده کنید.

خانـم ون لدجه: دیگران در مورد آنچه آنا و مت گفتند چه فکر می‌کنند؟ این راه‌حل با آنچه شـما تا به حال دیده‌اید یا گروهتان به‌دسـت آورده است چقدر سازگار است؟

جالیسـا: مـن فکر می‌کنـم ایـن راه کاملاً با توضیحات من سـازگار اسـت. این ترسیم چیزی را که من می‌گفتم نشـان می‌دهد، دریچهٔ بزرگ‌تر یعنی شما می‌توانید بیشـتر از لوله ببینید. اما من از آن خوشـم آمد چون این را هم توضیح می‌دهد که چـرا متغیرها به طریقی که لئو و نیک گفتند با هم رابطه دارند.

بحث در مورد کار دانش‌آموزان در فعالیت‌های ۲ و ۳

در حالی‌که دانش‌آموزان در فعالیت ۳ داده‌های جدیـد و برهان‌های ممکن را بـرای رابطه‌ای که به‌دست آورده بودند در نظر می‌گرفتند، راهنمایی‌ها و پیشـنهادهای معلم بعضـی از گروه‌ها را هدایت می‌کرد، امـا نه همهٔ آن‌ها را. به‌عنوان نمونه، گروه جالیسـا، از این راهنمایی که هندسه ممکن است در توجیه حدس آن‌ها در مورد متغیرهای مسـئله میدان دید نقشـی ایفا کند استفاده‌ای نکردند. در عوض، گـروه او یک رویکرد جبری را انتخاب کرد و در مجموعه معادلات (یک معادله برای مجموعه داده‌های هر لوله) به دنبال یک الگو گشت. توضیح جالیسـا برای کلاس نه تنهـا چگونگی یافتن الگو توسـط گروه او را نشـان داد، بلکه نشان داد چرا آن الگـو برای پدیدهٔ فیزیکی مـورد مطالعه معنی می‌دهـد (دریچهٔ پهن‌تـر به معنـای میدان دید بزرگ‌تر و بنابراین شـیب بیشـتری برای معادله اسـت). تا وقتی مت و آنا جواب خود را به اشتراک نگذاشـته بودند جالیسا نتوانسته بود روی برهانش تأمل کند و با یک نمایش هندسـی ارتباط برقرار کنـد. لئو تلاش کرد پیشـنهاد یافتـن یک مدل هندسـی را وارد کار کند و بـا زیرکی مثلث‌های متشـابه را انتخاب کرد. اما، او نتوانسـت موقعیت فیزیکی را به درسـتی مدل کند، و برهان او نشان داد که او برخی از ارتباط‌ها را جا انداخته اسـت. جـدول۴ عناصر کلیـدی اسـتدلال و معنایابی و عادت‌هـای اسـتدلالی (NCTM ،۲۰۰۹، ص ۹-۱۰، جلـد ۵۵) را کـه در کار دانش‌آموزان در فعالیت‌های ۲ و ۳ نمایش داده شد نشان می‌دهد.

جدول۴ عناصر کلیدی و عادت‌های استدلالی به نمایش درآمده در فعالیت‌های ۲ و ۳

عناصر کلیدی استدلال و معنایابی در جبر و هندسه

استفاده معنادار از نمادها

استفاده از متغیرها برای ساختن و تفسیر عبارت‌ها

ارتباط دادن جبر با هندسه

نمایش دادن موقعیت‌های جبری به‌طور هندسی

ساختن و ارزیابی برهان‌های هندسی

توسعه و ارزیابی برهان‌هایی در مورد شکل‌ها برای معنایابی برای یک موقعیت

ارتباطات و مدل‌سازی هندسی

استفاده از ایده‌های هندسی در موقعیت‌های دنیای واقعی

عادت‌های استدلالی

تحلیل یک مسئله

شناسایی مفاهیم و نمایش‌های ریاضی مرتبط

به‌کارگیری مفاهیم پیش آموخته برای موقعیت‌های جدید

اجرای یک استراتژی

سازماندهی جواب، شامل محاسبات و نمایش داده‌ها

استنتاج منطقی با توسیع داده‌های اولیه

جست‌وجو و استفاده از ارتباط‌ها

مرتبط کردن زمینه‌ها و نمایش‌های مختلف

تأمل روی یک جواب

تفسیر یک جواب و اینکه چگونه مسئله را حل می‌کند

تعمیم یک جواب

فعالیت میدان دید طیفی از مفاهیم ریاضی را در محیطی پدید می‌آورد که اجازه می‌دهد دانش‌آموزان در حالی که معنی موقعیت مسئله را می‌فهمند بین مطالب محتوایی هم ارتباطاتی برقرار کنند. معلم به دانش‌آموزان فرصتی را که لازم داشتند داد تا اکتشاف کنند و در مورد نکات مربوط به اندازه‌گیری و گردآوری داده‌ها، استراتژی‌های حل مسئله، و توسعهٔ استدلال‌های ریاضی بحث کنند. پایان باز فعالیت‌ها به دانش‌آموزان انعطاف و استقلال داد تا تصمیم‌گیری کنند. در عین حال، معلم این را روشن کرد که انتظار داشت دانش‌آموزان پاسخ‌هایشان را توجیه کنند. مطابق با این انتظار، دانش‌آموزان جواب‌ها را توضیح دادند، برهان‌ها را به اشتراک گذاشتند، و در مورد اعتبار برهان‌هایشان بر مبنای ارتباط آن‌ها با مدل فیزیکی و فرایند گردآوری داده‌ها بحث کردند.

جمع‌بندی

مسائلی که در این فصل مثال زده شدند مربوط به مفاهیم هندسی تساوی و تشابه هستند، اما آن‌ها فهم هندسه تبدیلی، اندازه‌گیری، و نمایش‌های جبری را نیز نیاز دارند. غنای این مسائل اجازه اکتشاف و بحثی را می‌دهد که استدلال و معنایابی را ایجاب می‌کند. هر جلسهٔ کلاس درس معلم را در نقش راهنمای دانش‌آموزان نشان داد اما نه کسی که استراتژی‌های حل را عرضه می‌کند.

به‌عنوان مثال، در کلاس آقای لی، دانش‌آموزان بدون نیاز به کمک معلم در ابتدا، روی مسئله دوران مربع کار کردند. وقتی آن‌ها شروع کردند به عرضه کردن ایده‌های اولیه خود، آقای لی از همهٔ دانش‌آموزان سؤالاتی پرسید تا آن‌ها را وادار کند فراتر از مدل‌های ایستایی که روی کاغذهایشان کشیده‌اند فکر کند. او مدام از آن‌ها می‌خواست که فکر کنند چه‌طور می‌توانند ایده‌هایشان را به موقعیت کلی‌تری انتقال بدهند- محلی تصادفی برای مربع چرخان.

مسئله میدان دید در آغاز خیلی پایان- باز بود، اما سه فعالیتی که هر یک بر پایهٔ قبلی طراحی شد به دانش‌آموزان این شانس را داد که یک مجموعه داده را قبل از افزودن متغیرها و مجموعه داده‌های جدید اکتشاف کنند. راهنمایی فعالیت ۳ برای ارتباط دادن مجموعه‌های داده به یک مدل هندسی، وقتی برای دانش‌آموزان مفید واقع شد که دانش‌آموزان به نقطه‌ای رسیدند که یک برهان را توسعه دهند. بالاخره، همهٔ دانش‌آموزان توانستند این ارتباط را برقرار کنند.

در اکتشاف هر دو مسئله- دوران مربع و میدان دید- از دانش‌آموزان انتظار می‌رفت که برای توسعهٔ مهارت‌های حل مسئله، فرموله کردن حدس‌ها برای توضیح موقعیت‌های ریاضی، با یکدیگر کار کنند و برای توضیح دادن یا توجیه نتایجشان از استدلال استفاده کنند.

منبع

Focus in High School Mathematics Reasoning and sense Making. by: Sharon M. McCrone, James King, Yuria Orihuela & Eric Robinson.

آموزش ریاضی در فرانسه

علی روزدار
دبیر ریاضی شهرکرد (ناحیه ۱) و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

اشاره

این مقاله، گوشه‌ای از یک گزارش حدود ۶۰ صفحه‌ای است که علی روزدار، دبیر ریاضی اعزامی به کشور فرانسه، پس از تدریس در آن کشور، در بازگشت، به‌عنوان گزارش سفر و تدریس خود در فرانسه نوشته است. به دلیل سابقه تاریخی در ایران و الگوبرداری‌های اولیه از نظام آموزشی فرانسه در شروع رسمی، اینجانب مطالعات زیادی در زمینه نظام آموزشی فرانسه و به‌ویژه، آموزش ریاضی آن داشته‌ام. در نتیجه و با اجازه ایشان، بخشی از گزارش را که مربوط به اصلاحات اخیر آموزشی در فرانسه بود، با جرح و تعدیل‌های ضروری و دقیق کردن مطالب، برای چاپ در مجله تنظیم نمودم.

مجله رشد آموزش ریاضی

چکیده

در دورهٔ دانش‌آموزیم در دبیرستان، از یکی از معلمانم شنیده بودم که نظام آموزشی درایران، برگرفته از نظام آموزشی فرانسه بوده است، که با توجه به فرهنگ و دین ما، بومی شده است. بدین جهت در دوره دانشجویی در رشتهٔ آموزش ریاضی، علاقه‌مند به آشنایی بیشتر درباره نظام‌های آموزشیِ کشورهای پیشرفته شدم. به همین دلیل، مطالعاتی در زمینه نظام آموزشی برخی از کشورها از جمله فرانسه، ژاپن، فنلاند، آلمان و آمریکا انجام دادم. تا آنکه سال‌ها بعد، به سبب مأموریت آموزشی، به‌عنوان دبیر ریاضی به فرانسه اعزام شدم و فرصت را مغتنم شمردم و از کانال‌های گوناگون، اطلاعات دست اول و ارزشمندی در رابطه با نظام آموزشی فرانسه به دست آوردم. اول از همه، در رفتار اجتماعی بسیاری از فرانسویان، ادب، احترام، متانت و شخصیت انسان‌های ایده‌آل را به‌طور ملموسی دیدم و استنباطم این است که نظام آموزشی و شیوه‌های آموزش عمومی، در رفتار مردم، تأثیر اساسی داشته است. در نظام آموزشی فرانسه، نگاه نخبه‌پروری به آموزش کمرنگ و در عوض، توجه به آموزش همگانی، پررنگ‌تر است و تلاش عمده، ایجاد تسهیلات برای تمام کودکان فرانسه، ایجاد امکانات برای همگان و دسترسی به آموزش مناسب برای همهٔ دانش‌آموزان است. در نظام آموزشی فرانسه، تلاش می‌شود که در یک مسابقه علمی و گروهی، کسی تشویق شود که بیشترین کمک را به سایر اعضای گروه ارائه داده است، خواه خود بهترین رتبه را به دست آورده یا نیاورده باشد. در این نظام آموزشی، به کودکان یاد داده می‌شود که هروقت کار اشتباهی از جانب آنان سر زد، پوزش بخواهند و برای برطرف کردن آن اشتباه، اقدام کنند. آنان آموزش می‌دهند که در انجام کارهای خدماتی برای دیگران، پیش‌قدم باشند. کودکان یاد می‌گیرند که دانستن، برای به کار بردن و یاد دادن است! دانش‌آموزان فرانسوی در مدرسه، ریاضی را هدفمند، کاربردی و البته آمیخته با تکنولوژی، به‌ویژه ماشین‌حساب و رایانه، یاد می‌گیرند.

کلید واژه‌ها: نظام آموزشی فرانسه، آموزش عمومی، ریاضیِ مدرسه‌ای

۱. مقدمه

ســاختار نظام آموزشی فرانســه، متمرکز است و بر مبنای دو محور اصلــی «پایداری» و «پویایی» قرار دارد. در محور پایداری، سیاست‌های آموزشی و قوانین مصوب جهت دســت‌یابی به وضعیت مطلوب آموزشی (پنداره نظام) و در محور پویایی، نوسامانی ساختارها و استقرار زیرساخت‌ها، اهداف و عملکرد وضعیت موجود نظام آموزشی کشور مورد توجه قرار گرفته است. محور پایداری بر مفهوم تداوم در حفظ ارزش‌های ســه‌گانه جمهوری یعنی «برابری، برادری و آزادی»، تأکید دارد.

در این محور، تلاش‌های متفکران و مسئولان کشور در بیش از دو قرن پس از انقلاب فرانسه (۱۹۹۵-۱۷۸۹)، در قالب سیاست‌های عمدهٔ آموزشی عرضه شده است. محور پویایی و نوآوری نیز که به معنای تکاپوی وضعیت موجود نظام آموزشی (سیاست‌ها، اهداف، ساختار، نیروی انسانی و عملکرد آموزشی) است، جهت پاسخگویی به نیازهای جامعهٔ در حال تحول و دســت‌یابی به وضعیتِ مطلوبِ آموزشی، عنوان شده است. به‌طور کلی، بر اساس شــواهد مکتوب، می‌توان ادعا کرد که نظام آموزشــیِ فرانســه، محصول برههٔ خاصی از تاریخ این کشور است که با پایداری و پویایی، از آغاز انقلاب ملی فرانســه طی سال ۱۷۸۹ تاکنون، همچنان ادامه داشته است.

۲. اصلاحات جدید در جهت‌گیری آموزش عمومی در فرانسه

آموزش عمومی در فرانسه، به چهار مرحله تقسیم می‌شود:

۱. دوره اول پیش‌دبســتانی اســت کــه اختیاری و رایگان اســت. این دوره، کودکان دو تا پنج ســاله را می‌پذیرد و هدف آن، ارتقای توانمندی‌های کودکان و شکل‌دهیِ شخصیت اجتماعی آنان است. این مدارس توسط شهرداری‌ها احداث و اداره می‌شوند.

۲. در دوره دوم، کودکان از شــش ســالگی، وارد دوره ابتدایی می‌شوند. در این دوره، آموزشِ پایه شروع شده و دانش‌آموزان، خواندن و نوشتن و مفاهیم پایه‌ای ریاضی را یاد می‌گیرند و با یک زبان خارجی که معمولاً انگلیسی است و همچنین تکنولوژی‌های مدرن مانند کامپیوتر، آشنا می‌شوند.

۳. طول دوره سوم، چهار سال است که برای تمام دانش‌آموزان اجباری بوده و به تحکیم دانسته‌هایشان پرداخته می‌شــود و در پایان، به آنان مدرک سیکل[1] یا همان پایان دورهٔ متوسطه اول، ارائه می‌شود. پس از آن، بعضی، به مدرک سیکل اول بسنده می‌کنند و بعضی دیگر، در ســیکل دوم (متوسطه دوم) که دوره چهارم است، ادامه تحصیل می‌دهند.

۴. در دوره چهارم، دانش‌آموزان به تعیین رشــته و شــاخه می‌پردازند و در حقیقــت، هدایت تحصیلی در ابتدای این دوره، انجام می‌شــود. در متوسطه دوم، دانش‌آموزان یا شــاخه نظری را انتخاب می‌کنند و با مدرک دیپلم کامل از مدرسه فارغ‌التحصیل می‌شوند، یا اینکه در شاخه فنی‌وحرفه‌ای، ادامه داده و از مدرسه فارغ‌التحصیل می‌شوند.

به‌طور کلی، از دانش‌آموزان در پایان ۱۶ ســالگی یا ســیکل اول متوسطه، انتظار می‌رود که توانایی‌های مشترکی را کســب کرده باشند که برای هر شهروند- چه ادامه تحصیل بدهد، چه ندهد- ضروری است. این انتظار، با رویکرد اخیر نظام آموزشی کشور فرانسه که هدف آموزش را از نخبه‌گرایی به سمت آموزش عمومی و تربیت شــهروندانی سوق داده که بتوانند در ساختن جامعهٔ خود نقش داشته باشند، بسیار متفاوت است.

حذف سیاســت و رویکرد نخبه‌پــروری در نظام آموزشی فرانسه، و توجه به تشویق‌های درونی به جای بیرونی، دو تغییر قابل توجه در جریان اصلاحات آموزشی اخیر بوده اســت. جالب است که بخشی از تشویق این است که به دانش‌آموزان توانمندتر، تکلیف‌های بیشتری داده می‌شود. این در حالی است که برای ضعف عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان، هیچ‌گونه تنبیهی انجام نمی‌شود و در عوض، با تشکیل کلاس‌ها و آموزش‌های ویژه برای آنان در مدرسه خود، تلاش می‌شود که ضعف تحصیلی آن‌ها برطرف شــود. اما در برابر بدرفتاری‌ها و مشکلات انضباطــی دانش‌آموزان، ضوابط ســخت‌تر و مرحله‌ای وجود دارد که از گفت‌وگوی معلم با چنین دانش‌آموزی شروع می‌شود و اگر نتیجه مناسب گرفته نشد، به ترتیب ارجاع به مشاور مسئول آن فرد، تغییر کلاس وی و حتی در موارد نادری، به تغییر مدرسه منجر می‌گردد.

۲-۱. موفقیت برای همگان

در تلاش برای حذف رویکــرد نخبه‌پروری، نظام آموزشــی فرانســه بر برنامه «موفقیت برای همگان» تمرکز شده و جهت آموزش عمومی، به این سمت تغییر یافته است. برای تحقق این هدفِ جدید، انجام ارزشیابی دو وجه دارد؛ یکی آشنایی با توانایی‌های دانش‌آموزان و مشکلات احتمالی در یادگیری آنان، و دیگری شناخت نقاط قوت و ضعف برنامه‌های درسی است. علاوه بر این،

ارزشیابی کمک می‌کند تا مدرسه‌ها برای دانش‌آموزانی که نیاز دارند، فرصت بیشتری برای یادگیری بعضی درس‌ها، ایجاد کنند.

اصلاح نظام آموزشی نخبه‌گرا، جدی گرفتن آموزش پایه، توجه به مهارت‌های زندگی و در نظرگرفتن تنوع فرهنگی در برنامه‌های درسی و آموزشی است. در نتیجه، به‌طور چشمگیری از میزان توجه به رقابت و نمره و آزمون کم شده و تنش خانواده‌ها برای انتخاب مدرسه، کاهش یافته است. زیرا آنان اطمینان یافته‌اند که اصول آموزش برای همگان، در همه مدرسه‌ها، رعایت می‌شود و طبیعی است که در شرایط مناسب، ثبت‌نام براساس منطقه جغرافیایی، با مقاومت روبه‌رو نمی‌شود. این کار علاوه بر ایجاد آرامش در خانواده‌ها، تا حد زیادی از بار ترافیک را کم می‌کند و هزینه‌های نظام آموزشی را برای تأمین هزینه اتوبوس‌های مدرسه‌ها را برای جابجایی دانش‌آموزان، کاهش می‌دهد. در عوض، این پول صرف جدی‌تر گرفتن اردوهای آموزشی می‌شود؛ اردوهایی که علاوه بر جنبه تفریحی، به تعمیق و گسترش آموخته‌های دانش‌آموزان کمک می‌کند. در واقع، اردو مانند کلاس درس عملی است که در آن، دانش‌آموزان یادداشت‌برداری کرده، سؤال می‌پرسند و به همراه معلمان خود، به کشف و جست‌وجو می‌پردازند تا بتوانند بعد از اردو، گزارش جالب و جامعی از بازدید خود، به کلاس ارائه دهند.

یک نکتهٔ قابل تأمل دیگر این است که برای افراد زیر ۱۸ سال در فرانسه، بازدید از بسیاری مکان‌ها و فضاهای دیدنی، علمی و تاریخی، نیاز به پرداخت ورودی ندارد و هدف این تصمیم، حمایت از آموزش رایگان و تشویق مردم به مطالعه و آموختن در فضاهای غیررسمی است.

در بخش آموزش عمومی، فرانسه از سال ۲۰۱۳، برنامهٔ اصلاحات[۲] (رفورم) آموزشی را شروع نمود. در این اهداف پایه‌های مشترک برای دانش‌آموز، از وقتی که وارد نظام آموزشی می‌شود (دوره پیش دبستانی) تا زمانی که خارج می‌شود (دیپلم کامل متوسطه دوم یا فارغ‌التحصیل هنرستان)، مورد توجه است. از اهداف اصلی این اصلاحات که دانش مبنایی و مشترک تمام دانش‌آموزان محسوب می‌شود، آموزش رفتار صحیح اجتماعی به آنان است. برای ارزیابی آموزشی سالانه، به‌ویژه در دوره راهنمایی (معادل آن در حال حاضر در ایران، متوسطهٔ اول است)، نمره‌دادن. بعد از گذراندن سه سال آخر راهنمایی/ متوسطهٔ اول، توانمندی‌های دانش‌آموزان مورد ارزیابی واقع می‌شود.

در نظام آموزشی فرانسه، نگاه نخبه‌پروری به آموزش کمرنگ و در عوض، توجه به آموزش همگانی، پررنگ‌تر است و تلاش عمده، ایجاد تسهیلات برای تمام کودکان فرانسه، ایجاد امکانات برای همگان و دسترسی به آموزش مناسب برای همهٔ دانش‌آموزان است

۳. آموزش ریاضی مدرسه‌ای در فرانسه

درس‌هایی که در هرسال در پایه‌های گوناگون آموزش عمومی باید تدریس شوند، توسط نظام آموزشی کشور، از قبل برنامه‌ریزی و مشخص شده و در سراسر کشور یکسان است. جدول دروس و ساعت‌های اختصاص یافته هفتگی برای آموزش هر درس نیز، برنامه‌ریزی بلند مدت داشته و در اختیار مدارس قرار می‌گیرد. همچنین، سرفصل کلی درس‌ها، آیین‌نامه‌های مربوط به خود را داشته و به‌وسیله «آکادمی آموزش‌وپرورش» (آکادمی ورسای) که در حکم وزارت آموزش‌وپرورش کشور فرانسه است، تهیه و ابلاغ می‌شوند. این در حالی است که با وجود تمرکز نظام آموزشی، معلمان هر ناحیه آموزشی، اختیار انتخاب کتاب درسی و سایر منابع درسی از جمله دبیران ریاضیِ، این اختیار را دارند که خود به انتخاب منبع آموزشی و شیوه آموزش اقدام کنند. این اقدام البته، نیازمند آگاهی دبیران از مؤلفه‌های دخیل در آموزش هر درس است. در رابطه با درس‌های ریاضی، این مؤلفه‌ها شامل موارد زیر هستند:

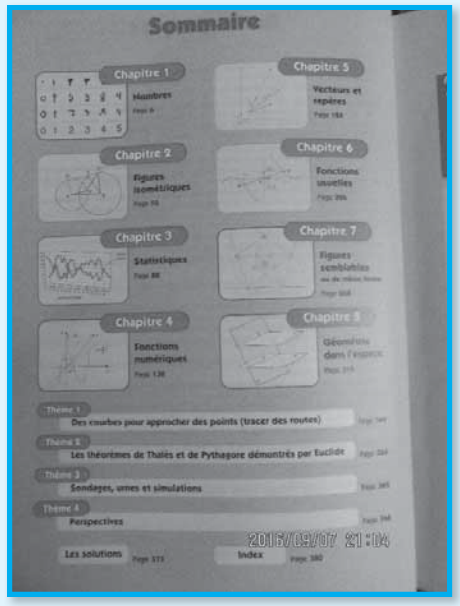
- آگاهی از سرفصل‌های مصوب برای پایه تحصیلی مورد نظر
- پیشینهٔ دانش‌آموزان و میزان دانش ریاضی قبلی آنان
- منابع آموزشیِ موجود در بازار و مورد تأیید نظام آموزشی
- امکانات آموزشیِ ناحیه و مدرسه‌ای که در آن تدریس می‌کنند.

شیوهٔ آموزش ریاضی در دورهٔ متوسطه، بیشتر بر اساس تدریسِ رو در رو بین معلمان و دانش‌آموزان است. ولی در پایه‌های پایانی متوسطه، آموزش ریاضی، بیشتر با تدریس معلمان و یادداشت‌برداری توسط دانش‌آموزان، صورت می‌گیرد که در حقیقت، تمرکز بر معلم- محوری و جزوه‌گویی است و دانش‌آموزان برای مهارت و سرعت در یادداشت‌برداری، روش‌هایی را آموزش می‌بینند. همچنین، اغلب تکلیف‌های دانش‌آموزان، در مدرسه و در زمان آموزش انجام می‌شود. برای دانش‌آموزانِ علاقه‌مند و کوشا، به‌عنوان یک کار تشویقی، تکلیف‌های اضافه برای انجام در خانه می‌دهند، در حالی که برای دانش‌آموزان ضعیف‌تر، آموزش‌های بیشتری در قالب کلاس‌های فوق‌برنامه ارائه می‌شود. گاهی هم از فضاهای مجازی، برای اطلاع‌رسانی و ارسال تکلیف‌ها به دانش‌آموزان، استفاده می‌شود.

۳-۱. نمونه‌ای از یک کتاب درسی ریاضی

با وجود اینکه نظام آموزشـــی در فرانسه، متمرکز اســـت، ولی تنها یک کتاب درسی برای سراسر کشور، تجویز نمی‌شـــود و ناحیه‌های آموزشی و معلمان، حق انتخاب کتاب‌های درســـی تأیید شده را توسط وزارت آموزش‌وپرورش دارند. ناشـــران آموزشـــی، بر اساس سرفصل‌های مصوب و اعلام شده، منابعی را تهیه کرده و به بازار عرضه می‌کننـــد. معلمان نیز برای تدریس، کتاب‌ها و منابعی را که ســـازگاری بیشتری با باورهای آموزشی‌شان و شرایط یادگیری دانش‌آموزانشان دارد، انتخاب می‌کنند. در زیر، به معرفی و مرور اجمالیِ یک کتاب درسی ریاضی که برای پایهٔ دوم دبیرستان (لیسه[3] (اولین سال از دبیرستان) تهیه شده، می‌پردازیم.

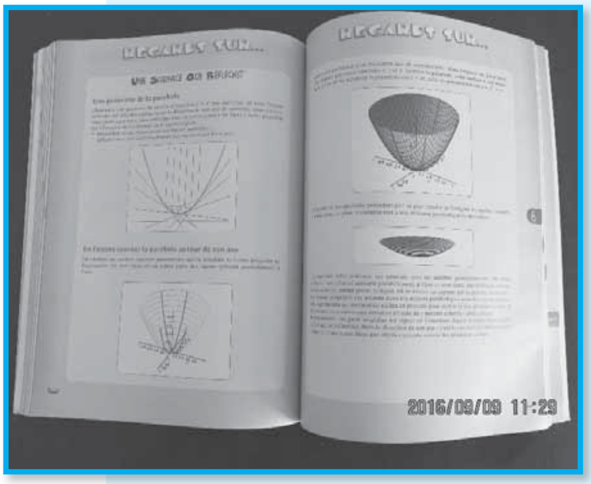
Béthune, Philippe. & et al. (2015). MATÉMATIQUES Lycée 2end. Paris; Delagrave.



این کتاب با عنـــوان «ریاضی»، در ۳۸۲ صفحه، ۸ فصل و ۴ پیوست، نوشته شده است.

هر فصل کتاب، شامل ظرفیت‌ها (بخش‌های) زیر است:

- **فعالیت‌ها**[4]: برای درک عمیق‌تر مفاهیم درسی هر بخش توسط دانش‌آموزان، طراحی شده‌اند و مستلزم کار آنان است.
- **درس‌ها**[5]
- **تمرین‌های حل شده**[6]
- **کارهای عملی**[7]
- **تمرین‌ها و مسئله‌ها**[8]
- **نگاهی به ...** [9] (موضوعی فراتر از کتاب درسی، کاربردی‌تر و البته مرتبط با مطالب بخش مورد نظر.)



فصل اول: اعداد

در این بخش، ابتدا اشاره کوتاهی به تاریخچه اعداد شـــده و اعداد حســـابی (... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰)، با عنوان «اعداد سانسکریت» معرفی شده و به آن، اعداد طبیعی گفته شده اســـت (در صورتی که اعداد طبیعی، شامل صفر نیســـتند). ســـپس به معرفی مجموعه‌های اعداد اول، اعـــداد صحیح، اعداد گویا (کســـرها)، اعداد گنگ (رادیکالـــی) و اعداد حقیقی و ویژگی‌هـــای هرکدام و ارتباط بین آن‌ها، می‌پردازد.

سایر مباحث این بخش عبارتند از:

- تجزیـــه اعداد طبیعی به اعداد اول (بر اســـاس الگوریتم تقسیم اقلیدس)
- اعداد نجومی و نماد علمی
- ویژگی نامساوی‌ها
- بازه‌های اعداد حقیقی
- نسبت و تناسب
- اتحادهای جبری

در سراســـر ایـــن بخـــش، روش‌های اســـتفاده از ماشین‌حساب در محاسبات عددی، آموزش داده شده است.

فصل دوم: شکل‌ها و تبدیلات هندسی

این فصل، با معرفی سه ریاضی‌دان معروف یونانی یعنی تالس، فیثاغورس و اقلیدس شـــروع می‌شود که اکثر موضوع‌های مربوط به هندسه مسطحه (اقلیدسی)

در پایه‌های پایانی متوسطه، آموزش ریاضی، بیشتر با تدریس معلمان و یادداشت‌برداری توسط دانش‌آموزان، صورت می‌گیرد که در حقیقت، تمرکز بر معلم- محوری و جزوه‌گویی است و دانش‌آموزان برای مهارت و سرعت در یادداشت‌برداری، روش‌هایی را آموزش می‌بینند

را، تاریخ به آنان نسبت داده است. سپس در ادامه، به مفاهیم پایه‌ای هندســه مسطحه از جمله نقطه، خط، زاویه، مثلث، مثلث‌های هم‌نهشت و شکل‌های متشابه، دایره و برخی مباحث مرتبط با آن، پرداخته شده است.

فصل سوم: آمار

موضوع‌های اصلی این فصل، شامل موارد زیر است:

- مفاهیم آماری
- داده‌های آماری
- دسته‌بندی و سازمان‌دهی داده‌ها (جدول‌های نمایش داده‌ها)
- نمودارهای آماری
- شاخص‌های آماری

در سراســر این فصل نیز، شــیوه‌های استفاده از ماشین‌حســاب برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، محاسبه شاخص‌های آماری و رسم نمودارها، توضیح و آموزش داده شده است.

فصل چهارم: توابع عددی

این بخش با چنــد واژه و جمله رایج، مانند اینکه «خودرویی در هر ۱۰۰ کیلومتر، ۵ لیتر سوخت مصرف می‌کند»، آغاز می‌شــود تا ذهن دانش‌آموز را به سوی مفاهیــم کاربردی تابع در زندگی روزمره بکشــاند. در بخش میانی صفحه، تصویری از برج پیزا در ایتالیا (که در قاب پنجره‌ای دیگر، کج بودن آن نمایان نیســت!) آورده شده است. گالیله آزمایش‌های مربوط به سقوط آزاد اجسام را بر فراز این برج معروف انجام داد و به نتایج مهمی دست یافت، به‌ویژه اینکه در شرایط خلاء (حذف مقاومت هوا)، اجسام، بدون تأثیرپذیری از وزن‌شان، با آهنگ یکسان ســقوط می‌کنند! و بدین ترتیب،گالیله به فرمول معروف $y=\frac{1}{2}gt^2$ دســت یافت که مسافت پیموده شده را، به عنوان تابعی از زمان نشان می‌دهد.

پس از ایجاد انگیزه، این فصل در ادامه، به موضوع‌ها و مفاهیم زیر می‌پردازد:

- استفاده درست از توابع
- روابط غیرتابعی
- توابع و ماشین‌حساب
- توابع و هندسه
- توابع چند جمله‌ای درجه ۲
- بیشــینه(ماکزیمم) و کمینه (می‌نیمم) توابع عددی
- انواع توابع عددی

فصل پنجم: بردارها و معیار

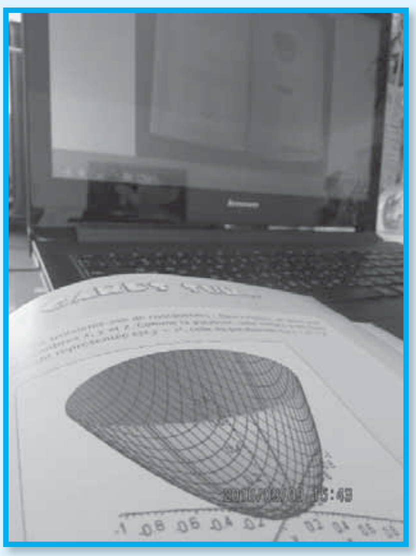
محتوای این فصل، شامل موارد زیر است:

- معرفی بردارها و ویژگی‌های آن‌ها
- دسته بردارها
- اعمال جبری و هندسی روی بردارها
- بردارهای درجه بندی شده (محورها)
- بردارهای یکه در دستگاه مختصات
- اندازه یک بردار

فصل ششم: تابع‌های کاربردی

این بخش به توابعی اشــاره دارد که در زمینه‌های کاربــردی مانند هندســه، فیزیک، زیست‌شناســی، زمین‌شناســی و اقتصاد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه‌ای از این توابع، می‌توان ســهمی (توابع چندجملــه‌ای درجــه ۲)، توابع هموگرافیــک، توابع هیپربولیک و وارون آن‌ها را نام برد. پس از معرفی این توابع، موضوع‌های زیر بررسی می‌شوند:

- تقارن، بازتاب و بازنمایی نموداری
- رسم منحنی معادلهٔ $y=x^2$
- رسم منحنی معادلهٔ $y=\frac{1}{x}$
- معرفــی رادیان، به‌عنوان واحــد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه
- کســینوس و ســینوس: دو کلید برای رســم منحنی‌ها



فصل هفتم: شکل‌های متشابه

فصل هفتم با این پرسش آغاز می‌شود که «اندازه زمین و جهان چقدر است»؟ سپس راجع به پدیده‌های

مشابه در جهان هستی، با وجود تفاوت در اندازه‌های آن‌ها، بحث می‌کند. این فصل، موضوع‌های زیر را دربرمی‌گیرد:

- صورت‌بندی قضیه تالس
- افزایش و کاهش (انبساط و انقباض)
- مقایسه مثلث‌ها (برای بررسی وجود تشابه)
- روابط مثلثاتی مهم

فصل هشتم: هندسه فضایی

این فصل، به مباحث زیر اختصاص دارد:

- چندوجهی‌های منتظم
- منشورها
- وجه، یال و گوشه
- خط و صفحه
- منشور، استوانه و مخروط‌های مایل

جمع‌بندی

نظام آموزش عمومی فرانسه و ایران، به‌خصوص از نظر میزان تمرکز، شباهت زیادی به هم دارند و تفاوت اصلی، در محتوا و روش آموزش و صراحت در بیان جزئیات است.

در فرانسه، آموزش عمومی کاملاً رایگان است. علاوه بر آن، دولت برخی اقلام ضروری برای تحصیل و کمک هزینه قابل توجهی را در اختیار خانواده‌های دانش‌آموزان قرار می‌دهد، تا دغدغه و نگرانی‌شان برای ادامه تحصیلِ رایگان، رفع شود. نظام آموزشی فرانسه، از کمک و حمایت مالی افراد حقیقی و نهادهای حقوقی، استقبال می‌کند، به‌طوری که بخشی از هزینه‌های آموزشی، از طریق همین کمک‌های داوطلبانه، تأمین می‌شود.

در این نظام آموزشی، به هنرستان‌های فنی‌وحرفه‌ای، بهای زیادی داده می‌شود و بخش بسیار قابل توجهی از فارغ‌التحصیلان آن، به راحتی جذب بازار کار می‌شوند. بخش دیگر هم برای ادامه تحصیل به دانشکده‌های فنی‌وحرفه‌ای و دانشگاه‌های صنعتی وارد می‌شوند. دیپلمه‌های نظری نیز، جذب دانشگاه‌های کشور می‌شوند. در این هنرستان‌ها، کارگاه‌ها و آزمایشگاه‌ها مجهز و به روز هستند و گذشته از این، موزه‌های فناوری و علمی به‌صورت رایگان یا نیم‌بها، پذیرای هنرجویان و معلمانشان هستند.

در نظام آموزشی فرانسه، سرفصل دروس و مواد آموزشی از طریق شورای آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش، به مدارس و معلمان و ناشران آموزشی، ابلاغ می‌شود. مدیران مدارس در انتخاب کادر اداری و آموزشی مدرسه و معلمان (متوسطه) در انتخاب منبع آموزشی و کمک آموزشی و روش آموزش، آزادند. سیاست آموزشی فرانسه به دنبال حذف نگرش نخبه‌گرایی در آموزش عمومی است و به همین دلیل در فرانسه، مدارس خاص جایگاه قابل توجهی ندارند. تلاش دولت فرانسه در یکی دو سال اخیر (۲۰۱۶ - ۲۰۱۵)، جذبِ دانش‌آموزان معلول (ذهنی و حرکتی)، در مدارس دولتی و عادی است. آن‌ها قصد دارند با ایجاد خود باوری در افراد معلول و خانواده‌هایشان، آن‌ها را اجتماعی‌تر نموده و شرایط را برای انجام فعالیت‌های معمولی آنان در جامعه واقعی، مهیا نمایند. از طرف دیگر نیز، دانش‌آموزان چگونگی برخورد درست را با افراد معلول، در مدرسه و جامعه آموزش می‌بینند.

پی‌نوشت‌ها

۱. در گذشته نیز در ایران، به متوسطهٔ اول، «سیکل اول» و به متوسطهٔ دوم، «سیکل دوم» گفته می‌شد.
2. Educational Reform
3. Secode de Lycee
4. Activités d’approche
5. Cours
6. Exercices Récolus
7. Travaux pratiques
8. Exercices et problémes
9. Regards sur …

منابع

برای تهیه این مقاله، سایت‌های رسمی زیر که متعلق به وزارت آموزش‌وپرورش فرانسه است، مورد استفاده قرار گرفتند.

http://www.education.gouv.fr
http://www.education.gouv.fr/cid81/les-programmes.html
http://www.education.gouv.fr/cid166/l-ecole-maternelle-organisation-programme-et-fonctionnement.html
http://www.education.gouv.fr/cid213/l-ecole-elementaire-organisation-programme-et-fonctionnement.html
http://www.education.gouv.fr/cid80/les-horaires-par-cycle-au-college.htm
Béthune, Philippe. & et al. (2015). MATÉMATIQUES Lycée 2end. Paris; Delagrave.

تب و تاب ریاضی در بوشهر

گزارشی از پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

۳ تا ۶ بهمن ۱۳۹۶

بوشهر

پری حاجی‌خانی

اشاره

پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، از ۳ تا ۶ بهمن ۱۳۹۶، به میزبانی استان بوشهر و در شهر بوشهر، برگزار شد و ۵۱۵ استاد، معلم و دانشجو از سراسر کشور در آن شرکت کردند.

محورهای این کنفرانس، به شرح زیر بودند:

- **چالش‌های پیـــش روی معلمان در آموزش ریاضی**
- **چگونگی انتخاب، حمایت و آموزش مستمر معلمان ریاضی**
- **آموزش ریاضی دورهٔ ابتدایی**

مراسم افتتاحیه

افتتاحیه کنفرانس روز سه‌شـــنبه ۹۶/۱۱/۳ ساعت ۱۴:۰۰ در مجتمع فرهنگی ۹ دی برگزار شـــد. پس از پخش سرود ملی ایران، مراســـم با تلاوت آیاتی از قرآن کریم شروع شد. ســـپس دکتر **ناصر کرمی**، مدیر کل آموزش‌وپرورش استان بوشـــهر و رئیس ستاد برگزاری پانزدهمیـــن کنفرانـــس آموزش ریاضی ایـــران، ضمن خیرمقدم به شرکت‌کنندگان ســـخنرانی کوتاهی ایراد کردند. در ادامه معاون آموزش متوسطه **حسین درتاج** کـــه دبیر کمیته اجرایی کنفرانس بـــود، از ریاضی‌دانان گذشـــته و معاصر ایران یاد کردند و از حامیان علمی و مالی استان تشکر کردند. پس از ایشان، دبیر کمیته علمی کنفرانس و مدیر گروه ریاضی دانشگاه خلیج‌فارس، **دکتر سعید کریمی**، گزارشی از روند شکل‌گیری پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی، تشکیل جلسات کمیته علمی

عکاس: عبدالخالق عیسوندی

کنفرانس، انتخاب مدعوین داخلی، دعوت از مدعو خارجی پروفسور **ماریا فن دن پن هویزن** از مؤسسه فرودنتال با حمایت کامل دانشگاه خلیج فارس و دلیل عدم حضور ایشان ارائه دادند و اعلام کردند که تعداد ۲۹۷ مقاله و ۳۰ کارگاه برای دبیرخانه ارسال شده بود که از بین آن‌ها، ۱۹۲ مقاله مربوط به محور اول، ۲۰ مقاله مربوط به محور دوم و ۸۵ مقاله مربوط به محور سوم بودند. ایشان با توضیح فرایند سخت و تا حد امکان منصفانه داوری، گزارش دادند که در نهایت، ۲۶ مقاله به‌صورت سخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای و ۶۶ مقاله به‌صورت پوستر و ۹ کارگاه پذیرفته شدند.

پس از آن **عبدالکریم گراوند** اســتاندار بوشــهر، ســخنرانی کردند و طی آن یادآور شــدند که مدرسهٔ سعادت بوشهر بعد از دارالفنون، پیشرو علم نوین در ایران بوده است.

برای آشنایی بیشتر شرکت‌کنندگان با فرهنگ غنی و ریشه‌دار بوشــهر که زمانی جزو بزرگ‌ترین بندرهای تجاری دنیا بوده اســت، **دکتر عبدالکریم مشایخی** رئیس مرکز ایران‌شناســی شعبه بوشــهر توضیحاتی در مورد اســتان و تاریخچهٔ آن دادند. ســپس «گروه موســیقی فانوس» اجرای زیبایی داشــتند که شامل خاطره جان‌باختگان کشتی سانچی، خیام خوانی و چند آهنگ دیگر بود که همگی به سبک محلی اجرا شدند. پس از آن کلیپی در مورد فعالیت‌ها و خدمات زنده‌یاد مریم میرزاخانی پخش شد. در ادامه **دکتر زهرا گویا** سخنرانی خود را با عنوان «شیرینی سختی بلوغ!» ارائه نمود.

سپس **خلیل شکوریان** نماینده اتحادیه انجمن‌های معلمان ریاضی ایران طی ســخنان خــود از عبدالرضا حیدری سرگروه ریاضی دورهٔ متوسطه بوشهر و یوسف سلیمی دبیر انجمن معلمان ریاضی استان بوشهر برای کمک در برگزاری کنفرانس تشکر کرد.

ســخنران پایانی جلســهٔ افتتاحیه **مهندس علی زرافشان** معاون آموزش متوسطه وزارت آموزش‌وپرورش ضمن تبریک میلاد حضرت زینب(س) و ابلاغ سلام وزیر آموزش‌وپــرورش، اعلام کردند کــه در بین انجمن‌های علمی موجود، انجمن‌های معلمان ریاضی ایران یکی از انجمن‌های شاخص و فعال است. وی در ادامه، با تأکید بر اینکه ورودی‌ها به رشتهٔ ریاضی به حدود ۱۱ ٪ رسیده است، به نتایج تیمز ۲۰۱۵ اشاره و سه نکته را بیان نمود؛ افت شــدید موفقیت تحصیلی علوم تجربــی در هر دو جمعیت پایهٔ چهارم و پایهٔ هشتم، روند صعودی اما کند موفقیت تحصیلی ریاضی پایهٔ هشتم و ثابت بودن موفقیت تحصیلی در ریاضی پایهٔ چهارم.

برنامهٔ کنفرانس

برنامه‌های کنفرانس شــامل هفت ســخنرانی عمومی یک ساعتی، ۲۶ ســخنرانی ۲۰ دقیقه‌ای، ارائهٔ ۶۶ مقاله به صورت پوستر و اجرای ۹ کارگاه بود. به موازات این برنامه‌ها، نمایشــگاهی هم از بعضی از خانه‌های ریاضیات و انتشارات مدرسه و انتشارات فاطمی برپا بود. همچنین، برنامه‌هایی برای بازدید از نیروگاه اتمی بوشهر، مدرسهٔ سعادت و گشت دریایی در نظر گرفته شده بود.

سخنرانی‌های عمومی

سخنرانی‌های عمومی در روزهای چهارشنبه و پنج‌شنبه در دو نوبت در ســاعت ۸:۳۰ تا ۹:۳۰ و ۱۰:۳۰ تا ۱۱:۳۰ به قرار زیر ارائه شدند.

- دکتر مهدی رجبعلی‌پور، استاد ریاضی- دانشگاه شهید باهنر کرمان «پژوهش موضوعی در آموزش ریاضی با رعایت تعادل بین محض و کاربرد»؛
- دکتر علی برهمند، استاد آموزش ریاضی، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد واحد همدان «بی‌نهایت، فرایندهای نامتناهی و یک اشتباه منطقی»؛
- دکتر فرزاد رادمهر، استاد آموزش ریاضی، گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد «سنجش فراشناخت فراگیران در مطالعات آموزش ریاضی، چالش‌ها و راهکارها»؛
- دکتر ابراهیم ریحانی، اســتاد آموزش ریاضی، گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر فنی دانشگاه شهید رجایی و رئیس مرکز «اهمیت دانش پداگوژی محتوا در تدریس ریاضیات»؛
- دکتر مهرداد کاروان جهرمی استاد ریاضی، گروه ریاضی دانشگاه خلیج‌فارس «الگوها و مثال‌ها در آموزش ریاضی»؛

● دکتر سهیلا غلام‌آزاد استاد آموزش ریاضی، مدیر گروه، پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش «تحقیقات لازم در زمینهٔ اصلاحات برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه»؛

● دکتر محمدرضا سپهری نوبندگانی، بخش ریاضی دانشگاه شیراز «آموزش تفکر ریاضی».

کارگاه‌های آموزشی ریاضی

شش کارگاه در روز چهارشنبه و در دو نوبت ۱۲- ۱۰:۳۰ و ۱۴:۳۰- ۱۴ به صورت موازی، برگزار شدند که در هر نوبت، سه کارگاه تشکیل می‌شد. کارگاه‌ها به قرار زیر بودند:

● «ساختن حجم‌های هندسی با کاغذ و تا (اوریگامی مدولار)، مجتبی نیک‌سرشت، ایرج زمانی و زهرا گرگین؛

● «رویکرد آموزش ریاضی با حل مسئله در دورهٔ ابتدایی»، علی جعفری و مهدی رحمانی؛

● «حساب و احتمال با طعم خوش تاس»، فاطمه هانی‌طبایی، شراره تقی‌دستجردی و مریم طاهری؛

● «راهی به سوی شناخت موجودیت عدد کسری»، مریم بهاءلو، سمیرا شایگان و فاطمه حاج‌عزیزی؛

● «آموزش شش روش کار تیمی در کلاس درس ریاضی و چگونگی سوق دادن کارگروه به سمت مشارکت تیمی»، مرتضی صادقی، فاطمه سلیمیان، شکوفه منجم؛

● «بازی با کسرها»، صغرا کوهپیما، آرزو دانایی‌فرد.

و سه کارگاه هم در روز پنج‌شنبه در یک نوبت ۱۲- ۱۰:۳۰ و به صورت موازی، برگزار شدند:

● «کارگاه بازی‌های جذاب ریاضی و دست‌ساخته‌ها»، محمدتقی‌پور و معصومه مجاهدفر؛

● «مفهوم‌سازی اعداد مخلوط از طریق بازی»، مریم حیدری، شیرین صالح‌خرم‌آبادی و عبدالرضا حیدری؛

● «تولید محتوای الکترونیکی ریاضی پایه نهم (حجم)»، لیلا تحملی و محمدجواد مصلحیان.

مراسم اختتامیه

مراسم اختتامیه روز جمعه ۹۶/۱۱/۶ ساعت ۹:۰۰ صبح در مجتمع فرهنگی ۹ دی برگزار شد. در این مراسم، به ترتیب حسین درتاج، دبیر اجرایی پانزدهمین کنفرانس، بهنام جاسمی نماینده معلمان خوزستان و دکتر علی کرمی مدیر کل آموزش‌وپرورش استان سخنرانی کوتاهی داشتند. سپس کلیپی از فعالیت‌های اتحادیه انجمن‌های معلمان ریاضی ایران و کلیپی از خود کنفرانس، پخش شد. بعد از آن خانم طاهره اسدی (نماینده اتحادیه انجمن‌های ریاضی) بیانیه این کنفرانس را قرائت کردند. پس از مراسم تجلیل از معلمان پیش‌کسوت ریاضی استان بوشهر که با اشتیاق شرکت‌کنندگان همراه بود، حسن ختام کنفرانس، تجلیل از خدمات زنده یاد استاد میرزا جلیلی، دانش آموختهٔ مدرسه سعادت بوشهر بود. سپس دکتر اسمعیل بابلیان در خصوص خدمات ارزندهٔ زنده‌یاد میرزا جلیلی به‌عنوان یکی از پیش‌کسوتان در حوزهٔ آموزش ریاضی که زادهٔ بوشهر بود، بیانات مبسوطی ایراد نمودند و از نقش برجستهٔ ایشان در دوره‌های بازآموزی برای معلمان دورهٔ متوسطه در نیمهٔ اول دههٔ ۵۰ و هم زمان با تغییر اساسی برنامهٔ درسی ریاضی و برای معلمان دورهٔ ابتدایی پس از تغییر برنامه در دههٔ ۶۰ و در زمان تعطیلی دانشگاه‌ها، مطالب تاریخی ارزنده‌ای بیان نمودند. به‌خصوص ایشان، از نقش ویژه روان‌شاد جلیلی در تربیت نیرو برای برنامه‌ریزی، تألیف و بازآموزی معلمان، یاد کردند. در پایان، از همسر مرحوم میرزا جلیلی سرکار خانم هما فقیه که ایشان هم بوشهری هستند و به دعوت کمیته اجرایی کنفرانس، در مراسم شرکت کرده بودند، دعوت شد تا به روی صحنه رفته و هدیه‌ای را که به رسم یادبود تهیه شده بود، از طرف مدیر کل آموزش‌وپرورش استان بوشهر، دریافت نمایند.

پایان بخش مراسم اختتامیه، اجرایی از «گروه موسیقی شبدیز» بود، که این گروه هم، یک برنامهٔ «خیام‌خوانی» جالب داشتند.

بیانیهٔ پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

شرکت‌کنندگان در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران با سپاس و قدرشناسی از مهمان‌نوازی مردم شریف و خون‌گرم بوشهر، و تشکر و قدردانی از دست‌اندرکاران برگزاری این کنفرانس، بیانیه‌ای به شرح زیر صادر نموده‌اند:

۱. از آنجایی که یکی از اهداف برگزاری کنفرانس‌ها، هم‌اندیشی و آموزش معلمان است تقاضا داریم برنامه‌های کنفرانس مطابق قالب مشخص‌شده اجرا شود و از برگزاری برنامه‌های حاشیه‌ای و خارج از موارد مصوب در کمیته علمی پرهیز گردد که برای نمونه می‌توان به هم‌زمان شدن دوره‌های آموزشی ضمن‌خدمت با برگزاری کنفرانس اشاره کرد.

۲. این گردهمایی بزرگ حاصل پژوهش‌ها، نوآوری‌ها و تجربیات ارزندهٔ جمع کثیری از استادان دانشگاه‌ها، معلمان و دبیران ریاضی و دانشجویان می‌باشد لذا پشتیبانی مادی و معنوی وزارت آموزش‌وپرورش ضروری است.

۳. تقاضا داریم ادارات کل آموزش‌وپرورش استان‌ها، تسهیلات لازم جهت شرکت و رفت‌وآمد معلمان در کنفرانس‌ها را ایجاد نمایند.

۴. با توجه به توصیه‌های معلمان دربارهٔ حجم زیاد و عدم انسجام کتاب‌های درسی نسبت به ساعت آموزشی آن‌ها، خواستار بازبینی کتاب‌های نونگاشت هستیم. همچنین دوباره‌نگری در روش ارزشیابی ضروری به نظر می‌رسد.

۵. تقاضا داریم در دورهٔ ابتدایی برای معلمان این دوره که معلمان عمومی هستند، آموزش‌های مناسب طراحی و اجرا شود و همواره آموزش مستمر و مفید آن‌ها مورد نظر باشد.

۶. همچنین لازم است ارزشیابی توصیفی در دورهٔ ابتدایی مورد بازبینی و اصلاح قرار گیرد.

۷. با توجه به معضلاتی که کنکور در نحوهٔ آموزش ریاضیات مدرسه‌ای به‌وجود آورده است، تقاضا می‌شود وزارت آموزش‌وپرورش از برگزاری کلاس‌های کنکور، آزمون‌های آمادگی و چاپ کتاب‌های تست جلوگیری کرده و از پخش برنامه‌های رادیویی و تلویزیونی مربوط به کنکور و نحوهٔ پاسخ به سؤالات آزمون‌های فوق ممانعت نماید.

۸. از وزارت آموزش‌وپرورش تقاضا می‌شود که اجازه ندهد کلاس‌های درسی به‌خصوص آموزش ریاضی تحت تأثیر انواع آزمون‌های بیرونی و آزمون‌های ورودی برای مدارس متنوع قرار گیرد.

دو مفهوم کلیدی ریاضی

دورهٔ آموزش ابتدایی

محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

اشاره
ریاضی بین- فرهنگی و توضیح، دو مفهوم کلیدی از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دوره ابتدایی» هستند که «درک هایلوک و فیونا تانگاتا» نویسندگان این کتاب، با تألیف آن تلاش دارند چهل و چهار مفهوم مطرح (موضوع کلیدی مهم) در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه چندان پیچیده معرفی و تبیین نمایند.

کلیدواژه‌ها: ریاضی بین- برنامه‌ای، خانه به‌عنوان زمینه‌ای برای سواد عددی، یادگیری مفهوم، برقراری ارتباط و اتصال، یادگیری اصل‌ها، پرسش‌گری

ریاضی بین- فرهنگی

تعریف

پیدایش و توسعهٔ ایده‌های ریاضی، ریشه در تاریخ عمیق بسیاری از فرهنگ‌های دنیا دارد. تمام افراد در سراسر جهان، با ریاضی سروکار دارند، البته با نظام‌های عددی و روش‌های محاسباتی متفاوتی که متناسب با فرهنگ خودشان است. «ریاضی بین- فرهنگی[1]» را می‌توان آن بخش از ریاضیات دانست که سعی در شناسایی همین تجربه‌های گوناگون ملت‌ها و میزان مشارکت فرهنگ‌های مختلف در ریاضی را دارد. ورود ایده‌ها و نظریه‌های ریاضی بین- فرهنگی از اقوام مختلف و تجربه‌های تاریخی آن‌ها به کلاس درس، به دانش‌آموزان ابتدایی کمک می‌کند تا درک خود را از چگونگی توسعهٔ دانش ریاضی افزایش داده و قدردان فرهنگ‌هایی باشند که در شکل دادن به پیکرهٔ فعلی دانش، نقش داشته‌اند.

توضیح و بحث

ریاضیات مقوله‌ای جهانی است، به گونه‌ای که تمام انسان‌ها در سراسر جهان و در تمام دوره‌های تاریخی، برای رفع نیازها و پاسخ به پرسش‌های خود در سطوح مختلف، با آن درگیر بوده‌اند (زاسلاوسکی[2]، ۱۹۹۶). گاهی اوقات، ریاضی به‌عنوان یک موضوع مبرا از فرهنگ و ارزش‌های انسانی مطرح می‌شود. در واقع این تصوری است که بعضی از دانش‌آموزان از ریاضی دارند که تصوری اشتباه است. به همین دلیل در سال‌های اخیر، برنامه‌های درسی ریاضی در انگلستان، علاوه بر مؤلفه‌های قبلی، جهت توجه بیشتر به نیازهای سیاسی، اجتماعی و فرهنگی جامعه، دوباره طراحی و بازنویسی شده‌اند (آسکیو، ۲۰۰۱؛ براون، ۲۰۰۱؛ رینالد و موییس، ۱۹۹۹[3]). این نوع تغییرات به نوبهٔ خود جدید و با نگرشی متفاوت

با آنچه قبلاً تصور می‌شـد همراه بـود. زیرا در طول تاریخ، همواره توسعهٔ ریاضی بر اساس نیازهای عمدتاً مادی، تکنولوژیکی و اکتشـافات علمی بوده است؛ از پیشرفت‌های هندسـی به‌دست آمده توسط یونانیان باستان گرفته که در جهت رفع نیازشان به اندازه‌گیری زمین‌ها و تحقق رویاهای معماری و شهرسازیشان بود تا اختراع ماشین‌حسـاب در انگلسـتان و آلمانِ قرن هفدهم که به منظور تسریع در تحقیقات علمی اتفاق افتاد، تـا ریاضیات امروزی که ماهیـت آن در عصر تکنولـوژی و انفجار اطلاعات، در حال تغییر اسـت، همهٔ این‌ها، نمونه‌هایی از سـابقهٔ نگرش انسان‌ها به ریاضیات اسـت. بنابراین، دانش‌آمـوزان باید بدانند که ریاضیات، یک حوزهٔ اطلاعاتی ایسـتا نیسـت که تنها باید به درون ذهن‌ها منتقل شـود، بلکه در تمام فرهنگ‌ها و تمام زمان‌ها، ریاضی به گونه‌ای توسـعه یافته و در حال توسـعه است که ارزش‌های فرهنگی غالب را، برجسته‌تر سازد.

جسـت‌وجو کـردن جنبه‌های چنـد- فرهنگی ریاضی، می‌توانـد باعث افزایش درک دانش‌آموزان از چرایی و چگونگی توسـعهٔ نظریه‌های ریاضی شـود. مثال‌هـای بین- فرهنگی را می‌تـوان به منظور ارائهٔ تصویـری دقیق‌تـر از تاریخ ریاضیات نیز اسـتفاده کرد. آگاهی از نقش فرهنگ‌های مختلف در توسـعهٔ ریاضیات، می‌تواند در اصلاح و تغییر این تصور اشتباه که اروپا یا غرب، خاستگاه اغلب نظریه‌ها و یافته‌های ریاضی اسـت، کمک کند. برای نمونه، اگرچه قضیهٔ فیثاغورس را با نام یک ریاضی‌دان برجسـتهٔ یونانی و براساس تلاش‌های او در یونان باستان می‌شناسند، اما شواهدی هست که نشان می‌دهد این قضیه، حداقل چند هزار سال زودتر و توسط چینی‌ها و حتی قبل‌تر از آن، توسط بابِلی‌ها به‌کار گرفته شده است (سوییتز و کائو[۴]، ۱۹۷۷).

تجربه‌های ریاضیِ بین- فرهنگی، به کودکان در درک کاربرد همگانی ریاضی کمک می‌کند و آن‌ها را متوجه این حقیقت می‌سازد که همه قادرند با ریاضی کار کنند و ریاضـی می‌تواند برای تمام دانش‌آموزان از هر نوع و نژادی که باشـند، عمومیت داشته و مورد توجه قرار گیرد. زاسلاوسـکی، با توجه به تفاوت‌های موجود بین ملت‌ها و فرهنگ‌های مختلف، بیان می‌کند که «مردم، اشیا را می‌شمارند، کمیت‌های مختلف را اندازه‌گیری می‌کنند، تقویم‌ها و روش‌های محاسـبهٔ گـذرِ زمان را ابداع می‌کنند، بـه طراحی‌های هنری دسـت می‌زنند، ساختمان‌سازی می‌کنند، بازی‌هایی انجام می‌دهند که شـامل مفاهیم ریاضی است و در نهایت، قادرند حوزه‌ای از علم را همراه با اصطلاحات مخصوص به آن، ارائه کنند که همهٔ این اقدامات را در ساختاری علمی، توضیح دهد» (۱۹۹۶،۱).

نقش معلم در اینجا، بسـیار حائز اهمیت اسـت. او می‌تواند با انتخاب مثال‌های مناسب، در تشخیص شـباهت‌ها و تفاوت‌های بین ریاضیات فرهنگ‌های مختلف، به کودکان کمک کرده و از ایجاد این ذهنیت که ریاضیات سایر فرهنگ‌ها از پیچیدگی، پیشرفت و اهمیت کمتری برخوردار است، جلوگیری کند.

مثال‌های عملی

در ادامه، سـه نمونـه از تجربه‌های ریاضی بین- فرهنگی را معرفی می‌کنیم.

تاریخچهٔ صفر

بسـیاری از کودکان در به‌کارگیـری عدد صفر در محاسـبات خود، دچار مشـکل می‌شـوند، چه هنگامی‌که صفر را به‌عنوان یک عدد مشخص و مجزا بـه‌کار می‌برند و چه هنگامی‌کـه آن را به‌عنوان یک رقم از ارقام یک عدد استفاده می‌کنند. بنابراین، برای دانش‌آموزان بسـیار جالب و آموزنده است که بدانند صفر، یک موضوع چالش‌برانگیز برای بشریت در طول تاریخِ توسـعهٔ نظام‌های شمارشی بوده است. معلمان در مدارس ابتدایی می‌تواننـد به همراه دانش‌آموزان خود، این تاریخچه را مطالعه و موشکافی کنند. برای مثـال، می‌توانند تحقیق کنند کـه چگونه بابِلی‌های قدیم، یک نظام ارزش مکانی مخصوص به خود را برای شـمارش ابداع کرده بودند در حالی‌که هرگز نمادی را بـرای صفر در نظر نگرفتـه بودند. یا دانش‌آموزان، می‌توانند به مطالعهٔ ریاضیات مایاها[۵] بپردازند، اقوامی که در آمریکای مرکـزی زندگی می‌کردند، ناحیه‌ای که امروزه جنوب مکزیک، گواتمالا و بیلز شـمالی را در برمی‌گیـرد. مایاها تا سـال ۶۶۵ میلادی، از یک نظام شمارشـی با ارزش‌مکانی بر پایهٔ بیست استفاده می‌کردند و نمـادی را نیز برای صفـر معرفی کرده بودند. کار با اعداد مایایی می‌تواند برای دانش‌آموزان،

شـــادی‌بخش و همراه با فرصت‌هایی برای تفکر باشد. همچنین، می‌توان دانش‌آموزان را متوجه این موضوع ساخت که نظام شمارشـــی که امروزه از آن استفاده می‌شـــود، ریشه در نظام ارزش مکانی بر پایهٔ ۱۰ دارد که هندوهای قدیم، آن را ایجاد کرده‌اند. در هندوستان قدیم، ابتدا صفر به‌عنوان یک رقم با معنای خاص خود در بین ارقامِ یک عددِ چند رقمی اســـتفاده می‌شد و بعدها، خود به‌عنوان یک عدد مســـتقل در نظر گرفته شد، که در شروع، به‌عنوان یک کلمه و بعدها به‌صورت یک نماد تعریف شد. تاریخچهٔ صفر و تأثیر آن بر نظام شمارش، موضوع بسیار جالبی است که فرهنگ‌های متعددی در گسترش آن سهیم هستند. نظام شمارشِ هندی‌ها و نحوهٔ کار با آن، در ابتدا از هند به ســـمت شـــرق تا چین و به سمت غرب تا کشورهای اسلامی، پیشـــروی کرد و بعدها از طریق تاجران مســـلمان به ایتالیا و دیگر کشورهای اروپایی وارد شد. در ایتالیا و در حدود ســـال ۱۲۰۰ میلادی، فیبوناتچی[۶] از نُه رقم هندی به همراه نمادِ o، در کارهای خود استفاده کرد. اما این نظام شمارشیِ جدید، هنوز نوپا بود و تاجران ایتالیایی، تمایلی برای استفاده از آن و کنار گذاشتن ارقام رومی نداشتند. سرانجام در قرن پانزدهم، با رشد

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۲	۴	۶	۸	۱	۳	۵	۷	۹
۳	۳	۶	۹	۳	۶	۹	۳	۶	۹
۴	۴	۸	۳	۷	۲	۶	۱	۵	۹
۵	۵	۱	۶	۲	۷	۳	۸	۴	۹
۶	۶	۳	۹	۶	۳	۹	۶	۳	۹
۷	۷	۷	۳	۱	۸	۶	۴	۲	۹
۸	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۹
۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹

شکل ۱: مربع وِدایی

تجارت و فراوانی کاغـــذ، اعداد هندی-عربی به همراه شالودهٔ آن، یعنی نظام شمارش بر پایهٔ ۱۰، مورد توجه و استفاده قرار گرفت. مردم کم‌کم از مزایای این نظام نوین برای انجام محاسبات خود مطلع شدند و تا امروز نیز، آن را به‌کار می‌گیرند.

مربع وِدایی[۷]

اولیـــن متون ریاضـــی هندی متعلق بـــه وِداها[۸] اســـت که بـــه حدود ۱۰۰۰ ســـال پیـــش از میلاد مســـیح برمی‌گردد. یک نمونـــه از یافته‌های وداها، جدول ضربی اســـت که در شکل ۱ نشان داده‌ایم که بـــه آن، «مربع وِدایی» نیز گفته می‌شـــود که ۹×۹ اســـت. آنچه که به‌عنوان حاصل‌ضرب در هر یک از خانه‌ها قرار می‌گیرد، «ریشـــهٔ رقمی[۹]» حاصل‌ضرب اســـت، با این تعریف که هـــر حاصل‌ضرب با بیش از یک رقم را با یک عدد تک رقمی جایگزین می‌کنیم. ایـــن عدد تک رقمی را مجموع ارقامِ حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم (برای مثال، ۵۶=۸×۷، ۱۱=۶+۵ و در نهایت ۲=۱+۱، عدد ۲ را به‌عنوان ریشـــهٔ رقمی ۸×۷ در نظر می‌گیریم). وقتی جدول کامل شود، الگوهای جالبی به دست می‌آید. با دنبال کردن اعداد مشابه و متصل کردن آن‌ها به یکدیگر، می‌توان بعضی از این الگوها را ساخت. مثلاً اگر همهٔ ۱ها را با یک خط به هم وصل کنیم، یک شش‌ضلعی به دست می‌آید که می‌توان از آن، به‌عنوان یک الگو در کاشـــی‌کاری‌ها استفاده کرد. به همین ترتیب، سایر الگوهای مربوط بـــه اعداد از ۲ تا ۹ را می‌توان رســـم کرد. این مربع، ارتباط شگفت‌انگیزِ بین اعداد و الگوهای هندسیِ هنر اسلامی را که بعدها به‌وجود آمدند، آشکار می‌سازد.

مصری‌ها

ریاضیـــات مصر باســـتان، سرشـــار از ایده‌های تاریخی معروف است که می‌تواند در کلاس ریاضی، مطرح شده و فرصت‌هایی را برای فعالیت‌های ریاضی فراهـــم کند. مثلاً یکی از تصویرهای آشـــنا و جالب بـــرای اکثر دانش‌آموزان در مـــدارس ابتدایی، اهرام

ثلاثهٔ مصر اســت. دانش‌آموزان می‌توانند به آســانی و طــی یک فعالیت، الگوهایــی از هرم‌ها را با قاعدهٔ مربع، روی یک کاغذ رســم کنند که شامل وجه‌ها و یال‌هایی است که بعدها برای تا زدن و چسباندن، برش می‌خورند و یک حجم سه بعدی مشابه هرم به دست می‌آید. این امر می‌تواند شروعی برای ساخت ســایر هرم‌ها با قاعدهٔ غیر مربعی باشــد. همچنین، دانش‌آمــوزان می‌تواننــد با اعداد و نظام شــمارش مصری‌ها آشنا شــده و از لذت کار با آن‌ها بهره‌مند شــوند، زیرا این نظام شــامل نمادهای هیروگلیف[10] بــرای یک، ده، صد، هزار، ده هــزار، صد هزار و یک میلیون است، اما هیچ نمادی برای صفر ندارد. اگرچه ایــن نظام بر پایهٔ ۱۰ اســت اما فاقــد ارزش مکانی برای ارقام یک عدد اســت. می‌توان از دانش‌آموزان خواســت که با اعــداد مصــری، معادله‌های عددی ســاده را حل کنند تا به اهمیت وجود ارزش مکانی پی‌برده و متوجه مزیت و قدرت آن در نظام شمارش امروزی شوند. چگونگی استفادهٔ مصری‌ها از کسرها نیز، از دیگر موضوعات جذاب ریاضی مصری اســت. مصری‌ها، کسرهای با صورتِ غیر از یک را عمدتاً به شکل مجموع کســرهایی نشان می‌دادند که صورت آن‌ها یک بود. برای مثال، کسر $\frac{۲}{۵}$ را به‌صورت $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۵}$ و کسر $\frac{۷}{۸}$ را نیز به‌صورت $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$ می‌نوشتند. کار بر روی چنین کسرهایی، فرصت خوبی را برای ارتقای درک و فهم دانش‌آموزان از عملیات بر روی کســرها فراهم می‌سازد.

مطالعهٔ بیشتر

گفته‌های زاسلاوسکی (۱۹۹۶) بسیار پربار بوده و می‌توانــد راهنمای ایده‌های عملی فراوانی باشــد. همچنیــن وب‌ســایتی با عنــوان «تاریخچهٔ ریاضی مک‌چیوتر[11]» به نشانی (www.groups.dcs.st-and.ac.uk) موجود اســت که از منابــع اصلی و مهم در این زمینه است. همان‌طور که قبلاً نیز توضیح دادیم، ریاضــی بین- فرهنگی، نقش مهمی در رســیدن به برخی از هدف‌های آموزشــی در ریاضی ایفا می‌کند. بــرای درک بهتر ایــن موضوع به‌ویــژه در مدارس ابتدایی، می‌توانید به کتاب براون و هایلاک (۲۰۰۴)، بخش منســوب به تانگاتا که در همین زمینه است، مراجعه کنید.

توضیح[12]

تعریف

«توضیح‌دادن»، مهارتی کلیدی در تدریس است که معلمان به کمــک آن، می‌توانند به دانش‌آموزان خود کمک کننــد تا تکلیف‌ها، هدف‌هــا، فرایندها، مفاهیم، اصول و روابــط ریاضی را به‌صورتی واضح‌تر بشناسند. به گفتهٔ راگ و براون (۲۰۰۰: ۶)، «توضیح، شناساندن به دیگری است». نکتهٔ دیگر اینکه هر چند در ارائهٔ توضیح، دانش‌آموزان نیز می‌توانند در کلاس درس در نقش فعال مشارکت داشته باشند، اما تمرکز اصلــی ما در این کتاب، بیشــتر بر انجام این عمل از جانب معلم است.

توضیح و بحث

به گفتــهٔ هایلاک (۲۰۰۶: ۱)، یکــی از بهترین روش‌ها برای یاددهی و فهماندن اکثر مطالب ریاضی در دورهٔ ابتدایی این است که معلم، اول آن مطلب را خوب بفهمد و سپس بتواند خوب برای دانش‌آموزانش توضیــح دهد. اکثــر تحقیقات نشــان می‌دهند که دانش‌آموزان، معمولاً معلمی را بیشــتر دوست دارند که مســائل را بهتر برایشان باز کند و به‌اصطلاح بهتر توضیح دهد (راگ، ۱۹۸۴).

تأکید بر توضیــح‌دادن به‌عنوان یک مهارت مهم در تدریس ریاضی، نه تنها با روح ساخت‌وســازگرایی و ایجاد و بنای شــناخت توســط خــود دانش‌آموز منافاتی ندارد، این در حالی اســت که ممکن اســت تصور شــود که توضیح‌دادن، فرایندی از نوعِ «انتقال یک‌طرفــهٔ مفاهیم» اســت و در نتیجه، بــا رویکرد ساخت‌وسازگرایی در تناقض است، که چنین نیست. بلکــه توضیحات معلم می‌تواند بخشــی از تجربیاتی باشد که به دانش‌آموزان در ساخت دانش خود، کمک می‌کند. این توضیح معلم اســت که به دانش‌آموز یاد می‌دهــد که چگونه از نوع تفکــر و تجربه‌های معلم خود، برای جست‌وجو و شناساییِ نحوهٔ ارتباط دانش جدید با دانش موجود، بهره بگیرد.

توضیحِ خوب، آن اســت کــه ماهرانه و هدف‌دار باشد و همواره در آن، از پرسش‌های مناسب استفاده شود و شــیوه‌ای ارائه شــود که دانش‌آموز بتواند از تمام مطالب متنوع عرضه شده در یک جلسهٔ درس، چکیــده‌ای را در قالب جمله‌هــای کلیدی، در ذهن

دانش‌آموزان باید بدانند که ریاضیات، یک حوزهٔ اطلاعاتی ایستا نیست که تنها باید به درون ذهن‌ها منتقل شود، بلکه در تمام فرهنگ‌ها و تمام زمان‌ها، ریاضی به گونه‌ای توسعه یافته و در حال توسعه است که ارزش‌های فرهنگی غالب را، برجسته‌تر سازد.

خود ضبط کند. بنابراین، توضیح معلم می‌تواند آویزهٔ گــوش دانش‌آموز قرار گرفته و او را در مراحل بعدی و هنگام تحقیق و اکتشــاف، کمک کند. برای مثال، اگرچــه دانش‌آموز می‌تواند درک و فهــم خود را از تفریق اعداد سه‌رقمی (بر مبنای ساخت‌وسازگرایی) و از روی مقایسهٔ قیمت‌ها و استفاده از سکه‌ها بسازد، اما یک معلم با قدرت بیان خوب، می‌تواند همین کار را با یک توضیح دقیق و سنجیده از فرایند تفریق به کمک روش تجزیه، انجام دهد.

طبق تعریفــی که از «توضیح» بیان شــد، یک توضیحِ خوب همیشــه به دنبال افزایش درک و فهم دانش‌آموزان اســت و در یک توضیحِ مؤثر، از مثال‌ها و نامثال‌ها[۱۳]، مثال‌های تصویری، استدلال و مقایسه اســتفاده می‌شــود. به این ترتیــب، ایده‌های مجرد ریاضــی در موضوعات مختلــف را می‌توان به کمک توضیــح دادن، در قالبی بیان کرد که دانش‌آموزان را قادر سازد تا با مفاهیم مجرد، رابطه برقرار کنند. مثلاً هنــگام کار با نمادهای جدیــد ریاضی، با بهره‌گیری از یک توضیحِ خوب و غیررســمی شــامل شکل‌ها و تصویرها، مثال‌های عینی و اشیای ملموس، می‌توان کاری کــرد که برقراری رابطه بــا آن نمادها (که در حالت معمول درک آن‌ها خیلی سخت است)، آسان شــود. بسیار مهم است که توضیحات ارائه شده، تنها از جانب معلم متقاعد کننده نباشــد. بلکه معلم باید مخاطبِ توضیحات خود را خوب بشناســد و تا جائی که امــکان دارد، خود را به‌جای شــنونده قرار دهد و متناســب با ســطح او، به بیان توضیح بپردازد که مسلماً، این کار آسان نیست. توضیح به چاشنی‌های متعددی نیز نیاز دارد! به این معنا که هنگام بیان یک توضیح، معلم باید به‌خوبی از قدرت «حرکات فیزیکیِ دســت و صورت خود[۱۴]» و مهارت‌های ســخنوری T نهایت اســتفاده را ببرد و حین توضیح دادن، از رسم نمودارهای ســاده و شــکل‌های کمکی بر روی تابلو اســتفاده کند و واژه‌ها و اعداد مهم و کلیدی را نیز، گوشه‌ای از تابلو یادداشت کند تا دانش‌آموز با دیدن و متصل‌کردن همهٔ آن‌ها به یکدیگر، ادامهٔ توضیح معلم را بفهمد و دنبال کند.

توضیح‌دادن، مهارتی کلیدی در تدریس است که معلمان به کمک آن، می‌توانند به دانش‌آموزان خود کمک کنند تا تکلیف‌ها، هدف‌ها، فرایندها، مفاهیم، اصول و روابط ریاضی را به‌صورتی واضح‌تر بشناسند

توضیحِ خوب، دارای ویژگی‌های مشخصی است که راگ و بــراون (۲۰۰۱ a، ۹-۷)، برخی از آن‌ها را به شرح زیر، بیان کرده‌اند (که ما نیز در ادامهٔ بحث، سعی در بازکردن همین ویژگی‌های مهم داریم.)

۱. معلم باید دارای یــک «ایدهٔ اصلی» یا قاعدهٔ کلی در ذهن خود باشد،

۲. از «آواها» در کلام خود به درســتی استفاده کند،

۳. بر «دانــشِ موضوعی» مربــوط به آن درس مسلط بوده و از ساختارهای آن موضوع، آگاه باشد.

داشتن یک ایدهٔ اصلی یا قاعدهٔ کلی در ذهن

محور قرار دادن یــک ایده یا یک قاعدهٔ کلیدی، می‌توانــد جریان توضیحات معلــم را هدایت کرده و به درک واضح‌تر مســائل موجــود، کمک کند و این حتی به خــود معلم نیز برای آنکــه بداند در کجای جریان تدریس قرار دارد، کمک می‌کند. برای مثال، در جمع ســتونی اعداد چند رقمی، هنگامی‌که برای دانش‌آموز توضیح می‌دهیم که اگر در جمع ســتونیِ دو عدد، حاصل‌جمع برابر با یک عدد دو رقمی شود، باید یکان آن را نوشته و دهگان آن را به رقم واقع در ارزش مکانی بعــدی اضافه کنیم، این توضیح حاوی یک قاعدهٔ اصلی اســت که بایــد آن را همواره محور قرار دهیم. این قاعده آن اســت که ارزش مکانی هر رقم در ستون چپ، مثلاً رقم ۱، ده برابر ارزش مکانی رقم ۱ در ستون سمت راست است و این قاعده برای ستون‌های بعدی نیز صادق است. برای درک بهتر، به عملیات ستونی دو عدد زیر دقت کنید:

```
  ۱
 ۲۳۶
+۷۲۷
-----
   ۳
```

در ایــن عملیات، عدد ۱ (که در بالای عملیات و به رنگ روشن‌تر نوشته شده است)، دارای ارزش ۱۰ برای ردیف قبلی است و این ایده که نباید آن را تنها عدد ۱ دید، می‌تواند همان ایدهٔ کلیدیِ مورد نظر در چنین عملیاتی باشد.

استفاده درست از آوا[۱۵]

تنوع در اســتفاده از آوا به همراه رعایت ســایه روشن‌ها در لحن صدا، تأکیدهای به‌جا و همراه‌کردن اشــاره و حــرکات، از امور مهم هنــگام اجرای یک توضیح موفق محســوب می‌شوند. به‌خصوص آهنگِ

کمک به دانش‌آموزان در یادگیری الگوهای زبانی، نقش مهمی را ایفا می‌کند. مثلاً یک نمونه از استفادهٔ درست از آوا و آهنگ هنگام توضیح دادن، می‌تواند به این صورت باشد (این مثال در مورد اصل متمم بودن دو عدد نسبت به عدد ۱۰ است که به همراه تأکیدهای به موقعِ آوایی که آن‌ها را به‌صورت ایرانیک مشاهده می‌کنید و حرکات فیزیکی که آن‌ها را درون پرانتز مشاهده می‌کنید، آورده شده است)

«ده (باز کردن تمام انگشتان دو دست)، منهایِ (بستن تمام انگشتان و باز کردن ۴ انگشت از دست راست) چهار (مکث کوتاه) می‌شود (بستن ۴ انگشت و باز کردن ۶ انگشت دیگر) شش (مکث). پس، (باز کردن دوبارهٔ انگشتان دو دست) ده، منهایِ (باز نگه‌داشتن همان ۶ انگشت قبلی و بستن ۴ انگشت دیگر) شش (مکث کوتاه و سپس با لحنی آرام و پرسشی) می‌شود؟... (سکوت برای شنیدن واکنش و پاسخ دانش آموزان)». (هایلاک و کوکبرن، ۲۰۰۳)

آگاهی معلم از ساختار و دانش موضوعی که آن را تدریس می‌کند (تسلط بر دانش موضوعی)

کامل بودن دانش و آگاهی معلم و تسلط او بر موضوع تدریس، پیش‌نیاز یک توضیح مؤثر است. معلمان قبل از اینکه شروع به تدریس یک مبحث کنند، باید بر آن مبحث اِشراف کامل داشته باشند و مشخص کنند که کدام نظَریه‌ها و موضوع‌ها، بعدها به این موضوعِ پیش‌رو ارتباط یا ارجاع داده می‌شوند و کدام دسته از مثال‌ها برای تضمین درک بهتر مفاهیم، قواعد و فرایندها، مناسب‌تر و کارآمدتر هستند. این از پیش‌نیازهای اساسی برای توضیح مطالب ریاضی است که معلم، درک دقیقی از ساختار ارتباطی بین نظریه‌های ریاضی در پایه‌ای که تدریس می‌کند و دیگر پایه‌ها، داشته باشد. گیفورد (۲۰۰۵: ۷۵)[۱۶]، بر خلاف تصور آن‌هایی که فکر می‌کنند موضوعِ اِشراف کامل معلم بر دانش، نظریه‌ها و ساختارها، برای معلمانی که به کودکان پیش‌دبستانی (۳ تا ۵ ساله) درس می‌دهند ضروری نیست، معتقد است که حتی برای تدریس مفاهیم بسیار پایه‌ای ریاضی به کودکان خردسال نیز، برخورداری از سطح بالایی از دانش موضوعی ریاضی لازم است و دانش و آگاهی معلم از مفاهیم، حقایق و مهارت‌های موضوعی در ریاضی، به وی دیدی وسیع‌تر نسبت به ریاضی می‌بخشد که برای کمک به دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی، ضروری است.

مثال‌های عملی

معلمان مدارس ابتدایی می‌توانند با تکیه بر مهارت‌های شخصی خود یا با به اشتراک گذاشتن تجربه‌هایشان با سایر همکاران، در مورد شیوه‌های بهینه کردن توضیحات، به اطلاعات مفیدی دست یابند. البته بخش‌های مختلف ریاضی، سبک‌های مختلف توضیح‌دادن را نیز می‌طلبد. مثلاً توضیح‌دادن در مورد تکلیف‌ها، هدف‌ها، فرایندها، مفاهیم، اصول و روابط ریاضی، می‌توانند تفاوت‌های ظریفی با یکدیگر داشته باشند. در اینجا سعی می‌کنیم به ارائهٔ مثال‌هایی دربارهٔ توضیح دادنِ سه بخش تکلیف‌ها، هدف‌ها و فرایندها بپردازیم.

توضیح‌دادن در مورد یک تکلیف

به یک گروه از دانش‌آموزان ۶ تا ۷ ساله، تکلیفی داده شده است که بر اساس آن، باید مجموعه‌ای از ۶ ظرف مختلف را از کوچک به بزرگ، بر اساس گنجایش و با آزمایشِ ریختن آب از یکی به درون دیگری مرتب کنند. قبل از اینکه کودکان شروع به فعالیت کنند، معلم باید وظایف آن‌ها را توضیح دهد و بگوید که مفهوم گنجایش یک ظرف و مفهوم دسته‌بندی از کوچک به بزرگ چیست و اگر یک ظرف را پر کرده و سپس آب موجود در آن را در ظرفی دیگر بریزیم، چه اتفاقی می‌افتد. این توضیحات، باعث ایجاد حس اطمینان در دانش‌آموزان، از درک آن چیزی می‌شود که سعی دارند به آن برسند. همچنین، توضیح معلم باید شامل پایان کار و چگونگی ارائهٔ نتایج توسط دانش‌آموزان باشد. حتی این توضیح، به‌جای آنکه به‌صورت کلامی باشد، می‌تواند فیزیکی باشد و معلم از یک دانش‌آموز بخواهد که جلو هم‌کلاسی‌های خود، با ریختن آب در دو ظرف که مشخص نیست کدام یک بزرگ‌تر و کدام یک کوچک‌تر است، گنجایش آن‌ها را با هم مقایسه کند و با این کار، به شناخت آنچه قرار است در فعالیت مورد نظر انجام شود، کمک کند.

یک توضیحِ خوب همیشه به دنبال افزایش درک و فهم دانش‌آموزان است و در یک توضیحِ مؤثر، از مثال‌ها و نامثال‌ها، مثال‌های تصویری، استدلال و مقایسه استفاده می‌شود

توضیح‌دادن در مورد هدف

در شروع هر بخش یا هر فصل از تدریس، توضیح هدف‌های آن بخش، می‌تواند هم به آن‌ها و هم به خود معلم کمک کند. مثلاً معلم می‌تواند در ابتدای جلسه بر روی تابلو بنویسد که «هدف ما برای امروز، یادگیری نحوهٔ محاسبهٔ ذهنی عملیات بر روی اعدادِ نزدیک به دوبرابر[17] است». این جمله فقط عنوان هدف است، اما برای توضیح این هدف، معلم باید بیان کند که این هدف، با آنچه دانش‌آموزان در گذشته یاد گرفته‌اند، چه ارتباطی دارد و از روش پرسش و پاسخ برای توضیح مفاهیم یا واژه‌های کلیدیِ به‌کار رفته در متن هدف مانند «محاسبه»، «دوبرابر»، «نزدیک به دوبرابر» و «ذهنی» استفاده کند. پس از همهٔ این‌ها، معلم یکی دو نمونه از محاسباتی را که قرار است در نهایت دانش‌آموزان یاد بگیرند، با همین استراتژی ذهنیِ عنوان شده در هدف، مثال می‌زند. مثلاً با نوشتن عبارت‌های ۲۸+۲۹ و ۱۵۲+۱۴۹ روی تابلو، از دانش‌آموزانش می‌خواهد که توضیح دهند چرا این‌ها را تقریباً دوبرابر می‌نامیم؟ تا از درک مفهوم «نزدیک به دوبرابر» توسط کودکان، اطمینان حاصل کند.

توضیح در مورد یک فرایند

یکی از روش‌های مهم محاسبهٔ ذهنی برای عمل جمع آن است که از استراتژی پل‌زدن بر روی مضارب عدد ۱۰، استفاده کنیم. برای نمونه، هنگامی‌که می‌خواهیم به‌طور ذهنی عدد ۸ را با ۵۷ جمع کنیم، می‌توانیم ۳ را به ۵۷ اضافه کنیم تا به ۶۰ برسیم و سپس ۵تای باقی‌مانده از ۸ را به آن اضافه کنیم تا به حاصل‌جمع یعنی ۶۵ برسیم. معلم برای توضیح ابتدایی این فرایند، باید با دانش‌آموزان تمرین کند که ده تا ده تا بشمارند و روش‌های مختلف تجزیهٔ عدد ۸ به دو عدد کوچک‌تر را توضیح دهند. این کار همراه با توضیحات معلم پیش‌نیاز انجام مراحل بعدی کار است. سپس معلم یک تصویر دیداری مثل یک مربع صدتایی را با این فرایند همراه می‌سازد و از دانش‌آموزان می‌خواهد که از روی تصویر مربع، توضیح دهند که اگر از ۵۷ در مربع شروع کنند و ۳تا بشمارند به چه عددی خواهند رسید. آن‌ها پاسخ می‌دهند عدد ۶۰، سپس از آن‌ها می‌خواهد ۵تای دیگر نیز بشمارند تا به ۶۵ برسند.

همچنین برای توضیح فرایند مثال بالا، معلم می‌تواند از توضیحی دیگر نیز کمک بگیرد. مثلاً ۸ سکهٔ ۱ پنی را به ۵۷ پنی موجود اضافه می‌کند و هنگام اضافه کردن این سکه‌ها به یکدیگر، از حرکات فیزیکی و آوا نیز به‌طور هم‌زمان بهره می‌گیرد تا به ۶۰ پنی برسد و به همین شکل، این مسیر را ادامه می‌دهد. حتی معلمان می‌توانند هر دو روش توضیح دادن را با هم به‌کار ببرند. بهتر است معلم در پایان کار خود، به چند نامثال (مثل ۵۳+۴) نیز اشاره کند و از دانش‌آموزان بپرسد که آیا این روش، برای این نوع مثال‌ها هم مناسب است یا خیر؟ و از آن‌ها بخواهد که دلیل خود را توضیح دهند.

مطالعهٔ بیشتر

معلمان ابتدایی برای پیشرفت و بهبود کیفیت توضیحات خود در درس ریاضی، می‌توانند از نمونه توضیحات موجود در کتاب هایلاک (۲۰۰۶) بهره ببرند. هایلاک این کتاب را با هدف تجهیز معلمان به اطلاعاتی که برای کسب توانایی لازم در امر توضیح‌دادن مباحث ریاضی ضروری است، تألیف کرده است. همچنین منبع راگ و براون (۲۰۰۱)، از منابع اصلی در زمینهٔ مهارت‌های توضیح‌دادن است که ما بخش‌هایی از آن را در این قسمت، مورد استفاده قرار دادیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Cross-Cultural Mathematics
2. Zaslavsky
3. Askew & Brown & Reynols & Muijs
4. Swets & Kao
5. Mayas
6. Fibonacci
7. Vedic square
8. Vedas
9. Digital root
10. Hieroglyphic
11. MacTutor History of Mathematics
12. Explanation
13. Examples and non-examples
14. Body language
15. Voice
16. Gifford
17. Near-doubles

الگوهای بی‌الگو

فرید حسینی، دبیر ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی
حمید فرهادی، دبیر ریاضی و دانشجوی دکتری آنالیز تابعی دانشگاه کردستان

مقاله ارائه شده در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران- بوشهر- ۳ تا ۷ بهمن ۱۳۹۶

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده‌است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقـرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن اسـت. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

در ضمن، گاهی هم به‌جای شنیدن روایت از زبان معلم، می‌توان کلاس وی را مورد مشاهده قرار داده و پس از تأیید همان معلم، روایت را از زبان مشاهده‌گر شنید.

رشد آموزش ریاضی

چکیده

اهمیـت الگو و دنبالـه در ریاضیـات، مبرهن اسـت تا جایی که برخی ریاضیـات را علم مطالعهٔ الگوها می‌داننـد. با توجه به پررنـگ کردن الگوها در برنامه‌های درسـی و نتایج خـوب دانش‌آموزان در آزمون‌های تیمز بازنگری و ارتقای سـطح مطالب ضروری به نظر می‌رسـد. در این راسـتا این مقاله نقدی بر نحوهٔ ارائهٔ بحث الگو و دنباله در بخش سوم از فصل اول کتاب ریاضی (۱) دهم رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی (چاپ ۹۶) می‌باشد.

کلید واژه‌ها: الگو، دنباله، تناوب، جملهٔ عمومی

مقدمه

با مطالعهٔ کتاب‌های ریاضـی دوره‌های ابتدایی، متوسـطهٔ اول و متوسـطهٔ دوم متوجه بها دادن به الگوها در برنامهٔ درسی می‌شـویم به‌گونه‌ای که در ریاضـی دهـم روال ارائهٔ مطلب رسـالت خود را به سرانجام رسانده و از آن پس از تعریف‌های استاندارد بیشتر کمک گرفته می‌شود. در همین راستا بحث را روی الگو و دنبالهٔ ریاضی (۱) دهم متمرکز می‌کنیم.

الگوها و دنباله‌ها:

با توجه به صفحهٔ آغازین بحث بخش سوم از فصل اول:

الگوها ساختار منظم‌اند که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده و یا ترکیبی از این دو باشد. با توجه به این تعریف اولین مثال آغازین بحث به چالش کشیده می‌شود و بی‌الگویی در این الگوها از همین مثال آغاز می‌شود. به‌عنوان مثال ادامهٔ این الگو طبق تعریف می‌تواند موارد زیر (از بین بی‌شمار مورد ممکن) باشد.

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.

n :شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n :تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و a_n	a_1=۵	a_2=۸	a_3=۱۱	...	...	a_n=...	...

به‌عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به‌طور خلاصه به‌صورت a_1=۵ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_1، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس‌دار[۱] نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به‌ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جملهٔ اول الگوست؛ ۸ جملهٔ دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

الف) با این نمادگذاری، a_4 نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب) a_n به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

۱ــ در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل a ،b و x سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس‌دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

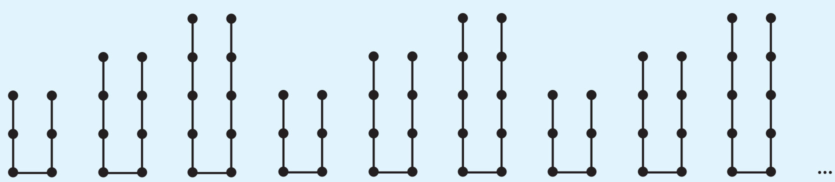
حرم حضرت معصومه (س)

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به‌عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی‌کاری شده یا مارپیچ‌های روی میوهٔ آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به‌طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

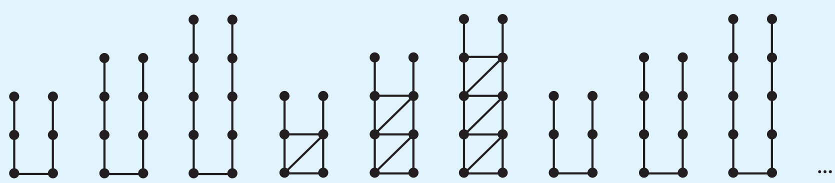
از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به‌قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعهٔ الگوها.

۱۴

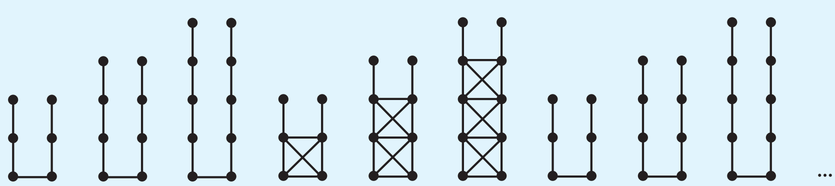
۱. با توجه به امکان متناوب بودن الگو می‌تواند به صورت زیر ادامه پیدا کند



۲. و یا

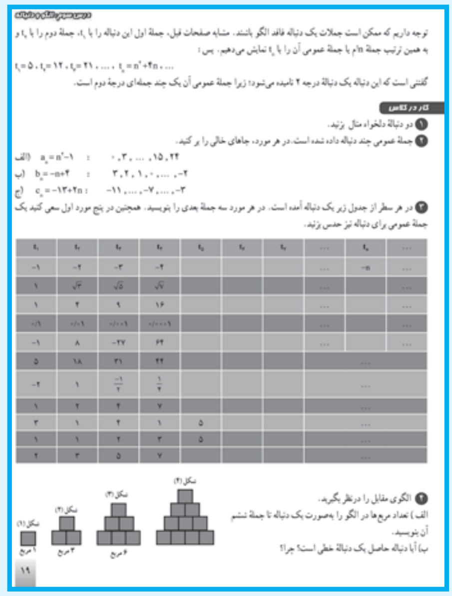


۳. و یا



با این بررسی می‌توان نتیجه گرفت ادامهٔ روند می‌تواند بی‌شمار الگو را تولید کند و از چالش‌های بخش این است که کتاب یکی از حالت‌ها را تأکید کرده است. (برای مثال‌های دیگر کتاب نیز این مشکل وجود دارد)

پس از معرفی دنبالـــه در صفحهٔ ۱۹ با این کار در کلاس مواجه می‌شویم :


درس سوم: الگو و دنباله

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جملهٔ اول این دنباله را با $t_۱$، جملهٔ دوم را با $t_۲$ و به همین ترتیب جملهٔ nام یا جملهٔ عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$t_۱=۵، t_۲=۱۲، t_۳=۲۱، ...، t_n=n^۲+۴n، ...$

گفتنی است که این دنباله یک دنبالهٔ درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جملهٔ عمومی آن یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنبالهٔ دلخواه مثال بزنید.

۲ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n=n^۲-۱$: ۰، ۳، ...، ۱۵، ۲۴

ب) $b_n=-n+۴$: ۳، ۲، ۱، ۰، ...، −۲

ج) $c_n=-۱۳+۲n$: −۱۱، ...، −۷، ...، −۳

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جملهٔ عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$	$t_۵$	$t_۶$	$t_۷$	...	t_n	...
−۱	−۲	−۳	−۴				...	−n	...
۱	$\sqrt{۳}$	$\sqrt{۵}$	$\sqrt{۷}$				...		...
۱	۴	۹	۱۶				...		...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱				...		...
−۱	۸	−۲۷	۶۴				...		...
۵	۱۸	۳۱	۴۴				...		
−۲	۱	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$				...		
۱	۲	۴	۷				...		
۳	۱	۴	۱	۵			...		
۱	۱	۲	۳	۵			...		
۲	۳	۵	۷				...		

۴ الگوی مقابل را درنظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

۱ مربع ۳ مربع ۶ مربع

۱۹

لاگرانژ بـــرای دنباله‌هایی که چند جملهٔ اول آن‌ها $a_۱, a_۲, a_۳, ..., a_k$ مشخص اســـت فرمول زیبای زیر را پیشنهاد می‌دهد:

$$a_n = \frac{(n-۲)(n-۳)...(n-k)}{(۱-۲)(۱-۳)...(۱-k)}a_۱ + \frac{(n-۱)(n-۳)...(n-k)}{(۲-۱)(۲-۳)...(۲-k)}a_۲ + ... + \frac{(n-۲)(n-۲)...(n-(k-۱))}{(k-۱)(k-۲)...(k-(k-۱))}a_k \qquad (۱)$$

ولی آیا این تنها جمله عمومی ممکن است؟ برای باز شدن موضوع روی قسمت اول سؤال سه کار در کلاس تصویر بالا متمرکز می‌شویم. به‌عبارتی می‌خواهیم برای موجود زیرا! چند جملهٔ بعدی و سپس در صورت امکان جملهٔ عمومی بیابیم:

$-۱, -۲, -۳, -۴, ...$

باروش لاگرانژ به جملهٔ عمومی زیر می‌رسیم :

$$a_n = \frac{(n-۲)(n-۳)(n-۴)}{۴} + \frac{(n-۱)(n-۳)...(n-۴)}{-۱} - \frac{۲(n-۲)(n-۲)...(n-۳)}{۳} \qquad (۲)$$

که با به‌دســـت آوردن چهار جملهٔ اول به ظرافت دقت لاگرانژ بیشتر پی می‌بریم:

$$a_۱ = -۱+۰+۰+۰ = -۱$$
$$a_۲ = ۰-۲+۰+۰ = -۲$$
$$a_۳ = ۰+۰-۳+۰ = -۳$$
$$a_۴ = ۰+۰+۰-۴ = -۴$$

و با تعریف دنبالهٔ

$$b_n = (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)c_n + a_n \qquad (۳)$$

متوجه می‌شویم باز می‌توان بی‌شمار جملهٔ عمومی را پیشنهاد داد.

حال اگر از منظر دیگری به این دنباله نگاه کنیم: به‌عبارتی فرض ما براین باشد که چهار جملهٔ اول این دنباله قرینهٔ اعـــداد تصادفی حاصل از پرتاب یک تاس بوده باشند

برای ادامهٔ دنباله و نوشتن جملهٔ عمومی به بن‌بست خواهیم رســـید و گزینهٔ جدیدی متولد می‌شود. اینکه جملات بعدی را حدس زد و نوشت غیرممکن است.

نتیجه‌گیری

با بررســـی‌های فوق اینکه چند جملهٔ اول دنباله را به ما بدهند و جملات بعدی و به تبع جملهٔ عمومی را بخواهند پاسخ بدین گونه است:

چون ممکن است جملات اعداد تصادفی باشند پس نمی‌توان جملات بعدی را حدس زد و یا اینکه بی‌شمار جملهٔ عمومی را می‌شود نوشت. حال به دانش‌آموزی که پاســـخ این سؤال را داده باشد (نداده باشد) چه نمره‌ای می‌دهید؟!

پیشنهاد

برای کاستن از چالش‌های ذکر شده در مقاله بهتر است در بیان ســـؤال جملات ممکن بعدی و یا جمله عمومی ممکن درج شود. هرچند با این فرض نیز ایراد این سؤال‌ها به قوت خود باقی خواهد ماند.

سپاسگزاری

با تشکر از اســـتاد ارجمند دکتر سهیلا غلام‌آزاد، خانم مریم بینش و آقای اکبر ترابی که در رفع نواقص مقاله کمک نمودند.

منابع

۱. کتاب درسی ریاضی (۱) پایهٔ دهم رشته‌های تجربی رشته‌های ریاضی و فیزیک- تجربی چاپ ۱۳۹۶.
۲. آنالیـــز عددی (۱)، اســـمعیل بابلیان، چاپ ۲ ســـال ۱۳۹۲، ۹۷۸-۹۶۴-۳۸۷-۸۳۳-۷.

خیام، سکه‌ها، مثلث و درستی استدلال

سید جمال بخشایش، سرگروه ریاضی استان چهارمحال و بختیاری

مقدمه

ریاضیات بر پایهٔ استدلال‌هایی شکل گرفته است که درستی آن‌ها، درستی ریاضیات را نتیجه داده‌اند. پس می‌توان گفت ریاضیات بر درستی استدلال‌ها استوار است. حال سؤال این است که آیا استدلال هم می‌شود اشتباه شود؟!

گاهی می‌خواهیم در یک استدلال، از جزئی به جزء دیگر برسیم، مثل اینکه عدد 2^3 از عدد 3^2 کوچک‌تر است. آیا از راه مشابهت، می‌توانیم نتیجه بگیریم که 3^4 از 4^3 کوچک‌تر باشد. آیا درست نتیجه گرفته‌ایم؟ نه، این استدلال درست نیست.

گاهی می‌خواهیم در یک استدلال، از جزء به کل برسیم، مثلاً، به کمک ماشین‌حساب، توان‌های متوالی عدد ۶ را به‌دست می‌آوریم:

$6^1=6$ و $6^2=36$ و $6^3=216$ و $6^4=1296$ و ...

و این عمل را تا 6^{20} ادامه می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که در هیچ‌یک از این عددها، رقم سمت چپ، حاصل ۹ نیست. در این صورت، آیا می‌توانیم چنین حکم کنیم که «رقم سمت چپ هیچ توانی از ۶، ۹ نیست»؟

باز هم نه! هرگاه عمل ادامه یابد، معلوم خواهد شد که رقم سمت چپ عدد 6^{176} عدد ۹ است.

پس باید در استدلال‌هایمان، کمی دقت کنیم. در زیر به مسئله‌هایی می‌پردازیم که اهمیت این موضوع را خوب بیان می‌کنند.

مسئلهٔ ۱: خیام و بارهای شتر

گفته شده است که نمایندهٔ ملکشاه سلجوقی در شهر حلب، مأمور بود تا ۵۰۰ رطل سنگ مرمر را از حلب، به نزد سلطان بفرستد، پس از دو نفر شتردار که یکی ۶ شتر و دیگری ۴ شتر داشت، خواست تا این مأموریت را انجام دهند. شترداران ۵۰۰ رطل سنگ مرمر سلطان و هر کدام ۵۰۰ رطل سنگ مرمر مال‌التجارهٔ شخصی خویش را به تساوی، بار شتران کرده و به پایتخت سلطان بردند و امانت او را تحویل دادند. ملکشاه به خواجه نظام‌الملک دستور داد ۱۰۰۰ دینار به شترداران بدهد. خواجه ۶۰۰ دینار را به صاحب ۶ شتر و ۴۰۰ دینار را به صاحب ۴ شتر داد. عمرخیام، که ناظر بر این ماجرا بود، به تقسیم خواجه اعتراض کرد و استدلال کرد که ۸۰۰ دینار حق صاحب ۶ شتر و ۲۰۰ دینار حق صاحب ۴ شتر است. خیام چگونه استدلال کرده است؟

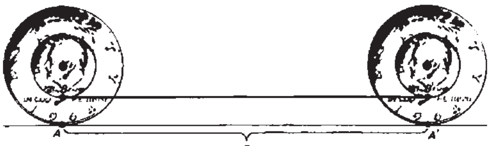
پاسخ:

شترداران روی هم، ۱۵۰۰ رطل سنگ را بار ۱۰ شتر کرده‌اند. پس بار هر شتر، ۱۵۰ رطل سنگ بوده است. صاحب ۴ شتر روی هم ۶۰۰ رطل سنگ بار داشته که ۵۰۰ رطل آن مربوط به مال‌التجاره شخصی و ۱۰۰ رطل آن، متعلق به سلطان بوده است. در صورتی‌که صاحب ۶ شتر روی هم ۹۰۰ رطل بار داشته که ۵۰۰ رطل آن، مال‌التجاره شخصی و ۴۰۰ رطل آن مال سلطان بوده است. بنابراین مبلغ ۱۰۰۰ دینار باید به نسبت ۱۰۰ و ۴۰۰ بخش شود.

مسئلهٔ ۲: غلطیدن سکه‌ها

سکه‌ای به قطر دو سانتی‌متر روی زمین، یک دور کامل می‌غلطانیم. پایین‌ترین نقطهٔ محیط سکه در ابتدا و انتها را A و A' می‌نامیم. واضح است که فاصلهٔ A و A' به اندازهٔ محیط سکه است که برابر 2π است.

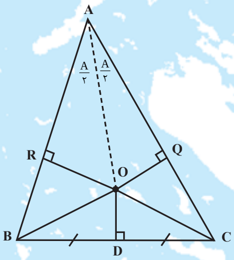
اکنون یک دایرهٔ فرضی به مرکز سکه و به شعاع نصف سکه در نظر بگیرید. نقطهٔ پایین این دایره را B بنامید و موقعیت آن را در انتهای حرکت، B' بنامید. چون سکه یک دور کامل غلطیده است، پس دایرهٔ کوچک نیز یک دور کامل غلطیده است. در نتیجه، فاصلهٔ B و B' برابر با محیط دایرهٔ کوچک یعنی π است. اما به وضوح $AA'=BB'$. بنابراین $2\pi=\pi$.



پاسخ:

غلطیدن، نوع خاصی از حرکتِ یک شکل، بر روی یک سطح است و زمانی رخ می‌دهد که سرعتِ حرکت نقطهٔ تماس روی سطح، برابر با سرعت حرکتِ نقطهٔ تماس روی شکل باشد. درغیر این صورت، می‌گوییم که شکل روی سطح سُر می‌خورد. در مسئلهٔ بالا نیز، دایرهٔ کوچک‌تر بر روی خط 'BB سُر می‌خورد، چون سرعت حرکت نقطهٔ تماس روی خط، برابر با سرعت حرکت نقطهٔ A روی خط است ولی سرعت حرکت نقطهٔ تماس روی دایره کوچک، نصف سرعت حرکت نقطهٔ A روی دایرهٔ بزرگ است.

مسئلهٔ ۳: همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند



ثابت می‌کنیم همهٔ مثلث‌ها، متساوی‌الساقین هستند

مثلث ABC را در نظر بگیرید. در شکل زیر، OD عمودمنصف ضلع BC و AO نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

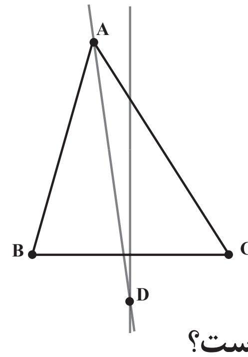
از نقطهٔ O به دو ضلع AC و AB، عمودهای OQ و OR را رسم کرده‌ایم. روشن است که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOQ و AOR، طبق وتر و یک زاویه، با هم برابرند. پس AR=AQ.

همین‌طور دو مثلث OQC و ORB طبق وتر و یک ضلع با هم برابرند، پس RB=QC.

در نتیجه، AR+RB برابر با AQ+QC است. بنابراین AB=AC است. این نشان می‌دهد که هر مثلث دلخواه متساوی‌الساقین است. کجای استدلال اشتباه است؟!

پاسخ

استدلال فقط در حالتی درست است که نقطهٔ D داخل مثلث باشد، در حالی که برای مثلث‌های غیر متساوی‌الساقین، نقطهٔ D بیرون مثلث قرار می‌گیرد، مانند شکل روبه‌رو:



مسئلهٔ ۴: آیا ۱- =۱+ است؟

تناسب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{a+b+a}=\frac{x-1}{a+b-1}$$

دو طرف را در صورت، تفضیل به نسبت می‌کنیم؛

$$\frac{x+1-(a+b+1)}{a+b+1}=\frac{x-1-(a+b-1)}{a+b-1}$$

$$\frac{x-a-b}{a+b+1}=\frac{x-a-b}{a+b-1}$$

چون دو کسر برابرند و صورت‌های آن‌ها برابرند، پس مخرج‌های آن هم برابرند و در نتیجه، ۱- =۱+! اشتباه در چیست؟

پاسخ

اگر دو کسر برابر و صورت‌های آن‌ها نیز برابر باشند! به شرط آنکه صورت‌ها مخالف صفر باشند، می‌توان نتیجه گرفت که مخرج‌ها نیز برابرند. تناسبِ داده شده، معادله‌ای است که x=a+b جواب آن است و در نتیجه، صورت‌های کسرهای حاصل، برابر صفر است.

مسئلهٔ ۵: هزار تومان گم‌شده

حمید و سعید و وحید، به یک کتاب‌فروشی رفتند تا یک کتاب بخرند. قیمت کتابی که می‌خواستند ۳۰۰۰۰ تومان بود. هر یک از آن‌ها، ۱۰۰۰۰ تومان دادند و کتاب را خریدند وقتی صاحب مغازه بازگشت به فروشنده گفت که قیمت کتاب ۲۵۰۰۰ تومان بوده و ۵۰۰۰ تومان به او می‌دهد تا به سه خریدار، بازگرداند. ولی فروشنده، تنها ۳۰۰۰ تومان به سه خریدار باز می‌گرداند و ۲۰۰۰ تومان دیگر را خودش برداشت.

اکنون حمید و سعید و وحید، هر یک ۹ هزار تومان داده‌اند که می‌شود ۲۷۰۰۰ تومان و ۲۰۰۰ تومان هم که در جیب فروشنده است که روی هم می‌شود ۲۹۰۰۰ تومان. پس ۱۰۰۰ تومان باقی‌مانده، چه شده است؟

پاسخ

هیچ پولی گم نشده است، بلکه محاسبهٔ بالا اشتباه است! محاسبهٔ صحیح به این صورت است که ۲۵۰۰۰ تومان نزد صاحب مغازه است، ۳۰۰۰ تومان هم به حمید و سعید و وحید برگردانده شده است و ۲۰۰۰ تومان هم فروشنده برداشته است که در مجموع می‌شود ۳۰۰۰۰ تومان.

در واقع، از مجموع ۳۰۰۰۰ تومانی که حمید و سعید و وحید به فروشنده دادند، ۲۵۰۰۰ تومان آن قیمت کتاب بود که اکنون نزد صاحب مغازه است و از ۵۰۰۰ تومان باقی‌مانده، ۳۰۰۰ تومانش به آن سه نفر بازگشته و ۲۰۰۰ تومانش، نزد فروشنده است.

منابع

۱. مصحفی، عبدالحسین. (۱۳۶۶). **منطق و استدلال**. انتشارات فاطمی.

۲. صلواتی، عرفان و مشایخی، سعید. (۱۳۹۵). **استدلال ریاضی (پروژه دومین اردوی آموزشی بتا)**. خمین

کنفرانس آموزش معلولان

۱۹ ماه مِه سال ۲۰۱۶ - کاخ الیزه

علی روزدار، دبیر ریاضی شهرکرد (ناحیه ۱) و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

وزیر جدید آموزش فرانسه، یک زن جوان مسلمان است. از نظر وی، «آموزش فراگیر در درجهٔ اول، یک حقیقت تصریح شده در قانون سال ۲۰۱۳ است و علاوه بر این، یک حقیقت ملموس و ضروری است که هر روز، برای بیش از ۲۸۰,۰۰۰ دانش‌آموز معلول، در مدارس عمومی فرانسه، جریان دارد.»

کنفرانس ملی معلولیت، روز پنجشنبه، ۱۹ ماه مِه سال ۲۰۱۶، در محل کاخ الیزه، با حضور رئیس‌جمهور فرانسه که ریاست آن را به عهده داشت، ، فرانسوا اولاند، برگزار شد. این کنفرانس در حضورخانم نجات ولد بل قاسم[1]، وزیر آموزش‌وپرورش ملی، آموزش عالی و پژوهش، و برخی دیگر از وزرا برای افراد معلول و پیشگیری از ترک مدرسه توسط آنان، برگزار شد.

کنفرانس ملی معلولیت یک فرصت برای رئیس‌جمهور و دولت بود تا به تعهد خود به یک جامعه فراگیر پای‌بند باشند.

خانم وزیر: «این کنفرانس فرصتی برای نشان دادن بسیج خستگی‌ناپذیر در بخش مربوط به من، برای ایجاد یک مدرسهٔ فراگیر است. مدرسهٔ فراگیر مدرسه‌ای‌ست که «حق همهٔ کودکان را به رسمیت می‌شناسد که توانایی یادگیری و پیشرفت دارند، که اطمینان حاصل شود آموزش فراگیر برای همهٔ کودکان، بدون تمایز و تبعیض فراهم است.» این قانون بازسازی مدرسه در جمهوری (فرانسه) است، اینکه مدرسه مکانی برای مراقبت و آموزش همهٔ کودکان است و آن را نیز که به دنبال ساخت جامعه فردا و با هم زندگی در آن هر کس با دیگری در آموزش و یادگیری یکسان است به رسمیت می‌شناسد. در هر مدرسه از فرانسه، در حال حاضر، حداقل یک دانش‌آموز معلول وجود دارد. این ثمرهٔ تلاش‌های انسانی در سیاست دولت جمهوری است.«منظور از دانش‌آموز معلول، کسی است که کم‌توان جسمی یا ذهنی است. بنا بر قانون، مدارس عادی موظف به پذیرش این دانش‌آموزان هستند. علت این تصمیم این است که وقتی دانش‌آموزان معلول، در کلاس‌های عادی و در کنار سایر دانش‌آموزان به آموزش مشغول‌اند، دیگر «معلولیت»شان، مانعی برای تمایز بین آن‌ها و بقیه نیست.

پی‌نوشت

1. Najat Vallaud-Belkacem

دستاورد ایران در المپیاد ریاضی ۲۰۱۷

پنجاه و هشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱۲-۲۳ جولای ۲۰۱۷ (۲۱ تیر تا ۱ مرداد ۱۳۹۶ ریو دو ژانیرو- برزیل)

پری حاجی‌خانی
مدیر داخلی مجله رشد آموزش ریاضی

المپیاد جهانی ریاضی (IMO) یک المپیاد ریاضی سالانه با ۶ مسئلهٔ ۴۲ امتیازی برای دانش‌آموزان دورهٔ دبیرســـتان و قدیمی‌ترین المپیاد علمی جهان است. این المپیاد برای اولین بار در سال ۱۹۵۹، در رومانی برگزار شـــده و هر ساله (به جز سال ۱۹۸۰) ادامه داشته است. حدود ۱۰۰ کشور تیم‌هایی حداکثر ۶ نفره از دانش‌آموزان را به همراه یک نفر سرپرست تیم، یک نفر معاون سرپرست و چند ناظر می‌فرســـتند. المپیاد از آغاز آن در ۱۹۵۹، میراثی غنی از خود بر جای گذاشته و خود را به عنوان اوج رقابت ریاضیاتی بین دانش‌آموزان دبیرستانی، تثبیت کرده‌است.

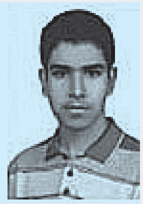
محتوای المپیاد از مسائل فوق‌العاده مشکل قبل از حساب، تا مسائلی از شاخه‌های مختلف ریاضی که معمولاً در مدرســـه و در سطح دانشـــگاهی تدریس نمی‌شوند، نظیر هندسه تصویری و مختلط، و نظریهٔ اعداد با پایه‌های محکم، سیر می‌کند که داشتن دانش نظری گسترده در این حوزه‌ها لازم است. اگرچه در حل مسائل استفاده از دانش حساب مجاز است، اما به هیچ عنوان لازم نیست، چرا که اصلی در کار است که حتی اگر راه‌حل‌ها نیاز به داشتن دانش خیلی بیشتری داشته باشند، هر کسی با فهم مقدماتی از ریاضی باید بتواند مسائل را بفهمد. حامیان این اصل مدعی‌اند که این کار باعث جامعیت بیشتر می‌شود و مشوقی برای کسانی است که دست به یافتن مسائلی شوند که به طرزی فریب‌آمیز ساده‌اند، اما بی‌شک نیاز به حد معینی از نبوغ دارند.

روند انتخاب از کشوری به کشور دیگر متفاوت است، ولی اغلب شامل چندین آزمون است که در هر مرحله، تعداد دانش‌آموزان به تدریج، کاهش می‌یابد تا بالاخره، اعضای تیم شش نفری برگزیده می‌شوند.

المپیاد بین‌المللی ریاضی، تابع چند مقررات است که به‌طور خلاصه، به آن‌ها اشاره می‌شود:

۱. فرایند انتخاب تیم شش نفری

۲. رعایت سن کمتر از ۲۰ سال برای اعضای تیم


آریو لطفی جندقی
تهران


سیدمحمدصادق مهدوی
کرج


طاها میران‌زاده
کرج


فرهود رستم‌خانی
تهران


امیرمجتبی صبور
تهران


سروش تسلیمی
تهران

۳. دانش‌آموز بودن فرد شـــرکت‌کننده (تأکید بر اینکه هنوز دانشگاه نرفته باشند و در مدرسه، مشغول تحصیل باشند)
۴. اهدای جوایز به افراد تیم
۵. محسوب نمودن نمره تیمی برای رده‌بندی کشورها
۶. ارائهٔ نتایج هم به‌صورت تیمی و هم فردی

ایران برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ در این المپیاد شرکت کرد و رتبه ۳۱ را کسب نمود. سپس در سال ۱۹۹۸، دانش‌آموزان ایرانی (امید امینی، سهند حاجی علی احمد، کسری علیشاهی، علیرضا کشاورز حداد، امیر آجرلو و فرهاد فراهانی) مقام اول را برای ایران کسب کردند. تیم ایران تا کنون، ۳۲ بار با ســـایر کشورها به رقابت پرداخته و ۴۳ مدال طلا، ۹۲ مدال نقره، ۳۹ مدال برنز و ۳ جایزه ویژه به دست آورده است.

پنجاه‌وهشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال ۱۳۹۶ در ریو دو ژانیرو- برزیل برگزار شد و تیم ایران موفق به کســـب رتبهٔ پنجم (با ۱۴۲ امتیاز) شـــد. در این المپیاد، ۶۱۵ نفر از ۱۱۱ کشور شرکت کردند و از بین آن‌ها، کره جنوبی (با ۱۷۰ امتیاز)، چین (۱۵۹ امتیاز)، ویتنام (۱۵۵ امتیاز)و آمریکا (۱۴۸ امتیاز)، به ترتیب رتبهٔ اول تا چهارم را به دست آوردند. در این دوره هیچ شرکت‌کننده‌ای امتیاز کامل نگرفت و در نمرهٔ انفرادی امیرمجتبی صبور با کسب نمرهٔ کامل از ۶ سؤال در کنار یک دانش‌آموز ویتنامی و یک ژاپنی، در صدر قرار گرفت.
شـــرکت‌کنندگان با کسب حداقل ۲۵ نمره، موفق به کسب مدال طلا می‌شوند که امیرمجتبی صبور با ۳۵ نمره از استان البرز و آریو لطفی جندقی با ۲۵ نمره از تهران مدال طلا، فرهود رستم‌خانی با ۲۴ نمره از تهران، طاها میران‌زاده با ۲۱ نمره و سیدمحمدصادق مهدوی با ۱۹ نمره از کرج مدال نقره و سروش تسلیمی با ۱۸ نمره از تهران مدال برنز دریافت کردند.

جدول رتبه‌های ایران در المپیاد از سال ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۷

سال	۲۰۱۷	۲۰۱۶	۲۰۱۵	۲۰۱۴	۲۰۱۳	۲۰۱۲	۲۰۱۱	۲۰۱۰	۲۰۰۹	۲۰۰۸	۲۰۰۷	۲۰۰۶	۲۰۰۵	۲۰۰۴	۲۰۰۳	۲۰۰۲	۲۰۰۱	۲۰۰۰
رتبهٔ ایران	۵	۲۴	۷	۲۱	۱۰	۸	۱۰	۱۶	۱۵	۵	۱۲	۸	۴	۹	۱۷	۱۱	۱۸	۱۰

سرپرست تیم ایران، آقای امیر حاتمی ورزنه و معاون وی، آقای سید حسام فیروزی بود.
نمره تیمی ۱۰ کشور اول در این المپیاد، در جدول زیر آمده است.
۱. کره جنوبی: ۱۷۰
۲. چین: ۱۵۹
۳. ویتنام: ۱۵۵

جدول امتیاز تیم ایران در سال ۲۰۱۷

شماره سؤال / نام شرکت کننده	سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	مجموع امتیاز فردی	رتبه		مدال
								رتبه	درصد	
امیرمجتبی صبور	۷	۷	۰	۷	۷	۷	۳۵	٪ ۱۰۰	۱	مدال طلا
آریو لطفی	۷	۷	۰	۷	۲	۲	۲۵	٪ ۹۲/۱۸	۴۹	مدال طلا
طاها میران‌زاده	۷	۷	۰	۷	۰	۰	۲۱	٪ ۹۴/۳۰	۳۶	مدال نقره
سید محمدصادق مهدوی	۷	۳	۰	۷	۷	۰	۲۴	٪ ۸۶/۸۱	۸۲	مدال نقره
فرهود رستم‌خانی	۷	۴	۰	۷	۱	۰	۱۹	٪ ۸۱/۴۳	۱۱۵	مدال نقره
سروش تسلیمی	۷	۴	۰	۷	۰	۰	۱۸	٪ ۷۷/۵۲	۱۳۹	مدال برنز
مجموع امتیاز تیمی	۴۲	۳۲	۰	۴۲	۱۷	۹	۱۴۲	٪ ۹۶/۳۶	۵	

دانش‌آموزان ایرانی در المپیاد ریاضی موفق به کسب رتبه پنجم گروهی و بهترین نمرهٔ فردی شدند

۴. آمریکا: ۱۴۸
۵. ایران: ۱۴۲
۶. ژاپن: ۱۳۴
۷. سنگاپور: ۱۳۱
۷. تایلند: ۱۳۱
۹. تایوان: ۱۳۰
۹. انگلیس: ۱۳۰

توجه به ریز نمرات نشان می‌دهد که دلیل کاهش کلی نمرات در درجه اول مربوط به سؤال ۳ آزمون است؛ در این سؤال، فقط ۷ نفر در سطح جهانی، موفق به کسب نمره ناقص یا کامل برای این سؤال شدند: ۱، ۱، ۱، ۴، ۵، ۷ و ۷.

این در حالی است که ۵۸ نفر از سؤال ۶ نمره مثبت گرفته‌اند که از بین آن‌ها، ۱۴ نفر موفق به کسب نمره کامل، یعنی ۷، شده‌اند.

گزارش آماری این آزمون در سایت رسمی المپیاد حاکی از این است که میانگین نمره تمام شرکت‌کننده‌ها در ۶ سؤال آزمون به شرح زیر است:

سؤال ۱: ۵/۹۴۳
سؤال ۲: ۲/۳۰۴
سؤال ۳: ۰/۰۴۲
سؤال ۴: ۵/۰۲۹
سؤال ۵: ۰/۹۶۹
سؤال ۶: ۰/۲۹۴

منبع
۱. خبرگزاری دانشجویان ایران ایسنا
۲. المپیاد جهانی ریاضی

مبانی آموزش ریاضی

نام کتاب: مبانی آموزش ریاضی
نویسنده: مانی رضائی
شمارگان: ۲۰۰۰
ناشر: دانشگاه فرهنگیان(تلفن: ۸۷۷۵۱۲۷۸-۰۲۱)
تاریخ انتشار: ۱۳۹۶

کتاب مبانی آموزش ریاضی توسط دانشگاه فرهنگیان منتشر شد. در عنوان کتاب، مخاطب آن «معلمان دبستان و دانشجویان آموزش ابتدایی» معرفی شده است و حاوی مباحث آموزشـــی (به‌طور عام) و آموزش ریاضی (به‌طور خاص) اســـت و علاقه‌مندان به ایـــن حوزه تخصصی در سطوح مختلف می‌توانند از آن بهره ببرند.

مؤلف کتاب در مقدمه وضعیت آموزشـــی را چنین توصیف می‌کند: «دانش‌آمـــوزان امروز، نیازمند معلمی بانگیزه، مشـــتاق، علاقه‌مند و آگاه هستند. معلمی که تنوع دانش‌آمـــوزان را درک کند و فرصت‌های متعددی برای آن‌ها فراهم کند تا در محیط‌های آموزشـــی غنی، این دانش‌آموزان بتوانند رشد کنند.» در ادامه این مقدمه مؤلف معتقد است: «اگر نه همه معلمان، می‌توان گفت بیشتر معلمان کشور، به تبادل راهکارهایی برای ارتقای تدریس خودشـــان هستند.» کتاب با این هدف، مطالب متنوعی، چه عملی و چه نظری ارائه می‌کند. فهرســـت مطالب کتاب به شرح زیر است:

فصل ۱: برنامه درسی ریاضیات مدرسه‌ای
فصل ۲: یادگیری ریاضیات
فصل ۳: استانداردهای فرایندی آموزش ریاضی در دوره ابتدایی
فصل ۴: اصول و اســـتانداردهای محتوایی (پایه‌های اول تا سوم)
فصل ۵: اصول اســـتانداردهای محتوایی (پایه‌های چهارم تا ششم)
فصل ۶: حل مسئله ریاضی
فصل ۷: ارزیابی ریاضی
فصل ۸: چشم‌اندازی برای تدریس
فصل ۹: ارتقای حرفه‌ای معلمان

«مبانی آموزش ریاضـــی» به‌عنوان کتابی در زمینه تخصصی- موضعی (PCK) از سوی دانشگاه فرهنگیان منتشر شده است و با وجود آنکه این کتاب برای معلمان دبســـتان تدوین شده، ولی مثال‌های آن برای تدریس یا استفاده در کلاس مناسب نیستند. به همین دلیل، زبان آن‌ها برای معلمان (بزرگســـالان) است و برای استفاده از مثال‌های آن در کلاس درس، لازم است به زبان کودکان بازنویسی شوند. بیشـــتر مباحث این کتاب دارای مبانی نظری مشترک برای تمام پایه‌های تحصیلی است و دبیران ریاضی، می‌توانند از محتوای مطالب آن بهره‌مند شوند.

جالـــب آنکه به جز در ابتدای هر فصل، هیچ صفحهٔ سفیدی در کتاب مشاهده نمی‌شود!

نامه‌های رسیده

مجلۀ رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌هـــا، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررســـی کتاب از ســـوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان دی ۱۳۹۶، نامه‌ها و مطالب دوســـتان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- اسماعیل جزایری، از خوزستان؛
- مجید حقوردی، از تهران؛
- علی رمضانی، از اصفهان؛
- حسن واشیان، از قم؛
- امین کشاورز، از شیراز؛
- مصطفی سهرابلو، از کردستان؛
- محمد سالاری، از لرستان؛
- آزاده اسکندری، از لرستان؛
- سیدجمال بخشایش، از چهارمحال‌وبختیاری؛
- رضا منصوری، از چهارمحال‌وبختیاری؛
- مسعود جوانبخش، از چهارمحال‌وبختیاری؛
- معصومه بنی‌عقیل، از گرگان؛
- مهوش نصیری، از کردستان؛
- علی ملخاصی، از آذربایجان شرقی؛
- محمود علی‌پور صفا، از آذربایجان شرقی؛
- جمال‌الدین رحیمی، از تهران؛
- علی روزدار، از چهارمحال‌وبختیاری.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications &Teaching Technology Office

129 Roshd Mathematics Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.35 no.3 2018 ISSN:1606-9188

www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585


15th
Iranian Mathematical Education Conference
23 - 26 January 2018 ,Bushehr
۱۳۹۶
۳ تا ۶ بهمن ، بوشهر
۱+۲+۳+۴+۵
پانزدهمین
کنفرانس
آموزش
ریاضی ایران
محورهای مقالات:
چالش های پیش روی معلمان در آموزش ریاضی
چگونگی انتخاب، حمایت و آموزش مستمر معلمان ریاضی
آموزش ریاضی دوره ابتدائی
آدرس دبیرخانه: بوشهر ، خیابان شهید عاشوری ،
خیابان شهید آوینی، اداره کل آموزش و پرورش استان بوشهر
آدرس محل برگزاری: بوشهر، خیابان ورزش ، مجتمع آموزشی فاطمه زهرا (س)
سایت: www.uimecedu.ir
شماره تماس: ۰۷۷۳۳۳۳۱۵۹۱ - ۰۹۱۷۷۷۴۵۵۰۲


وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
رشد
برای رشد
مجلات فصل نامه رشد
ویژهٔ مدیران، معلمان، مربیان
و مشاوران
مدارس
www.roshdmag.ir
نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید سلیمی)
تلفن: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۲۲۸ نمابر: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸