وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

ISSN:1606-9188

رشد آموزش ریاضی

۱۲۵

| فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی | برای معلمان، مدرسان و دانشجویان |
| دورهٔ سی و چهارم | شمارهٔ ۲ | زمستان ۱۳۹۵ | ۶۴ صفحه | ۱۳۰۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ |
www.roshdmag.ir

- دوره پیش‌دبستانی: بستری برای بناکردن شخصیت کودک
- آیا جامعه به مدال آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی احتیاج دارد؟
- مقدمه‌ای بر روش‌های مختلف ضرب

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۱۲۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: پری حاجی‌خانی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، اسمعیل بابلیان، مهدی رجبعلی‌پور، مانی رضائی، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سیدحسن علم‌الهدایی، سهیلا غلام‌آزاد و محمدرضا فدائی
طراح گرافیک: مهدی کریم‌خانی

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای معلمان، مدرسان و دانشجویان
دورهٔ سی و چهارم | شمارهٔ ۲ | زمستان ۱۳۹۵

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir
● پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۳ ● roshdmag: ● تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ● کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳
● کد امور مشترکین: ۱۱۴ ● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ● تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ – ۷۷۳۳۶۶۵۵ ● چاپ: شرکت افست (سهامی عام) ● شمارگان: ۵۵۰۰

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود. ● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود. ● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. هم‌چنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

پیش‌دبستانی

زهرا گویا

دورهٔ پیش دبستانی: بستری برای بنا کردن شخصیت کودک

تا نبیند کودکی که سیب هست
او پیاز گَنده را ندهد ز دست
(مولانا جلال‌الدین رومی)

آموزش، در عرصه اجتماعی و در واقعیت زمان و مکان معنا می‌شود و مفهوم پیدا می‌کند. در انتزاع و بدون توجه به واقعیت، همه چیز می‌تواند «بد» و همه چیز می‌تواند «خوب» باشد! زیرا این دو ویژگی، هر دو نسبی و اعتباری‌اند و اگر محکِ «اخلاق» نباشد، انسان همیشه سرگشته و به معنای واقعی، «در خسران» است. اما واقعیت، اخلاق را شکل می‌دهد، برای خوب و بد، مصداق می‌آورد و از تجربه و عقل‌سلیم (خرد-جمعی) و سرشت انسانی که خالق هستی، بشر را به زیور آن آراسته است، برای قضاوت در مورد «اخلاقی» بودن یک عمل، و بعد مناسب بودن آن برای زمان و مکان خویش، استفاده می‌کند. به قول مولانا، کودک تا طعم «سیب» را نچشد و جایگزینی برای «پیاز»ش نیابد، چرا باید آن را هم از دست بدهد؟ آیا او برای این که تصمیم بهتری بگیرد، قضاوت اخلاقی می‌کند؟ مصالح زمان و مکان را هدایت‌گر خود می‌داند؟ حُکم عقل‌سلیم یا خردجمعی حرف آخر را برایش می‌زند؟ یا آن که می‌داند و می‌دانیم که کسی که روح خدا در وی دمیده شده، بر اساس سرشت انسانی‌اش، قادر است یاد بگیرد که مناسب‌ترین تصمیم را بگیرد. صادقانه اگر به آخرین مورد باور داشته باشیم- که شالوده هستی و باورمان مبتنی بر آن است- آیا می‌توانیم از این همه فشار و رفتارهای مطالعه نشده و برنامه‌های ناسازگار با طبیعتِ معصوم کودکانی که یادشان نداده‌ایم چگونه تصمیم‌گیری کنند، دفاع کنیم یا در مقابلشان سکوت کنیم؟ کودک به سبب «کودکی»اش، «دیگران» در برنامه‌ریزی برای زندگی و تربیتش، نقشی بزرگ و مسئولیتی مهم دارند و وای به روزی که یک جامعه آموزشی، خطا کند و حتی صادقانه، مسیرهای اشتباهی برای آموزش کودکان انتخاب نموده یا به هر علت، راه را گم کند! به دلیل اهمیت این برهه اثرگذار و غیرقابل جبران در زندگیِ کودکان، سازمان‌های جهانی در تلاش‌اند تا از حق طبیعی کودکان برای آموزش، حمایت کنند و مسیر آن را تسهیل نمایند.

به گفته معاون آموزش ابتدایی وزارت آموزش‌وپرورش، «در بیانیه بوتراچا، چشم‌انداز ۲۰۳۰، آرمان‌های آموزش پیش‌دبستانی و اَوان کودکی در منطقه آسیا و اقیانوسِ آرام، مشخص شده است و این بیانیه، می‌تواند نیروی محرکه کشورهای منطقه، به‌منظور حرکت به جلو در این بخش باشد». وی در ادامه تصریح کرده که «همه کشورهای عضو، باید تا پایان سال ۲۰۳۰ میلادی، یک سال دوره پیش‌دبستانی رایگان و اجباری را برای کودکان کشور خود، به اجرا درآورند » (۱۳۹۵/۵/۳). تأکید بر «رایگان و اجباری» بودن این دوره، ملاحظات گوناگونی را برای نظام‌های آموزشی ایجاد می‌کند تا هر چه سریع‌تر، زمینه‌های لازم برای اجرایی شدن این دو وجه را درآموزش‌های پیش‌دبستانی خود، به وجود آورند. باعث خوشحالی است که در ایران نیز، در تاریخ ۲۵ تیرماه ۱۳۸۷ و در هفتصدوهفتادمین جلسه شورای‌عالی آموزش‌وپرورش،

اصول و چارچوب برنامه و فعالیت‌های آموزشی‌وپرورشیِ دوره پیش‌دبستانی، به تصویب رسیده است و قرار است که در آینده‌ای نزدیک، مسئولیت این دوره به طور کامل، از بهزیستی به آموزش‌وپرورش منتقل شود. طبیعی است که در این بین، مؤسسات متعددی که بر حسب نیاز جدی جامعه و کودکان، مراکز متعدد خصوصی دایر کرده‌اند، در تلاش‌اند تا برای ربودن گوی سبقت از یکدیگر و در انحصار گرفتن برنامهٔ این دوره از طریق گرفتن «تأیید» از یکی از بخش‌های وزارت آموزش‌وپرورش ، در این راه، رقیبان را پشت سر بگذارند. این کار، دو جنبه «خوب» و «بد» دارد که نیازمند توضیح است: اگر کسانی که در این حوزه کار کرده و به جامعه خدمات ارائه داده‌اند، تجربه‌های غنی آموزشی و اجراییِ خود را با آموزش‌وپرورش به اشتراک بگذارند، کار ارزنده‌ای انجام می‌دهند و در برنامه‌ریزی جهت ارائه آموزشِ با کیفیت برای کودکان و فراهم کردن زمینه‌های لازم به منظور تحقق «رایگان و اجباری» نمودن این دوره، می‌توانند یار و یاور نظام آموزشی گردند. اما اگر کسانی بخواهند از این موقعیتِ پیش‌آمده، خدای ناکرده بار خویش ببندند و مشتریان بالقوه و مشتاق خود را از طریق تبلیغ برای برنامه‌های پرهیجان و نویدبخش و به ظاهر «هوش‌رُبا»، چنان مدهوش کنند که قانع شوند تا کودکانشان را به آن‌ها بسپارند، این فرصت طلایی از دست می‌رود. بگذریم که خانواده‌ها در این زمینه، نقش عجیبی دارند و تعداد اندکی از آن‌ها، شیفته اسامی پر زرق و برقی می‌شوند که با تأسف، قادر به بررسی درستی یا نادرستی‌شان نیستند، یا نمی‌خواهند باشند. این مقوله، نیازمند بحث جدایی است که در این مختصر، نمی‌گنجد. هستند والدینی که به «اول» بودن و «برتری» فرزند خود، علاقه بسیار دارند و در سرمقاله شماره ۱۲۲، به عطش ایجاد شده در خانواده‌ها برای ارتقای ریاضی فرزندانشان از طریق «چرتکه‌های وارداتی از جنوب شرقی آسیا»، اشاره مختصری نمودم. اما با توسعه دوره پیش‌دبستانی و رسمیت یافتنش به عنوان یکی از دوره‌های الزامی آموزش رسمی در ایران، لازم می‌دانم که در اینجا، به سه نام، اشاره کنم و بقیه را به خوانندگان محترم مجله بسپارم تا به بحث پیش‌دبستانی و مواد به اصطلاح آموزشی که برای آن در بازارهای معمولی یا مجازی عرضه می‌شود، عمیق‌تر بپردازند.

این سه نام، سه نوع مدرسه هستند که سابقه هرکدام، به یک قرن یا بیش از نیم‌قرن می‌رسد و معلوم نیست که چرا ناگهان و در چند سال اخیر، این قدر در ایران، مورد توجه واقع شده‌اند؟ طوری که مدارس با تبلیغ این نام‌ها، خانواده‌ها را مسحور کرده و در این وانفسای کاهش تعداد دانش‌آموزان، امیدوارند که تعداد بیشتری مشتری جلب کنند.آن‌ها برای معلمان دوره می‌گذارند تا با اخذ گواهی این مدرسه‌ها، افتخار تدریس در یکی از این سه نوع را پیدا کنند، کارگاه آموزشی تشکیل می‌دهند، از این مدارس در کشورهای دیگر بازدید می‌کنند و خلاصه با چاپ سفرنامه‌ها و امثال آن، عده‌ای دیگر را به حسرت می‌نشانند که «ای‌کاش ما هم می‌توانستیم از این نعمت، بهره‌مند شویم»! ولی افسوس و صد افسوس که در وضعیت فعلی در ایران، مجوز اصلی ورود به این مدارس، داشتن امکان مالیِ بالاتر از میانگین است. برای نمونه، با دیدن نشریه‌های الکترونیکی دانش‌آموزان بعضی از مدرسه‌هایی که مجریِ این برنامه‌های خاص هستند، کنجکاوی‌ام بیشتر شد و بی‌اغراق، تمام تابستان سعی کردم اطلاعاتم را در مورد این برنامه‌ها، کامل‌تر کنم تا بتوانم به معرفی سه نام معروف به ترتیب تاریخ تأسیس مدارس‌شان، یعنی مونته‌سوری، والدروف و رجیو اِمیلیا، به اختصار بپردازم و به چگونگی و چرایی ایجادشان، اشاره می‌کنم تا شاید، در تصمیم‌گیری برای دلبندان پیش از دبستانمان- از نوزادی تا ۶ سالگی- مفید واقع شود.

● رویکرد آموزشی مونته‌سوری

ماریا مونته‌سوری (۱۹۵۲- ۱۸۷۰)، اولین زن پزشک در ایتالیا بود که بعد از ابداع روشی‌برای کار با کودکان معلول، در سال ۱۹۰۷، در یکی از محله‌های زاغه‌نشین شهر رُم، اقدام به تأسیس یک «خانه کودکان» برای ۴ تا ۷ ساله‌ها نمود. آوازهٔ جنبشی که مونته‌سوری در ایتالیا شروع کرد، به سایر کشورها هم رسید و بعد از محکوم کردن روش او توسط دولت فاشیست موسولینی، وی مجبور به ترک ایتالیا شد، ولی روش او به خصوص در اروپا و هند، مورد توجه قرار گرفت و توسعه یافت. دیدگاه نظری مونته‌سوری، با پیشرفت‌گراهای اروپایی و به خصوص ژان‌ژاک روسو، پستالوژی و ایتاد، بسیار نزدیک بود (ادواردز، ۲۰۰۲). او یک ساخت و سازگرا و معتقد به مراحل رشد ذهنی کودک بود و برای رسیدن به هر مرحله و عبور از آن، برنامه آموزشی مشخصی تدوین نمود.

مونته‌سوری به اندیشمندیِ نهفته در نهاد کودکان، و بارور نمودنش از طریق آموزش باور داشت و معتقد بود که از اوان کودکی، باید به سه جنبه عقلانی، تجربی

مونته‌سوری به اندیشمندیِ نهفته در نهاد کودکان، و بارور نمودنش از طریق آموزش باور داشت و معتقد بود که از اوان کودکی، باید به سه جنبه عقلانی، تجربی و روحانی آنان، توجه نمود

و روحانـــی آنان، توجه نمود. به گفته ادواردز (۲۰۰۲)، برنامه درســـی مونته‌ســـوری کاملاً انفرادی است که چشم‌انداز، توالی و حوزه‌های یادگیری روشنی داشته و بر حل مسئله‌های دنیای واقعی تأکید دارد.

کلاس‌های چندپایه، ارزشیابی توصیفی، معلم دوره دیده، و شـــروع از سن ۲/۵ ســـالگی در «محیط آماده شـــده» با طراحی دقیق، اعتقاد به تحولات آموزشـــی بـــه عنوان فعالیت‌های اجتماعی/ مدنی و نه سیاســـی اقتصادی، و بالا بردن ارزش‌های روحی- معنوی انسان، از مهم‌ترین آموزه‌های مونته‌سوری بوده و هست.

در روش آموزشی مونته‌سوری، وقتی که کودکان به صورت فردی یا گروهی، درگیر فعالیت‌های خودراهبری می‌شـــوند، معلـــم عملاً، نقـــش یک مدیـــر معمولیِ غیرمداخله‌گر را در کلاس ایفا می‌کند. به طور خلاصه، رویکرد مونته‌ســـوری، کودک- محور است و معلمان، راهنما هســـتند. در مدارس مونته‌سوری، کارِ کودکان بازی است و با وجودی که بر جنبه‌های علمی هم تأکید می‌شود، ولی هر کودک، با سرعت خودش جلو می‌رود. اسباب‌بازی‌های مخصوص مونته‌سوری- دست‌ورزی‌ها- جورچین‌ها یا پازل‌هایی هستند که کودکان، خودشان بـــا تلاش و پیگیـــری، آن‌ها را جـــور می‌کنند. در این رویکرد، کلاس بر اســـاس ســـن کودکان سازماندهی نمی‌شود. کودکان معمولاً برای سه سال اول، یک معلم دارند که با تمام دانش‌آمـــوزان، هم زمان کار می‌کند. هدف اصلی این رویکرد، آموزش راهبری و استقلال به کودکان است.

برای هر تصمیم‌گیری بخردانه، بهینه و کارآمد، اولین گام، دانستن است

● رویکرد مدارس والدروف

به درخواســـت امیـــل مولت ، مدیـــر کل کارخانه سیگارسازی والدروف- آستوریا در اشتوتگارت آلمان، رودولـــف اشـــتاینر (۱۹۲۵- ۱۸۶۱)، متفکر، عالم و فیلسوف اتریشـــی، در بحبوحه جنگ ویرانگر جهانی اول در ســـال ۱۹۱۹، مدارس والدروف را برای آموزش فرزندان کارگران آن کارخانـــه، پایه‌گذاری نمود. او به وحدت روح، جسم و روان انسان اعتقاد داشت و تجلی این وحدت را در «اندیشـــیدن، احساس کردن و اراده کردن » می‌دانســـت که آموزش مناسب، می‌تواند بین آن‌ها تعادل ایجاد کند (فینزر، ۱۹۵۶). امیل مولت که خود، کودکی پرورشگاهی بود، به آموزش کودکان بسیار اهمیت مـــی‌داد و به اعتقاد وی، دانشِ ماهیت حقیقی انسان- تلفیق دو دنیای روحانی و علمیِ حکمت انسانی اســـت و هدف وی این بود که در این مدرسه، با چنین اعتقادی، انسان‌هایی تربیت شوند که بتوانند جامعه‌ای با عدالت و همراه با صلح بســـازند. ویژگی این مدرسه این بود که از پیش‌دبســـتانی تا پایان دبیرستان را در بر می‌گرفت، خودگردان بود، امتحان ورودی نداشت و پســـرانه و دخترانه بود. برای معلمی کردن در مدارس والدروف، حتماً باید دوره مخصـــوص آن را گذرانده و برایش گواهی دریافت نمود. رویکرد آموزشی این مدرسه بازی- محور و بر اساس برنامه ساختاریافتهٔ منظم است؛ مثلاً یک روز آشپزی، یک روز کار توی باغچه و شروع روز دیگر همراه با فعالیتی جدید، کارهایی که همگی، از قبل برنامه‌ریزی شـــده‌اند. در این مدرسه، کودکان با برنامه مشـــخصی و بعـــد از یادگیری خلاق، پرورش خلاقیت، همکاری، و نزدیک کردن فضای مدرســـه به خانه- گرم و دوستانه، با اسباب‌بازی‌های چوبی و مواد طبیعی بازی می‌کنند و یاد می‌گیرند. در این مدارس، از هیچ رسانه تکنولوژیکی استفاده نمی‌شود و به کودکان نیز، نمره داده نمی‌شود. رویکرد والدروف این است که بـــه کودکان، چگونه فکر کردن را بیاموزد، نه آن که به چه فکر کنند. این رویکرد، برای چهار گروه سنی، برنامه درســـی پیش‌بینی کرده است؛ برنامه‌هایی که ساختار منسجم دارند و توالی در آن‌ها رعایت شده است، اما بر کتاب درسی متکی نیست. برای مثال، کودکان با دقت به یک موضوع ریاضی که مربی/ معلم در قالب داستان بیان می‌کنـــد، گوش می‌دهند و بعد از فهمیدن آن، با تخیل و تصور خود، درس را بازتولید می‌کنند.

● رویکرد آموزشی رجیو اِمیلیا

بعد از جنگ جهانی دوم، والدین، سیاســـت‌گذاران و آموزشگران، با هم تلاش کردند تا آموزش اجباری را برای نوزادان و کودکان تا شش سالگی، فراهم کنند. ابتدا به خاطر ضرورت رفتن زنان بر ســـر کار و اداره زندگی، این به اصطلاح مهد کودک‌ها، توسط لوریس مالاگوزی (۱۹۲۰ تا ۱۹۹۴) در شهر کوچک رجیو اِمیلیا نزدیک میلان، دایر شد که به تدریج، توجه متخصصان آموزش و نگهداری نوزادان و کودکان را در سراســـر جهان، به خـــود جلب کرد (برتولینی، ۲۰۱۳). در ایتالیای بعد از جنگ جهانی دوم، برای پرکردن شکاف اجتماعی بین دهقانان، کارگران و طبقات متوسط، جامعه شهری به این نتیجه رسید که آموزش نوزادان، هر چه زودتر شروع شود، تا طعم تلخ نابرابری اجتماعی، کودکان را قبل از رسیدن به ۶ سالگی و رفتن به مدرسه، درمانده نکند. در این مهدها، رویکردی انتخاب شد که در سراسر دنیا شناخته شده است و شعار آن، «صدها زبانِ کودکان » است. کودکان و بزرگســـالان، دانش خود را از طریق

تعامل با یکدیگر و با محیط، می‌سازند. شهرداری‌ها مسئولیت ساخت و اداره این مهد کودک‌ها را به عهده دارند. مدارس رجیو بر این اصول تأسیس شده‌اند که آموزش برای کودکان، حق است نه امتیاز؛ کودکان، معمار یادگیری خود هستند؛ و یادگیری پروژه- محور و اکتشافی، استراتژی مورد استفاده آن‌هاست. مدارس رجیو، خانواده- محورند و از نظر ظرفیت برای پذیرش، اولویت با کودکان معلول یا کودکانی است که نیازمند خدمات اجتماعی ویژه‌اند. مدارس رجیو امیلیا، دارای یک الگوی رسمی با روش‌های آموزشیِ تعریف شده، برنامه درسی، استانداردهای تربیت مدرس و فرایندهای اعتباربخشی به معلمان و گواهی دادن به آنان نیست. در مقابل، معلمان رجیو امیلیا، راجع به «تجربه‌های» شکل‌گرفته یا در حال شکل‌گیری خود صحبت می‌کنند و خودشان را به عنوان تهییج‌کننده و منبع ارجاعی برای کودکان، می‌بینند و این کار را از طریق گفتگو و با یک دیدگاه قوی و غنی نسبت به کودک، شروع می‌کنند. دیدگاه مالاگوزی، بیشتر ساخت و سازگرایی اجتماعی از نوع رویکرد ویگوتسکی بود. تأکید وی تنها بر نوزادان و خردسالان بود. مالاگوزی، کودک را از بدو تولد، موجودی اجتماعی می‌دانست که سرشار از هوش، کنجکاوی و شگفتی است و روش او، «آموزش مبتنی بر روابط» بود. وی بر هر کودک، با توجه به روابطش با سایر کودکان در کلاس، خانواده، دوستان، جامعه، معلمان و محیط، متمرکز می‌شد و سعی می‌کرد بدین ترتیب، وی را بهتر بشناسد و مسیر تحولش را هموار کند. مالاگوزی، باور داشت که چنین کودکی، در هر جامعه‌ای که قرار گیرد، «فرهنگ، ارزش و حق» تولید می‌کند. این کودکان در مدارس رجیو امیلیا، با «صدها زبان» رسا و گویا و عمیق، کلمات، حرکات، نقاشی، رنگ‌کردن، ساختن، مجسمه‌سازی، سایه‌بازی، کولاژ، اجرای نمایش، موسیقی و بسیاری دیگر، دائم در حال کشف و ترکیب این‌ها و ساختن‌های جدید هستند. یاددهی و یادگیری، برآمده از مذاکره و تفاهم بین معلم و کودک است. در این رویکرد، معلم نقش هنرمندی را دارد که بین درگیرشدن کودک و توجهی که نسبت به فعالیت‌ها نشان می‌دهد، تعادل ایجاد می‌کند.

مشابهت‌ها و تفاوت‌ها

به گفته ادواردز (۲۰۰۲)، هر سه این دیدگاه‌ها، نشان‌دهنده یک ایده‌آلیسم هستند که هدفشان، روی‌گردانی از جنگ و خشونت و رفتن به سمت صلح و بازسازی بوده است. اینکه نسبت به کودکان دیدگاه منسجمی وجود دارد که دغدغه‌اش این است که چگونه می‌توان از طریق کمک کردن به کودکان که تمام توانایی‌های خود را به عنوان انسانی باهوش، خلاق، و تمام و کمال تشخیص دهند و بدین ترتیب، جامعه انسانی را بهبود بخشند. هم‌چنین، نقش والدین در هر سه رویکرد، پررنگ است. ولی با این حال، تفاوت‌های اساسی بین آن‌ها، هم در سطح اصول و مبانی و هم استراتژی، وجود دارد که ریشه در دیدگاه‌های هر یک نسبت به ماهیت نیازهای کودک، علایق آنان و حالت‌های یادگیری است که ناشی از تفاوت در نحوه تعامل مربی/ معلم با کودکان در کلاس، سازماندهی فعالیت‌های یادگیری برای کودکان و چگونگی مستند کردن/ مشاهده فعالیت‌های کودکان است.

به‌طور مشخص، با توجه به باورها و تخصص‌های پایه‌گذاران هر کدام از این سه مرکز آموزشی کودکان و دغدغه‌های هر یک در موقعیت‌های زمانی خاص، برنامه درسی، آموزش‌های فردی یا گروهی، نقش و جایگاه معلم، فضای آموزشی و ارزشیابی هر کدام، با وجود مشابهت، تفاوت‌های اساسی با هم دارند. اما قدر مسلم این است که هر سه رویکرد، ماهیت غیرمتمرکز دارند، اگرچه مدارس والدروف و مونته‌سوری، از طریق سازمان‌هایی که تأسیس کرده‌اند و تأکیدی که بر معلمان دوره دیده توسط مراکز خود دارند، با وجود عدم تمرکزی که نسبت به برنامه‌های رسمی نظام‌های آموزشی دارند، در درون خود، نوعی از تمرکز ایجاد کرده‌اند.

در هر صورت، برای هر تصمیم‌گیری بخردانه، بهینه و کارآمد، اولین گام، دانستن است.

منابع

۱. فینزر، تورین. ام. (۱۹۵۶). **سفری پر ماجرا: تجربه آموزگار موفق مدارس والدروف**. ترجمه پروین عالمی (۱۳۹۴). نشر دانژه.

2. Arleen Theresa Dodd- Nufrio. (2011). Reggio Emilia, Maria Montessori, and John Dewey: Dispelling Teachers' Misconceptions and Understanding Theoretical Foundations. Early Childhood Education Journal; 39: 235- 237. Springer.

3. BartoliniBussi, Maria, G. (2013). Bambini CheContano: A long term program for preschool teachers' development. Paper presented at the CERME8_WG13. Antalia, Turkey.

4. Edwards, Carolyn, P. (2002). Three approaches from Europe: Waldorf, Montessori, and Reggio Emillia. Early Childhood Research & Practice. Vol. 4; No. 1. University of Nebraska at Lincoln.

استفاده از رویکرد انتقادی در حل یک مسئله مدل‌سازی

بتول زندی گوهرریزی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، مدرس خانه ریاضیات و مدارس کرمان
ابوالفضل رفیع‌پور، عضو هیئت علمی بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

هدف از آموزش ریاضی، تنها آموزش فرمول‌ها و قواعد صرف ریاضی نیست، بلکه یکی از اهداف آن، آموزش دانش‌آموزانی منتقد و شهروندانی متعهد است. به عبارت دیگر، شناخت نقش دانش‌آموزان در زندگی فردی، اجتماعی و فرهنگی، یکی از اهداف مدنظر است که تحقق آن، با ترغیب و تشویق دانش‌آموزان به بحث، گفت‌وگو، تفکر و نگاه منتقدانه نسبت به محیط پیرامونشان، قابل دستیابی است. در این میان، حمایت از تفکر انتقادی اهمیت ویژه‌ای دارد. در مدل‌سازی، دیدگاهی با عنوان اجتماعی- انتقادی وجود دارد که به وسیلهٔ آن، نقش مدل‌های ریاضی در جامعه نشان داده می‌شود. از این‌رو، مقاله حاضر پس از معرفی این دیدگاه، هشت تن از دانش‌آموزان یکی از مدارس راهنمایی دعوت به حل سؤالی شده‌اند که دارای مرجعی در واقعیت است، و از آنجا که وجود بحث‌های بازتابی بین دانش‌آموزان اهمیت ویژه‌ای دارد، مقاله بر روی این بحث‌ها متمرکز شده است.

کلیدواژه‌ها: ریاضیات واقعیت‌مدار، مدل‌سازی ریاضی، تفکر انتقادی، دیدگاه اجتماعی-انتقادی، بحث‌های بازتابی

مقدمه

افزایش بی‌رویهٔ تقاضای برق بنا به دلایلی از جمله رشد جمعیت، نامناسب بودن الگوی مصرف و اختلالات قیمتی ناشی از دخالت دولت در نظام قیمت‌گذاری و در نتیجه، افزایش روزافزون سهم انرژی‌های فسیلی در تأمین تقاضا، از ویژگی‌های بارز بخش برق ایران است (شریفی و همکاران، ۱۳۸۸). از طرفی، فناپذیری منابع تجدیدناپذیر و وقوف جهانیان بر آثار مخرب زیست‌محیطی مصرف سوخت‌های فسیلی نظیر گرمایش جهانی و آلودگی آب، هوا و خاک، به توسعهٔ بهره‌برداری از منابع تجدیدپذیر منجر شده است (زینل‌زاده و همکاران، ۱۳۹۱). در بین انرژی‌های تجدیدپذیر، می‌توان انرژی خورشیدی را به‌عنوان یک منبع بی‌پایان انرژی که حلال مشکلات بسیاری در زمینهٔ انرژی و محیط زیست است، نام برد. این انرژی هزاران بار بیشتر از آن مقداری که انسان نیاز دارد و مصرف می‌کند، به زمین می‌تابد. هم‌چنین، استفاده از این انرژی نگرانی‌های بشر را در مورد پایان‌پذیری، افزایش آلودگی‌های ناشی از تبدیل آن به انرژی‌های دیگر و مسائل نظیر آن، برطرف کرده است (خوش‌اخلاق و همکاران، ۱۳۸۴). از این رو، صفحات خورشیدی سال‌هاست که روی پشت‌بام منازل و به‌خصوص مراکز آموزشی و تحقیقی قرار گرفته‌اند تا سهمی هرچند اندک در تولید انرژی‌های پاک بر روی زمین داشته باشند.

با توجه به موقعیت بسیار مناسب و ویژهٔ جغرافیایی استان کرمان در بهره‌مندی از تابش نور خورشید، با تقریب تمام روزهای سال، امکان استفاده از انرژی‌های تجدیدپذیر در استان وجود دارد. لذا این استان دارای پتانسیل بالایی

برای استفاده از انرژی خورشیدی است. با توجه به آمار منتشر شده، کرمان سالانه با دارا بودن بیش از ۳۰۰ روز آفتابی و با برخورداری بیش از ۳۰۰۰ ساعت نور خورشید به طور میانگین، یکی از مستعدترین مناطق ایران برای تولید انرژی خورشیدی است (اداره کل هواشناسی استان کرمان؛ سایت آمار ایران).

در همین رابطه، پس از مشاهده مطلبی مبنی بر استفاده مدارس از انرژی خورشیدی در یکی از سایت‌های خبری، یک فعالیت مدل‌سازی ریاضی طراحی شد. متن خبر به شرح زیر است:

رئیس ادارهٔ بودجه آموزش‌وپرورش استان کرمان در گفتگو با روزنامه محلی شرق، اعلام کرده است: مدارس استان کرمان با اقدامات شایستهٔ شرکت توزیع نیروی برق استان، برق مصرفی خود را از انرژی خورشیدی خواهند گرفت (خبرگزاری مهر).

هدف اصلی پژوهش حاضر، این بود که آیا دانش‌آموزان قادر به شناسایی متغیرهای مصرف برق در مدارس خود هستند؟ آیا می‌توانند در این زمینه، بحث‌های بازتابی و انتقادی داشته باشند؟ آیا قادر به محاسبه میزان کمینه مصرف برق در مدرسه خود هستند؟ آیا قدرت پیش‌بینی دارند؟

برای رسیدن به این منظور، اطلاعات واقعیِ به دست آمده مربوط به بسته‌های خورشیدی، که از یکی از نمایندگی‌های فروش صفحات خورشیدی گرفته شده بود، در یک کاربرگ گذاشته شد و در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفت.

در مدل‌سازی، دیدگاهی با عنوان اجتماعی-انتقادی وجود دارد که به وسیلهٔ آن، نقش مدل‌های ریاضی در جامعه نشان داده می‌شود (کیزر[1] و سریرامن[2]، ۲۰۰۶). این دیدگاه بر نقش ریاضی در جامعه و لزوم حمایت از تفکر انتقادی، و ماهیت مدل‌های ریاضی و عملکرد مدل‌سازی ریاضی در جامعه، تأکید می‌کند. از آنجا که این پژوهش، از دیدگاه اجتماعی-انتقادیِ معرفی شده توسط باربوسا[3] بهره می‌گیرد، در بخش بعد به‌طور مختصر، این دیدگاه، و ابزار تجزیه و تحلیل یافته‌ها معرفی می‌شود.

ادبیات پژوهشی

به گفته نیس[4]، بلوم[5] و گالبرایت[6] (۲۰۰۷)، قدمت توجه به کاربرد و مدل سازی در آموزش ریاضی، به درازای تاریخ تدریس ریاضی است، به طوری که اگر کتاب‌های درسی عربی، هندی، چینی و مصری را بررسی کنیم، مطالبی در مورد چگونگی پرداخت مالیات، اندازه‌گیری زمین، تجارت، ساخت تقویم، بنا کردن یک معبد، تقسیم ارث و مواردی از این دست را مشاهده می‌کنیم. از سال ۱۹۸۳، جامعه بین‌المللی معلمان مدل‌سازی و کاربردهای ریاضی (ICTMA)[7]، برای ترویج مدل‌سازی در مدارس و دانشگاه‌ها، کنفرانس‌های دوسالانه‌ای تشکیل می‌دهند. گفتنی است تا به حال، هفده دوره از این کنفرانس‌ها برگزار شده است.

در حال حاضر، تحقیقات آموزش ریاضی در حوزه مدل‌سازی ریاضی فعال شده است و در بسیاری از نقاط جهان در حال رشد است (سریرامن، کیزر و بلومهاج[8]، ۲۰۰۶). به ویژه اینکه مدل‌سازی ریاضی، یکی از کانون‌های آموزش ریاضی شده است (باربوسا، ۲۰۰۶). لینگ‌فجارد[9] (۲۰۰۶)، حوزه مدل‌سازی را چنان وسیع و گسترده توصیف می‌کند که نه تنها آن را نمی‌توان در یک مقاله یا از طریق خواندن یک کتاب درک کرد، بلکه مدعی است که حتی خواندن کتاب‌های یک قفسه هم برای فهمیدن آن، کافی نیست! علاوه بر این، کیزر و سریرامن (۲۰۰۶) در پژوهش دیگری نشان دادند که در بین رویکردهای مدل‌سازی در جهان، تنوع گسترده‌ای وجود دارد و بر همین اساس، به طبقه‌بندی رویکردهای ارائه شده در این حوزه پرداختند.

یکیِ از دیدگاه‌هایی که در این طبقه‌بندی مطرح شده، اصطلاحاً اجتماعی- انتقادی نامیده می‌شود. این دیدگاه توسط باربوسا (۲۰۰۳، ۲۰۰۶، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۳)، توصیف شده و به ابعاد اجتماعی و فرهنگی ریاضی اشاره دارد، و به حوزه ریاضیات قومی که دی‌امبروسیا[10] (۱۹۹۹) آن را ترویج کرده، نزدیک است (کیزر و سریرامن، ۲۰۰۶). این دیدگاه بر نقش ریاضیات در جامعه، لزوم حمایت از تفکر انتقادی، نقش و ماهیت مدل‌های ریاضی و عملکرد مدل‌سازی ریاضی در جامعه تأکید می‌کند. این تأکید مربوط به این ایده است که آموزش ریاضی، باید سعی کند تا دانش‌آموزانی منتقد و شهروندانی متعهد را آموزش دهد. باربوسا در این مقالات، بر نیاز به ترویج آموزش انتقادی از طریق مدل‌سازی ریاضی تأکید می‌ورزد و از آن، با عنوان «مدل‌سازی به عنوان منتقد» یاد می‌کند.

به گفته گویا (۱۳۷۵)، قرن فراصنعتی که به تعبیر الوین تافلر، قرن دانایی نامیده می‌شود، انتظارات جدیدی از ریاضیات به وجود آورده است. در این عصر، پرورش روحیهٔ علمی، تفکر انتقادی و بازتابی و توانایی، بیش از بازوهای ستبر و سینه‌های فراخ اهمیت دارد. یعنی جامعهٔ ما به شهروندانی نیازمند است که بتوانند خوب فکر کرده و تصمیم درست بگیرند. در اصول و استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM[11]، ۲۰۰۰) بارها به نقش ریاضیات در تربیت شهروندانی اشاره شده که هوشمند بوده و توانایی قضاوت راجع به ادعاها، یافتن سفسطه‌ها و ارزیابی خطرها را داشته باشند.

در مدل‌سازی، دیدگاهی با عنوان اجتماعی-انتقادی وجود دارد که به وسیلهٔ آن، نقش مدل‌های ریاضی در جامعه نشان داده می‌شود (کیزر و سریرامن، ۲۰۰۶). این دیدگاه بر نقش ریاضی در جامعه و لزوم حمایت از تفکر انتقادی، و ماهیت مدل‌های ریاضی و عملکرد مدل‌سازی ریاضی در جامعه، تأکید می‌کند

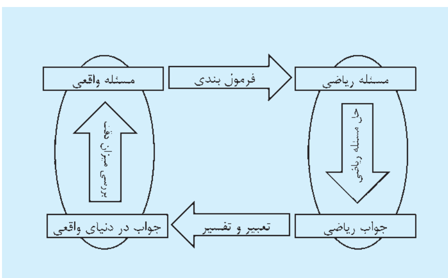
با توجه به آنچه بیان شد، در این دیدگاه از مدل‌سازی، دانش‌آموزان به حل یک سؤال یا بررسی موقعیتی که دارای مرجعی در واقعیت است، دعوت می‌شوند. در این فعالیت‌ها، دانش‌آموزان هیچ استراتژی و طرح آماده‌ای ندارند. بر اساس این دیدگاه، دامنهٔ مدل‌سازی به‌عنوان یک محیط یادگیری که در آن، دانش‌آموزان به حل و بررسی مسئله واقعی از طریق ریاضیات دعوت می‌شوند، مشخص می‌شود.

در همین رابطه، طراحی فعالیت مدل‌سازی اهمیت ویژه‌ای دارد. اصلی‌ترین نکته‌ای که در رابطه با فعالیت‌های مدل‌سازی وجود دارد، این است که برخاسته از دنیای واقعی باشند. به عبارت دیگر، هسته اصلی فعالیت‌های مدل‌سازی، فرایند انتقال بین دنیای واقعی و دنیای ریاضی است. (گالبرایت، ۲۰۰۷). استفاده از مسائل دنیای واقعی در ایجاد یک احساس مثبت و کارآمد نسبت به ریاضی، مؤثر بوده و هم‌چنین، ابزاری اثربخش برای تفکر انتقادی به شمار می‌رود (گریر، فرشافل و موخاپدیا[12]، ۲۰۰۷). باربوسا (۲۰۰۳، ۲۰۰۶) در یک جمع‌بندی کلی، ویژگی‌های اصلی فعالیت‌های مدل‌سازی را به شرح زیر مشخص می‌کند:

- یک مسئله (نه یک تمرین) برای دانش‌آموزان است؛
- از زندگی روزمره یا علوم دیگری که ریاضیات محض نیست، استخراج می‌شود؛
- دارای مرجعی در واقعیت است، اگرچه این فعالیت را می‌توان به‌گونه‌ای شبیه‌سازی کرد که منجر به بحث‌های غنی و مفید برای یادگیری ریاضی شود؛
- فرصتی برای دانش‌آموزان در ایجاد و طرح سؤال، جست‌وجو برای اطلاعات و سازماندهی آن‌ها مهارت‌آموزی، آزمایش‌کردن و تجدید نظر در سازمان‌دهی اطلاعات را فراهم کند؛
- دانش‌آموزان را به استفاده از ایده‌های ریاضی، مفاهیم و الگوریتم‌ها و فرآیندی که دانش جدیدی از آن به دست آید، دعوت کند.

نکته دیگر در این رابطه، چگونگی تجزیه و تحلیل فعالیت‌های مدل‌سازی است. در بخش قابل توجهی از ادبیات پژوهشی مدل‌سازی، از چرخه مدل‌سازی به‌عنوان یک پارامتر برای تجزیه و تحلیل فعالیت‌های مدل‌سازی دانش‌آموزان استفاده شده است. بنا به دیدگاه و اهداف مختلف، می‌توان چرخه‌های مدل‌سازی متفاوتی را در ادبیات پژوهشی پیدا کرد (برومو فری[13]، ۲۰۰۶). در ساده‌ترین نوع‌های آن (شکل ۱)، فرایند مدل‌سازی با یک مسئله که در موقعیت دنیای واقعی قرار دارد، شروع شده و سپس با صورت‌بندی مسئله دنیای واقعی و تبدیل آن به یک مسئله دنیای ریاضی، آن مسئله در دنیای ریاضی حل می‌شود. در نهایت این جواب، باید به دنیای واقعی برده شود تا با زمینهٔ واقعی مسئله متناسب گردد (فرشافل، ۲۰۰۲). بر اساس این تجزیه و تحلیل، افراد می‌بایست چرخه مدل‌سازی را به طور کامل طی کنند تا مسئله مورد نظر را به درستی مدل‌سازی کنند.

با این حال، شواهد در برخی از این مطالعات نشان می‌دهد که چرخه‌های مدل‌سازی ممکن است برای توصیف اقدامات دانش‌آموزان نامناسب باشند. بر همین اساس، برومو فری (۲۰۰۶) نتیجه می‌گیرد که تمایز بین مراحل مدل‌سازی، از جنبهٔ نظری است و تمایز بین آن‌ها از لحاظ تجربی، دشوار است. علاوه بر این، عوامل بسیاری ممکن است در این مراحل پدیدار شود که توسط چرخه‌های مدل‌سازی، قابل توصیف نباشند. ناسازگاری با رویکرد چرخه مدل‌سازی، در نتیجهٔ کمبود مهارت دانش‌آموزان نیست، بلکه به علت استفاده از یک زاویهٔ‌دید (لنز) نامناسب برای بررسی عملکردشان است (باربوسا ۲۰۰۷).



شکل ۱: چرخه مدل‌سازی (ورشافل، ۲۰۰۲)

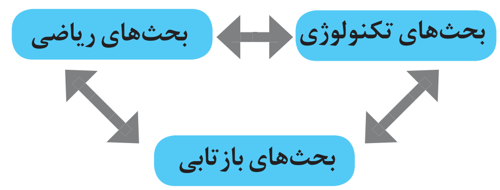
بنابر آنچه بیان شد، چرخه‌های مدل‌سازی از بسیاری از ابعاد چشم‌پوشی می‌کنند و به همین لحاظ، برای مدل‌سازی انتقادی، ابزار تجزیه و تحلیل مناسبی به شمار نمی‌روند. بنا به توصیهٔ باربوسا (۲۰۰۶)، برای درک جنبه‌های شناخت دانش‌آموزان در مدل‌سازی، به بحث‌های کلامی آن‌ها در یک فضای تعاملی توجه می‌شود. باربوسا (۲۰۰۶)، انواع بحث‌های دانش‌آموزان را در حین یک حل مسئله مدل‌سازی، به شرح زیر پیشنهاد می‌کند (شکل ۲).

- ریاضی: که به ایده‌های مربوط به حوزهٔ ریاضیات محض اشاره دارد؛
- تکنولوژی: به تکنیک‌های ساخت مدل ریاضی اشاره دارد؛
- بازتابی؛ به ماهیت مدل ریاضی و معیارهای استفاده شده در تبیین مدل و نتایج آن اشاره دارد.

جایگاه این بحث‌ها در تشکیلات فعالیت‌های مدل‌سازی در مدرسه، با توجه به وزنی که توسط معلم به آن‌ها نسبت می‌دهد، تغییر می‌کند. باید اجازه داده شود دانش‌آموزان انواع مختلف بحث‌ها مانند ریاضی، تکنولوژی و بازتابی را توسعه دهند، که مورد آخری، برای توسعهٔ تفکر انتقادی ضروری است. بنابراین، بحث‌های بازتابی بین دانش‌آموزان،

ناسازگاری با رویکرد چرخه مدل‌سازی، در نتیجهٔ کمبود مهارت دانش‌آموزان نیست، بلکه به علت استفاده از یک زاویهٔ‌دید (لنز) نامناسب برای بررسی عملکردشان است (باربوسا ۲۰۰۷)

به‌عنوان بخش ضروری فرایند مدل‌ســازی دیده می‌شود. از این رو مفاهیم بحث‌های ریاضی، تکنولوژی و بازتابی، روش قدرتمندی را برای توصیف عمل دانش‌آموزان، فراهم می‌کند.



روش‌شناسی

از هشــت تــن از دانش‌آموزان دختر ۱۳ و ۱۴ ســالهٔ یکی از مدارس راهنمایی شــهر کرمان خواسته شد به طور گروهی، بستهٔ خورشیدی متناسب با مدرسه خود را با توجه به اطلاعات داده شده توسط یکی از نمایندگی‌های فروش صفحات خورشیدی، انتخاب کنند. اطلاعات مربوط به این بسته‌های خورشیدی، در جدول ۱ آمده است.

شــرکت‌کنندگان در ایــن پژوهش، ســاکن یکی از محله‌های واقع در مرکز شهر کرمان بودند و در یک مدرسه راهنمایی دولتی که در آن محله قرار داشــت، مشــغول به تحصیــل بودند. پژوهش انجام شــده از نوع کیفی بود و بر انواع بحث‌های تولید شــده توســط دانش‌آموزان، متمرکز بــود. داده‌های این پژوهش، به صــورت تصویری و کلامی جمع‌آوری شــد و نتایج به‌صورت تفســیری ارائه می‌شود. منابع جمع‌آوری داده‌ها شــامل ضبط دیداری و شنیداری، برگه‌های دانش‌آموزان و یادداشت‌های میدانی است. انجام این فعالیت ۶۰ دقیقه به طول انجامید.

جدول۱: میزان برق تولیدی و هزینهٔ بسته‌های خورشیدی

میزان تولید بستهٔ خورشیدی در روز (وات)	قیمت(تومان)
۵۰۰	۴۰۰۰۰۰
۱۰۰۰	۸۰۰۰۰۰
۱۵۰۰	۱۳۰۰۰۰۰
۲۰۰۰	۱۹۰۰۰۰۰
۲۵۰۰	۳۰۰۰۰۰۰
۶۰۰۰	۷۰۰۰۰۰۰
۸۰۰۰	۹۰۰۰۰۰۰

یافته‌ها

این مســئله مربوط به دنیای واقعــی و زندگی روزمره دانش‌آموزان بود. مدرســه‌ای که پژوهش در آن انجام شد، مدرسه‌ای است که دانش‌آموزان در آنجا تحصیل می‌کردند. این موقعیت برای آن‌ها جالب بود و در طول انجام پژوهش، بارها توسط دانش‌آموزان، بیان شد و انگیزه‌ای برای ادامه کار آن‌ها محسوب می‌شد. از طرفی بر اساس ویژگی‌های فعالیت مدل‌سازی مطرح شده توسط باربوسا (۲۰۰۳، ۲۰۰۶)، این فعالیت، یک مسئله مدل‌سازی است. علاوه بر این، فعالیت مطرح شــده در بالا، بدون ویژگی‌های مصنوعی یا ریاضی محض اســت، از این رو می‌تواند برای دانش‌آموزان جذاب باشد، زیرا آن‌ها بیش از دیگران، به سمت مدل‌های حقیقی جذب می‌شوند (لینگ فجارد، ۲۰۰۶).

دانش‌آموزان، گروه‌بندی شــده و بــه دو گروه ۴ نفری تقسیم شــدند. در گروه‌ها، ایده‌های خود را مطرح کرده و برای رســیدن به توافق در مورد انتخاب مناسب‌ترین بستهٔ خورشیدی، به بحث و گفت‌وگو پرداختند. آن‌ها می‌بایست پس از شناســایی متغیرهای مصرف برق در مدرسهٔ خود، میزان برق مصرفی روزانه را محاسبه کرده و با استفاده از آن، گزینهٔ مورد نظر را انتخاب کنند. با مشاهدهٔ فعالیت گروه‌ها، به نظر می‌رســید آن‌ها در انجام این مهم ناکام هســتند و برای ادامه کار و در نظر گرفتن فرضیه‌های مســئله، نیاز به حمایت دارند. اندرســون (۲۰۱۰) نیز به بحث حمایت از دانش‌آموزان اشــاره کرده و متذکر شده که هنگام طراحی فعالیت مدل‌سازی، باید به این نکته توجه کرد که در فعالیت مــورد نظر، دانش‌آموزان در ابتدای کار به چه حمایت‌هایی نیاز دارند.

بعد از شناسایی وسایل برقی مورد استفاده در مدرسه توسط دانش‌آموزان که متغیرهای پژوهش بودند اطلاعاتی راجع به میزان مصرف هریک از وسایل، در اختیار آن‌ها قرار داده شــد. در این میان یکی از گروه‌ها، برخی از متغیرهای کم اهمیت مانند میزان مصرف انرژی الکتریکی پنکه‌سقفی را نادیــده گرفتــه و از آن‌هــا صرف‌نظر کــرد. در نهایت، دانش‌آموزان موفق به محاسبه میزان مصرف برق روزانه در مدرسه شدند.

برای آن‌ها، مصرف بالای روزانه برق در مدرسه، بسیار شــگفت‌انگیز بود. حتی در مواردی احساس می‌کردند که در محاســبات، دچار اشتباه شدند و مجدداً محاسبات خود را کنترل می‌کردند. در نهایت، بعــد از اینکه دانش‌آموزان اطمینان پیدا کردند که محاسباتشــان صحیح است، برای این مصرف بالا، ابراز تأسف کردند. اکنون محقق می‌توانست از آن‌ها بخواهد که بر روی این ســؤال خاص متمرکز شوند که برای کاهش این مصرف بالا، چه پیشــنهادهایی دارند؟

جدول ۲: محاسبات انجام شده توسط یکی از گروه‌ها

میزان مصرف هر یک از اقلام مصرفی در مدرسه		محاسبه مصرف هر یک از اقلام در ۷ ساعت	
لامپ مهتابی	۵۰W	روشنایی دفاتر مدرسه	۵۰×۷=۳۵۰
لامپ رشته‌ای	۲۰۰ W	روشنایی کلاس	۲۰۰×۷=۱۴۰۰و۱۴۰۰×۷=۹۸۰۰
تخته هوشمند	۲ W	مصرف تخته هوشمند	۲×۷=۱۴و۱۴×۳=۴۲
پروژکتور	۲۳۰ W	مصرف پروژکتور	۲۳۰×۷=۱۶۱۰و۱۶۱۰×۳=۴۸۳۰
مانیتور	۱۲۰ W	مصرف مانیتور	۱۲۰×۷=۸۴۰و۸۴۰×۵=۴۲۰۰
پنکه سقفی	۱۰۰ W	مصرف پنکه سقفی	۰
کیس کامپیوتر	۱۵۰ W	مصرف کیس	۱۵۰×۷=۴۵۰و۴۵۰×۸=۸۴۰۰
مجموع مصرف در یک روز: ۲۷۶۲۲ W			

به عبارت دیگر، در این قسمت از پژوهش، از دانش‌آموزان خواسته شد تا با نگاهی بازتابی به این مسئله بنگرند. از آنجا که بحث‌های بازتابی جزء ضروری دیدگاه اجتماعی-انتقادی به شمار می‌روند، می‌توان این مرحله را نقطه شروع بحث‌های بازتابی آن‌ها دانست. مجدداً آن‌ها دست به کار شدند و با محاسبات ریاضی و کاهش دادن مصرف بعضی از متغیرها، کمینه میزان مصرف را محاسبه کردند. در این زمینه پیشنهادهای جالب توجهی توسط دانش‌آموزان مطرح شد که بخشی از آن‌ها، در زیر آورده شده است:

- از لامپ‌های کم مصرف استفاده شود، زیرا لامپ‌های رشته‌ای، مصرف بالایی دارند؛
- در بسیاری از کلاس‌ها از نور خورشید به‌عنوان روشنایی استفاده شود؛
- بسیاری از وسایل حتی در زمان خاموشی موقت[14] هم، انرژی الکتریکی استفاده می‌کنند. پس بهتر است در زمانی که از آن‌ها استفاده نمی‌شود (زنگ تفریح، موقع نماز و نظایر آن) به طور کامل از سیستم برق‌رسانی، حذف شوند؛
- مسئولان، قیمت برق را افزایش و به جای آن، قیمت صفحات خورشیدی را کاهش دهند تا مردم برای استفاده از انرژی خورشیدی، ترغیب شوند؛
- هنگام خرید وسایل خانگی، به میزان برق مصرفی آن‌ها توجه کنیم و اقلام پرمصرف را خریداری نکنیم.

در ادامه، از دانش‌آموزان خواسته شد پیش‌بینی کنند که در صورت خرید بسته ۸۰۰۰ واتی برای مدرسه، چه مدتی طول می‌کشد تا سرمایه‌ای که برای خرید بسته خورشیدی هزینه کردیم، برگردد؟ متأسفانه با اینکه میزان هزینه، مصوب برای مصرف هر ساعت داده شده بود، ولی آن‌ها، تنها بر پایه حدس و بدون به‌کارگیری استراتژی خاصی، مقدار هزینه را به عدد گفتند و تلاشی برای ساختن یک استدلال ریاضی‌وار نکردند. در صورتی که این قسمت مسئله، مستلزم در نظر گرفتن حالت‌های متعدد بود (هزینه برق مصرفی در ایران به صورت پله‌ای محاسبه می‌شود) و زمان زیادی را می‌طلبید. بدین ترتیب، پاسخ دانش‌آموزان قانع‌کننده نبود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این فعالیت، دانش‌آموزان فرصت پیدا کردند تا متغیرهای مصرف برق را در مدرسه خود، شناسایی کرده و راجع به آن بحث کنند. دانش آموزان نتایج مختلف ریاضی را ارائه کردند و در این زمینه، بحث‌های بازتابی پرچالشی داشتند. آنان در مورد حالت‌های مختلف بحث کردند یا مدل‌های ریاضی مختلفی را تبیین کرده و در مورد آن، تصمیم‌گیری کردند.

این پژوهش نشان داد که چنانچه مسئله‌ای واقعی به دانش‌آموزان داده شود، آن‌ها می‌توانند از طریق بحث و گفت‌وگو با یکدیگر، به آگاهی مطلوبی از بعد اجتماعی، اقتصادی، فرهنگی و سیاسی نیز دست یابند و نگاه نقادانه‌ای به مسائل داشته باشند. مطرح کردن چنین سؤال‌هایی در کلاس درس ریاضی، باعث می‌شود که نگاه دانش‌آموزان به ریاضی تغییر کرده و آن را درسی بی‌فایده و غیرکاربردی تلقی نکنند. هم‌چنین، در خلالِ آموزش مفاهیم و فرمول‌های ریاضی، مفاهیم کاربردی و قابل لمسی را با هم تجربه کنند که در حال حاضر، با آن‌ها مواجه‌اند یا در آینده با آن‌ها سروکار خواهند داشت. به این‌ترتیب، دانش‌آموزان تلفیق بین ریاضی و این مفاهیم کاربردی را بهتر درک خواهند کرد.

در این مطالعه، مشاهده شد که دانش‌آموزان در بخش آخر این فعالیت که قرار بود «پیش‌بینی» کنند، نتوانستند یک استدلال ریاضی‌وار ارائه نمایند. شاید بتوان این امر را چنین توجیه کرد که دانش‌آموزان بر این باورند که این‌گونه مسائل، با استدلال ریاضی‌وار قابل حل نیست و مسئله با حل ریاضی وار آن، به جواب نمی‌رسد. این قسمت از پژوهش، همسو با یافته‌های احمدی و رفیع‌پور (۱۳۹۲) بود که در آن دریافتند که دانش‌آموزان از در نظر گرفتن حالت‌های مختلف امتناع می‌کنند. در عین حال، شونفیلد (۱۹۹۱) معتقد است که بسیاری از دانش‌آموزانی که تجربهٔ آن‌ها فقط در انجام تمرین‌های معمولی بوده است، توقع دارند که مسئله را تنها در چند دقیقه حل نمایند. این‌گونه افراد هنگام مواجهه با مسائل طولانی، به سادگی آن را کنار می‌گذارند و آن را غیر قابل حل می‌دانند.

بنوتو[15] (۲۰۰۷) معتقد است که غوطه‌ور شدن دانش‌آموزان در موقعیت‌هایی که با تجربهٔ آن‌ها رابطه مستقیم

بنوتو (۲۰۰۷) معتقد است که غوطه‌ور شدن دانش‌آموزان در موقعیت‌هایی که با تجربهٔ آن‌ها رابطه مستقیم و سازگاری بیشتری دارد، اجازه می‌دهد که درک بیش‌تر و عمیق‌تری از وسعت و سودمندی ریاضی داشته باشند

و سازگاری بیشـــتری دارد، اجازه می‌دهد که درک بیش‌تر و عمیق‌تری از وسعت و سودمندی ریاضی داشته باشند. از این رو پیشنهاد می‌شود در کتاب‌های درسی ریاضی و کلاس‌های درس ریاضـــی، از این‌گونه فعالیت‌ها برای بالا بردن آگاهی و توســـعه تفکر انتقادی در دانش‌آموزان، بیشتر استفاده شود. این مطلب، مســـتلزم آموزش معلمانی اســـت که با این نوع فعالیت‌ها آشنایی دارند و قادرند آن‌ها را در کلاس درس، اجرا کنند. پیامد این امر آن اســـت که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که همیشه به آنچه که می‌آموزند و نیز به آنچه در اطرافشان می‌گذرد، با دیدی انتقادی و موشکافانه نگاه کنند و سؤال‌های خود را طرح کرده و بکوشند جوابی مناسب برایشان بیابند.

پی‌نوشت‌ها

1. Kaiser
2. Sriraman
3. Barbosa
4. Niss
5. Blum
6. Galbraith
7. International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA)
8. Blomhøj
9. Lingefjärd
10. D’Ambrosio
11. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
12. Greer, Verschaffel, Mukhopadhyay
13. Borromeo Ferri
14.Standby
15. Bonotto

منابع

۱. احمدی، حمیده؛ و رفیع‌پور، ابوالفضل. (۱۳۹۲). ریاضیات و تلفن همـــراه. **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۱۱۲. صص ۲۱-۱۶. دفتر انتشـــارات کمک‌آموزشـــی، وزارت آموزش‌وپرورش. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی.

۲. خوش‌اخلاق، رحمان؛ شـــریفی، علیمراد؛ و کوچک‌زاده، میثم. (۱۳۸۴). ارزیابی اقتصادی استفاده از انرژی خورشیدی در مقایسه با نیروگاه دیزلی. **فصل‌نامه پژوهش‌های اقتصادی ایران**، سال هفتم، شماره ۲۴، صص ۱۷۱-۱۹۲.

۳. زینـــل‌زاده، رضا، صادقی، زین‌العابدیـــن، دهقان‌پور، محمدرضا، و قائدی، مهـــدی. (۱۳۹۱). ارزیابی اقتصادی و زیســـت محیطی سیستم های فتوولتاییک: مطالعه موردی منطقه جنوب شرق ایران. **فصل‌نامه مطالعات اقتصاد انرژی**. ســـال نهم. شماره ۳۳. صص ۱۴۹-۱۱۵

۴. شـــریفی، علی‌مراد؛ آقایی کیومرث؛ صادقی‌شـــاهدانی، مهدی؛ دلالی‌اصفهانی، رحیم؛ و شـــوال‌پورآرانی، ســـعید. (۱۳۸۸). تأثیر یادگیری فنی بر توسعه فناوری‌های انرژی‌های تجدیدپذیر در بخش برق ایران در شـــرایط اختلالات قیمـــت انرژی. **مطالعات اقتصاد انرژی**، دوره ۶، شماره ۲۱، صص ۱۳۷-۱۶۰.

۵. شـــونفیلد، ای. اچ. (۱۹۹۱). فراشناخت و ریاضیات. **مجله رشد آموزش ریاضی**. شـــماره ۵۵. صص ۸-۴. دفتر انتشـــارات کمک آموزشـــی، وزارت آموزش‌وپرورش. ســـازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی.

۶. گویا، زهرا. (۱۳۷۵). ضرورت تغییر برنامه درســـی. **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۴۶. صص ۱۲-۸. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، وزارت آموزش‌وپرورش. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی.

7. Anderson, L. (2010). Collaborative Problem Solving as Modeling in the Primary Years of Schooling. IN B. KAUR and J. Dindyal (Eds), Mathematical applications and modeling (PP. 78-93). Singapore.

8. Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parder &. K. Houston (Eds.), Mathematical modelling: a way of life (pp. 227-234). Chichester: Ellis Horwood.

9. Barbosa, J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a critical and discursive perspective. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(3), 293-301.

10. Barbosa, J. C. (2007). Mathematical modelling and parallel discussions. In 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca (Cyprus).

11. Barbosa, J. C. (2009). Mathematical modelling, the sociocritical perspective and the reflexive discussions. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, 133- 143.

12. Barbosa, J. C. (2013). The Students’ Discussions in the Modeling Environment. In Modeling Students’ Mathematical Modeling Competencies (pp. 365-372). Springer Netherlands.

13. Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn and M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education, the 14th ICMI Study (pp. 185-192). Springer Us.

14. Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 86-95.

15. Galbraith, P. (2007). Beyond the low handing fruit. Modelling and applications in primary education. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn and M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education, the 14th ICMI Study (pp. 79-88). New York: Springer.

16. Greer, B. Verschaffel, L. & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children’s experience. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn and M. Niss (Eds.), Modeling and applications in mathematics education, 14th ICMI Study (pp. 89-98). New York: Springer.

17.http://www.amar.org.ir/Default.aspx?tabid=115&agentType=View&PropertyID=863. Retrieved 16 February 2013.

18. http://www.mehrnews.com/detail/News/2183003. Retrieved 9 February 2013.

19. Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(3), 302-310.

20. Lingefjärd, T. (2006). Faces of mahtematical modeling. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 96-112.

21. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM-2000.

22. Niss, M., Blum, W., and Galbrith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbrith, H, Henn and M. Niss, (Eds.), Modelling and applications in mathematics education, the 14th ICMI Study (pp. 3-32). New York: Springer

23. Sriraman, B. Kaiser, G. & Blomhøj, M. (2006). A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 212-213.

24. Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls. In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceeding of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 64-80). Norwich, England University of East Anglia.

مقدمه‌ای بر روش‌های مختلف ضرب

نویسنده: لین وست[1]
مترجمان: رضا معطی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی ناحیه ۲ اراک
پریسا رحیم‌خانی، دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه الزهرا(س)

چکیده

این نوشته، فصل دوم یا پیشینه پژوهشی یک پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته تدریس با گرایش تدریس ریاضی در دورهٔ متوسطهٔ اول از گروه ریاضی دانشگاه نبراسکا و به راهنمایی جیم لوئیس است. در این بررسی، پژوهشگر روش‌های مختلف ضرب و علت درست بودن آن‌ها را از نظر ریاضی، بیان کرده است. این مقاله، به خصوص برای همکاران دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول، می‌تواند برای تدریس ریاضی در کلاس درس، مفید واقع شود.

کلیدواژه‌ها: عمل ضرب، انواع روش‌های ضرب، دوره ابتدایی، دورهٔ متوسطهٔ اول

ضرب، یکی از چهار عمل اصلی محاسباتی در دوره ابتدایی است که معمولاً به‌عنوان تکرار جمع تعریف می‌شود. اگرچه این تعریف در ضرب اعداد حسابی به‌کار می‌رود، اما بعضی از پژوهشگران ریاضی بر این باورند که این تعریف، برای تبیین عمل ضرب در کسرها و سایر اعداد، کافی نیست. در عوض، ریاضی‌دانان ترجیح می‌دهند ضرب را به‌عنوان مقیاسی برای بیان یک عدد بر حسب عدد دیگر یا فرایندی که حاصل ضرب دو عدد را محاسبه می‌کند، تعریف کنند (دانشگاه پرینستون وردنت[2]، ۲۰۱۰). با وجود این اختلاف‌نظرها، ضرب با هر تعریفی که در نظر گرفته شود، یکی از مهارت‌های ضروری برای آماده کردن دانش‌آموزان برای زندگی در قرن بیست‌ویکم است. ضرب، ابزاری مهم برای حل مسائل واقعی زندگی است و پایه‌ای محکم، برای استدلال نسبیتی، تفکر جبری و ریاضیات سطوح بالاتر، ایجاد می‌کند.

در آمریکا، الگوریتم استاندارد تدریس ضربِ اعداد بزرگ که به‌عنوان ضرب متوالی[3] شناخته می‌شود، ابتدا توسط مردم عربی‌زبان آفریقا، به اروپا برده شد. در ضرب‌های متوالی، عامل اول[4] در تمام رقم‌های عامل دوم[5]، ضرب می‌شود و تمام عددهای به دست آمده، با هم جمع می‌شوند. این روش، متکی بر به خاطرسپاری حقایق مربوط به ضرب است. با این حال، انواع گسترده‌ای از الگوریتم‌های مؤثر به‌عنوان بدیلی برای این الگوریتم، وجود دارند و بسیاری از دانش‌آموزان، روش‌های جذاب و ساده‌تر را به روش‌های سنتی ترجیح می‌دهند.

ضرب با انگشتان[6]

بعضی از قدیمی‌ترین روش‌های ضرب، استفاده از انگشتان برای محاسبه حاصل‌ضرب بوده است. یکی از این روش‌ها که آن را به ایتالیا نسبت می‌دهند، به‌طور گسترده

در قرون وســـطی، در سراسر اروپا مورد استفاده قرار گرفته بود (روس بال[۷]، ۱۹۶۰، ص۱۸۹). این روش بســیار ساده اســت و می‌تواند برای محاســبه حاصل‌ضرب دو عدد یک رقمی بین پنج و نه، مورد اســتفاده قــرار گیرد. به منظور اســـتفاده از این روش، یک مشتِ بسته شده، نشان‌دهنده عدد پنج است و هر انگشتی که باز می‌شود، یک عدد به آن اضافه می‌کند. یعنی برای نشان دادن اینکه چند انگشت از دســت دیگر باز شود، باید اختلاف هر عامل از عدد پنج، به دست آید و به تعداد این اختلاف، انگشتان دست دیگر باز شود. برای مثال، در محاسبه حاصل‌ضرب ۷×۸ ، مراحل زیر انجام می‌شود:

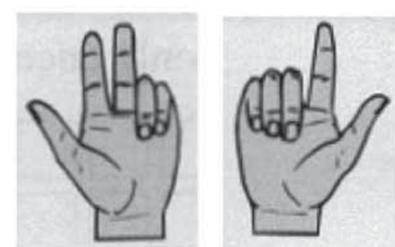
۱. سه انگشت دست چپ را باز کنید. ۳=۵-۸

۲. دو انگشت دست راست را باز کنید. ۲=۵-۷

۳. تعـــداد انگشـــتان بــاز شـــده را در ۱۰ ضــرب کنید. ۵۰=۱۰×۵

۴. حاصل‌ضرب تعداد انگشـــتان بسته دست راست را در تعداد انگشتان بسته دست چپ، به دست آورید. ۶=۳×۲

۵. دو عدد را با هم جمع کنید. ۵۶=۶+۵۰



۸ × ۷

بنابراین، ۵۶=۷×۸. اما چرا این الگوریتم نتیجه می‌دهد؟ روند بالا را به‌صورت یک معادله جبری بازنویسی کنید و به جای عددهای هشـــت و هفت، به ترتیب x و y را جایگزین کنید:

$$
\begin{aligned}
&۱۰[(x-۵)+(y-۵)]+[(۱۰-x)(۱۰-y)]= \\
&۱۰x-۵۰+۱۰y-۵۰+۱۰۰-۱۰x-۱۰y+xy= \\
&\cancel{۱۰x}-۵۰+\cancel{۱۰y}-۵۰+۱۰۰-\cancel{۱۰x}-\cancel{۱۰y}+xy=xy
\end{aligned}
$$

که معنی آن، «ضرب تعداد انگشـــت‌های باز شده (x-۵,y-۵) در عدد ۱۰ و جمع آن با حاصل‌ضرب انگشت‌های بسته شـــده (x-۱۰)(y-۱۰)» اســـت. از آنجایی که همه عبارت‌ها به جز xy حذف می‌شـــوند، معادلـــه مورد نظر، حاصل‌ضرب x و y را نتیجه می‌دهد.

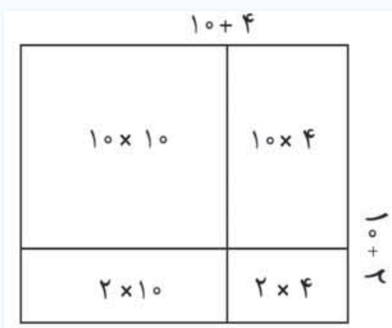
یکـــی از مزیت‌های این روش این اســـت که نیازی به حفظ کردن حقایق ضرب (ضرب‌های اصلی) بالاتر از ۵×۵ نیست و بدین ســـبب، برای دانش‌آموزانی که هنوز تسلط کامل در اســـتفاده از جدول ضرب ندارند، روش مؤثری به حساب می‌آید. هم‌چنین، معرفی این روش به دانش‌آموزان پیشرفته‌تر، فرصت توسعه درک و فهم فرایند ضرب و ایجاد ارتباط با یادگیری‌های قبلی را به آن‌ها می‌دهد. استفاده از استدلال ریاضی، برای اعتباربخشی به یک الگوریتم، باعث تقویت درک مفهومی می‌شـــود که جـــزء مهمی از مهارت ریاضی محسوب می‌شود (NCTM، ۲۰۰۰).

مدل مساحتی ضرب[۸]

به منظور ساخت مفاهیم جدید، همه دانش‌آموزان باید بین ایده‌های ریاضی و مفاهیمی که قبلاً آموخته‌اند، ارتباط و اتصال ایجاد کنند. مدل مســاحتیِ ضرب، روشی است که به‌عنوان یک بازنمایی، فرایند ضرب را توصیف می‌کند و در ایجاد ارتباط بین جبر و تفکر جبری، به دانش‌آموزان کمک می‌کند. ضرب ۱۲×۱۴ را می‌توان به‌عنوان یک مسئله مساحت با رسم یک مستطیل به عرض ۱۲ و طول ۱۴، در کاغذ ساده نشان داد (از کاغذ طراحی نیز برای نمایش قسمت‌های جزئی یا برای ضرب کسرها می‌توان استفاده کرد).

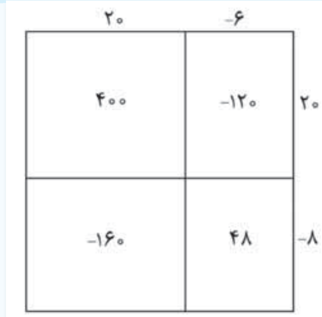
مدل مساحت، کاربردی از خاصیت توزیع‌پذیری[۹] است:

$$
\begin{aligned}
۱۴\times۱۲&=[(۱۰+۲)\times۱۰]+[(۱۰+۲)\times۴] \\
&=(۱۰\times۱۰)+(۲\times۱۰)+(۱۰\times۴)+(۲\times۴) \\
&=۱۰۰+۲۰+۴۰+۸=۱۰۰+۶۰+۸=۱۶۸
\end{aligned}
$$



به دلیل محدودیت‌های مدل مساحتی، نمی‌توان از آن، برای ضرب اعداد گنگ اســـتفاده کرد. اما در هر صورت این مدل، ابزاری مناســـب برای کمک به ایجاد درک اساسی در دانش‌آموزان نسبت به مفاهیم گوناگون و پایه‌ای در ریاضی اســـت. برای نمونه، از این مدل می‌توان به‌عنوان ابزاری مؤثر برای توسعه درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی، استفاده کرد. مثال زیر، ضرب ۱۲×۱۴ را به‌صورت (۸-۲۰)×(۶-۲۰) نشان می‌دهد:

ایـــن مدل، به وضوح نشـــان می‌دهد که در ضرب یک عدد منفی در عددی مثبت، حاصل عددی منفی اســـت و حاصل‌ضرب دو عدد منفی، عددی منفی اســـت. هم‌چنین مدل مساحت، خاصیت توزیع‌پذیری ضرب را به خوبی نشان



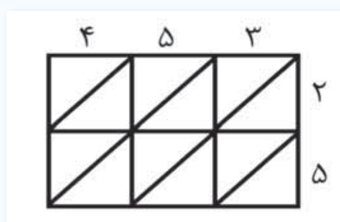
می‌دهد. اگر فرصتی ایجادکنیم تا دانش‌آموزان، بتوانند با استفاده از شکل، نشــان دهند که ۱۲×۱۴ همان ۱۴×۱۲ اســت، می‌توان خاصیت جابه‌جایی[۱۰] در ضرب را به خوبی برجسـته کرد. در کلاس‌هایی کـه دانش‌آموزان قوی‌تری دارد، می‌توان از این روش، برای توسعه درک رابطه‌ایِ ضرب چندجمله‌ای‌ها و فاکتورگیری، در کسانی که یادگیری‌شان بیشتر بصری (دیداری)[۱۱] است، استفاده کرد.

ضرب شبکه‌ای[۱۲]

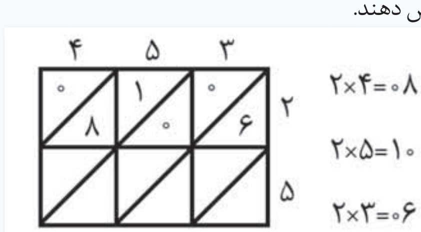
تاریـخ و مکان پیدایش ضرب شـبکه‌ای که به ضرب غربال[۱۳] یا روش جالوسـیا[۱۴] معروف است، به قرن دهم در هند می‌رسـد که در قرن چهاردهم، توسـط فیبوناچی به اروپاییان معرفی شد (کارل و پارتر[۱۵]، ۱۹۹۸). الگوریتم این روش مانند روش ضرب‌های متوالی سنتی است، اما فرایند آن، به مراحل کوچک‌تر تقسـیم می‌شـود. در زیر به‌طور نمونه، مراحل ضرب دو عدد ۲۵×۴۵۳ نشان داده می‌شود:

۱. یک شبکه رسم کنید، به‌طوری که تعداد ستون‌های آن برابر تعداد رقم‌های عامل اول ضرب و تعداد سـطرهای آن برابر با تعداد رقم‌های عامل دوم ضرب باشد.

۲. قطر هر شبکه را از گوشه سمت راست بالای شبکه، به گوشه سمت چپ پایین آن رسم کنید.

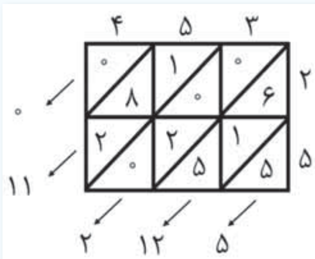


۳. عامل‌های ضرب را در قسـمت بالا و سمت راست شـبکه طوری بنویسـید که رقم‌ها سرتاسـر قسمت‌ها را پوشش دهند.



مدل مساحتیِ ضرب، روشیِ است که به‌عنوان یک بازنمایی، فرایند ضرب را توصیف می‌کند و در ایجاد ارتباط بین جبر و تفکر جبری، به دانش‌آموزان کمک می‌کند

۴. در هر شبکه، حاصل‌ضرب رقم سطر در رقم ستون متناظـر آن، یک عدد دو رقمی را نشـان می‌دهد که رقم دهگانِ حاصل‌ضرب در مثلث بالاییِ سـمت راست و رقم یکانِ حاصل‌ضرب در مثلث پایینیِ سمت چپ قرار می‌گیرد (اگر در حاصل‌ضرب رقم دهگان وجود نداشـت، در مثلث دهگان، رقم صفر گذاشته می‌شود.)

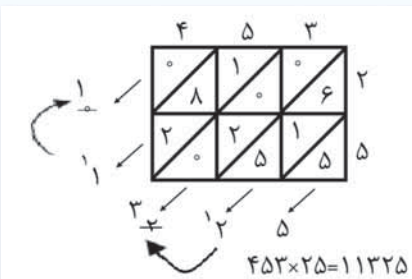


۵×۴=۲۰
۵×۵=۲۵
۵×۳=۱۵

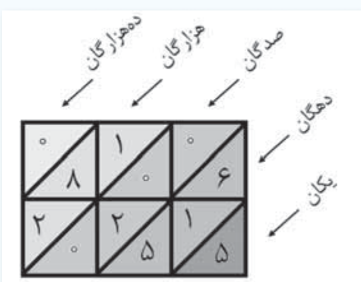
۵. وقتی ضرب‌ها کامل شدند، عددهای امتداد هر قطر را با هم جمع کنید.

۶. عددهـای دو رقمی را به مکان بعدی ببرید و آن را یادداشت کنید.

بنابراین، ۴۵۳×۲۵=۱۱۳۲۵.



برخی استدلال می‌کنند که این الگوریتم، ارزش مکانی را در نظر نمی‌گیرد، در صورتی که به سادگی می‌توان نشان داد که قطرها در واقع، نشـان دهنـده ارزش مکانیِ رقم‌ها هستند.



در نتیجه، می‌توان این ضرب را به‌صورت زیر نمایش داد:

(۲۰×۴۰۰)+(۲۰×۵۰)+(۲۰×۳)+(۵×۴۰۰)+(۵×۵۰)+(۵×۳)=۱۱۳۲۵

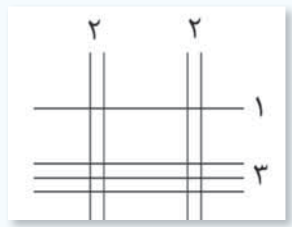
ضرب اعداد بزرگ‌تر از یک رقمی، بر سه مرحله ضرب، دسته بندی دوباره انجام می‌دهد، به‌طوری که دانش‌آموزان می‌توانند بر معنی و مفهوم هر مرحله از فرایند، تمرکز کنند.

این روش، به دانش‌آموزان ساختاری برای فکر کردن و ثبت کارهایشان می‌دهد. ضرب شبکه‌ای را می‌توان به راحتی، برای ضرب کسرهای‌اعشاری و چندجمله‌ای‌ها، گسترش داد.

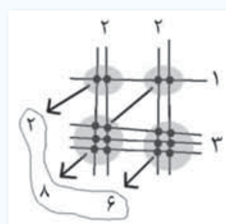
ضرب خطی[۱۷]

یکی دیگر از الگوریتم‌هایی که گاهی به دانش‌آموزان دوره ابتدایی معرفی می‌شود، «ضرب خطی» نام دارد. در این الگوریتم، دانش‌آموزان به وسیله یک نمایش تصویری از ضرب، توانایی دیداری خود را از فرایند ضرب، بالا می‌برند. فرض کنید می‌خواهید ۱۳×۲۲ را ضرب کنید:

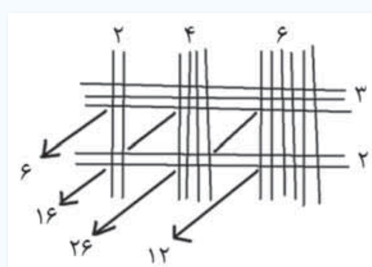
۱. ابتدا دو مجموعه از خطوط عمودی را طوری رسم کنید که برای نمایش ۲۲، دوخط در سمت راست و دو خط در سمت چپ قرار گیرند (خطوط قرمز). سپس دو مجموعه از خطوط افقی را طوری رسم کنید که برای نمایش ۱۳، یک خط در بالا و سه خط در پایین قرار گیرند (خطوط آبی).



۲. توجه داشته باشید که چهار مجموعه از نقاط تقاطع وجود دارند (برجسته شده‌اند) که برای پیدا کردن حاصل‌ضرب، تعداد نقاط هر مجموعه را بشمارید و به‌صورت قطری، با هم جمع کنید.



مانند الگوریتم ضرب‌های متوالی ، زمانی که یک مسئله ضرب به دسته‌بندی دوباره نیاز دارد، رقم‌ها باید به مکان بعدی انتقال پیدا کنند. برای مثال، ضرب ۳۲×۲۴۶ را در نظر بگیرید. پاسخ درست ۶ هزارتایی، ۱۶ صدتایی، ۲۶ ده‌تایی و ۱۲ یکی است. اگر چه عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ باید دوباره دسته‌بندی شوند و پاسخ به‌صورت استاندارد نوشته شود.



نقاط تقاطع را به‌صورت قطری با هم جمع کنید و عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ را دوباره دسته بندی کنید.

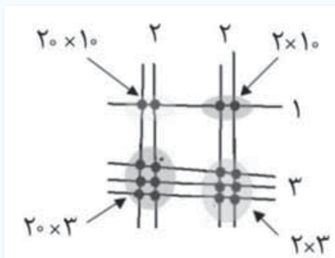
۶۰۰۰+۱۶۰۰+۲۶۰+۱۲=۷۰۰۰+۶۰۰+۲۶۰+۱۲

۷۰۰۰+۸۰۰+۶۰+۱۲=۷۰۰۰+۸۰۰+۷۰+۲

=۷۸۷۲

بنابراین، ۷۸۷۲=۳۲×۲۴۶ .

این روش جواب می‌دهد زیرا قطرهایی که از تقاطع خطوط به دست می‌آیند، به‌عنوان ارزش مکانی یا مکان‌یاب (یکان، دهگان، صدگان و . . .) به کار می‌روند و تعداد نقاط در هر تقاطع، نشان‌دهنده حاصل‌ضرب تعداد خط‌هاست. این روش، شباهت زیادی به مدل مساحتی ضرب دارد. وقتی دو عدد دو رقمی مانند ۱۳×۲۲ در هم ضرب می‌شوند، باید توجه نمود که مسئله را می‌توان به‌صورت (۳+۱۰)×(۳+۲۰) بازنویسی کرد.

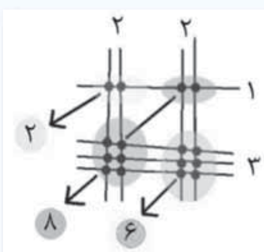


۲۲×۱۳=(۲۰+۲)×(۱۰+۳)

=(۲۰×۱۰)+(۲۰×۳)+(۲×۱۰)+(۲×۳)

=۲۰۰+۶۰+۲۰+۶=۲۰۰+۸۰+۶=۲۸۶

توجه داشته باشید که چهار مجموعه نقاط به‌صورت قطری با هم جمع می‌شوند. در واقع، نقاطی که ارزش مکانی یکسانی دارند، با هم جمع می‌شوند (در شکل، برجسته شده‌اند).

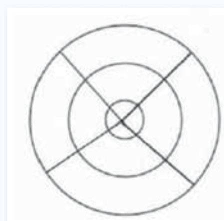


این الگوریتم خاص، فهم دیداری یادگیرندگان را از فرایند ضرب، افزایش می‌دهد. با این حال، همه دانش‌آموزان باید با انواع استراتژی‌ها، مدل‌ها و بازنمایی‌ها، آشنا شوند. هم‌چنین، دانش‌آموزان باید توانایی توصیف روش استفاده شده را داشته باشند و بدانند که برای حل هر مسئله خاص، چندین روش مؤثر برای ضرب، وجود دارد (NCTM، ۲۰۰۰). ضرب خطی، می‌تواند به‌عنوان روشی برای به دست آوردن حاصل‌ضرب دو عدد، به دانش‌آموزان دوره ابتدایی معرفی شود. اگر ضرب خطی برای اعداد خیلی بزرگ به‌کار رود، دردسر زاست، ولی برای دانش‌آموزان

کم‌ســـن و آن‌هایی که هنوز در جدول ضرب مهارت کافی ندارند، ایـــن روش می‌تواند به‌عنوان فرصتی برای موفقیت در ضرب عددهای نسبتا بزرگ، پیشنهاد شود. دانش‌آموزان پیشرفته‌تر با بررسی این الگوریتم و توجیه ریاضی آن، درک بهتری از فرایند ضرب دو عدد، به دست خواهند آورد.

ضرب دایره/ شعاع[۱۸]

یکی دیگر از الگوریتم‌های تصویریِ ضرب، شامل رسم دایره‌هـــای هم مرکز برای نشـــان دادن عامل اول ضرب، و رسم شعاع برای نشـــان دادن عامل دوم ضرب است. برای مثال در ضرب ۴×۳، ابتدا سه دایره هم مرکز برای نمایش یا مدل‌سازی عامل اول ضرب و چهار شعاع به‌عنوان عامل دوم ضرب، رسم کنید. سپس تعداد قسمت‌های ایجاد شده در دایره را بشمارید. در این مثال، چون ۱۲ قسمت ایجاد شده، نتیجه می‌گیریم که ۱۲=۴×۳.



در مثال زیر که محاســـبه حاصل‌ضرب ۳۴×۲۱ است، نشان می‌دهیم که این الگوریتم برای اعداد بزرگ‌تر، کمی پیچیده است:

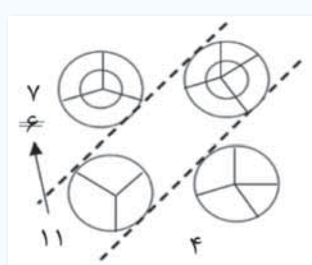
۱. دو دایره هم‌مرکز، برای نشـــان دادن عدد دو که در جایگاه دهگان عاملِ اول ضرب (۲۱) قرار دارد، رسم نموده و همین شکل را به تعداد رقم‌های عامل دوم، رسم کنید.

۲. یک دایره برای نشان دادن عدد یک، که در جایگاه یکان عامل اول ضرب (۲۱) قرار دارد، رسم کنید و این شکل را به تعداد رقم‌های عامل دوم، رسم کنید.

۳. برای ضرب کردن ۳۴، ســه شـــعاع برای دایره‌های سمت چپ رسم کنید.

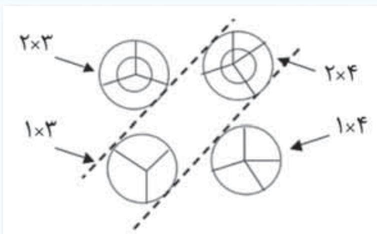
۴. سپس چهار شعاع برای دو دایره سمت راست رسم کنید.

۵. همان‌طور که نمایش داده شـــده (خط چین)، قطر بین دایره‌ها را رســـم کنید و تعداد قسمت‌های هر دایره را بشمارید و به‌صورت قطری، با هم جمع کنید.



جواب، ۷۱۴=۳۴×۲۱ است.

این روش نتیجه می‌دهد، زیرا در آن، دایره‌های نمایش داده شده برای هر رقم در عامل اول، به تعداد رقم‌های عامل دوم تکرار شده‌اند. در واقع، این روش اجازه می‌دهد که همه رقم‌های عامل اول، در همه رقم‌های عامل دوم ضرب شوند. خط‌های قطری نیز برای جـــدا کردن رقم‌ها در مکان‌های مناسب -ارزش مکانی-، به کار می‌روند.



از مزایای این روش این است که می‌توان بدون دانستن جدول ضرب، از آن استفاده کرد. ممکن است این روش ضرب کردن، بدیل مناســـبی برای یادگیرندگانی باشد که توانایی دیداری آن‌ها بیشتر است و بتواند درک عمیق‌تری نسبت به مفهوم ضرب کردن دو عدد، در آنان ایجاد کند. با این وجود، رسم دایره‌ها و شعاع‌ها برای محاسبه حاصل‌ضرب، با افزایش اندازه عامل‌های ضرب، سخت‌تر و سخت‌تر می‌شود، ولی این الگوریتم را می‌توان به‌عنـــوان یکی از چندین روش موجود بـــرای ضرب کردن دو عدد، به دانش‌آموزان معرفی کرد، اما نباید تنها بر این روش، تکیه کنند.

ضرب با نوار کاغذی[۱۹]

یکـــی دیگر از روش‌هایی که برای انجام عملیات ضرب موجود است، نوشتن عددها روی نوارهای کاغذی به‌طوری اســـت که ترتیب رقم‌های یکی از عامل‌های ضرب را تغییر دهیم و بعد، یک سری ضرب‌های یک‌رقمی انجام دهیم.

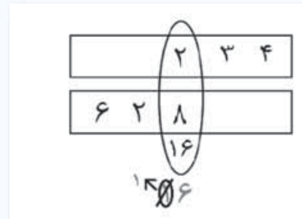
این الگوریتم، می‌تواند برای کســـانی که به استفاده از ابزار ملموس برای فهمیدن ریاضی علاقه دارند، جذاب باشد. برای نشان دادن این روش، ضرب ۶۲۸×۴۳۲ را برای نمونه، نشان می‌دهیم:

۱. ابتـــدا عامل‌هـــای ضـــرب را روی دو نـــوار کاغذی بنویسید، ترتیب رقم‌های یکی از عامل‌ها را برعکس کنید (۲۳۴→۴۳۲).

۲. نوارهـــای کاغـــذی را طوری قـــرار دهید که عامل برعکس نوشـــته شده، در قسمت بالای سمت راست عامل دیگر قرار گیرد.

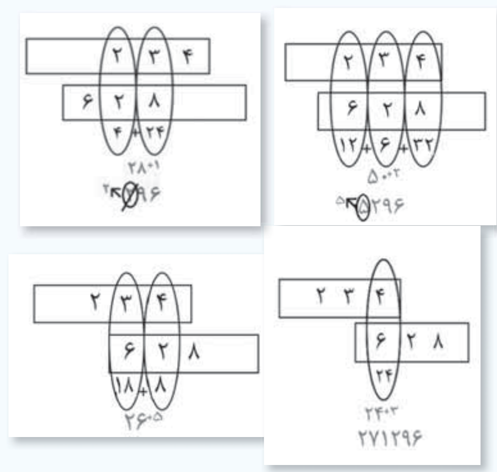
۳. کاغذها را طوری تنظیـــم کنید که اولین رقم عدد جدید بالایی -عددی که ترتیب رقم‌هایش عوض شـــده - و آخرین رقـــم عدد پایینی، زیر یکدیگر قـــرار گیرند. بعد

حاصل‌ضرب دو رقم را بنویسید.



۴. نوار پایینی را به سمت راست حرکت دهید، به‌طوری که مجموعه‌ای از رقم‌ها زیر هم قرار گیرند. آن‌گاه رقم‌های زیرِ هم را در هم ضرب کنید و حاصل‌ضرب‌ها را جمع کنید و حاصل را بنویسید.

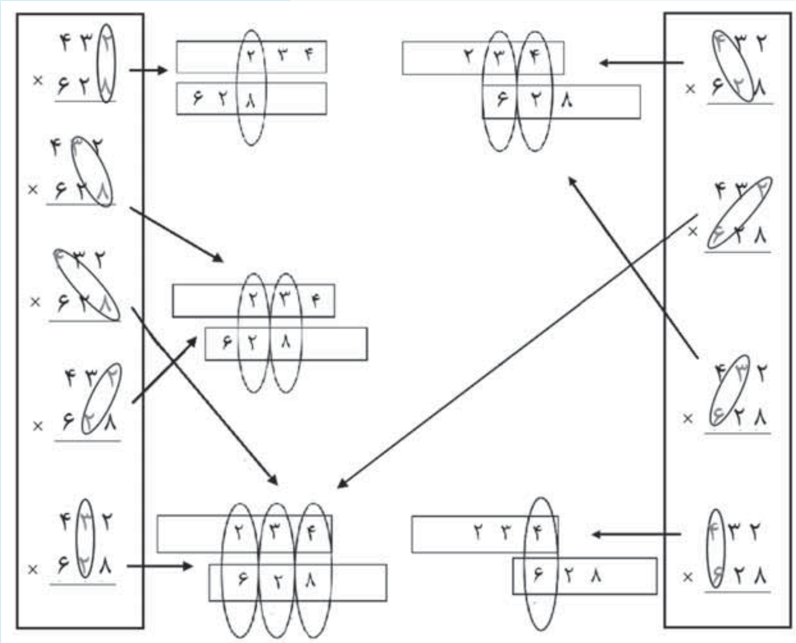
۵. حرکت نوار پایینی را به سـمت راست ادامه دهید، رقم‌های زیر هم را در هر مرحله ضرب کنید و حاصل‌ضرب‌ها را جمع کنید. اعداد دورقمی را دوباره دسـتـه‌بندی کنید و ایــن کار را تا زمانی که رقم‌ها زیر هم قرار می‌گیرند، ادامه دهید.



۶. بنابراین ۲۷۲۲۹۶=۶۲۸×۴۳۲ .

اما ســؤال این اســت که چگونه برعکس کردن رقم‌ها همراه با جمع و ضرب آن جفت عددها، به جواب درســت می‌رسد؟ بگذارید آنچه را که در مراحل اجرای این الگوریتم اتفاق افتاده است، از نزدیک بررسی کنیم تا ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. ابتدا الگوریتم سنتی ضرب متوالی ۶۲۸×۴۳۲ را در نظر بگیرید.

وقتی که دو روش کنار هم نوشــته می‌شــوند، معلوم می‌شــود که هر دو، یک الگوریتم هستند که ترتیب انجام مراحل عمل ضرب در هر دو روش متفاوت است. ولی چون عمل ضرب و عمل جمع خاصیت جابه جایی دارند، تغییر در ترتیب انجام مراحل، تفاوتی در جواب نهایی ایجاد نمی‌کند.



ضرب مصری[۲۰]

شواهد موجود در رابطه با انجام عملیات ریاضی از جمله ضرب، به ۲۰۰۰ ســال قبل از میــلاد برمی‌گردد (اکانر و رابرتســون[۲۱]، ۲۰۱۱). در تمام تمدن‌های مصر باســتان، یونان، بابل، هند و چین، روش‌هایی برای انجام عمل ضرب، ابداع کرده بودند. یکــی از قدیمی‌ترین الگوهای ضرب، به مصر باســتان برمی‌گردد که در آن، نیازی به حفظ کردن جدول ضرب اعداد، وجود نــدارد و فقط مبتنی بر توانایی جمع‌کردن و ضرب در عدد دو است. مثال زیر، فرایند ضرب مصری را برای ۴۶×۲۸ نشان می‌دهد.

۱. ابتدا دو ســتون از اعداد بســازید، در ستون سمت چپ از عدد ۱ شــروع کنید و در ستون سمت راست، یکی از عامل‌های ضرب (معمولاً بزرگ‌ترین عامل) را بنویسید.

۲. فراینــد تجزیه عامل دوم ضــرب را به توان‌هایی از ۲ شــروع کنید، به‌طوری که عددهای دو ستون را دو برابر کنید تا زمانی که بزرگ‌ترین توان ۲ در ستون سمت چپ، کوچک‌تر یا مساوی عامل دوم ضرب شود.

٤٦	١
٩٢	٢
١٨٤	٤
٣٦٨	٨
٧٣٦	١٦

یکی دیگر از روش‌هایی که برای انجام عملیات ضرب موجود است، نوشتن عددها روی نوارهای کاغذی به‌طوری است که ترتیب رقم‌های یکی از عامل‌های ضرب را تغییر دهیم و بعد، یک سری ضرب‌های یک‌رقمی انجام دهیم. این الگوریتم، می‌تواند برای کسانی که به استفاده از ابزار ملموس برای فهمیدن ریاضی علاقه دارند، جذاب باشد

عددهای ستون سمت چپ، توان‌های عدد ۲ را نشان می‌دهند. در حالی که عددهای ستون سمت راست، ۴۶ × توان‌های عدد ۲ را در ستون سمت چپ نشان می‌دهند. بزرگ‌ترین توان۲ ≤ ۲۸ برابر است با ۱۶.

۳. عامل دوم ضرب را به توان‌هایی از ۲ تجزیه کنید.

۱۶ بزرگ‌ترین توان ۲ است که کوچک‌تر یا مساوی ۲۸ است. ۱۲=۱۶-۲۸

۱۲، بزرگ‌ترین توان ۲ است که کوچک‌تر یا مساوی ۸ است. ۴=۸-۱۲

۴، بزرگ‌ترین توان ۲ است که کوچک‌تر یا مساوی ۴ است.

در نتیجه، ۲۸ حاصل جمع توان‌های ۲، یعنی ۴+۸+۱۶ است.

۴. اعدادی از ستون سمت راست را که توان ۲ نظیرشان در ستون سمت چپ، در مرحله ۳ به دست آمده، با هم جمع کنید. ۱۲۸۸=۷۳۶+۳۶۸+۱۸۴

پس، ۱۲۸۸=۲۸×۴۶ .

٤٦	١	
٩٢	٢	
١٨٤	٤	•
٣٦٨	٨	•
٧٣٦	١٦	•
١٢٨٨	٢٨	

این مهم است که بدانیم چرا این روش نتیجه می‌دهد. این الگوریتم، بر مبنای خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و توانایی دوباره نوشتن حاصل‌ضرب، بر اساس توان‌هایی از ۲ است. چون اعدادِ ستون سمت چپ، نشان‌دهندهٔ توان‌های ۲ هستند، می‌توان جدول را به‌صورت زیر، جرح و تعدیل نمود:

٤٦	$2^0\times$ ٤٦	١ = 2^0	
٩٢	$2^1\times$ ٤٦	٢ = 2^1	
١٨٤	$2^2\times$ ٤٦	٤ = 2^2	•
٣٦٨	$2^3\times$ ٤٦	٨ = 2^3	•
٧٣٦	$2^4\times$ ٤٦	١٦ = 2^4	•
١٢٨٨		٢٨	

مسئله را بر اساس توان‌هایی از ۲، بازنویسی کنید:

؟؟؟؟؟

$$28\times46=(4+8+16)\times46$$
$$=(4\times46)+(8\times46)+(16\times46)$$
$$=(2^2\times46)+(2^3\times46)+(2^4\times46)$$
$$=184+368+736=1288$$

با وجودی که روش ضرب مصری، شامل مراحل بیشتری نسبت به الگوریتم ضرب‌های متوالی است، برتری کلیدی آن برای استفاده‌کنندگان این است که تنها دانستن حاصل ضرب یک عدد در ۲ کافی است. از این گذشته، این روش می‌تواند به‌عنوان داربستی برای دانش‌آموزانی عمل کند که هنوز، تسلط کافی در دانستن و به‌کارگیری اصول پایه‌ای ندارند. هم‌چنین این الگوریتم، می‌تواند به گونه‌ای در کلاس درس معرفی شود که دانش‌آموزان را به بحث در مورد مفهوم ضرب، فرایند و چرایی اجرای آن هدایت کند. برای مثال، دانش‌آموزان می‌توانند این روش ضرب و روش ضرب‌های متوالی سنتی را با هم مقایسه کنند و چگونگی رسیدن به پاسخ درست را در هر دو روش، توضیح دهند. معرفی الگوریتم‌های گوناگون ضرب به دانش‌آموزان، باعث بالا بردن درک مفهومی آنان می‌شود و همان‌طور که پژوهش‌گر برجسته آموزش ریاضی لی‌پینگ ما[۲۲] (۱۹۹۹، ص ۱۱۲) بیان کرده، «وقتی که یک مسئله با روش‌های چندگانه حل می‌شود، می‌توان از آن طریق، چندین بخش از دانش ریاضی را به هم گره زد.»

معرفی الگوریتم‌های گوناگون ضرب به دانش‌آموزان، باعث بالا بردن درک مفهومی آنان می‌شود و همان‌طور که پژوهش‌گر برجسته آموزش ریاضی لی‌پینگ ما بیان کرده، «وقتی که یک مسئله با روش‌های چندگانه حل می‌شود، می‌توان از آن طریق، چندین بخش از دانش ریاضی را به هم گره زد.»

روش «ضرب دهقان روسی»[۲۳]

این روش، نوعی از الگوریتم ضرب مصری است که به دهقانان نزدیک به روسیه مرتبط می‌شود و هنوز در برخی از مناطق، از آن استفاده می‌شود (بوگومولنی[۲۴]، ۲۰۱۱). این روش، شامل فرایند نصف کردن و دوبرابر کردن است، که یکی از عامل‌های ضرب را بر اساس توان‌هایی از ۲ کاهش می‌دهد و از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع، برای به دست آوردن حاصل‌ضرب استفاده می‌کند. مانند روش مصری، فرایند ضرب با مرتب کردن اعداد در دو ستون شروع می‌شود. در مثال زیر، ضرب ۲۸×۴۶ مبتنی بر فرایند «ضرب دهقان روسی»، نشان داده شده است:

۱. در زیرِ هر یک از عامل‌های ضرب، یک ستون در نظر بگیرید.

۲. به‌طور مکرر، عدد ستون سمت چپ را آن‌قدر نصف کنید و باقیمانده‌های تقسیم را حذف کنید تا به عدد ۱ برسید.

۳. به‌طور مکرر، عدد ستون سمت راست را در دو ضرب کنید.

۴. سطرهایی را که در ستون سمت چپ عدد زوج دارند، حذف کنید.

~~۲۸~~	~~۴۶~~
۵۶	۲۳
۱۱۲	۱۱
۲۲۴	۵
~~۴۴۸~~	~~۲~~
۸۹۶	۱
۱۲۸۸	

۵. عددهای حذف نشده در ستون سمت راست را با هم جمع کنید تا حاصل‌ضرب به دست آید.

۵۶+۱۱۲+۲۲۴+۸۹۶=۱۲۸۸

بنابراین، ۱۲۸۸=۲۸×۴۶.

دلایل توجیه این الگوریتم، تقریباً مانند روش مصری اســت، اما بگذارید از یک دیدگاه کمی متفاوت به آن نگاه کنیم. در واقع، اینکه هر دو رویه، وابســته به ضرب در ۲ یا تقسیم بر ۲ هستند، نشان می‌دهد که هر دو روش، مبتنی بر مبنای دو[25] است. ابتدا نمایش عدد ۴۶ را در مبنای ۲، با استفاده از مراحل زیر، به دست آورید:

۱. فهرســـتی از توان‌های ۲ را در جدولی از راســـت به چپ تهیه کنید که با 2^0 شـــروع شود و توان‌ها به ترتیب، یکی یکی افزایش یابند.

۲. بزرگ‌ترین توانی از ۲ را که برای عدد ۴۶ مناسـب است، پیدا کنید، چون ۳۲ برای عدد ۴۶ مناسب است، در انتهای سمت چپ جدول و در قسمت نمایش در مبنای دو، عدد ۱ را بنویسید. ۳۲ را از ۴۶ کم کنید که ۱۴ می‌شود.

۳. بزرگ‌ترین توانی از ۲ را که برای عدد ۱۴ مناسـب اســت، پیدا کنید. چون عدد ۱۶ برای ۱۴ مناسب نیست، برای دومین رقم در مبنای دو، عدد صفر را بنویسید.

۴. عدد ۸ برای ۱۴ مناسب است بنابراین برای سومین رقم در مبنای دو، عدد یک را بنویسید. عدد هشت را از ۱۴ کم کنید که ۶ می‌شود.

۵. بزرگ‌تریـــن توانی از ۲ را که برای عدد ۶ مناســـب اســـت، پیدا کنید، چون ۴ برای عدد ۶ مناسب است، برای چهارمین رقم در مبنای دو، عدد ۱ را بنویسید. عدد ۴ را از ۶ کم کنید که ۲ می‌شود.

۶. بزرگ‌تریـــن توانی از ۲ را که برای عدد دو مناسـب است، پیدا کنید، چون ۲ (توانی از دو) برای عدد ۲ (یک عدد اعشاری) مناسب است، برای رقم بعدی در مبنای دو، عدد ۱ را بنویسید. عدد ۲ را از دو کم کنید تا باقی‌مانده صفر شود.

۷. چـــون صفر، هیچ توانـــی از ۲ نیســـت، برای رقم باقی‌مانده در مبنای ۲ ، عدد صفر را قرار دهید.

ســـپس دو ستون دیگر از اعداد، به جدول اصلی اضافه کنید که یکی توان‌های عدد ۲ و دیگری رقم‌های عدد ۴۶ را در مبنای دو ولی به‌صورت برعکس، نشان دهد.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	توان‌های دو
۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	نمایش در مبنای ۱۰
۰	۱	۱	۱	۰	۱	نمایش در مبنای دو

~~۲۸~~	~~۴۶~~	۰×۱	۰
۵۶	۲۳	۱×۲	۱
۱۱۲	۱۱	۱×۴	۲
۲۲۴	۵	۱×۸	۳
~~۴۴۸~~	~~۲~~	۱×۱۶	۴
۸۹۶	۱	۱×۳۲	۵
۱۲۸۸			

با اضافه شدن دو ستون، به وضوح می‌توان ارتباط بین این الگوریتم و نمایش اعداد در مبنای دو را دید:

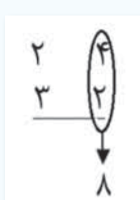
$$46=(101110)_2=(1\times2^5)+(0\times2^4)+(1\times2^3)+(1\times2^2)+(1\times2^1)+(0\times2^0)=32+8+4+2$$

با توجه به اینکه رقم‌های نمایش داده شـــده در مبنای دو، باقیمانده تقســـیم را بر توان‌های ۲ نشان می‌دهند، ۱ با اعداد فرد در ســـتون عـــدد ۴۶ و صفر با اعداد زوج متناظر است. بنابراین، تنها ردیف‌هایی با عددهای فرد، در به دست آوردن حاصل‌ضرب، نقش دارند.

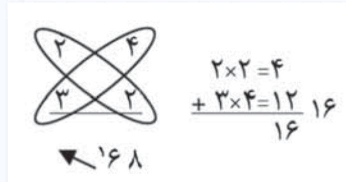
ضرب هندی[26]

ریاضیات هندی، ریشه در هند باستان دارد که در متون کهن هنـــدی، برای اولین بار در حدود ۲۰۰۰ ســـال قبل از میلاد، به زبان سانســـکریت نوشته شده است. رهبر روحانی و ریاضی‌دان هندی، سِری بهاراتی کرشنا تیرتاجی[27]، ۱۶ اصل بنیادی را که ســـوترا[28] نامیده می‌شوند، از این متون کهن به دســـت آورده است. سوترا دارای حدود ۱۳ زیر مجموعه است که مبنای دستگاه شمار ریاضیات هندی را تشکیل می‌دهند (ناتاراج و توماس[29]، ۲۰۰۶). ضرب هندی، یک الگوی ساده و کارآمد برای محاسبات ذهنی است. به‌عنوان مثال، برای ضرب ۳۲×۴۲، از سوتراهای عمودی و ضربدری[30]، استفاده شده است:

۱. بـــرای به دســـت آوردن رقم یـــکان حاصل‌ضرب، رقم‌های سمت راست را به‌صورت عمودی ضرب کنید.

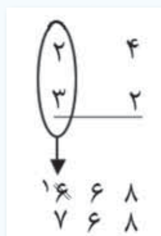


۲. به‌صورت ضربدری عددهـــا را در هم ضرب کنید و حاصل را جمع کنید:



ایـــن عدد، رقم دهگان حاصل‌ضرب را نشـــان می‌دهد (توجه داشته باشید که عدد ۱، باید به مکان صدگان انتقال پیدا کند.)

۳. رقم‌های ســـمت چپ را به‌صـــورت عمودی ضرب کنید، و حاصل را با عددهای انتقال یافته جمع کنید تا رقم صدگان حاصل‌ضرب، به دست آید.



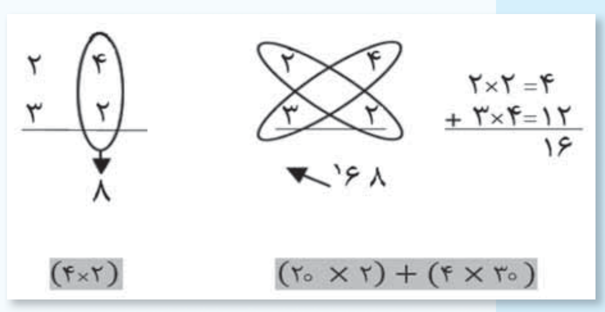
بدین ترتیب، ۷۶۸=۳۲×۲۴.

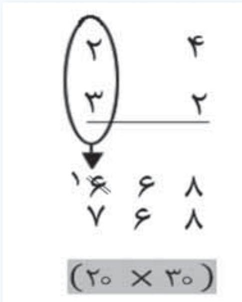
این الگوریتم، می‌تواند برای ضرب‌های ذهنی در کلاس درس معرفی شـــود. حل مســـائلی که نیاز به انجام مراحل ضرب دارد، ممکن اســـت برای دانش‌آموزان خسته‌کننده باشد و دانش‌آموزان به سادگی دچار اشتباه می‌شوند.

دانش‌آموزان دوره اول و دوم دبیرســـتان از این روش ســـاده و میان‌بر، برای یافتن حاصلضرب استفاده می‌کنند و آن‌ها ممکن اســـت توانایی محاسبه ذهنی حاصل‌ضرب را کســـب کنند. اجازه دهید نگاه عمیق‌تری به شـــیوه کار کردن این روش داشـــته باشیم. ابتدا با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب مسئله قبل را دوباره می‌نویسیم:

۲۴×۳۲=(۲۰+۴)(۳۰×۲)
=(۲۰×۳۰)+(۲۰×۲)+(۴×۳۰)+(۴×۲)
=۶۰۰+۴۰+۱۲۰+۸=۶۰۰+۱۶۰+۸
=۷۰۰+۶۰+۸=۷۶۸

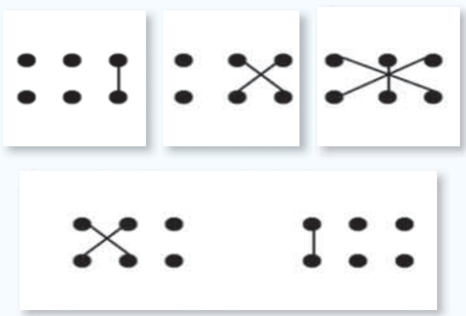
توجه داشته باشـــید که قسمت‌های برجسته شده در مسئله با الگوهای عمودی و ضربدری در ارتباط هستند.



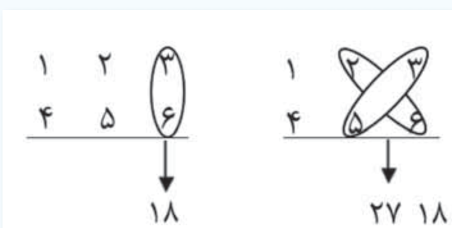


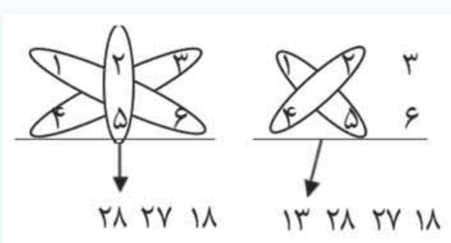
این الگوریتم بر مبنای خاصیـــت توزیع‌پذیری ضرب می‌باشد.

در ضرب اعـــداد بزرگ‌تر، به همان الگـــوی قبلی، دو مجموعـــه ضرب ضربـــدری اضافه می‌شـــود، از الگوی زیر استفاده کنید:

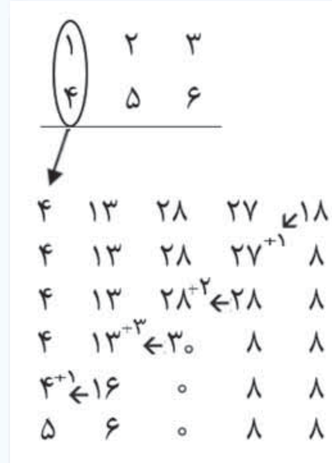


برای مثال در ضرب ۴۵۶×۱۲۳، ضرب و جمع نمایش داده شده اســـت، در مرحله آخر اعداد بزرگ‌تر از ۹، دوباره دسته‌بندی شده‌اند.





بنابراین، ۵۶۰۸۸=۴۵۶×۱۲۳.



نتیجه‌گیری

ضرب یک مهارت پایه ریاضی است، و درک فرایند و بیشتر کاربردهای آن اصل مهمی برای موفقیت آینده دانش‌آموزان امروزی است. با توجه به رشد بالای آموزش، انتظار می‌رود همه دانش‌آموزان راه و روش‌های یکسان برای آموزش را یاد بگیرند. آموزشگران باید به‌طور گسترده آماده‌گی پاسخ‌گویی به نیازهای متنوع و منحصربه‌فرد دانش‌آموزان، در کلاس درس را داشته باشند. پژوهش‌ها نشان داده زمانی که روش‌ها و راهبردهای گوناگون حل مسئله به کودکان معرفی می‌شود، توانایی‌های حل مسئله در آن‌ها مبتکرانه و منعطف‌تر می‌شود (NCTM، ۲۰۰۰). وقتی دانش‌آموزان درباره تاریخچهٔ گسترش ایده‌های ریاضی اطلاعات به دست می‌آورند به احتمال زیاد آن‌ها ریاضی را به‌عنوان نظم روبه رشدی در نظر خواهند گرفت، در حالی که دیگران از آن به‌عنوان روش مؤثر در محاسبه مسائل پیچیده استفاده می‌کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. West, Lynn. (July 2011). University of Bellevue, Nebraska. Unpublished MA thesis.
2. Princeton University Wordnet
3. long Multiplication
4. Multiplicand
5. Multiplier
6. Finger Multiplication
7. Rouse Ball
8. Area Model of Multiplication
9. Distributive Property
10. Commutative Property
11. Visual Learners
12. Lattice Multiplication
13. Sieve Multiplication
14. Jalousia (Gelosia)
15. Carroll & Porter
16. Regrouping
17. Line Multiplication
18. Circle/Radius Multiplication
19. Paper Strip Multiplication
20. Egyptian Multiplication
21. O'Connor & Robertson
22. Laping Ma
23. Russian Peasant Multiplication
24. Bogomolny
25. Binary System
26. Vedic Multiplication
27. Sri Bharati Krsna Tirthaji
28. Sutra
29. Nataraj & Thomas
30. Vertically and Crosswise Sutra

منابع

1. Bogomolny, A. (2011). Peasant multiplication. Retrieved June 10, 2011, from www.cut-the-knot.org
2. Carroll, W. M., & Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. In The National Council of Teachers of Mathematics, The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 106-114). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
3. Gray, E. D. (2001). Cajun multiplication: A history, description, and algebraic verification of a peasant algorithm. Louisiana Association of Teachers of Mathematics Journal, 1(1), article 6. Retrieved fromhttp://www.lamath.org/journal/Vol1/cajunmultiplicationfinal.pdf
4. Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
5. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
6. Nugent, P. M. (2007, September). Lattice multiplication in a preservice classroom. Mathematics Teaching in the Middle School, 13(2), 110-113.
7. O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2011). An overview of the history of mathematics. In The MacTutor history of mathematics archive. Retrieved June 9, 2011, from School of Mathematics and Statistics, University of St Andrew Scotland website:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk
8. Princeton University "About WordNet" (2010). Retrieved June 9, 2011, from http://wordnet.princeton.edu
9. Rouse Ball, W. W. (1960). A short account of the history of mathematics (4th ed.). Mineola, NY: Dover Publications, Inc. (Original work published 1908)
10. Rubenstein, R. N. (1998). Historical algorithm. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 99-105). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
11. Saraswathy Nataraj, M., & Thomas, M. O. (2006). Expansion of binomials and factorization of quadratic expressions: Exploring a Vedic method. Australian Senior Mathematics Journal, 20(2), 8-17.
12. Sgroi, L. (1998). An explanation of the Russian peasant method of multiplication. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 81-85). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics,

پنجاه و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی؛ هنگ‌کنگ، ۲۰۱۶

علی خزلی
دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه صنعتی شریف و ناظر تیم المپیاد ایران در سال ۱۳۹۵

چکیده

امسال (۲۰۱۶) نیز به روال گذشته‌ای که از سال ۱۳۶۳ شروع شده، تیم المپیاد ریاضی ایران در پنجاه و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در هنگ‌کنگ، شرکت نمود و رتبهٔ بیست و چهارم را کسب کرد. در کاهش چشمگیر رتبهٔ ایران، علاوه بر نوسانات طبیعی، علت‌هایی می‌توانند دخیل باشند که اهمیت خود آن‌ها از نتیجهٔ تیمی بیشتر است، از جمله کاهش انگیزهٔ دانش‌آموزان در المپیاد و کاهش علاقه به ریاضیات. این موضوع، نیازمند مطالعات جدی است و اگر به آن توجه نشود، ممکن است اثر مفید المپیاد برای ریاضی مدرسه‌ای در ایران از بین برود و شرایط پیش از المپیاد مجدداً تکرار شود.

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، پنجاه و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در هنگ‌کنگ، رتبهٔ ایران در المپیاد ۲۰۱۶

تیر ماه امسال، شاهد برگزاری پنجاه و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی[۱] بودیم. این مسابقه را می‌توان معتبرترین و با قدمت‌ترین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در سطح جهانی دانست که تیر ماه هر سال، در یکی از کشورهای شرکت‌کننده برگزار می‌شود. المپیادهای ریاضی، توانایی قابل توجهی در شناسایی استعدادها دارند و اکثر مدال‌آورندگان آن، در آیندهٔ تحصیلی و شغلی‌شان نیز، درخشان بوده‌اند. برای مثال، تعداد قابل توجهی از ریاضی‌دانان برجستهٔ کنونی، سابقهٔ شرکت در المپیاد ریاضی را با رتبهٔ عالی داشته‌اند. هم‌چنین مدال و رتبهٔ خوب در المپیاد ریاضی، فارغ از جوایز مالی احتمالی، می‌تواند تأثیر شایانی در آیندهٔ علمی شرکت‌کنندگان آن داشته باشد.

در المپیاد بین‌المللی ریاضی، هر کشور با یک تیم ۶ نفری از دانش‌آموزان برگزیده‌اش در آن شرکت می‌کند و یک سرپرست، یک سرپرست دوم و در صورت تمایل چند ناظر، تیم را همراهی می‌کنند. سرپرست و ناظر A در جلسات ژوری[۲] شرکت می‌کنند و در قرنطینه می‌مانند و سرپرست دوم و سایر ناظران همراه دانش‌آموزان هستند. اعزام ناظران علاوه بر کمک به سرپرستان در مسائل علمی و اجرایی، باعث کسب تجربهٔ نیروهای جوان نیز می‌شود.

المپیاد ریاضی در دو روز برگزار می‌شود و شرکت‌کنندگان در هر روز، باید سه سؤال را در چهار و نیم ساعت حل کنند. سطح سؤالات نسبت به معلومات دبیرستانی، بالاتر است و دانش‌آموزانی که موفق به حل حتی یک سؤال در آن می‌شوند، اغلب کسانی هستند که علاوه بر توانایی و استعداد ویژه ریاضی، برای مطالعه و تمرین در موضوعات المپیاد وقت زیادی گذاشته‌اند. انتخاب ترتیب سؤال‌ها در هر روز،

معمولاً براســـاس درجهٔ سختی، یعنی از آسان‌تر به سخت‌تر است. ســـؤال‌های المپیاد ریاضی در چهار شاخهٔ ترکیبیات، جبر، نظریهٔ اعداد و هندســـه رده‌بندی می‌شوند و همیشه از هر شاخه، حداقل یک سؤال در المپیاد وجود دارد. اما ترکیب نهایی ســـؤال‌ها، بستگی به رأی سرپرستان تیم‌ها در فرآیند رأی‌گیری جلســـهٔ ژوری و ترکیب سؤال‌های پیشنهادی در آن سال دارد.

نحوهٔ انتخاب سؤال‌ها در المپیاد بین‌المللی به این صورت است که چند ماه پیش از مسابقه، هر کشور حداکثر ۶ سؤال پیشـــنهاد می‌دهد. سپس کمیته‌ای از کشور میزبان، از بین سؤال‌های پیشنهادی، فهرستی شـــامل ۳۰ سؤال[۳] انتخاب می‌کند که در چهار شـــاخهٔ مذکور، به ترتیب ســـادگی به سختی، دسته‌بندی می‌شوند. در نهایت در جلسات ژوری که پیش از مسابقه، با حضور سرپرستان و ناظرهای A همهٔ تیم‌ها که قرنطینه شده‌اند (از ارتباط با دیگران منع شده‌اند) تشکیل می‌شوند، با ساز و کار مشخصی بحث و رأی‌گیری می‌شود تا انتخاب ۶ سؤال برای مسابقه، نهایی شود. تصحیح برگه‌ها نیز بر عهدهٔ کشـــور میزبان است که برای تأمین نیروهای علمی مورد نیاز، اعضای جامعهٔ ریاضی آن کشور را به خوبی به کار می‌گیرد.

پنجـــاه و هفتمین دوره از المپیـــاد بین‌المللی ریاضی، در کشـــور هنگ‌کنگ و به میزبانی دانشـــگاه علم و صنعت هنگ‌کنگ برگزار شد. در هر سال، تمام هزینه‌های برگزاری و اسکان، به استثنای ناظرهای تیم‌ها، بر عهدهٔ کشور میزبان اســـت. در هر دوره، میزبان‌های سال‌های آینده با درخواست کشـــورها و رأی سرپرستان تیم‌ها در جلسهٔ ژوری، مشخص می‌شـــوند. در این دوره، ۱۰۹ کشور شرکت کرده بودند که بیشترین تعداد در سابقهٔ المپیاد ریاضی بوده است و از بین آن‌ها، ۵ کشور بودند که برای اولین‌بار در این مسابقه شرکت می‌کردند.

نتایج پنجاه و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

در المپیاد ریاضی، هر سؤال ۷ نمره دارد و جمع نمرات هر فرد و هر تیم، حداکثر ۴۲ و ۲۵۲ خواهد بود. بر اســـاس جمع نمرات، مدال‌ها طوری تعیین می‌شـــود که تقریباً یک دوازدهم شرکت‌کنندگان مدال طلا، یک ششم مدال نقره و یک چهارم مدال برنز می‌گیرند. علاوه بر آن، کسانی که مدال نگرفته‌اند اما موفق شده‌اند در یکی از شش سؤال المپیاد نمرهٔ کامل کســـب کنند، دیپلم افتخار دریافت می‌کنند. در دوره پنجاه‌وهفتم، نحوهٔ اعطای مدال‌ها در جدول (۱) آمده است. آمارهای این بخش از [۱] استخراج شده است.

اعضـــای تیم ایران در این دوره به ترتیب الفبایی، آقایان محمدرضا امینیان، فربد اکباتانی، امین رخشا، امیرمجتبی صبور، مهبد مجید و علیرضا هدیه‌لو بودند. آقایان امید حاتمی (سرپرست)، محسن جمالی (سرپرست دوم)، مرتضی ثقفیان (ناظر A)، علی خزلی (ناظر B) و ســـیامک عزتی (ناظر C) نیـــز تیم را همراهی می‌کردند. نتایج اعضای تیم ایران را در جدول (۲) ببینید:

جمهوری اسلامی ایران با کسب مجموع ۱۲۵ نمره، مقام ۲۴ام را به دســـت آورد. ده تیم برتر المپیاد ریاضی در سال ۲۰۱۶ و مجموع نمرات آن‌ها به ترتیب، عبارت‌اند از:

۱. آمریکا (۲۱۴)
۲. کرهٔ جنوبی (۲۰۷)
۳. چین (۲۰۴)

شـــکل ۱: تیم جمهوری اسلامی ایران در المپیاد بین‌المللی ریاضی به همراه سرپرستان. ایستاده از راست: محســـن جمالی (سرپرســـت دوم)، مرتضی ثقفیان (ناظر A)، امیر مجتبی صبـــور، علیرضا هدیه‌لو، فربد اکباتانی، ســـیامک عزتی (ناظر C) و امید حاتمی (سرپرست). نشسته از راست: محمدرضا امینیان، امین رخشا، مهبد مجید و علی خزلی (ناظر B).

جدول (۱): توزیع مدال‌ها در پنجاه و هفتمین دورهٔ المپیاد ریاضی

مدال	کم‌ترین نمرهٔ لازم	تعداد
طلا	۲۹	۴۴
نقره	۲۲	۱۰۱
برنز	۱۶	۱۳۵
دیپلم افتخار	کسب نمرهٔ کامل (۷) در حداقل یک سؤال	۱۶۲
بدون جایزه		۱۶۰

جدول (۲): نتایج اعضای تیم ایران در پنجاه و هفتمین المپیاد ریاضی

شرکت‌کننده	نمره	مدال
محمدرضا امینیان	۲۴	نقره
فربد اکباتانی	۱۹	برنز
امین رخشا	۲۲	نقره
امیرمجتبی صبور	۲۲	نقره
مهبد مجید	۱۷	برنز
علیرضا هدیه‌لو	۲۱	برنز

۴. سنگاپور (۱۹۶)
۵. تایوان (۱۷۵)
۶. کرهٔ شمالی (۱۶۸)
۷. روسیه (۱۶۵)
۸. انگلستان (۱۶۵)
۹. هنگ‌کنگ (۱۶۱)
۱۰. ژاپن (۱۵۶)

هم‌چنین در این سال، ۶ نفر نمرهٔ کامل (۴۲) را به دست آوردنـــد. نتایج این دوره به تفکیک ســـؤال‌ها، در جدول (۳) نشان داده شده است.

جدول (۳): نتایج پنجاه و هفتمین دوره المپیاد ریاضی به تفکیک سؤال‌ها

سؤال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
شاخه	هندسه	ترکیبیات	نظریهٔ اعداد (با ایده‌های هندسی)	نظریهٔ اعداد	جبر	ترکیبیات	
کشور طراح	بلژیک	استرالیا	روسیه	لوکزامبورگ	روسیه	چک	
رتبهٔ ایران	۱	۳۲	۱۰	۱	۲۰	۳۹	۲۴
نمرهٔ ایران	۴۲	۱۶	۳	۴۲	۱۸	۴	۱۲۵
میانگین نمرات همهٔ تیم‌ها	۲۹/۱۲	۱۱/۲۳	۱/۳۹	۲۶/۲۰	۹/۲۷	۴/۴۵	۸۱/۶۵
میانگین نمرات ده تیم برتر	۴۰/۴	۳۵/۵	۱۰/۶	۴۱/۱	۳۳/۸	۱۹/۷	۱۸۱/۱

تحلیل نتایج تیم ایران

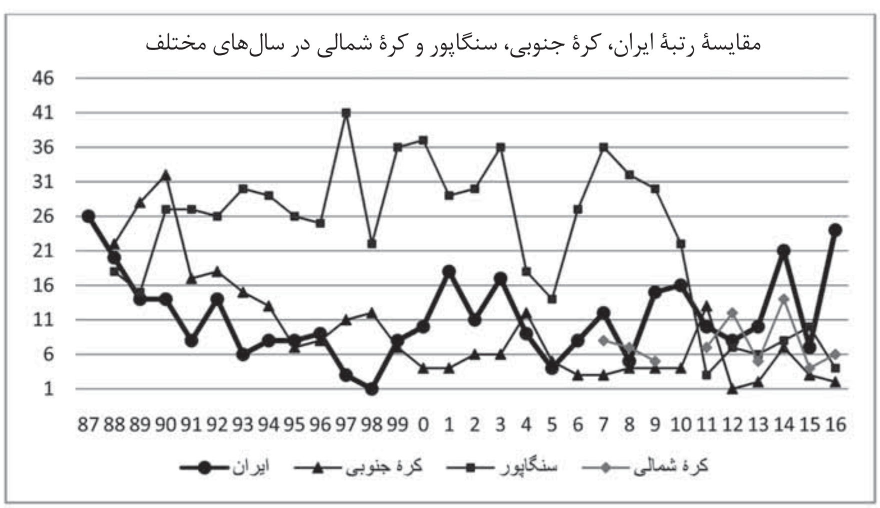
در ســـال ۱۳۹۵ (دوره پنجاه و هفتم المپیاد ریاضی در ســـال ۲۰۱۶)، رتبهٔ تیم جمهوری اسلامی ایران نسبت به سال‌های گذشته، ضعیف‌تر بود و علاوه بر این، میانگین رتبهٔ ایران در چند ســـال گذشته هم ضعیف‌تر از دوره‌های میانیِ شـــرکت ایران در المپیادهای بین‌المللی ریاضی بوده است. شناسایی عوامل مختلف اثرگذار بر این موضوع، می‌تواند به کاهش آسیب‌ها و افزایش نقاط قوت کمک کند. در ادامه، به برخی از آن‌ها به اختصار، اشاره می‌شود. البته این‌ها عواملی است که به تجربه شناسایی شده و هنوز در ایران، پژوهشی در این مورد، انجام نشده است.

ایران از بیست و هفتمین دورهٔ برگزاری المپیاد بین‌المللی ریاضی در ســـال ۱۹۸۷، به‌صورت رسمی و پیوسته، در آن شـــرکت کرده است. رتبهٔ ایران در پنج سال نخست، افزایش چشـــمگیری داشته اســـت، اما پس از آن تا کنون، نوسانات زیادی با میانگین حدود رتبهٔ دهم داشته است. ایران در سال ۱۹۹۸، رتبهٔ اول را کسب نمود و تا به حال، رتبه‌های سوم در سال ۱۹۹۷، چهارم در سال ۲۰۰۵ و پنجم در سال ۲۰۰۸ را به دست آورده است.

یکی از عوامل پایین آمدن رتبه ایران این است که به نظر می‌رسد میزان شرکت و آمادگی سایر تیم‌ها نسبت به اولین دورهٔ حضور ایران، بیشتر شده است. به عنوان مثال، همان‌طور که شـــکل ۲ نشان می‌دهد، از بین ۱۰ تیم برتر سال جاری، دو تیم کرهٔ جنوبی و ســـنگاپور در سال‌های اخیر، پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشـــته‌اند و از ایران پیشی گرفته‌اند و تیم کرهٔ شمالی نیز از سال ۲۰۰۷، وارد عرصهٔ مسابقات المپیاد بین‌المللی ریاضی شده است.

از جمله عوامل اثرگذار دیگر، نوع و موضوع ســـؤال‌ها در سال‌های مختلف است. با بررسی سابقهٔ کشور ما در المپیاد ریاضی، می‌توان دید که ایران در طراحی و حل ســـؤال‌های هندســـه، توانایی زیادی دارد. در صورتی که به‌عنوان مثال، دانش‌آمـــوزان ایرانی در مبحث ترکیبیـــات، معمولاً نمرات کم‌تری کســـب می‌کنند. این عدم تـــوازن چندان مطلوب نیســـت. با توجه به جدول (۳)، دیده می‌شـــود که ترکیب سؤال‌ها و درجهٔ سختی آن‌ها، در رتبه کسب شده توسط تیم ایران در ســـال ۲۰۱۶ (۱۳۹۵)، تأثیرگذار بوده است. به طور مشخص، ســـؤال‌های اول و سوم در زمینهٔ هندسه بودند که سؤال اول آسان بوده و اکثر تیم‌های قوی، نمرهٔ خوبی از آن کسب کردند. سؤال سوم نیز سؤالی زیبا و جالب توجه بود که ترکیبی از هندسه و نظریهٔ اعداد بود. بنابراین به دلیل این تلفیق، حل آن به خلاقیت ویژه‌ای نیاز داشت و تعداد بسیار کمی موفق به حل آن شدند. با اینکه جمع نمرات ایران در این سؤال ۳ بود، اما تنها ۹ تیم نمرهٔ بالاتری برای آن به دســـت آوردند. نمرات تیم ایران در سؤال‌های دوم و ششم با موضوع ترکیبیات، ضعیف بود، هرچند با توجه به نتایج، درجهٔ سختی سؤال ششم نسبت به سال‌های گذشته، چندان بالاتر نبود.

بـــه عنوان یک عامل مهم، ممکن اســـت واقعاً میزان توانایی تیم‌های ایران در سال‌های اخیر نسبت به گذشته کاهش یافته باشد. شاید به این علت که به‌طور متوســـط در سال‌های اخیر، انگیـــزهٔ دانش‌آموزان در مناطق مختلف



شکل ۲: مقایسهٔ رتبهٔ ایران با کرهٔ جنوبی، سنگاپور و کرهٔ شمالی از سال ۱۹۸۷ تا ۲۰۱۶

کشور، برای گام نهادن در مسیر المپیاد کاهش چشمگیری داشته است. هم‌چنین، وجود انگیزه‌های جانبی غیر از علاقه به ریاضی، خواه ناخواه بر کیفیت مطالعهٔ ریاضیات در دانش‌آموزان المپیادی، اثر گذاشته است. این موارد روی نتیجهٔ تیمی هم اثرگذار هستند، اما خودشان اهمیت بیشتری از رتبهٔ ایران در المپیاد بین‌المللی دارند. در ادامه در این‌باره بیشتر بحث می‌کنیم.

آسیب‌ها و مشکلات المپیاد در ایران

انگیزهٔ اصلی ایران برای شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی، از همان ابتدا تشویق دانش‌آموزان به یادگیری ریاضی بود. در آن زمان، فضای حاکم بر جامعه باعث شده بود که اکثر دانش‌آموزان، رشتهٔ علوم تجربی را برای تحصیل در دبیرستان انتخاب کنند. این وضعیت، برای آیندهٔ علمی کشور و به خصوص رشته‌های علوم پایه و مهندسی، بسیار نامطلوب بود[۴] [۲]. با توجه به اینکه در سؤال‌های المپیاد، خلاقیت در حل مسئله بر حفظ کردن درس‌ها غلبه داشت، این مسابقه به سرعت، منجر به انتخاب دانش‌آموزان علاقه‌مند و با استعداد در ریاضی، از سراسر کشور شد. به‌خصوص آنکه در سراسر کشور، مرحلهٔ اول المپیاد کشوری ریاضی به‌صورت تستی و مرحلهٔ دوم آن به‌صورت تشریحی برگزار می‌شود. اعتبار علمی که کسب مدال المپیاد برای اشخاص به ارمغان می‌آورد، در مسیر آیندهٔ تحصیلی آن‌ها نیز مؤثر و انگیزه‌بخش بوده است.

المپیاد ریاضی در سراسر کشور، ظرفیت بسیار بالایی در سنجش استعداد دانش‌آموزان متوسط و بالاتر داشته و از دید نویسنده، در جذب دانش‌آموزانی که علاقه و استعداد ویژه‌ای نسبت به ریاضی دارند، و تشویق آن‌ها به ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی، موفق بوده است. اما در سال‌های اخیر، مشکلاتی در این‌باره به‌وجود آمده است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

اعتبار علمی مدال المپیاد و جوایز مادی و معنوی آن باعث توجه بیشتر خانواده‌ها و برخی مراکز آموزشی به آموزش حرفه‌ای المپیاد شده است. با اینکه آموزش به خودی‌خود امری مثبت است و توانایی افراد را بالا می‌برد، اما این موضوع ناخواسته، یک مشکل جدی در سطح کشوری ایجاد کرده است که دانش‌آموزانی که به مراکز آموزشی قوی دسترسی ندارند، حتی اگر دارای استعداد ویژه در ریاضی باشند، کمتر می‌توانند در این رقابت موفق شوند و در نتیجه اعتمادبه‌نفس آن‌ها نیز کاهش یافته است. این مشکل در طول زمان، به تدریج تشدید شده است، تا جایی که اکنون منجر به کاهش انگیزه برای شروع مطالعهٔ مباحث المپیادی در سطح وسیعی از کشور شده است که با اهداف اصلی المپیاد ریاضی یعنی گسترش علاقه به ریاضی، در تقابل است و حل این معضل، توجه ویژهٔ نخبگان و مسئولان را برای انجام پژوهش برای یافتن راهکارهای جدید و حمایت از اجرای آن‌ها، می‌طلبد.

یکی از عوارض دیگرِ این عدم توازن در رقابت این است که به صورت خود به خودی، سهم خلاقیت را در موفقیت تیم المپیاد کشوری، کم‌رنگ می‌کند. این عارضه علاوه بر آثار منفی در توانایی شناختن استعدادهای برتر از طریق المپیاد، بر نتیجهٔ بین‌المللی تیم ایران نیز اثر گذاشته است. توجه کنید که در المپیاد ریاضی، به خصوص مرحلهٔ بین‌المللی آن، همواره سعی بر این است تا سؤال‌هایی انتخاب شوند که فقط با تکنیک‌های به خاطر سپرده شده، قابل حل نباشند و جنبه خلاقیت در آن‌ها، قوی باشد.

در نهایت، لازم است به این نکته اشاره کنیم که لازم است در مورد ابعاد فرهنگی و روان‌شناسی المپیاد، مطالعات بیشتری صورت گیرد. برای نمونه، مدال‌آورندگان المپیادی، ناگهان در کانون توجه و تحسین قرار می‌گیرند و این موضوع، ممکن است آگاهانه یا ناخودآگاه، حس خود برتربینی را در آنان تقویت نموده و باعث کاهش تلاش دانش‌آموزان و عدم استفاده از ظرفیت حداکثری‌شان شود. از این گذشته، لازم است که خطر افزایش توقع از دیگران و مسئولان در مدال‌آوران، حسادت دانش‌آموزان و دانشجویان نسبت به افرادی که موفق‌تر هستند، و زمینه بروز مشکلات دیگر، جدی گرفته شود. لازم به ذکر است که موفقیت در المپیاد، تنها یک نشانه است و به هیچ وجه افراد را بی‌نیاز از تلاش و مطالعه برای موفقیت و مفید بودنِ هرچه بیشتر نمی‌کند. تفاوت ماهوی حل مسئله با آموزش ریاضی و پژوهش علمی نیز نکته‌ای است که باید المپیادی‌ها به آن توجه کنند و خود را برای آن آماده کنند. هم‌چنین دانش‌آموزانی که قصد آماده شدن برای المپیاد دارند، مراقب باشند که وجود منابع و مسیرهای خاص ولی طولانی و زمان‌بر، برای المپیاد، مطالعهٔ شخصیِ متفرقه و از روی علاقه در مباحث مختلف ریاضی را در بین آن‌ها کم‌رنگ نکند که این اتفاق، امری نامطلوب است.

پی‌نوشت‌ها

1. International Mathematical Olympiad (IMO)

۲. جلسه‌های ژوری (Jury)، سلسله جلساتی با شرکت سرپرستان همهٔ تیم‌هاست که تصمیم‌های مهم المپیاد و انتخاب سؤال‌ها از بین سؤال‌های پیشنهادی، در آن انجام می‌شود. در تصمیم‌گیری‌های این جلسات، وزن رأی همهٔ کشورها با هم برابر است.

۳. معروف به Short List

۴. به نقل از مصاحبه با دکتر رجالی در
http://iran-imo.persianblog.ir/post/56/

منابع

۱. وبگاه رسمی المپیاد بین‌المللی ریاضی
(http://www.imo-official.org)

۲. وبگاه تیم ملی المپیاد ریاضی ایران
(http://iran-imo.persianblog.ir)

آیا جامعه به مدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی احتیاج دارد؟

سخنرانی پروفسور سومن‌کونگ، در اجلاس پنجاه‌وهفتمین المپیاد ریاضی در دانشگاه پلی‌تکنیک هنگ‌کنگ- ۱۱ جولای ۲۰۱۶

مترجم: **فاطمه حاج‌عزیزی**
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده

عنوان این سخنرانی که تحرک‌آمیز به نظر می‌رسد، به هیچ‌وجه قصد شرمنده کردن شرکت‌کنندگان و برگزارکنندگان المپیادهای بین‌المللی ریاضی را ندارد، بلکه آن را به منزلهٔ به اشتراک‌گذاری برخی افکار و اندیشه‌ها پیرامون المپیادها یا به‌طور کلی مسابقات ریاضی در نظر بگیرید که توسط معلمی که یک بار سرپرستی اولین تیم هنگ‌کنگ را برای شرکت در بیست‌ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی که در سال ۱۹۸۸ در کانبرا برگزار شد، به عهده داشته است. هم‌چنان که در هماهنگی‌های لازم برای اجرای سی‌وپنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی نیز که در سال ۱۹۹۴ در هنگ‌کنگ برگزار گردید، کمک نموده است. سخنران سعی دارد که به این موضوع در زمینه آموزشی و به‌طور گسترده‌تر در زمینه اجتماعی- فرهنگی‌اش، توجه نماید.

کلیدواژه‌ها: سومن‌کونگ، المپیادهای بین‌المللی ریاضی، پنجاه و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، هنگ‌کنگ

دربارهٔ سخنران

سومن کونگ[1]، مدرک کارشناسی خود را از دانشگاه هنگ‌کنگ و مدرک دکتری خویش را در رشته ریاضی، از دانشگاه کلمبیا دریافت کرد. او به انتشار برخی مقالات در زمینه ریاضی و علوم کامپیوتر، تعداد بیشتری پیرامون تاریخ ریاضی و آموزش ریاضی و کتاب‌های متعددی در زمینه عمومی‌سازی ریاضی پرداخته است. وی به‌طور خاص، علاقه‌مند به تلفیق تاریخ ریاضی با یاددهی و یادگیری ریاضی است و از اواسط دهه ۱۹۸۰، مشارکت فعالی در «انجمن بین‌المللی تاریخ و پداگوژی ریاضی[2]» داشته است. ایشان همچنین، بیشتر وقت خود را صرف ارائه دوره‌ای تحت عنوان «ریاضیات: میراثی فرهنگی در سنت مطالعات لیبرال» برای دانشجویان دانشکده‌های

مختلف دانشگاه هنگ‌کنگ کرده است.

آیا جامعه به مدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی نیاز دارد؟

آیا جامعه به مدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی نیاز دارد؟ پاسخ منفی است، جامعه «نیاز»ی به مدال‌آوران المپیادهـــای بین‌المللـــی ریاضی نـــدارد. جامعه حتی به ریاضی‌دانان نیز «نیاز» ندارد. آیا این بدان معنی اســـت که سخنرانی ۳۰ دقیقه‌ای من در اینجا به پایان خواهد رسید؟ در این صورت، باید همین‌جا توقف نموده و اعتراف کنم که در انتخاب حرفه‌ام در تمام این سال‌ها، اشتباه کرده‌ام. پس ادامه می‌دهم.

حتماً توجه داشـــته‌اید که من واژه «نیاز» را در گیومه قرار داده‌ام. جامعه به مـــدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی یـــا ریاضی‌دانان «نیاز» (داخـــل گیومه!) ندارد. اما جامعه به تعمیرکاران، مأموران جمع‌کننده زباله، رفتگران، برق‌کاران، لوله‌کش‌ها و نظایر آن، نیاز (بدون گیومه!) دارند. حالا شاید متوجه شدید که منظور من چیست. اجازه دهید به موضـــوع المپیادهای بین‌المللی ریاضی برگردیم. بعد از ۲۲ سال، المپیاد بین‌المللی ریاضی به هنگ‌کنگ بازگشته است و این کشور، میزبان سی‌وپنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در ســـال ۱۹۹۴ بود و دوست دارم به دو مدال‌آور در آن المپیاد اشـــاره کنم. یکی مریـــم میرزاخانی از ایران که اولین ریاضی‌دان زن بـــود که مدال فیلدز را در کنگره بین‌المللـــی ریاضی‌دانان در ســـال ۲۰۱۴ دریافت نمود و دیگری سوباش آجیت خات از هند بود که جایزه نوالینا در همان کنگره، به او اعطا گردید.

در ســـخنرانی‌ای که در سال ۲۰۱۲ با عنوان «خوبی، بدی و لذت (نه فشار) مســـابقات ریاضی» داشتم، به ارائه طرحـــی کلی از نـــکات مثبت و منفی مســـابقات ریاضی پرداختم که از شـــما اجازه می‌خواهم به‌طور خلاصه، آن‌ها را تکرار نمایم؛

نقاط قوت:

۱. پرورش بیان منطقی و صریح، سرسختی و ممارست و صداقت علمی.

۲. برانگیختن شور و اشتیاق و ایجاد علاقه و انگیزه.

نقاط ضعف:

۱. مسائل مسابقات بر ضد پژوهش هستند.

۲. تمرین بیش از حد؟

همچنین، این ســـؤال به ذهن می‌رســـد که آیا شور و شوق دانش‌آموزان برای ریاضی، واقعی است؟ آیا این علاقه می‌تواند پایدار بماند؟ اجازه دهید تا مورد ۱ را که «مسائل مســـابقات بر ضد پژوهش هستند»، از طریق سه مثال که در پیوست آمده است، توضیح دهم.

از این مثال‌ها چه چیزی دســـتگیرمان خواهد شـــد؟ آن‌ها باعث می‌شـــوند که فکر کنم که بـــرای انجام دادن ریاضی، از دو رویکرد می‌توان اســـتفاده نمود. با قیاســـی از وضعیـــت نظامی، یکـــی از رویکردها را می‌توان شـــبیه جنگ‌های موضعی و دیگری را مشـــابه جنگ‌های چریکی در نظر گرفت. در رویکرد اول که در کلاس‌های درس اکثر مدارس و دانشـــگاه‌ها در جریان است، به بیان موضوع در قالبی پرداخته می‌شـــود که به صورت نظام‌وار سازماندهی گردیده، به‌طور دقیقی طراحی شـــده و با تمرین و فعالیت همراه اســـت. رویکـــرد دیگر که عمدتـــاً در آموزش برای مسابقات ریاضی به چشم می‌خورد، به این صورت است که دانش‌آموزان را با انواع مختلفی از مســـائل روبه‌رو می‌کنند و بـــه آن‌ها آموزش می‌دهند که بیشـــتر، به دنبال نقاطی باشند که از آن موضع، بتوانند حمله کنند و بدین وسیله، دسته‌ای از ترفندها و استراتژی‌ها، جمع‌آوری می‌شوند.

هر کدام از این رویکردها، شایســـتگی جداگانه خود را داراســـت، مکمل و متمم یکدیگرنـــد و دانش پایه و قاعده منظم و مورد نیاز خود را می‌طلبند. درست همان‌طور که در یـــک جنگ موضعی، انعطاف‌پذیـــری و خودانگیختگی لازم است، جنگ‌های چریکی، آماده‌سازی دقیق مقدماتی وکارهای زمینه‌ای خود را می‌طلبد. در یاددهی و یادگیری ریاضی نیز نباید فقط ترفندها و استراتژی‌ها را برای دادن پاســـخ به دسته خاصی از مسائل آموزش داد، یا تنها برای توضیح دادن راجع به نظریه‌های عمومی و کارکردن روی مســـائلی که با ابزارهای معمول قابل پاســـخ‌دهی هستند، زمان را صـــرف نمود. ما باید اجـــازه دهیم در کلاس‌های درس، هر دو رویکرد مکمل و متمم باشند. در زندگی‌نامه قهرمان ملی و مشـــهور چینی از سلسله سونگ جنوبی، یو فی این نوشته را پیدا کرده‌اند:

راه‌انـــدازی آرایش جنگی، امری عـــادی و هنر جنگ اســـت. مانورهای جنگی درخصوص آرایش نظامی، به طرز ماهرانه‌ای فقط با ذهن انجام می‌پذیرد.

گاهی اوقات، ممکن است رویکرد اول، در مقابل هیجانی که در رویکرد دوم و هنگام حل مســـائل به دســـت می‌آید، کاملاً ساده و کســـل‌کننده به نظر بیاید. با این وجود، نباید از اهمیت این رویکرد به دلیل ظاهر مطلوب و شـــیرین آن، غفلت کنیم. ایـــن رویکرد می‌تواند موقعیت‌های کلی‌تری را پوشش دهد و بســـیار قدرتمندتر از یک روش پژوهش یک کاره اســـت که با وجودی که جذاب اســـت، ولی فقط یک مورد خاص را پاسخ می‌دهد. البته باید توجه داشت که یک روش تک‌کاره هوشمندانه نیز، قابل توسعه به یک روش کلی قدرتمند اســـت. یک نمونه کلاســـیک در این مورد، ابداع و توسعه حساب دیفرانسیل و انتگرال در طول تاریخ است. در زمان‌های باستان، فقط استادان ریاضی قادر بودند تا مساحت

جامعه «نیاز»ی به مدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی ندارد. جامعه حتی به ریاضی‌دانان نیز «نیاز» ندارد. اما جامعه به «دوستداران ریاضی» نیاز دارد. دوستدار ریاضی کسی است که ممکن است در مورد ریاضی چیز زیادی نداند، اما می‌فهمد که ریاضی درباره چیست و به خوبی در مورد نقش ریاضی در جامعه مدرن، آگاه است

و حجم اشــکال عینی را محاسبه نمایند که می‌توان از بین آن‌ها به ارشـــمیدس و لیوهری اشاره نمود که درک فرمولی که برای محاسبه مساحت یک دایره تبیین کردند، نیازمند فهمیدن ماهیت قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. امروزه با توسعه حساب دیفرانسیل و انتگرال از قرن‌های ۱۷ و ۱۸، به‌طور متوســط دانش‌آموزان مدرســه‌ای که این درس را یاد گرفته‌اند، قادرند که آنچه را که در گذشته، تنها ریاضی‌دانان بزرگ می‌توانستند پاسخ دهند، به آسانی به کار گیرند.

از آنجایی که بســیاری از مســابقات ریاضی به دنبال اندازه‌گیری توانایی شرکت‌کنندگان در حل مسئله هستند تــا آزمودن میزان آشــنایی آن‌ها با دانــش محتوایی یک موضوع خاص، مسائل در حوزه‌های کلی‌تری قرار گرفته‌اند که برای جوانان در آن گروه سنی، قابل درک‌اند و مستقل از برنامه‌های درســی مدارس متنوع در کشورها و مناطق مختلف هستند. این مسائل، شــامل موضوعاتی در زمینه نظریه اعداد مقدماتی، جبر، ترکیبیات، دنباله‌ها، نابرابری‌ها، معادلات تابعی، هندســه مسطحه، هندسه فضائی و نظایر آن هستند و بدین ســبب و به‌تدریج، اصطلاح «ریاضیات المپیادی» برای اشــاره به این مجموعه از موضوعات، ابداع گردید. ســؤالی که همیشه در ذهنم بوده این است که چرا این نوع به اصطلاح ریاضیات المپیادی، نمی‌تواند به خوبی در کلاس‌های درس مدرسه‌ای مورد استفاده قرار گیرد؟ مگر یکی از اهداف آموزش ریاضی این نیست که به دانش‌آموزان اجازه دهد تا بدانند هر موضوع در مورد چه چیزی اســت و انگیزه و علاقه خود را نســبت به آن پرورش دهند؟ در این صورت، زمانی که از مســائل غیرمعمولی و جالب به عنوان مکمل در تدریس و یادگیری معمولی استفاده می‌شود، باید قادر باشند تا نقش خود را به خوبی ایفا نمایند.

اجازه دهید به ســؤالی که در عنوان این ســخنرانی طرح کردم، برگردیم. آیا جامعه به مدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی نیــاز دارد؟ خیر، جامعــه «نیاز»ی به مدال‌آوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی ندارد. جامعه حتی به ریاضی‌دانان نیز «نیاز» ندارد. اما جامعه به «دوستداران ریاضی» نیاز دارد. دوســتدار ریاضی کسی است که ممکن اســت در مورد ریاضی چیز زیادی نداند، اما می‌فهمد که ریاضی درباره چیست و به خوبی در مورد نقش ریاضی در جامعه مدرن، آگاه اســت. پل ریچارد هالموس ریاضی‌دان گفته اســت که «این موضوع مرا ناراحت می‌کند که افراد تحصیل کرده، حتی نمی‌دانند رشته و موضوعی که مطالعه می‌کنم، چیســت». آلن هاموند، ویرایشگر علوم، یک بار از ریاضی به عنوان فرهنگ نامرئی یاد کرده است. به عبارت دیگر، شــاید این یک موهبت بوده اســت که ریاضی قابل رؤیت نیســت. وارد کردن ریاضی بــه جمع عموم مردم یا

از آنجایی که بسیاری از مسابقات ریاضی به دنبال اندازه‌گیری توانایی شرکت‌کنندگان در حل مسئله هستند تا آزمودن میزان آشنایی آن‌ها با دانش محتوایی یک موضوع خاص، مسائل در حوزه‌های کلی‌تری قرار گرفته‌اند که برای جوانان در آن گروه سنی، قابل درک‌اند و مستقل از برنامه‌های درسی مدارس متنوع در کشورها و مناطق مختلف هستند

به عبارتی عمومی‌ســازی ریاضی، کار آسانی نیست. یکی از الزاماتی که برای تبدیل به دوستدار ریاضی شدن وجود دارد، این است که از روزهای مدرسه، محیطی را به ارمغان بیاورید که در آن‌ها، نه‌تنها ریاضی لذت‌بخش بوده اســت، بلکه درک خوبی از آن را نیز ارائه می‌دهد.

در مقدمه کتاب «آلیس در ســرزمین اعداد: راهنمای دانش‌آموزان برای لذت از ریاضی» نویسندگان جان بایلیس و راد هاگارتی اشاره می‌کنند که «ریاضی‌دانان حرفه‌ای، با این ایده که ســرگرمی‌ها و محتوای رسمی و جدی با هم ناســازگار نیستند، آشــنایی دارند. مسئله ما این است که مطمئن شویم که خوانندگان، از سرگرمی‌ها لذت می‌برند. اما از موارد ریاضی آن نیز غفلت نخواهند کرد».

دوســت خوب مــن تونــی گاردنر، که چهــار مرتبه سرپرســت تیم انگلستان بوده است، به من توصیه کرد که «نباید جنبه‌های منفی مســابقات ریاضی را مورد نقد قرار دهــم». او در ادامه گفت که یک مســابقه ریاضی، باید به عنوان قلهٔ یک کوه یخ بزرگ در نظر گرفته شــود. به این منظور باید برای هر کشور، انگیزه‌ای ایجاد شود تا هرمی از فعالیت‌ها، برای انبوهی از دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی ایجاد نماید و این، به نفع همه خواهد بود. هم‌چنین درباره این موضوع فکر کنیم که چه فعالیت‌های دیگری را علاوه بر مسابقات ریاضی، می‌توان سازماندهی کرد. این فعالیت‌ها می‌توانند شامل برپا کردن یک کلوپ ریاضی یا انتشار یک مجله باشــند تا به افراد علاقه‌مند، این امکان را بدهد که ایده‌ها و شور و اشتیاق خود را با بقیه، به اشتراک بگذارند. علاوه بر این‌ها، برگزاری جلســات حل مسئله و مسابقات برای انجام پروژه‌هایی در ســطوح مختلف و نوشتن کتاب و مقالات، ساخت نرم‌افزار، فیلم، بازی، معما، اسباب‌بازی و نظایر آن، می‌توانند از این دست فعالیت‌ها باشند».

در نهایت، ممکن است این سؤال برای هر کسی پیش آید که آیا جامعه به من نیاز دارد؟ ما اغلب این کلیشه‌ها را می‌شنویم که «وجود هیچ‌کس ضروری نیست!»، اما لطفاً در نظر داشــته باشــید که هر کس ارزش خود را دارد و می‌تواند سهم خود را برای تبدیل این جهان به مکانی بهتر برای زندگی، انجــام دهد. یک مدال‌آور المپیاد بین‌المللی ریاضی نیز از این قاعده مستثنی نیست.

پیوست

مثال ۱:

اولین مثال، یک مســئله شــناخته شــده در یکی از المپیادهاست. وقتی که کمک کردم تا اولین تیم هنگ‌کنگ در المپیاد بین‌المللی ریاضی شرکت کند.

فرض کنید که a و b، اعداد صحیح مثبتی هستند به طوری که a^2+b^2 بر $ab+1$ بخش‌پذیر است. نشان دهید که

$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$، مربع یک عدد صحیح است.

یک راه حل آسان و روان این مسئله، توسط یک دانش‌آموز بلغاری به نام امانوئل آتاناسف ارائه شد که به خاطرش نیز، یک جایزه ویژه دریافت کرد. این راه حل با این فرض شروع می‌شود که $k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$، یک مربع کامل نیست. سپس این عبارت را به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$a^2 - kab + b^2 = k \quad (*)$$

توجه کنید که برای هر جواب صحیح (b و a) برای(*) داریم $a>0$ و $b>0$ زیرا k، یک مربع کامل نیست. فرض کنید (a و b) یک جواب صحیح برای (*) باشد، به‌طوری‌که $a>0$ و $b>0$ و $a+b$، **کوچک‌ترین** مقدار ممکن باشد. از روی این جواب، می‌توانیم جواب صحیح دیگری به‌صورت (a' و b) از (*)، تولید کنیم به‌طوری‌که $a'>0$ و $b>0$ و $a+b>a'+b$ و این یک تناقض است!

[استدلال نحوه رسیدن به چنین جواب (a' و b) را حذف می‌کنیم.]

با وجود آسانی و روانی این اثبات، این راه‌حل، دو سؤال را مطرح می‌کند.

۱. چه چیزی باعث می‌شود که کسی به این فکر بیفتد که نشان دهد $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$، مربع یک عدد صحیح است؟

۲. استدلال باید به‌طور جدی، مبتنی بر این شرط باشد که k، یک مربع کامل نیست. به‌نظر می‌رسد که در اثبات، این شرط به‌طور غیررسمی،گنجانده شده است. در نتیجه فرد نمی‌تواند بفهمد که واقعاً چه اتفاقی می‌افتد اگر که k، مربع کامل نباشد. مناسب‌تر این است که بگوییم اثبات از طریق **برهان خلف**، توضیح نمی‌دهد که چرا، $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ باید یک مربع کامل باشد، هر چند که ضرورت آن را **تأیید** می‌کند.

برعکس، اجازه دهید که به راه‌حلی که کمتر زیباست و تلاش خود من است، بپردازیم. وقتی که این مسئله را بار اول شنیدم، در سفری به اروپا بودم و با قرار دادن $a=N^3$ و $b=N$، بینش نادرستی نسبت به آن پیدا کردم. در نتیجه،

$$a^2+b^2=N^2(N^4+1)=N^2(ab+1)$$

تحت تأثیر این برداشت که هر جواب صحیح (a, b, k) از $K=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ به شکل (N^3,N,N^2) است، از این استراتژی استفاده کردم که از $a^2+b^2=k(ab+1)$، معادله

$$[a-(3b^2-3b+1)]^2+[b-1]^2=\{k-[2b-1]\}\{[a-(3b^2-3b+1)][b-1]+1\}$$

را نتیجه بگیریم.

وقتی که این معادله را صورت‌بندی کردم، توانستم که b را به گام‌های اول تقلیل دهم تا اینکه به $K=\frac{a^2+1}{a+1}$ برسم که در آن، $a=k=1$. با معکوس کردن آن گام‌ها، می‌خواستم مسئله را حل کنم. در حالی که با قطار سفر می‌کردم، سعی نمودم این استراتژی را برای حل این مسئلهٔ پیاده کنم، اگر چه بی‌فایده. تا وقتی که به خانه برسم، دائم در حال بررسی عملیات این معادله برای رسیدن به جواب‌های واقعی بودم که بخشی از نتیجه این تلاش، در زیر نشان داده می‌شود.

a	۱	۸	۲۷	۳۰	۶۴	۱۱۲	۱۲۵	۲۱۶	۲۴۰	۳۴۳	۴۱۸	۵۱۲	...
b	۱	۲	۳	۸	۴	۳۰	۵	۶	۲۷	۷	۱۱۲	۸	...
k	۱	۴	۹	۴	۱۶	۴	۲۵	۳۶	۹	۴۹	۴	۶۴	...

بعد، فهمیدم که این استراتژی، محکوم به شکست است، زیرا راه‌حل‌های دیگری به غیر از جواب‌هایی به‌صورت (N^3, N, N^2) وجود دارند. **اگر چه همهٔ تلاش‌هایم بیهوده نبود.** وقتی که این الگو را شروع کردم، متوجه شدم که برای یک K ثابت جواب‌ها را می‌توان به‌صورت بازگشتی، از (a_i, b_i, k_i) به‌دست آورد. به‌طوری که؛

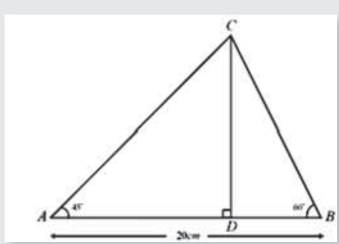
$$a_{i+1}=a_ik_i-b_i,\ b_{i+1}=a_i,\ k_{i+1}=k_i=k$$

و تنها کاری که باقی مانده بود، اثبات درستی این جواب بود. به محض انجام این کار، دیگر همه چیز برایم واضح شد. مجموعه‌ای از جواب‌های اولیه به شکل (N^3,N,N^2) وجود دارد که در آن، $N\in\{1,2,3,...\}$، تمام راه‌حل‌های دیگر، از همین «راه‌حل اولیه» و به همان شکل بازگشتی که توضیح داده شد، به‌دست آمد. به‌طور مشخص، $k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$، مربع یک عدد صحیح است. من احساس می‌کنم که بدین طریق، این پدیده را خیلی بیشتر می‌فهمم تا اینکه فقط آن جواب آسان و روان را یاد می‌گرفتم.

مثال ۲:

مسئله ۵ در بیست و یکمین مسابقه ریاضی دوره ابتدایی هنگ‌کنگ که در ماه مِی ۲۰۱۰ برگزار شد، به قرار زیر بود.

فقط با استفاده از خط‌کش، مثلث ABC را روی یک کاغذ A۳ به گونه‌ای رسم کنید که طول $AB = 20cm$ زاویه $BAC=45°$ و زاویه $ABC=60°$. کوتاه‌ترین فاصله از C به AB را تا یک رقم اعشار، پیدا کنید.

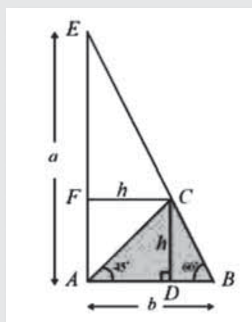


چندین راه حل برای این مسئله وجود دارد که احتمالاً، هدفشان این بوده است که ببینند آیا دانش‌آموزان دوره

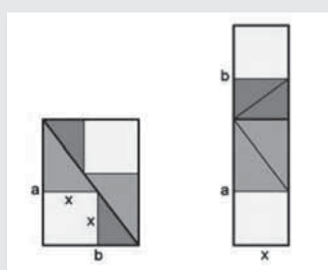
ابتدایی، می‌دانند که چگونه با اســـتفاده از کاغذ و تا، مثلث مورد نظر را بسازند و دوباره، با همان کاغذ و تا، خط عمود بر قاعده را رسم نموده و طول آن را با خط‌کش، اندازه بگیرند.

بعضی‌ها که ریاضی بالاتر را از پایه‌های پایینی شـــروع کرده بودند (جهشی)، سعی کرده بودند که با کمک مثلثات این مســـئله را حل کنند که جزو محتوای برنامه درســـی دوره ابتدایی است. آن‌ها حتی قانون سینوس ـ کسینوس را می‌دانســـتند. ولی موقع محاســـبه اندازه زاویه‌های ۳۰، ۴۵یا ۶۰ درجه، گیج شده بودند.

در اینجا، یک راه‌حل زیرکانه هست که متکی بر ریاضیات دوره متوسطه نیست. در این راه‌حل شکل بالا را ادامه می‌دهیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه بزرگ‌تر ساخته شود و با استعانت از خرد ریاضی‌دان‌های چین باستان، مسئله را حل می‌کنیم.



مســـئله ۱۵ در فصل ۹ کتاب کلاسیک ریاضی چینی باســـتان به نامه **جی ژوانگ ســـی آن‌شو** (Jiuzhang Suanshu)، خواســـته اســـت که طول ضلـــع مربعی که درون مثلث قائم‌الزاویه محاط شـــده اســـت، برابر $\frac{ab}{a+b}$ اســـت [بگذارید که نتیجه را که با روش برش دادن و دوباره کنار هم قرار دادن به دســـت آمده، نشـــان دهم که در قرن سوم، توسط ریاضی‌دان چینی لیو هوی (Liu Hui)، حل شده است.]



بدین ترتیب، ارتفاع مثلث اولیه را می‌توان محاسبه کرد.

این راه‌حل زیرکانه به شـــرطی جواب می‌دهد که اندازه دو زاویه قاعده دلخواه باشـــند، در حالی‌که روش نه چندان زیرکانه «خشـــک» که متکی بر قانون سینوس ـ کسینوس است، هم‌چنان کارآمد است.

مثال ۳

یک مسئله مشـــهور اســـت که به ریاضی‌دان معروف جان فون نویمان (۱۹۵۷ـ ۱۹۰۳) نســـبت داده شده است. گفته می‌شـــود که روزی یکی از دوستان فون نویمان، به او مسئله‌ای داد که حل کند.

دو دوچرخه‌سوار A و B، به فاصلهٔ ۲۰ مایل از یک‌دیگر، به ســـمت هم در حرکت بودند و سرعت هر کدام، ۱۰ مایل در ساعت بود. یک زنبور عسل، با سرعت ۱۵ مایل در ساعت، بیـــن A و B در حرکت بود، بدین ترتیب که از A شـــروع می‌کرد و بعد از رسیدن به B، به سمت A برمی‌گشت و این کار را همین‌طور، ادامه داد تا آنکه دو دوچرخه‌سوار، به هم رسیدند. آن موقع، زنبور عسل چند مایل حرکت کرده بود؟

در یک چشم برهم زدن، فون نویمان جواب ۱۵ مایل را داد. با شنیدن این پاسخ، عکس‌العمل دوستش این بود که فون نویمان باید ترفند رسیدن به جواب را می‌دانسته که به آن سرعت، پاسخ داده بود.

راه‌حل زیرکانه و سریعی که دوستش در ذهن داشت ایـــن بود که دوچرخه‌ســـوارها، بعد از یک ســـاعت به هم رسیدند و در آن یک ساعت، زنبور عسل ۱۵ مایل حرکت کرده بود.

اما فون نویمان به دوســـتش گفت که هیچ ترفندی را نمی‌دانسته ولی فقط مجموع جملات یک سری بی‌نهایت را حساب کرده است که این پاسخ، دوستش را متحیر کرد.

برای من، این داستان خیلی آموزنده است. (۱) مردم مختلف ممکن است راه‌های متفاوتی برای حل یک مسئله ریاضی داشته باشـــند. هیچ معنایی ندارد که همه را وادار کنیم که یک مسئله را، درســـت به همان روشی که شما حل کرده‌اید، انجام دهند. به‌طور مشـــابه، هیچ دلیلی هم وجود ندارد که همه را مجبـــور کنیم که ریاضی را، دقیقاً همان‌گونه که شما یاد گرفته‌اید، یاد بگیرند.

(۲) هر دو روش حلی که برای این مسئله ارائه شد، از شأنیت جدایی برخوردارند.

روش اول، یعنی محاســـبه رســـیدن دوچرخه‌سواران به هم‌دیگر، روشـــی زیرکانه است و نکته کلیدی مسئله را گرفته است. روش دیگر که به دست آوردن مجموع جملات یک سری نامتناهی است، که روشی کندتر است (البته نه برای فون نویمان!) و به‌نظر می‌رسد که سخت‌تر بوده و به اندازه اولی هوشیارانه نباشد، اقدام به حل مسئله به روشی نظام‌وار کرده اســـت. این روش بر حوصله، عزم، رویکردی زمینی و دقت زیاد تأکید دارد. هم‌چنین، این روش کمک می‌کند تا بعضی از مهارت‌های اولیه در هم ادغام شوند و در دانش‌آموز، یک عادت کاری خوب، پرورش یابد.

پی‌نوشت‌ها

1. Siu Man Keung
2. International Community for the History and Pedagogy of Mathematics: HPM

طراحی فعالیتی برای
درک کسر متعارفی
به‌عنوان یک عدد

مریم بهاءلو
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

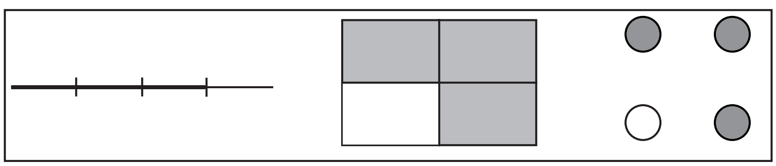
اشاره
به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.
در ضمن، گاهی هم به‌جای شنیدن روایت از زبان معلم، می‌توان کلاس وی را مورد مشاهده قرار داده و پس از تأیید همان معلم، روایت را از زبان مشاهده‌گر شنید.
رشد آموزش ریاضی

فعالیتی به‌صورت مختصر در مقاله‌ای تحت عنوان «نقش فرهنگ در آموزش مفهوم کسر در ریاضی پایه چهارم ابتدایی»، در همایش فرهنگ و برنامه درسی در شهریور ۱۳۹۵ در دانشگاه بوعلی‌سینای همدان برگزار شد. در این مقاله، سعی بر آن است که بعد از مروری بر پیشینه، فعالیت ارائه شده در آن همایش، به‌صورت کامل‌تر و نیز با جزئیات بیشتری، شرح داده شود. این، برای حصولِ اطمینان از کارآیی و عملی بودن و نحوه اجرای این فعالیت در کلاسِ درس، به نظر سه تن از معلمان ابتدایی رسید و آنان، مراحل کار را دوره کردند.

شواهد پژوهشی حاکی از این هستند که بیشترین تمرکز آموزش مدرسه‌ای، بر کسب دانش رویه‌ای است. دانش‌آموزان معمولاً قواعد را با انجام تمرین‌های تکراری یاد می‌گیرند که این امر در بسیاری موارد، منجر به درک نادرستی از نمادهای ریاضی می‌شود. در نتیجه، بسیاری از اشتباهات دانش‌آموزان در کسر، به‌دلیل ضعف درک مفهومی‌شان است (گبریل و همکاران، ۲۰۱۳.) کرسلیک (۱۹۸۶) استدلال کرده بود که تمرین‌های مدرسه‌ای، به اندازه کافی دانش‌آموزان را به این سمت هدایت نمی‌کنند که کسرها را عدد

در نظر بگیرند. از طرف دیگر، انگلیش و هالفورد (۱۹۹۵، نقل شده در آماتو، ۲۰۰۵) نیز در مورد اهمیتِ تمثیل‌ها و استدلال‌ها در کمک به دانش‌آموزان برای ایجاد دانش ریاضی جدید بر پایه دانش قبلی، بحث کردند. از نظر آنان، انتخاب تمثیل‌ها و عملیاتی که روی آن‌ها انجام می‌شود، می‌تواند پیامدهای مهمی در یادگیری ریاضی فرد داشــته باشد. برخی تمثیل‌ها حتی می‌توانند نامفهوم یا مبهم باشند، در صورتی‌که قرار است دانش‌آموزان را در امر یادگیری، یاری دهند. بعضی از تمثیل‌ها، شبیه داستان‌های خیالی‌اند که شاید به دانش‌آموزان کمک کنند که روند کار را به یاد آورند، اما هیچ کمکی به توسعه درک مفهومی آن‌ها نمی‌کنند. (چاپین، ۱۹۹۸، ص.۶۱۱)

هدف اصلی برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی این است که درک دانش‌آموزان از مفهوم عدد، توسعه یابد تا آن‌ها بتوانند با اطمینان، چنین درکی را در توصیف پدیده‌های دنیای واقعی و حل مســائل به‌کار گیرند (چیناپان و لاوسون، ۲۰۰۲، به نقل از شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰؛ شورای آموزش‌وپرورش اســترالیا، ۱۹۹۰). برای این منظور فرودنتال و گراوی‌میجر (۱۹۹۴)، بر طراحی فعالیت‌های واقعی برای یادگیری ریاضی، تأکید کردند. از نظر آن‌ها فعالیت باید به‌طور مشــهود، شامل موضوع و مبحث ریاضیِ برگرفته از واقعیت باشد. در واقع، بعضی از محققان بر این باورند که افزایش درک دانش‌آموزان از مفهوم کســر، نیازمند طراحی فعالیت‌هایی است که از طریق آن‌ها، بازنمایی‌ها و مدل‌های مختلف نمایش داده شوند (بریجلال و همکاران، ۲۰۱۱). در کتاب‌های ریاضی دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول، معمولاً از سه مدل خطی، پیوسته و گسسته، برای ارائه کسرها استفاده می‌شود. استفاده از این سه مدل که در شکل (۱) نشان داده شده است، وجه غالب را در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی دارد (واتانایی، ۲۰۰۲).



شکل۱.سه مدل خطی، پیوسته و گسسته برای ارائه کسر (نقل شده در واتانابه، ۲۰۰۲)

در کتاب تازه‌تألیف ریاضی پایه چهارم ابتدایی در بخش کســر، با استفاده از فعالیت‌های مختلف، به معرفی عدد مخلوط، مقایسه کسرها با مخرج‌های مساوی و نامساوی، تساوی کسرها و جمع و تفریق کسرها با مخرج‌های مساوی و غیرمساوی پرداخته شده، ولی مفهوم هیچ‌یک به درستی، آموزش داده نشده است. برای این منظور، فعالیتی طراحی شد که به دانش‌آموزان کمک کند تا مفاهیم اصلی و عملیات با کسرها را از طریق تقسیم‌بندی به قسمت‌های مساوی، جمع و تفریق و مقایسه کسرها را با مخرج‌های مساوی و نامساوی، یاد بگیرند و در نهایت، قادر شوند که کسر را به‌عنوان «عدد» درک کنند.

این فعالیت برای ۷ تا ۱۲ جلســه آموزشــی، بسته به پیشــرفت کلاس، طراحی شده است و نیاز به راهنمایی معلم در مراحلِ مختلف کار دارد. با انجام این فعالیت، شاید دیگر نیازی به ظرفیت‌های کتاب مانند «حل کردنِ تمرین» و «کار در کلاس» در فصل کسر، نباشد. پیشنهاد می‌شود برای کارآیی بهتر، دانش‌آموزان گروه‌بندی شــوند. تجربه معلمان و نویســنده نشان داده اســت که برای جلسه اول و دوم، گروه۳نفری و برای بقیه جلســات گروه ۵ نفری مناسب است تا دانش‌آموزان بتوانند با یکدیگر مشورت کنند و از نظرهای یکدیگر در رســیدن به جواب، بهره ببرند. گروه‌بندی دانش‌آموزان در سطوح مختلفِ ضعیف، متوسط و قوی، کمک می‌کند که همه گروه‌ها با هم پیش بروند. معلم گرامی، خودتان را در جایگاه دانش‌آموز چهارم ابتدایی قرار دهید و مرحله به مرحله با ما همراه شوید.

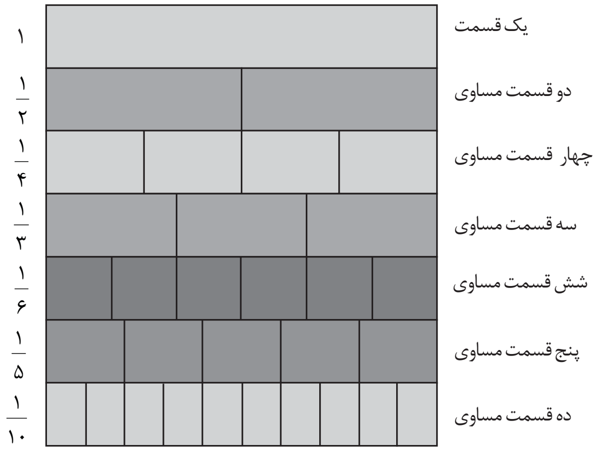
جلسه اول آموزشی

موضوع تدریس: آموزش تقسیم به قسمت‌های مساوی، بیان سهم هر قسمت با عدد کسری و معرفی واحدِ کامل.

در مرحله اول، مستطیلی به طول ۶۰ واحد و با عرض دلخواه که به هفت بخش‌پذیر باشد (عددهای پیشنهادی ۴۹ یا ۵۶)، روی کاغذ، مقوا، فوم، یونولیت یا نی (دقت کنید که با انتخاب نی، دیگر عرض کارآیی ندارد و از ۷ نی استفاده کنید) یا امثال این‌ها که در اختیار دانش‌آموز قرار دارد، رسم می‌کنیم. به‌دلیل بزرگی عدد ۶۰، این اندازه‌ها را با استفاده از اِشل (گونیای خیاطی)، رسم می‌کنیم (با استفاده از خط‌کش نیز، می‌توان هر یک سانت را به نیم‌سانت تبدیل کرد). با توجه به اینکه دانش‌آموزان در پایه دوم و سوم، با اندازه‌گیری و تقسیم‌بندی نوارهای کاغذی به قسمت‌های مساوی آشنا شده‌اند، اصولاً با تقسیم‌بندی مشکلی ندارند. از دانش‌آموزان بخواهید در گروه‌هایشان، عرضِ این مستطیل را به هفت قسمت مساوی تقسیم کنند. در سطر اول، طول بدون تقسیم‌بندی به‌عنوان واحدِ کامل در نظر گرفته می‌شود. طولِ سطر دوم را، با استفاده از جدول ضرب (۲×۳۰) یا با عمل تقسیم دو رقمی بر یک رقمی(۲ /۶۰)، به دو قسمت مساوی تقسیم کنند. اگر دانش‌آموزان با مشکل مواجه شدند، معلم می‌تواند در مراحل مختلف کار، با توجه به مطالبی که در پایه‌های قبل آموخته‌اند، آن‌ها را راهنمایی کند. بعد از انجام تقسیم‌بندی، از دانش‌آموزان بخواهید که سهم هر قسمت را مشخص کنند؛ انتظار این است که عدد $\frac{۱}{۲}$ را نمایش دهند. دانش‌آموزان با عدد کسری و نمایش آن در پایه سوم آشنا شده‌اند. (اگر از نظر معلم، دانش‌آموز در مرحله تقسیم‌بندی با دشواری مواجه شود، می‌توان شکل(۱) را تکثیر و در اختیار دانش‌آموزان قرار داد.) می‌توان دانش‌آموز را به این سمت هدایت نمود که با استفاده از سطردوم ($\frac{۱}{۲}$)، طولِ سطر سوم را به چهار قسمت مساوی تقسیم کند و متوجه دو دستهٔ دوتایی (۲×۲) شود و به این نتیجه برسد که سهم هر قسمت، $\frac{۱}{۴}$ است. منظور این است که هر $\frac{۱}{۲}$ را مجدداً به ۲ قسمت مساوی تقسیم کند و به این نتیجه برسد که چگونه $\frac{۱}{۲}$ به $\frac{۱}{۴}$ تبدیل شده و ارتباط بین این دو کسر را درک کند. به این دلیل که بعداً برای بیان مخرج مشترک‌گیری در جمع و تفریق کسرها، متوجه شود که چرا در جمعِ دو کسر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$، عدد ۴ به‌عنوان مخرجِ مشترک در نظر گرفته می‌شود و به همین نحو، از آن‌ها خواسته شود که طولِ سطر چهارم را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند و سهم هر قسمت را $\frac{۱}{۳}$ در نظر بگیرند. با استفاده از سطرچهارم (یعنی سطر $\frac{۱}{۳}$ها)، دانش‌آموزان طولِ سطر پنجم را به شش قسمت مساوی تقسیم کنند و متوجه سه دستهٔ دوتایی (۲×۳) که سهم هر دسته معادل $\frac{۱}{۶}$ است، بشوند و نیز با مقایسهٔ سطر دوم (یعنی سطر $\frac{۱}{۲}$ها)، متوجه دو دستهٔ سه تایی (۳×۲) شوند و ارتباط بین کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۶}$ را نتیجه بگیرند. طولِ سطر ششم را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنند و سهم هر قسمت را برابر $\frac{۱}{۵}$ بدانند. سپس از دانش‌آموزان می‌خواهیم با استفاده از سطرششم (یعنی سطر $\frac{۱}{۵}$ها)، طولِ سطر هفتم را به ده قسمت مساوی که سهم هر قسمت معادل $\frac{۱}{۱۰}$است، تقسیم کنند و متوجه پنج دستهٔ دوتایی (۲×۵) شوند و نیز با مقایسه با سطر دوم (یعنی سطر $\frac{۱}{۲}$ها)، متوجه دو دستهٔ پنج تایی (۵×۲) شوند و به ارتباط بین کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ پی ببرند که لازم است این موارد، حتماً با راهنمایی معلم صورت گیرد. در شکل (۲)، نمونه این کار دیده می‌شود.

بعد از اتمام تقسیم‌بندی‌ها، می‌توان به واحدِ کامل نیز اشاره کرد. به این صورت که از دانش‌آموزان بخواهیم ابتدا شکل(۲) را از خطوط عرضی برش بزنند، سپس هر یک از این تکه‌ها را با تکهٔ واحدِ برابر، مقایسه کنند. مثلاً با چند تکه از $\frac{۱}{۶}$ها، به یک قسمت کامل می‌رسیم؟ و سؤال‌هایی از این قبیل، تا دانش‌آموزان به این نتیجه برسند که $\frac{۵}{۵}=۱$، $\frac{۲}{۲}=۱$، $\frac{۱۰}{۱۰}=۱$، $\frac{۶}{۶}=۱$. در این قسمت برای نمونه، واحد کامل را معرفی می‌کنیم که در جلسات آتی، برای بیان عددِ مخلوط آن را به‌کار ببریم. در پایان این فعالیت از دانش‌آموزان بخواهیم که تمام قسمت‌های مشخص شده را روی طول، قیچی کنند. تا اینجا،

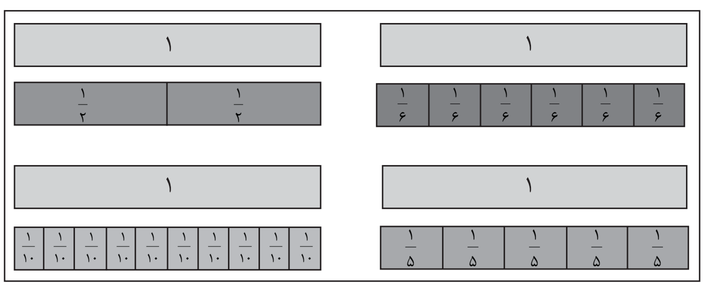
منظور این است که هر $\frac{۱}{۲}$ را مجدداً به ۲ قسمت مساوی تقسیم کند و به این نتیجه برسد که چگونه $\frac{۱}{۲}$ به $\frac{۱}{۴}$ تبدیل شده و ارتباط بین این دو کسر را درک کند. به این دلیل که بعداً برای بیان مخرج مشترک‌گیری در جمع و تفریق کسرها، متوجه شود که چرا در جمعِ دو کسر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$، عدد ۴ به‌عنوان مخرجِ مشترک در نظر گرفته می‌شود



شکل ۲. تقسیم‌بندی مستطیل به قسمت‌های مساوی

در کتاب‌هـــای ریاضی دوره‌هـــای ابتدایی و متوسطه اول، معمولاً از سه مدل خطی، پیوسته و گسسته، برای ارائه کسرها استفاده می‌شود

برای یک جلسه آموزشی طراحی شده است. (بسته به بازدهی کلاس، ممکن است به دو جلسه هم، نیاز باشد) در شکل (۳)، نمونه این کار دیده می‌شود.

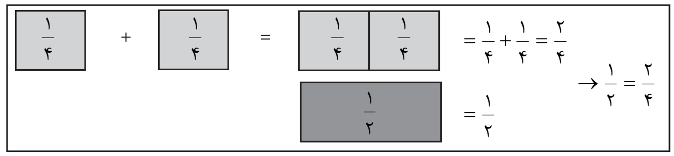


شکل ۳. مقایسه واحد کامل با قطعه‌های عرضی متفاوت

جلسه دوم آموزشی

موضوع تدریس: آموزش مفاهیم جمع کسر با مخرج‌های برابر و کسر مساوی.

به‌عنوان مثال، می‌خواهیم $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}$ را محاسبه کنیم. برای انجام این کار، از دانش‌آموزان می‌خواهیم در گروه‌هایشان، با استفاده از قطعه‌های بریده شده، دو قطعهٔ $\frac{۱}{۴}$ را کنار یکدیگر قرار دهند، و ۲ تا $\frac{۱}{۴}$ را ببینند و با به‌کاربردن قطعات دیگر، با حدس و آزمایش قطعه یا قطعه‌هایی که دو قطعهٔ $\frac{۱}{۴}$ را می‌پوشانند (برای بیان کسر معادل)، بیابند. در نهایت برای این مثال، ایده‌آل این است که به این نتیجه برسند که $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۴}$ معادل یکدیگرند که این مرحله، زمینه‌سازی برای جمع دو عدد کسری با مخرج‌های غیرمساوی است. پس از انجام این مرحله، از دانش‌آموزان بخواهیم که مثال‌ها و نمونه‌های بیشتری را مطرح کنند و به دنبال پاسخ آن‌ها باشند. (در حین کار هرجا که دانش‌آموزان با کمبود قطعه مواجه شدند، می‌توانند قطعه‌های جدیدی بسازند.) در این قسمت، هدف اصلی این است تا به این نکته پی ببرند که زمانی‌که مخرج کسرها برابرند، فقط صورت‌های کسر با همدیگر جمع می‌شوند و در بیان کسر معادل، ارتباط بین مخرج‌های کسر را بیابند. آخر سر، از دانش‌آموزان خواسته شود که بدون استفاده از قطعه، جمع کسرها با مخرج‌های مســـاوی و کسرهای معادل را بیابند و مثال‌های متنوعی را مطرح و پاسخ دهند. معمولاً دانش‌آموزان از به کار بردن اعداد بزرگ در صورت و مخرج کســـرها هراســـانند. برای رفع این مشکل، مثال‌هایی می‌زنیم (مانند $\frac{۱۱}{۱۱۰}$، و $\frac{۱۲۰}{۴۸۰}$ غیره) و به کمک دانش‌آموزان، به حل آن می‌پردازیم. نمونه این کار، در شکل(۴)، نشان داده شده است.

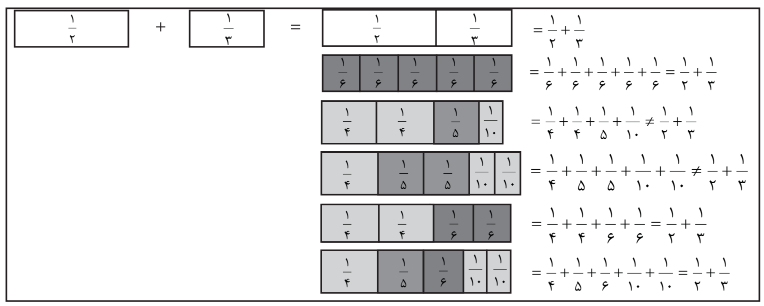


شکل۴. نمایش جمع دو عدد کسری با مخرج‌های برابر

جلسه سوم آموزشی

موضوع تدریس: آموزش مفاهیم جمع کسرها با مخرج‌های غیریکسان.

به‌عنوان نمونه، می‌خواهیم $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}$ را محاسبه کنیم. برای انجام این کار، از دانش‌آموزان می‌خواهیم در گروه‌هایشان با استفاده از قطعه‌های بریده شده، دو قطعهٔ $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ را کنار یکدیگر قرار دهند و با به‌کاربردن قطعات دیگر، با حدس و آزمایش، قطعه یا قطعه‌هایی که دو قطعهٔ $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ را می‌پوشانند، بیابند. از آن‌ها بخواهید مثال‌های دیگری بزنند و جواب را بیابند. این جلسه، زمینه‌سازی برای مخرج مشترک است. نمونه این کار، در شکل (۵)، به تصویر کشیده شده است.



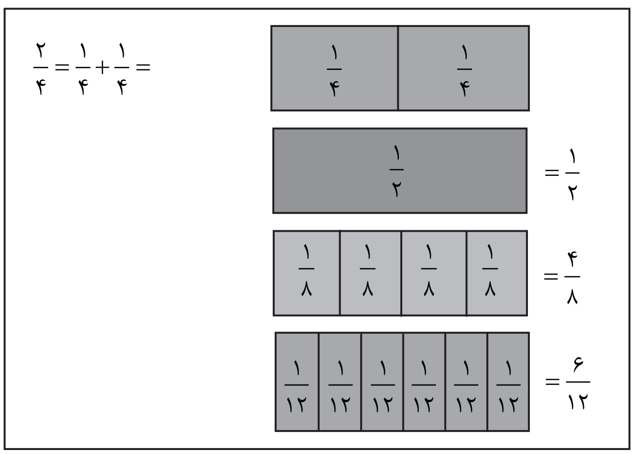
شکل۵. نمایش جمع دو عدد کسری با مخرج‌های غیرمساوی

جلسه چهارم آموزشی

موضوع تدریس: آموزش مخرج مشترک‌گیری و یافتن مخرج مناسب.

با اســـتفاده از جلسهٔ اولِ آموزشی، مبحث مخرج مشـــترک بیان می‌شود. مثلاً در $\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}$، دانش‌آموزان با چیدن قطعه‌ها به جواب $\frac{۵}{۶}$ یا کسرِ معادل آن، رسیده‌اند. حالا برای توجیه این عمل، به این نکته اشاره می‌کنیم که کسرهای معادل در هر چیدمان را، برای هر عدد کسری با استفاده از شکل (۲)، بیابند و در نهایت، کسری را انتخاب کنند که مخرج برابر در همه اعدادکسریِ به‌کار رفته در چیدمان را دارا باشد. که برای نمونه، می‌توان به کسرهای $\frac{۲}{۴}$، $\frac{۳}{۶}$، $\frac{۴}{۸}$ و غیره برای $\frac{۱}{۲}$، اشاره کرد. یا کسرهای $\frac{۲}{۶}$، $\frac{۳}{۹}$ و... ، را برای نشان دادن کسر $\frac{۱}{۳}$ می‌تواند بسازد، اما آن عدد کسری که انتخاب می‌شـــود، باید در هر دو، مخرجی برابر۶ داشـــته باشند. پس انتظار می‌رود $\frac{۳}{۶}$ و$\frac{۲}{۶}$ را انتخاب و با هم جمع‌کنند. به‌عنوان مثال دیگر، به $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}$ توجه کنید. در جلسه دوم دانش‌آموزان آموختند که دو عدد کسری با مخرج برابر را با یکدیگر جمع کنند. پس جوابی که برای این حاصلِ‌جمع می‌نویسند، به صورت $\frac{۲}{۶}+\frac{۲}{۴}$است. مانندِ مثال قبل، از دانش‌آموز می‌خواهیم کسرهای معادل را برای هر یک از این دو کسر، بسازد و بنویسد و کسری که در هر دو، مخرجِ برابر دارد را انتخاب کند. کسرهای معادلِ $\frac{۲}{۴}$ برابر با $\frac{۴}{۸}$، $\frac{۶}{۱۲}$، $\frac{۸}{۱۲}$، $\frac{۱۰}{۲۰}$، $\frac{۱۲}{۲۴}$ و.. است. و کسرهای معادلِ $\frac{۲}{۶}$، برابر $\frac{۴}{۱۲}$، $\frac{۶}{۱۸}$، $\frac{۸}{۲۴}$ و... است. همان‌طور که مشاهده می‌شود. در کسرهای معادل با هر دو کسر، هم مخرج ۱۲ و هم مخرج ۲۴ مشترک است و

دانش‌آموز می‌تواند از بین این دو مورد، یکی را انتخاب کند. می‌توان دانش‌آموز را به این سمت هدایت کرد که ۲۴، ضریبی از ۱۲ است (۲×۱۲) و برای انتخاب مخرجِ مشترک، بهتر است کوچک‌ترین عددِ مشترک در مخرج را انتخاب کرد. نمونه کار در شکل(۵) دیده می‌شود. بعد از درک این مطلب، در نهایت از دانش‌آموزان بخواهید بدون استـــفاده از قطعه‌ها، جمع دو عدد کسری را با استفاده از کسر معادل یا مضرب اعداد، بیابند (از هر روشی که خود دانش‌آموز به آن پی برده است). از آنان بخواهید تا مثال‌های متنوعی با اعداد بزرگ در صورت و مخرج کسر، بزنند و با کمک یکدیگر، به حل آن‌ها بپردازند. بعد از اینکه اطمینان حاصل کردید دانش‌آموزان این مبحث را آموخته‌اند، در جلســـه بعد می‌توانید ساده کردن کسرها را مطرح کنید. مثلاً با استفاده از $\frac{۱۰}{۱۲}$ یا $\frac{۲۰}{۲۴}$ که دانش‌آموزان در عملیات قبلی به این نتیجه رســـیدند، از آنان بخواهیم که کسرهای معادل با هر عدد کسری را بیابند با این تفاوت که در مرحله قبلی صورت و مخرج را در یک عدد ضرب می‌کردند، حالا از آن‌ها می‌خواهیم عکس آن را انجام دهند، یعنی صورت و مخرج را به یک عدد تقسیم کنند. برای کسر $\frac{۱۰}{۱۲}$، با یک مرحله تقسیم به کسر $\frac{۵}{۶}$ می‌رسند و برای کسر $\frac{۲۰}{۲۴}$، با دو مرحله تقسیم و رسیدن به $\frac{۱۰}{۱۲}$ و $\frac{۵}{۶}$، به کسر موردنظر می‌رسند. اگر دانش‌آموزان با تقسیم صورت و مخرج کسر به یک عدد مشکل دارند، می‌توان کســـرهایی مانند $\frac{۳}{۶}$ یا $\frac{۲}{۴}$ را برایشان مثال زد و با استفاده از قطعه‌ها از آن‌ها خواست که کسرهای معادل را بیابند و این بار، یک عدد کسری را برگزینند که مخرج کوچک‌تری دارد. سپس ارتباط بین کسر انتخابی و کسر اصلی را پیدا کنند و به کسرِ $\frac{۱}{۲}$ برسند، مانند شکل (۶).

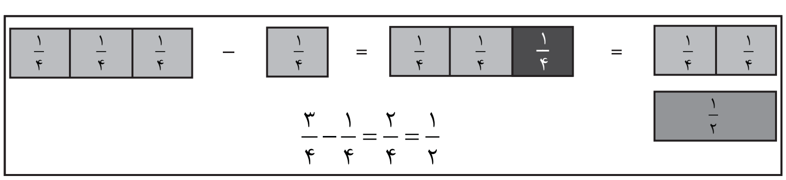


شکل۶. نمایش مراحل کسر معادل

جلسه پنجم آموزشی

موضوع تدریس: آموزش تفریق دو کسر با مخرج‌های مساوی.

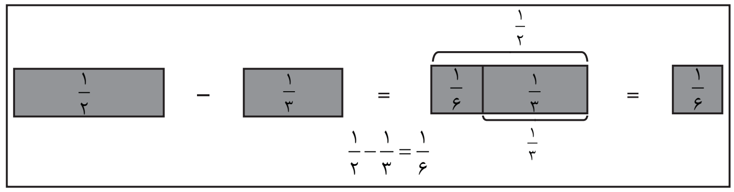
به‌عنوان مثال، می‌خواهیم $\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}$ را محاسبه کنیم، برای انجام این کار، از دانش‌آموزان می‌خواهیم با استفاده از قطعه‌های بریده شده، ابتدا قطعهٔ $\frac{۳}{۴}$ را بسازند، سپس قطعهٔ $\frac{۱}{۴}$ را روی قطعهٔ $\frac{۳}{۴}$ قرار دهند و با به‌کاربردن قطعات دیگر، با حدس و آزمایش، قطعه یا قطعه‌هایی که فضای باقی‌مانده را پر می‌کنند،بیابند.



شکل۷. نمایش تفریق دو عددکسری با مخرج مساوی

جلسه ششم آموزشی

موضوع تدریس: آموزش تفریق دو کسر با مخرج‌های غیرمساوی. نمونه این کار در شکل(۸)، دیده می‌شود.

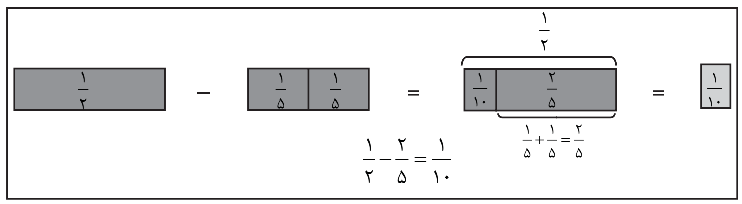


شکل۸. نمایش تفریق دو عدد کسری با مخرج‌های غیرمساوی

جلسه هفتم آموزشی

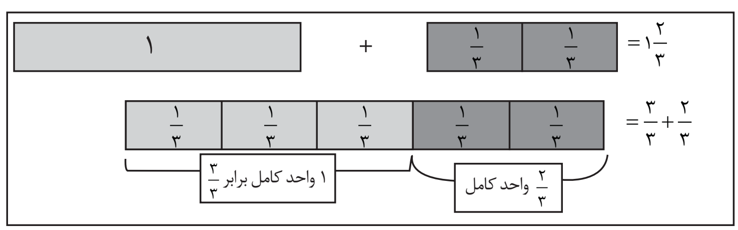
موضوع تدریس: ترکیب عمل جمع و تفریق کسرها و بیان عدد مخلوط.

می‌توان جمع و تفریق کسرها را با یکدیگر ترکیب کرد. مانند شکل(۹).



شکل۹. نمایش ترکیب جمع و تفریق دو عدد کسری با مخرج‌های غیرمساوی

برای بیان عددِ مخلوط نیز می‌توان از این فعالیت اســـتفاده نمود. بدین صورت که مثلاً برای بیان عدد $۱\frac{۲}{۳}$، با توجه به جلسه اول آموزشی که دانش‌آموزان با واحد کامل آشنا شده‌اند، می‌توان از آنان پرسید که یک واحدِ کامل با چند قطعه $\frac{۱}{۳}$، پر می‌شود. انتظار این است که دانش‌آموزان، به این نتیجه برسند که برای این نمونه، $\frac{۳}{۳}=۱$ است. پس مانند شکل (۱۰)، از آنان خواسته شود که این چیدمان را درست کنند. با انجام مثال‌های مختلف، انتظار می‌رود دانش‌آموزان درک کنند که تفاوت واحدِ کامل، برابر چه عددکسری است.



شکل۱۰. نمایش عدد مخلوط

پروژه تحقیقی

به‌عنوان حُسن ختام این فعالیت و به‌عنوان پروژه تحقیقی، از دانش‌آموزان بخواهیم پاسخ این سؤال را با جست‌وجو در کتاب‌ها و اینترنت و مصاحبه با دیگران، بیابند که «کاربرد اعداد کسری در زندگی روزانه ما چیست و چگونه از آن‌ها استفاده می‌کنیم؟»

انتظار می‌رود در پایان این فعالیت، دانش‌آموزان علاوه بر اندازه‌گیری و تقسیم‌بندی به قسمت‌های مساوی، قادر به انجام عملیات روی کسرها ـ هم با استفاده از شکل و هم بدون آن ـ باشند. این عملیات شاملِ مقایسه کسرها، جمع و تفریق اعدادکسری با مخرج‌های مساوی و غیرمساوی، کسر برابر واحد، تساوی کســـرها و ساده کردن کسرها است. هدف غائی این فعالیت این است که دانش‌آموزان به این موضوع پی ببرند که خود $\frac{a}{b}$، یک عدد است که «عدد کسری» نامیده می‌شود، که صورت و مخرج آن، عددهای صحیح هستند، نه اینکه دو عدد صحیح مجزا به روی هم، کسر را تشکیل می‌دهند.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از استاد عالیقدرم سرکار خانم دکتر زهرا گویا که مرا در زمینهٔ تکمیل و تصحیح این مقاله یاری نمودند، تشکر نمایم.

منابع

1. Amato, S. (2005). Developing Students’ Understanding of the Concept of Fractions as Numbers. In H. L. Chick, & J. L. Vincent. (Eds.). **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 2, pp. 49-56. Mel-bourne: PME.
2. Brijlall, D.; Maharj, A.; & Molebale, J. (2011). Understanding the Teaching and Learning of Fractions: A South African Primary School Case Study. US-**China Education Review**, pp. 497-510, DAVID.
3. Chinnappan ,M.; & Lawson, M. (2002). Year 3 Children’s Understanding of Fractions: Are We Making Progress?In B. Barton, K.Irwin,M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds.), Proceedings of **the 25th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, vol**. 1 pp. 195- 202. Auckland, New Zealand: Mathematics Education Group of Australasia. MERGA.
4. Gabriel, F.; & Coché, F.; & et al. (2013). A Componential View of Chil-dren’s Difficulties in Learning Fractions. **Frontiers in Psychology**, V. 4; NCBI. Published online 2013 Oct 10. Doi; 10.3389/f psyg.2013.00715 .PMCID: PMC3794363.
5. Watanabe, T. (2002). Representations in Teaching and Learning Fraction. **Teaching Children Mathematics**, pp. 457- 463, NCTM.

آموزش مفاهیم ریاضی
به کمک بازنمایی‌های چندگانه

حمید دافعی
مدرس دانشگاه فرهنگیان زنجان و کارشناس ارشد آموزش ریاضی

اشاره
یکی از روش‌هایی که می‌توان به کمک آن، بین تجربیات و دانش غیررسمی کودکان با دانش رسمی ریاضی آن‌ها ارتباط برقرار کرد، استفاده از «بازنمایی‌های چندگانه[1]» می‌باشد. بازنمایی‌های چندگانه؛ به‌معنای معرفی یا نشان دادن یک مفهوم ریاضی، با استفاده از وضعیت‌ها و شکل‌های مختلف است. به اعتقاد اُزل[2] (۲۰۰۸) توانایی نشان دادن یک مفهوم با شیوه‌های گوناگون، درک عمیقی از آن مفهوم را در ذهن ایجاد می‌کند. بدین سبب، بازنمایی‌های ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مفاهیم ریاضی را از منظرهای متفاوت ببینند و با استفاده از برقراری ارتباط بین آن‌ها، به درک بهتری از یک مفهوم دست یابند [۱].

کلیدواژه‌ها: بازنمایی‌های چندگانه، آموزش ریاضی، جدول شگفت‌انگیز

بازنمایی‌های چندگانهٔ ریاضی و اهمیت برقراری ارتباط بین آن‌ها

شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM)[3] در سال ۲۰۰۰ میلادی، در سند خود تحت عنوان «اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه» یک استاندارد فرایندی به نام «بازنمایی‌ها» معرفی نمود و بر اهمیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در یاددهی و یادگیری مفاهیم و روابط ریاضی، تأکید کرد و آن را یکی از مؤلفه‌های اصلی برنامهٔ درسی ریاضی به حساب می‌آورد (دافعی، ۱۳۸۹). به اعتقاد این شورا استفاده دانش‌آموزان از بازنمایی‌ها به‌خصوص آن‌هایی که برایشان ملموس‌تر است، امری ضروری در یادگیری ریاضی محسوب می‌شود [۵]. در واقع دانش‌آموزان پایه‌های ابتدایی از بازنمایی‌های متنوع و ارتباط و اتصال بین مفاهیم برای ساخت‌وساز دانش ریاضی و بیان ایده‌های ریاضی خود استفاده می‌کنند و با این کار فرایند حرکت به سمت تجرید را تسریع می‌کنند. البته این شورا به استناد پژوهش‌های انجام شده به این نتیجه رسیده است که اهمیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه، بایستی در طول دوره آموزشی دانش‌آموزان، مورد توجه قرار گیرد و استفاده از بازنمایی‌های مختلف برای درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی، بخش مهمی از فرایند یاددهی ـ یادگیری ریاضی را تشکیل دهد[۳] و [۵]. آموزشگران ریاضی مدل‌های مختلفی برای به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و روابط ریاضی پیشنهاد داده‌اند. یکی از این مدل‌ها، مدلی است که توسط لِش[4] پیشنهاد شده است و براساس نظریه‌های پیاژه، برونر و دیینز ساخته شده

اســت. این مدل بر این نکته تأکید می‌کند که درک عمیق ایده‌های ریاضی در پنج شیوهٔ مختلف و توانایی برقــراری اتصالات بیــن این پنج شــیوه، بازتاب داده می‌شــود [۴]. این پنج شیوهٔ متمایز از بازنمایی‌ها که در یادگیری و حل مســئله‌های ریاضی رخ می‌دهند، عبارت‌اند از:

بازنمایی ملموس (دنیای واقعی): در این حالت مفهوم مورد نظر در ارتباط با رویدادها و کاربردهای آن در دنیای واقعی، سازمان‌دهی می‌شود [۴].

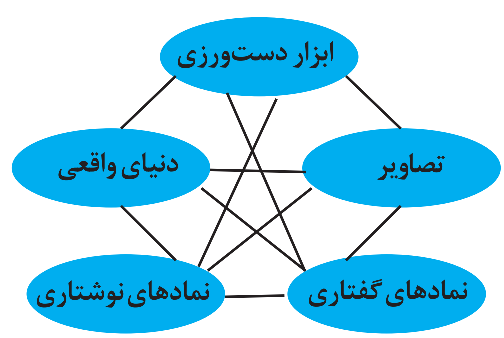
بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی): در این حالــت دانش‌آموزان برای فکر کــردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی، از دســت‌ورزی روی اشیا استفاده می‌کنند [۳].

بازنمایی تصویری (اشکال و تصاویر): در این حالت دانش‌آموزان با مشــاهده و یا رســم یک شکل، نمودار یا تصویر، از آن‌ها برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی به طور شــهودی، استفاده می‌کنند [۳].

بازنمایی گفتاری (شفاهی): کلمات گفته شده و توضیحاتی هستند که دانش‌آموزان برای صحبت کردن در مورد یک مفهوم ریاضی به کار می‌برند [۳].

بازنمایی نوشتاری (ذهنی): نمادگذاری‌هایی هســتند که دانش‌آموزان، آن‌ها را برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن به کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادها، اصول و توصیفات‌اند [۳].

مدل بازنمایی‌های لش فقط شامل پنج نوع متمایز از بازنمایی نیست؛ بلکه ارتباطات میان این بازنمایی‌ها نیز می‌باشد [۴]. (شکل ۱).



شکل ۱:
مدل لش از بازنمایی‌های چندگانه و ارتباط آن‌ها

به اعتقاد دیینز[۵]، کودکان در زندگی روزانه‌شــان با مفاهیم انتزاعی ریاضی آشــنا نمی‌شــوند؛ از این‌رو این مفاهیم باید در محــدوده‌ای از تجربیات عینی و ملموس و به‌صورت بازنمایی‌هــای چندگانه به آن‌ها معرفی شوند [۴].

استفاده از بازنمایی‌های گوناگون و مرتبط کردن آن‌ها بــه یکدیگر، باعث درک بهتــر دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی می‌شــود. تحقیقات صورت گرفته در این حوزه نشــان می‌دهد اگــر بازنمایی‌ها به‌صورت مؤثری با هم متصل شــوند، زمینــه درک موضوعات ریاضــی فراهم می‌شــود. در نتیجه ایجــاد ارتباط و اتصال بیــن بازنمایی‌های فیزیکی، تصویری، نمادین، نموداری، شــفاهی و ذهنی از یک ایده ریاضی، نقش کلیدی در درک عمیق‌تر آن ایفا می‌کند [۳].

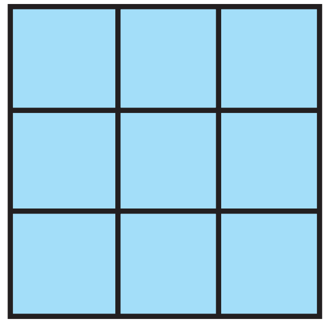
به اعتقاد دیینز، کودکان در زندگی روزانه‌شان با مفاهیم انتزاعی ریاضی آشنا نمی‌شوند؛ از این‌رو این مفاهیم باید در محدوده‌ای از تجربیات عینی و ملموس و به‌صورت بازنمایی‌های چندگانه به آن‌ها معرفی شوند

یک مثال عملی از به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در ریاضی دورهٔ ابتدایی (مدل لِش)

مثال زیر به‌عنوان تجربه آموزشی یکی از دانشجو-معلمان رشــته آموزش ابتدایی دانشــگاه فرهنگیان، به‌عنوان کار عملی بــرای درس «آموزش ریاضی در دوره ابتدایــی» با اســتفاده از بازنمایی‌های چندگانه و برقــراری ارتباط بین بازنمایی‌هــای مختلف، برای آموزش جدول شگفت‌انگیز به دانش‌آموزان، در کلاس اول ابتدایی انجام شده است:

بازنمایی ملموس (دنیــای واقعی): در این بازنمایی، معلم کلاس، یک جدول مقوایی ۹ خانه‌ای ۳×۳ که خودش درست کرده بود (شکل ۲) به همراه ۳ مــداد، ۳ تراش و ۳ پاک‌کن بــه کلاس آورد و به دانش‌آموزان گفت می‌خواهد به کمک آن‌ها یک بسته جایزه برای کمد جایزه‌ای که در کلاس بود، درســت کنند به‌طوری‌که هر سطر یا ستون این بسته، شامل فقط یک مــداد، یک تراش و یک پاک‌کن باشــد تا هر دانش‌آموزی که جایــزه به او تعلق می‌گیرد با هر انتخابی (انتخاب فقط یک سطر یا یک ستون دلخواه بســته جایزه) بتواند ۱ مداد، ۱ تــراش و ۱ پاک‌کن جایزه بگیرد. سپس معلم با دادن یک جدول کاغذی ۳×۳ به تمام دانش‌آموزان (در قالب گروه‌های ۳ نفره) از آن‌ها خواست تا چگونگی قرار گرفتن جایزه‌ها را در کنار همدیگر با شرط گفته شده و با روش‌های مختلف به‌دســت آورند (از طریق: چینش جایزه‌ها در جدول، رســم شکل جایزه‌ها، نوشتن نام جایزه‌ها، گفت‌وگو با

ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های فیزیکی، تصویری، نمادین، نموداری، شفاهی و ذهنی از یک ایده ریاضی، نقش کلیدی در درک عمیق‌تر آن ایفا می‌کند



شکل ۲: جدول شگفت‌انگیز ۳×۳

یکدیگر در مورد نحوه قرار گرفتن جایزه‌ها در جدول شگفت‌انگیز).

بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی): در این مرحله دانش‌آموزان هر گروه دست به کار شده و مدادها، پاک‌کن‌ها و تراش‌هایی را که معلمشان به آن‌ها داده بود، در جدول قرار دادند.

بازنمایی تصویری (رسم شکل): در این مرحله از دانش‌آموزان هر گروه خواسته شد شکل مدادها، تراش‌ها و پاک‌کن‌ها را در جدول مورد نظر رسم کنند (با رسم شکل‌های ساده).

بازنمایی نوشتاری (نوشتن نام): در این مرحله از دانش‌آموزان هرگروه خواسته شد تا با نوشتن نام مداد، تراش و پاک‌کن در خانه‌های جدول داده شده، جدول را کامل کنند. (اجرای این مرحله نیز بعد از یادگیری و توانایی نوشتن برخی از حروف فارسی توسط دانش‌آموزان و البته با کمک و راهنمایی معلم انجام شد).

بازنمایی گفتاری (بحث و گفت‌وگوی کلامی): این مرحله شامل گفت‌وگوی دانش‌آموزان درباره چگونگی قرار گرفتن اشیا (مدادها، تراش‌ها و پاک‌کن‌ها) در هر یک از بازنمایی‌های فیزیکی، تصویری، نوشتاری و ملموس می‌باشد.

نتیجه‌گیری

یاددهی و یادگیری مفاهیم و ایده‌های ریاضی به دانش‌آموزان همواره با مشکلاتی مواجه بوده است. فرایند یاددهی و یادگیری ریاضیات در مدارس باید به‌گونه‌ای باشد تا دانش‌آموزان بدانند که اغلب ایده‌های ریاضی می‌توانند به‌صورت ملموس، نموداری، نمادین و... معرفی شوند. باید تلاش کرد تا با فراهم کردن یک دیدگاه شهودی برای دانش‌آموزان و حرکت تدریجی از تجربه‌های عینی و ملموس آن‌ها به سمت ایده‌های مجردتر و استفاده مناسب از بازنمایی‌های چندگانه به ساخته شدن مفاهیم و ایده‌های ریاضی، به آن‌ها کمک شود. یکی از روش‌های مفید برای نشان دادن ارتباط درون یک حوزه یا بین حوزه‌های گوناگون ریاضی و برقراری ارتباط بین بازنمایی‌های چندگانه یک مفهوم ریاضی، استفاده از نرم‌افزارهای آموزشی مناسبی است که دانش‌آموزان می‌توانند به‌صورت همزمان و با بیشترین سرعت و دقت، برای یادگیری یک مفهوم، ارتباط بین فرمول‌ها، جدول‌ها و نمودارها را به سادگی مشاهده کرده و با تغییر یکی از بازنمایی‌ها، تغییر حاصل در دیگر بازنمایی‌ها را ببینند و ارتباط بین آن‌ها را درک کنند. نرم‌افزارهای Cabri و Geogebra دو نمونه از نرم‌افزارهای ریاضی هستند که می‌توان برای آموزش مفاهیم ریاضی و مشاهده ارتباطات بین بازنمایی‌های گوناگون در کلاس‌های ریاضی از دوره ابتدایی تا دوره متوسطه مورد استفاده قرار داد.

پی‌نوشت‌ها

1. Multiple Representation
2. Ozel
3. National Concile of Teachers of Mathematics
4. Lesh
5. Dienes

منابع

۱. دافعی، حمید (۱۳۸۹). بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی. **مجله رشد آموزش ریاضی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش‌وپرورش، شماره ۱۰۰. صص: ۷۵ـ۷۰.

۲. داودی، خسرو و همکاران (۱۳۹۱). **ریاضی اول دبستان**. وزارت آموزش‌وپرورش. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. چاپ دوم.

۳. گویا، زهرا و امامی، علی (۱۳۹۲). بازنمایی‌ها و نقش آن در درک مفهوم تابع. **مجله رشد آموزش ریاضی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش‌وپرورش. شماره ۱۱۴. صص: ۳۵ـ۲۴.

۴. نوروزی لرکی، فرزانه و همکاران (۱۳۸۹). بازنمایی‌های چندگانه: فرایندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها. **نشریهٔ علمی پژوهشی فناوری آموزش** (دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران). جلد ۵. شمارهٔ ۱. صص: ۲۳ـ ۱۳.

5. National Council of Teacher of Mathematics (2000). **Principles and Standards for School Mathematics** (NCTM-2000).pp:67- 70,360- 363.

دو مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

محمدحسام قاسمی
دبیر ریاضی شهرستان شهریار و کارشناس ارشد ریاضی

اشاره
مشکلات زبان در ریاضی و جنسیت ریاضی دو مفهوم از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دوره ابتدایی» نوشتهٔ «درک هایلوک» و «فیونا تانگاتا» هستند. نویسندگان این کتاب با تألیف آن تلاش دارند چهل و چهار مفهوم مطرح در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه‌چندان پیچیده، معرفی و تبیین نمایند.

کلیدواژه‌ها: یادگیری مفهوم، برقراری ارتباط و اتصال، فرآیند مدل‌سازی (نمایش)، گفت‌وگو، خلاقیت در ریاضی، خطاها، اضطراب از ریاضی، گفت‌وگو

مشکلات زبان در ریاضی[1]

تعریف

هرگاه سخن از مشکلات مربوط به زبان در حوزهٔ ریاضی مطرح می‌شود (به‌ویژه در این کتاب)، منظور مشکلاتی است که دانش‌آموزان در پنج زمینهٔ واژه‌های تخصصی، دستور و قواعد زبان، زبان مجرد و رسمی ریاضی، برداشت نادرست از مسائل کلامی و غالب شدن موضوع بر محتوا، با آن‌ها روبه‌رو می‌شوند. در این بخش، مشکلات ناشی از زبان را در همین پنج حوزهٔ عنوان شده، دنبال و تشریح می‌کنیم.

توضیح و بحث

اهمیت زبان در یادگیری ریاضی غیر قابل انکار است و حتی می‌توان آن را از کلیدی‌ترین ارکان در حوزهٔ تدریس ریاضی دانست. ما زمانی درک درستی از دیدگاه‌های ریاضی خواهیم داشت که قادر باشیم ارتباط مناسبی بین زبان، نمادها، تصویرها و شکل‌ها و موقعیت‌های واقعی برقرار کنیم (هایلاک و کوکبرن، ۲۰۰۳: ۱۹-۱). هر مفهوم یا ایدهٔ ریاضی، برای آن‌که فهمیده شود و این درک و فهم قابلیت انتقال به دیگران را پیدا کند، راهی جز این ندارد که از گذرگاه ارتباطی واژه‌ها و عبارت‌ها گذر کند. پِری و داکت[2] (۲۰۰۲: ۱۰۱)، در زمینهٔ موفقیت کودکان در یادگیری ریاضی، تا جایی که به مقولهٔ زبان مربوط است، به‌طور خلاصه بیان می‌کنند که «بدون یک زبان ارتباطی مخصوص، ساده و کامل در ریاضی که به کمک آن، دانش‌آموز با دانش‌آموزان و معلم ارتباط برقرار کند، روند پیشرفت در مسیر رسیدن به هدف‌ها، بسیار کند و طولانی خواهد شد.»

بنابراین، به دلیل همین ویژگی بسیار مهم زبان در یادگیری ریاضی، لازم است معلمان از مسائل و مشکلات پیچیده‌ای که زبان و نحوهٔ به‌کارگیری آن می‌تواند در مسیر یادگیری ایجاد کند، آگاه باشند. به همین خاطر، مشکلات ناشی از زبان را در پنج دستهٔ واژه‌ها، دستور و قواعد، زبان مجرد و رسمی، برداشت نادرست از مسائل کلامی و غلبهٔ موضوع بر محتوا، به‌طور جداگانه مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌ها

مشکلات زبانی ناشی از واژه‌های تخصصی ریاضی، در سه شکل متفاوت بروز می‌کنند:

۱. دسته‌ای از واژه‌های تخصصی ریاضی هستند که تقریباً، هیچ‌گاه در خارج از محیط مدرسهٔ ابتدایی و کلاس درس، به‌کار نمی‌روند و دانش‌آموز فقط آن‌ها را در کلاس درس ریاضی می‌شنود که «متوازی‌الاضلاع» و «عمودمنصف» از این نوع هستند. این گروه از واژه‌ها، چون در خارج از کلاس و در زندگی روزانهٔ کودکان، چه در صحبت‌های عادی (شفاهی) و چه در سایر متون (مکتوب)، استفاده نمی‌شوند و به این دلیل که موقعیت‌های واقعی تقویت‌کنندهٔ آن‌ها نیستند، ممکن است این حس را در کودکان تداعی کنند که ریاضی، مستقل و جدا از زندگی روزانهٔ آن‌هاست و یا اینکه ریاضی، چیزی است که فقط در مدرسه و کلاس درس، اتفاق می‌افتد.

۲. دسته دوم، واژه‌هایی هستند که هم در دایرهٔ لغات ریاضی قرار دارند و هم در دایرهٔ لغات عمومی؛ اما با معنا و مفهوم متفاوت و با کاربری مختلف در هر یک از این دو حوزه استفاده می‌شوند. برای مثال، در عبارت «اختلاف عدد ۸ و ۱۳» از واژهٔ «اختلاف» استفاده شده است که حتی منظور از آن، معنای عمومی آن یعنی تفاوت و تضاد نیست. حتی به این معنا هم نیست که عدد ۸، یک عدد یک‌رقمی و عدد ۱۳ یک عدد دورقمی است و از این نظر با هم اختلاف دارند. واژهٔ «اختلاف» در ریاضیات ابتدایی، معادل تفاضل دو عدد یا تعداد واحدهای بین آن دو عدد است و فاصلهٔ آن‌ها را نشان می‌دهد. یا در مثال دیگری از این نوع واژه‌ها، می‌توان به واژهٔ «Volume» در زبان انگلیسی اشاره کرد که کاربرد عمومی آن، به معنی میزان و شدت صوت است. در حالی که در ریاضی، همین واژه برای مفهوم «حجم» در شکل‌های فضایی به‌کار می‌رود. هم‌چنین کلمهٔ «Right» نیز در زبان عمومی انگلیسی، از معنای مشخصی برخوردار است که معادل «راست» یا «درست و دقیق» است و مسلماً، با مفهوم تخصصی ریاضی آن در کلمهٔ «Right angle» (قائم‌الزاویه) متفاوت است. به همین ترتیب در نمونهٔ دیگر، واژهٔ «Odd» که در ریاضی به اعداد فرد گفته می‌شود که بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، در زبان عامیانه، به معنای «عجیب و غریب» به‌کار می‌رود و مردم نیز به این معنا عادت کرده‌اند و به محض شنیدن آن، همین برداشت و تصور را از کلمه مورد نظر خواهند داشت. برای آشنایی با نمونه‌های بیشتر، به پیم[۳] (۱۹۸۷: ۸۹) مراجعه کنید. لازم است که معلمان هنگام استفاده از این واژه‌ها که بار معنایی متفاوتی در زندگی روزانه و در ریاضی دارند، با هوشیاری عمل کرده و تفاوت معنایی این واژه‌ها را با آن‌چه که کودکان در خارج از مدرسه می‌شناسند، به‌طور برجسته‌تری گوشزد کنند.

۳. دسته سوم، واژه‌هایی‌اند که در زبان ریاضی و در زبان عامیانه، تقریباً از بار معنایی یکسان برخوردارند، اما با این تفاوت که در ریاضی تعریفِ دقیق‌تر و جزئی‌تری از آن‌ها مورد نظر است در حالی که در مصادیق عمومی، این واژه‌ها لزوماً با آن دقت ریاضی، به‌کار نمی‌روند. برای مثال، وقتی که از عبارت‌های «یک کله قند مخروطی شکل» یا «یک حبه قند مکعبی شکل» استفاده می‌کنیم، در ذهن خود، واژه‌های «مخروط» و «مکعب» را با همان تعریف‌های دقیق و مشخص ریاضی تصور نمی‌کنیم یا اصلاً هنگام استفادهٔ عمومی از این واژه‌ها، به ویژگی‌های جزئی مخروط و مکعب فکر نمی‌کنیم، بلکه مخروط و مکعب را در ذهن خود، با ویژگی‌هایی عینی و کلی‌تر آن‌ها می‌شناسیم. یا در عبارت «کسری از ثانیه»، واژهٔ «کسر» لزوماً مشخص نمی‌کند که کدام کسر یا نسبت از یک ثانیه مورد توجه است! بلکه تنها اصطلاحی است که بزرگ‌ترها، برای بیان بخش کوچکی از زمان به‌کار می‌برند و تصور دقیقی از کسر با معنا و مفهوم ریاضی آن در ذهنشان نیست. یا کلمهٔ «دو نیم» در عبارت «سیبی که از وسط دو نیم شده است» که هر چند به نصف شدن سیب اشاره دارد، ولی به معنای آن نیست که سیب دقیقاً به دو نیمهٔ کاملاً مساوی و متقارن، تقسیم شده است.

نکته مهمی که باید در مورد نوع سوم از واژه‌ها که به مثال‌هایی از آن‌ها نیز اشاره شد، مورد توجه قرار داد، آن است که گاهی خود معلمان نیز، به دام چنین واژه‌هایی گرفتار می‌شوند. معلمی که به‌طور مداوم بر به‌کارگیری معنای دقیق واژه‌ها اصرار دارد، گاهی که می‌خواهد آن کلمه را با منظور عام و غیر دقیق بیان کند موجب گمراهی دانش‌آموزانش می‌شود. مثلاً واژهٔ «مقدار» در عبارت «چه‌مقدار باید به ۱۴ اضافه شود تا به ۱۶ برسیم؟»، هرچند منظور را به دانش‌آموز منتقل

بدون یک زبان ارتباطی مخصوص، ساده و کامل در ریاضی که به کمک آن، دانش‌آموز با دانش‌آموزان و معلم ارتباط برقرار کند، روند پیشرفت در مسیر رسیدن به هدف‌ها، بسیار کند و طولانی خواهد شد

می‌کند، اما کلمهٔ مناسب‌تر برای این جمله، «تعداد» است و نه «مقدار» و اگر معلم قبلاً بیش از حد در به‌کارگیری درست و دقیق این واژه‌ها سخت‌گیری کرده باشد، اکنون خود را در دام این مشکل گرفتار می‌کند و دانش‌آموزان نکته‌سنج، سریعاً به معلم در این مورد خرده می‌گیرند. دانش‌آموزان ضعیف‌تر نیز، درگیر چرایی به‌کارگیری کلمهٔ «مقدار» به‌جای کلمهٔ «تعداد» شده و فکر می‌کنند که شاید معلم، واقعاً چیز دیگری در نظر دارد و این، همان گمراه شدنی است که قبلاً به آن اشاره کردیم. هم‌چنین مفهوم واژهٔ «رقم» در عبارت «ارقام نجومی»، ممکن است این شبهه را در ذهن دانش‌آموز ایجاد کند که اگر معلم من دائماً در کلاس خود، بر تفاوت بین «رقم» و «عدد» تأکید داشت و رقم را همان اجزای از ۱ تا حداکثر ۹ معرفی می‌کرد که در عددهای مختلف در ارزش‌های مکانی مختلف قرار می‌گیرند، پس چرا خودش از «ارقام نجومی» دم می‌زند؟ و یک رقم نجومی چطور می‌تواند از رقم ۹ بیشتر باشد؟

دستور و قواعد

مشکلات زبانی که از ساختار زبان و قواعد آن سرچشمه می‌گیرند و فراوانی آن‌ها نسبت به دیگر مشکلات مشابه بیشتر است، به دو دسته مهم تقسیم می‌شوند:

۱. مشکل اول در مورد جایگاه اشتباه اعداد یا حروف اضافه در جمله‌های ریاضی است. مثلاً وقتی که جملهٔ «تفریق ۱۰ از ۵» را به‌جای «تفریق ۵ از ۱۰» به اشتباه به‌کار می‌بریم، مشکل ساختاری جایگاه نادرست اعداد اتفاق افتاده است. یا در جملهٔ «تخفیف بده تا ۲۰ پوند» به‌جای «تا ۲۰ پوند بهم تخفیف بده»، در جمله اول حرف اضافهٔ «تا» به محل توقف قیمت (قیمت نهایی ۲۰ پوند) برای کالای مورد نظر اشاره دارد در حالی‌که در جملهٔ دوم حرف اضافهٔ «تا» به میزان تخفیف درخواستی و نه قیمت کالا اشاره دارد. پس لازم است که معلمان، نسبت به ابهامی که چنین مشکلات ساختاری در مفهوم جمله‌ها ایجاد می‌کنند، آگاه باشند. از نمونه‌های دیگر مشکلات ساختاری از این نوع، می‌توان به جمله‌بندی نادرست، به‌کارگیری ابهام‌آلود افعال، حروف اضافه، مخفف کردن جمله‌ها به شکلی نادرست و نظایر آن، اشاره کرد. برای مثال، درجملهٔ «تقسیم ۱۰ و ۵ چی میشه؟» که قصد معلم، ساده و خلاصه‌کردن جمله بوده است، ممکن است دانش‌آموز را در فهم دقیق منظور معلم دچار سردرگمی کند و یکی از دو پاسخ ۰/۵ یا ۲ را در پاسخ به این سؤال، ارائه کند.

۲. مشکل دوم وقتی اتفاق می‌افتد که **معلم** به‌جای استفاده از جمله‌های پرسشی ساده، از جمله‌هایی ثقیل و با ادبیاتی که معمولاً نویسندگان و گویندگان حرفه‌ای، برای زیباترکردن و بخشیدن بار ادبی بیشتر از آن‌ها بهره می‌گیرند، استفاده می‌کند. در این حالت، جمله‌ها از نظر دستوری و قواعد زبانی هیچ مشکلی ندارند اما در چارچوب ساختار زبانی شناخته شده و معمول دانش‌آموزانِ آن ردهٔ سنی نیستند. در نتیجه، دانش‌آموز به‌جای توجه به خواستهٔ اصلی معلم در آن پرسش، درگیر خودِ جمله و برقراری با ساختار عجیب آن می‌شود. برای نمونه، جملهٔ پرسشی و ثقیل «کدام اعداد بین ۲۵ و ۳۰ قرار دارند که نمی‌توانند هنگام تقسیم بر اعداد دیگر، هم بر عدد ۲ و هم بر عدد ۳ بخش‌پذیر باشند؟» را در نظر بگیرید. این جمله توجه دانش‌آموز را به مثبت یا منفی بودن جمله (با توجه به به‌کارگیری هم‌زمان فعل منفی «نمی‌توانند» و فعل مثبت «باشند») و مفهوم عبارت‌های «هم ۲ و هم ۳» و «تقسیم بر اعداد دیگر» سوق می‌دهد و ممکن است او را از خواستهٔ اصلی یا شرط‌های مسئله (اعداد بین ۲۵ و ۳۰ باشند) دور کند. معلم می‌تواند به‌جای این جمله، از جمله‌ای ساده‌تر مانند «اعدادی بین ۲۵ و ۳۰ مثال بزنید که بر ۲ و ۳، بخش‌پذیر نباشند» استفاده کند. بنابراین در اینجا، مشکل در درست یا نادرست بودن جمله از لحاظ قواعد و دستور زبان نیست، بلکه مشکل مربوط به نوع و سطح قواعد و دستور زبان استفاده شده در جمله است. این نوع مشکل برای معلمان تازه وارد که سال اول تدریس خود را تجربه می‌کنند، بیشتر اتفاق می‌افتد، شاید به این دلیل که آن‌ها، از محیط دانشگاهی که ادبیات و ساختار زبانی خاص خود را دارد، بی‌فاصله وارد به محیط مدرسه و کلاس درس ابتدایی می‌شوند و این معلمان برای ارتباط با کودکان هنوز طبق عادت، از همان جمله‌ها و اصطلاحات دانشگاهی استفاده می‌کنند.

زبان رسمی و مجرد ریاضی

اینکه متون ریاضی دارای زبانی رسمی، نمادین و مجرد هستند، یک نقطهٔ قوت برای دانش ریاضی محسوب می‌شود که مزایا و محاسن زیادی را به دنبال داشته و خواهد داشت. اینکه چرا دانش‌آموزان مجبورند ریاضی را با همان شکل و بیان خاص و رسمی خود یاد بگیرند، مورد بحثمان در اینجا نیست، بلکه تمرکزمان بر بیان درست جمله‌ها، تلفظ درست اصطلاحات و استفاده از روش‌هایی است که در این زمینه، برای کمتر شدن مشکل دانش‌آموزان مطرح می‌شوند. دانش‌آموزان

یکی از بهترین شیوه‌های تقویت درک و فهم دانش‌آموزان از ایده‌های ریاضی نهفته در لابه‌لای زبان و نمادهای ریاضی، آن است که دانش‌آموزان را به ساختن یک داستان برای عملیات یا عبارتی که دارند، تشویق کنیم

نیاز دارند که علاوه بر فهـــم و درک عبارت‌های ریاضی، گویش درســـت و رسمی آن‌ها را نیز یاد بگیرند. این کار باعث ســـهولت در برقراری ارتباط و ساده‌تر شدن انتقال مفاهیم برای آنان می‌شـــود. مثلاً عبارت «۲۳=۱۴-۳۷» دارای تلفظ درست و رسمی «سی و هفت منهای چهارده مساوی است با بیست و سه» است. این جمله، کوتاه‌ترین و در عین حال انتزاعی‌ترین جمله برای بیان این عبارت اســـت، در حالی که دانش‌آموز ممکن اســـت در زندگی روزانـــه و موقعیت‌های واقعی، هیچ‌گاه با این بیان خاص، عبارت‌ها را ادا نکند. در موقعیت واقعی، جمله‌هایی مانند «من ۳۷ پوند داشتم که ۱۴تاش رو خرج کردم و حالا ۲۳ پوند دیگه برام مونده» به‌کار می‌روند. نکته اساسی دیگر در اینجا، ارتباط بین زبان رســـمی و زبان عمومی است که معلمان باید زمان و فرصت کافی را برای شکل‌گیری و تثبیت این ارتباط بســـیار مهم، ایجاد کرده و در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند.

درک ملمـــوس از نمادهای مجـــرد ریاضی، در قالب زبانی عامیانه و واقعی، از اصول اصلی دستورالعمل معلمان دورهٔ ابتدایی اســـت. بوئرو و همکاران (۲۰۰۲: ۲۴۳)، در نتیجهٔ پژوهشـــی در این رابطه، بر اهمیـــت زبان روزانه، به‌عنـــوان «یک میانجی بین فرآیندهـــای ذهنی، نمادها و اصطلاحات خاص و ســـازماندهی منطقی فعالیت‌های ریاضـــی» تأکید کرده‌اند. ولی اکنون بـــا وجود همهٔ این تفسیرها، مشکل اصلی این است که چگونه دانش‌آموزان می‌توانند بین زبان نمادها و زبان مرسوم و عامیانه‌ای که در موقعیت‌هـــای واقعی زندگی با آن‌ها مواجه هســـتند، ارتباطی معنادار برقرار سازند. این مشکل، در مورد کلمات و اصطلاحات مشـــترک بین ریاضی و زندگی دانش‌آموز، نمود بیشتری دارد و از اهمیت بیشتری نیز برخوردار است. مثلاً مفاهیم و اصطلاحاتی هم‌چون «مجموعه»، «پول»، «طول»، «مدت زمان»، «جرم»، «وزن» و «ظرفیت»، از این گونه‌اند (هایلاک و کوکبرن، ۲۰۰۳: ۵۸-۴۶).

برداشت نادرست از مسائل کلامی[4]

یکـــی دیگر از مشـــکلات زبانی دانش‌آمـــوزان دورهٔ ابتدایی، زمانی خودش را نشـــان می‌دهد که تفســـیر و برداشـــت شفاهی نادرســـتی از یک مسئلهٔ کلامی وجود داشته باشـــد. برای نمونه، اگر در یک مسئله کلامی که هدفش، کاربرد عمل است، از کلمهٔ «بیشتر» استفاده شده باشـــد، ممکن است ذهن دانش‌آموز به‌طور ناخودآگاه، به سمت عمل جمع کشیده شود. به مسئلهٔ «جان ۱۸ بلیط اتوبوس دارد، این تعداد ۷ تا بیشـــتر از تعداد بلیط‌های او در روز قبل است. او روز قبل چند تا بلیط داشته است؟» دقت کنید. در اینجا بـــه دلیل وجود کلمهٔ گمراه کنندهٔ «بیشـــتر» در صورت مسئله، برداشتی نادرست از منظور آن در ذهن دانش‌آموز شکل می‌گیرد و امکان دارد که او به اشتباه، پاسخ ۲۵=۷+۱۸ را برای این مسئله، بنویسد.

غلبهٔ موضوع بر محتوا

قبـــلاً به موضوع توجه بیش از حد ســـاختار و قواعد به‌کار رفته در جمله نسبت به محتوای جمله، اشاره کردیم. این‌بار، ممکن اســـت مشکلی مشـــابه با این، اما در مورد داستان یا موضوع به‌کار گرفته شده در مسئله، ایجاد شود. به این پرســـشِ معلم از دانش‌آموزان، دقت کنید: «مَگ موفق شـــده مقدار ۱۸/۸۰ پونـــد را برای خرید مجموعه دی‌وی‌دی‌های فیلم ارباب حلقه‌ها، پس‌انداز کند. این در حالی است که قیمت این مجموعه فیلم در ویدئو کلوپ شهرشان، ۲۶/۵۰ پوند است. او به چه‌مقدار پول دیگر نیاز دارد؟». معلم پس از پرســـیدن این سؤال، با پاسخ‌هایی ناشیانه یا شاید زیرکانهٔ کودکان روبه‌رو می‌شود. مثلاً «اون می‌تونه ارزونترش رو به‌صورت اینترنتی سفارش بده، چون تخفیف می‌دن»، «خوب با یکی دیگه از دوستاش شریک بشـــه» یا «فعلاً مجموعهٔ کاملـــش رو نخره، چون دیدن چندتا از دی‌وی‌دی‌هاش هم، کلی زمان می‌خواد و تا اون موقع، برای بقیـــهٔ دی‌وی‌دی‌ها می‌تونه پول جمع کنه». این پاسخ‌ها نشانهٔ غالب بودن موضوع و داستان در مسئله اســـت. در این مسئله، خرید دی‌وی‌دی‌های فیلم مشهور و پر سروصدای ارباب حلقه‌ها که بحث داغ محافل است، بر محتوای ریاضی مسئله که استفاده از عمل تفریق برای اعداد اعشاری است، غلبه دارد.

هر چند اضافه کردن عنوان‌ها و زمینه‌های جذاب به مسئله‌ها، می‌تواند باعث افزایش انگیزه، جلب توجه بیشتر و علاقه‌مندی دانش‌آموزان شود، اما باید از میزان تسلط زمینهٔ داستانی بر محتوا آگاه بود و اجازه نداد که تناسب و توازن بین زمینه و محتوا به هم خورده و محتوا و هدف مسئله، در سایهٔ زمینهٔ آن مسئله، قرار گیرد.

مثال‌های عملی

در ادامه، به دو نمونهٔ عملی همراه با پیشـــنهادهایی برای توجه بیشـــتر معلمان به مشکلات ناشی از زبان در ریاضی، اشاره می‌کنیم.

ساخت داستان برای یک عبارتِ ریاضی

یکـــی از بهترین شـــیوه‌های تقویـــت درک و فهم دانش‌آموزان از ایده‌های ریاضی نهفته در لابه‌لای زبان و نمادهای ریاضی، آن است که دانش‌آموزان را به ساختن

یک داستان برای عملیات یا عبارتی که دارند، تشویق کنیم. مثلاً دانش‌آموزی برای عبارت ۳ ÷۱۲ این داستان را ساخت که «تام ۱۲ بیسکوییت دارد و می‌خواهد آن‌ها را بین ۳ نفر از دوستانش تقسیم کند» (هایلاک و کوکبرن، ۲۰۰۳: ۷۹). یا دانش‌آموز دیگری برای عبارت ۳-۱۲ این داستان را ساخت که «۱۲ سرباز بودند، ۳ نفر زخمی شدند. چند نفر دیگر سالم هستند؟» (هایلاک و کوکبرن، ۲۰۰۳: ۴۸).

الگوهای زبانی

به دلیل پیچیدگی‌های ساختاری موجود در بیشتر جمله‌ها و عبارت‌های ریاضی، لازم است که معلمان ریاضی، جهت کمک به دانش‌آموزان برای فهم و تفسیر عبارت‌ها، بیشتر تلاش کنند و با صرف زمان بیشتر برای رفع ابهامات و مشکلات ناشی از زبان، کوشش کنند.

یکی از راهکارهای پیشنهادی به معلمان، داشتن الگوهای زبانی مشخص برای انجام عملیات خاص ریاضی است، به‌طوری که در این الگوها، فقط مقدار یا جای اعداد عوض می‌شود و الگو یا قالب جمله تغییر نمی‌کند. الگوها، قالب‌های تقریباً ثابتی هستند که بارها و بارها در کلاس‌های ریاضی شنیده و به کار گرفته می‌شوند. برای مثال، جملهٔ «اگر ۲۴ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، حاصل ۸ می‌شود»، دارای یک الگوی زبانی مشخص است که همواره در موقعیت‌های دیگر نیز از آن استفاده می‌شود و فقط اعداد به کار رفته در آن عوض می‌شوند، مثل جملهٔ «اگر ۱۰۰ را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنیم، حاصل ۲۵ می‌شود». استفادهٔ درست از الگوها و رعایت قالب آن‌ها خیلی مهم است، مثلاً جملهٔ «رادیکال ۸ با فرجهٔ ۳ برابر با ۲ است»، حاوی یک الگوی شناخته شدهٔ ریاضی (البته در سطح بالاتر ریاضی) است که اگر کسی آن را به‌صورت «۸ در رادیکال با فرجهٔ ۳، مساوی با ۲ است» به کار ببرد، با وجود اینکه ممکن است همان منظور را دنبال کند، ولی این الگو برای شنوندگان شناخته و عادی نیست.

یکی از وظایف اصلی معلمان ابتدایی، ارائهٔ درست الگوهای زبانی ریاضی است. اگر الگوها به‌صورت درست آموزش داده شوند، استفاده از آن‌ها به‌عنوان قالب‌هایی برای انتقال مفاهیم ریاضی، آسان‌تر می‌شود. این دقیقاً مثل الگوهای مرسوم زبانی است که هنگام احوال‌پرسی به کار می‌روند، چون در احوال‌پرسی معمولاً رفتارها، جمله‌ها و الگوهای ثابت و مرسومی به‌کار می‌روند، اگر شخصی از آن‌ها به همان صورت عادی خود استفاده نکند، باعث جلب توجه یا عدم موفقیت او در برقراری ارتباط با مخاطبش می‌شود.

اگر در ریاضی، الگویی به‌صورت «۱۲، ۳ تا بیشتر از ۹ است» به کار گرفته می‌شود، همین الگو می‌تواند اساسی برای جمله‌های دیگری مانند؛ «۱۲ تا کتاب، ۳ تا بیشتر از ۹ کتاب است»، «۱۲ کیلو گوجه‌فرنگی، ۳ کیلو بیشتر از ۹ کیلو گوجه‌فرنگی است» و «۱۲ سانتی‌متر نخ، ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۹ سانتی‌متر نخ است»، باشد. البته بسیاری از الگوهای زبانی، دارای معادل هستند و ممکن است دقیقاً با همان قالب مشخص استفاده نشوند. در عبارت بالا، الگوهای معادل عبارت‌اند از «۹، ۳ تا کمتر از ۱۲ است»، «۹ کتاب، ۳ تا کمتر از ۱۲ کتاب است»، «۹ کیلو گوجه‌فرنگی، ۳ کیلو کمتر از ۱۲ کیلو گوجه‌فرنگی است» و «۹ سانتی‌متر نخ، ۳ سانتی‌متر کمتر از ۱۲ سانتی‌متر نخ است».

مطالعهٔ بیشتر

فصل «ورود به عرصهٔ عدد از طریق زبان[5]» نوشتهٔ وایلی[6] (در تامسون، ۱۹۹۷)، به برخی از جنبه‌های مهم زبان و تأثیر آن بر یادگیری شمارش اشاره دارد. یکی از منابع کلیدی برای موضوع زبان در ریاضی، پیم (۱۹۸۷) است. هم‌چنین فرشافل و دی‌کورته[7]، بحث مفصل و مفیدی را در رابطه با واکنش کودکان نسبت به مسائل «قلم- کاغذی» حساب، تهیه کرده‌اند (فصل ۴ در نونز و بریانت[8]، ۱۹۹۷). گرابرگ[9] (۱۹۹۸) نیز منبع مفیدی برای معلمانی است که علاقه‌مندند تا راهکارها و روش‌های کمک به دانش‌آموزانِ با مهارت‌های زبانی ضعیف‌تر را، یاد بگیرند.

جنسیت و ریاضی[10]

تعریف

در علم آموزش ریاضی، منظور از «جنسیت»، آن دسته از تفاوت‌های جسمی و روانی بین دخترها و پسرهاست که ممکن است بر یادگیری ریاضی، تأثیرگذار باشد. در این بخش، تفاوت‌های جنسیتی را در چهار زمینهٔ «میزان موفقیت[11]»، «نگرش‌ها[12]»، «رفتار[13]» و «فرصت‌های برابر[14] آموزشی»، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

توضیح و بحث

قبل از هر چیز، باید این نکتهٔ بسیار مهم را تذکر دهیم که اگرچه برخی از مطالعات از نظر آماری نشان‌دهندهٔ وجود تفاوت‌هایی اندک بین دو جنس از لحاظ میزان موفقیت، نگرش، فرصت‌ها و رفتارهاست، اما به‌طور کلی، تجربه نشان داده است که دانش‌آموزان از هر دو جنس و در یک ردهٔ سنی، تقریباً هم‌گام با هم، در مسیر یادگیری پیش رفته‌اند.

یکی از وظایف اصلی معلمان ابتدایی، ارائهٔ درست الگوهای زبانی ریاضی است. اگر الگوها به‌صورت درست آموزش داده شوند، استفاده از آن‌ها به‌عنوان قالب‌هایی برای انتقال مفاهیم ریاضی، آسان‌تر می‌شود

میزان موفقیت

دختران دوست دارند کارهای خود را در مدرسه، بهتر و منظم‌تر از پسرها انجام دهند، اما در ریاضی، نتایج و عملکرد آن‌ها نسبت به پسرها ضعیف‌تر است. همین مشاهدات دلیلی شد که موضوع جنسیت به یکی از موضوعات مهم و جذاب تحقیقی در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی، تبدیل شود. بسیاری از این پژوهش‌ها در آن سال‌ها که عمدتاً در مورد دورهٔ دبیرستان و گروه سنی ۱۶ سال به بالا انجام می‌گرفت، بر میزان موفقیتِ نسبتاً کمتر دختران در درس ریاضی متمرکز بود. با این وجود، یافته‌های برخی از همین مطالعات، حاکی از موفقیت کمتر پسرها در انجام سایر موضوع‌های درسی نسبت به دخترها بود؛ به دلیل اهمیت هر دو، هدف پژوهش‌های اخیر در حوزهٔ جنسیت، بر چگونگی ارتقای عملکرد دخترها در ریاضی و پسرها در دیگر درس‌ها متمرکز بوده است (برای مثال، می‌توانید به «پروژهٔ افزایش موفقیت پسرها[15]»، که توسط دانشگاه کمبریج انجام شده و در پایگاه www-rba.educ.com.ac.uk قابل دسترس است، مراجعه کنید.)

به جدول‌های ۱ و ۲ دقت کنید. این جدول‌ها، نتایج آزمون‌های ملی را برای دو سطح ۴ و ۵ در انگلستان، نشان می‌دهند. این آزمون‌ها بر روی دانش‌آموزان پایهٔ ششم (۱۰ تا ۱۱ساله‌ها) و در سال ۲۰۰۶ اجرا شده است. با مشاهدهٔ این جدول‌ها، به پیش‌تازی عجیب دخترها در همهٔ زمینه‌ها به جز ریاضی، پی می‌بریم. (یادآور می‌شویم که منظور از سطح چهارم طبق برنامه[16]، سطحی است که انتظار می‌رود بیشتر دانش‌آموزان پایهٔ ششم، از عهدهٔ آن برآیند. ولی آزمون سطح پنجم، یک سطح بالاتر از انتظارات و توانایی‌های مورد نظر برای این پایه است.)

همان‌طور که از جدول‌ها مشخص می‌شود، عملکرد پسرها در همهٔ موضوع‌های درسی به‌خصوص در زبان انگلیسی و نوشتن، ضعیف‌تر از دخترهاست، اما این درس‌ها و دلایل عدم موفقیت پسرها در آن‌ها، موضوع بحثمان نیستند. تمرکز اصلی ما در اینجا، بر روی عملکرد ضعیف دخترها در درس ریاضی است و این عدم موفقیت در درس ریاضی در سطوح بالاتر، متأسفانه نمایان‌تر است (جدول شماره ۲). نتایج نشان می‌دهد که در این آزمون‌ها، تعداد کمی از دخترها موفق به کسب نمرات مطلوب در درس ریاضی شده‌اند.

نگرش‌ها

جاف و فاکسمن[17] (۱۹۸۶)، یک سری پرسش‌نامه را در اختیار دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۵ساله قرار دادند و

جدول شماره ۱: میانگین درصد موفقیت دخترها و پسرهای پایهٔ ششم در سطح ۴ از آزمون‌های ملی

(منبع: www.dfes.gov.uk)

موضوع	دخترها	پسرها
زبان انگلیسی	۸۵	۷۴
خواندن	۸۷	۷۹
نوشتن	۷۵	۵۹
علوم	۸۷	۸۷
ریاضی	۷۵	۷۷

جدول شماره ۲: میانگین درصد موفقیت دخترها و پسرهای پایهٔ ششم در سطح ۵ از آزمون‌های ملی

(منبع: www.dfes.gov.uk)

موضوع	دخترها	پسرها
زبان انگلیسی	۳۹	۲۶
خواندن	۵۳	۴۱
نوشتن	۲۳	۱۳
علوم	۴۶	۴۵
ریاضی	۳۱	۳۶

از تجزیه‌وتحلیل آن‌ها، به این نتیجهٔ مهم رسیدند که نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضی، با تفاوت‌های جنسیتی آن‌ها در ارتباط است. به این معنا که دختران نسبت به نتایج فعالیت‌های ریاضی خود، اعتمادبه‌نفس کمتری دارند و خودشان را دست‌کم می‌گیرند، در حالی که پسرها تمایل دارند به موفقیت‌های بیشتری در زمینهٔ ریاضی دست پیدا کنند. این یافته‌ها با نتایج به‌دست آمده توسط پومرانتز[18] و همکاران (۲۰۰۲)، مطابقت دارد. آن‌ها دریافتند که دختران با دقت بیشتری به ارزیابی عملکرد و کارکرد علمی خود می‌پردازند، در حالی که پسرها تمایل دارند خودشان را بی‌تفاوت، یا کمتر حساس نشان دهند و گاهی نیز در بیان میزان موفقیت‌های خود، مبالغه کنند. هایلاک (۱۹۸۴) دریافت که از بین دانش‌آموزان موفق‌تر ۱۱ تا ۱۲ساله، دختران اضطراب بیشتر و اعتمادبه‌نفس کمتری در ریاضی نسبت به پسرها از خود نشان می‌دهند. این اضطرابِ همراه با اعتمادبه‌نفسِ کمتر، در آزمون‌هایی که در آن‌ها خلاقیت ریاضی محورِ قرار می‌گیرد، بیشتر خود را نشان داده و بر روی نتایج تحصیلی دختران، اثر منفی می‌گذارد. در مطالعهٔ دیگری در همین رابطه،

هایلاک (۱۹۸۴)، برای بررسی میزان خطرپذیری، هنگام کار بر روی مسائل غیرمعمولی و جدید، طی یک مطالعهٔ موردی بر روی دخترها، به این نتیجه رسید که آن‌ها، از قدرت خطرپذیری کمتری برخوردار هستند و تمایل دارند فقط به محدوده‌ایِ از روش‌هایی که قبلا آموخته‌اند، فکر کنند

پورد[19] (۲۰۰۶: ۶۵-۶)، موضوع اعتمادبه‌نفس را یک نوع مشکل نگرشی خاص نسبت به ریاضی می‌داند و به گفتهٔ وی، پسران در یادگیری ریاضی نسبت به دخترها، لجوج و سخت‌گیرتر هستند و این، به نوعِ نگرش و ذهنیتشان نسبت به خود برمی‌گردد که دوست ندارند در کارهای سخت‌تر، به اصطلاح کم بیاورند. پسرها نسبت به دخترها در حل مسائل سخت‌تر استوارتر هستند، به این معنا که دائماً تلاش می‌کنند مسئله را از راه‌های مختلف حل کنند تا به نتیجه برسند. در حالی که دخترها، هنگام مواجهه با یک مسئلهٔ خیلی سخت، کمتر بر روی حل آن پافشاری کرده، زود تسلیم شده و از حل آن منصرف می‌شوند.

رفتار

هایلاک (۱۹۸۴)، برای بررسی میزان خطرپذیری، هنگام کار بر روی مسائل غیرمعمولی[20] و جدید، طی یک مطالعهٔ موردی بر روی دخترها، به این نتیجه رسید که آن‌ها، از قدرت خطرپذیری کمتری برخوردار هستند و تمایل دارند فقط به محدوده‌ای از روش‌هایی که قبلاً آموخته‌اند، فکر کنند. آن‌ها ترجیح می‌دهند بر روی افکار خود ثابت قدم باشند و در به‌کارگیری روش‌های متفاوت، از خود انعطافی نشان ندهند. در این بین، بعضی از پژوهشگران معتقدند که تفاوت‌های ناشی از جنسیت در یادگیری ریاضی و رفتارهای مرتبط با آن، برای اولین بار به‌طور محسوس، خود را در سال‌های ابتدایی مدرسه نشان می‌دهد. از جملهٔ این پژوهشگران، می‌توان به پورد (۲۰۰۶: ۱۳۲) اشاره کرد که معتقد است دخترها، علاقه دارند که فعالیت‌هایشان به تحسین و تشویق و دریافت پاداش از طرف معلم منجر گردد. به همین دلیل، به انجام فعالیت‌های غیر رقابتی و ایمن علاقه دارند و کمتر وارد یک حوزهٔ فکری جدید و ناشناخته در حل مسائل می‌شوند. از دید آن‌ها در حل مسائل غیرمعمولی، لزوماً موفقیت با به‌کارگیری روش‌های ابتکاری و حدس و آزمایش کردن تضمین نمی‌شود. هم‌چنین ناتبراون[21] (۲۰۰۶: ۵۴-۵)، دیدگاه جدیدی مطرح کرده و معتقد است که بسیاری از این تفاوت‌ها، در رفتار آموزشی دخترها با پسرها، بیشتر از آنکه ناشی از جنسیت باشد، ناشی از نگرش و انتظارات متفاوت معلم از آن‌هاست. مثلاً در سنین پایین‌تر و در مهد کودک‌ها، پرستارها به گونه‌ای با دخترها و پسرها رفتار می‌کنند که انگار از همان ابتدا تأثیر تفاوت‌ها در نوع آموزش را به رسمیت شناخته‌اند. برای نمونه، برخی از فعالیت‌های کودکان را به گونه‌ای طراحی می‌کنند که برای دخترها، متناسب با آشپزی و خانه‌داری و برای پسرها متناسب با امور فنی یا کامپیوتر باشد که انگار، قرار است آیندهٔ آن‌ها نیز به همین سمت و سو پیش برود. حتی خود مربیان مهد کودک نیز تصور می‌کنند که این شیوه، متناسب با طبیعت متفاوت دخترها و پسرهاست. پذیرش متفاوت بودن دختر و پسر از جانب معلم یا مربی، به‌تدریج این حس را نیز در کودکان تداعی و تقویت می‌کند که بعضی از موضوع‌های درسی و کارهای درسی، برای دخترها و بعضی دیگر برای پسرها طراحی و ساخته شده است و هر دو، نمی‌توانند همه را انجام دهند. ناتبراون معتقد است که مربیان با مشاهدهٔ تمایل بیشتر پسرها به تجهیزات فنی و کامپیوتر (و در سطحی بالاتر، کارهای محاسباتی و ریاضی)، انتظارات و فعالیت‌های کلاس را نیز به شکل جهت‌داری، با همین نگرش طراحی می‌کنند، در حالی که باید از همان کودکی، انتخاب‌ها تقریباً آزادانه باشند.

گورا[22] (۱۹۹۲) بیان می‌کند که نقش و اثرگذاری بزرگ‌ترها در افزایش یا کاهش بروز تفاوت‌ها در میزان یادگیری دخترها و پسرها بسیار مهم است. مثلاً در بازی با بلوک‌های اسباب‌بازی (لِگو)، به‌طور طبیعی به دلیل علاقهٔ بیشتر پسرها به ساخت و سازهای فنی، بین عملکرد دخترها و پسرها تفاوت‌هایی وجود دارد؛ اما این تفاوت‌ها بسیار ناچیزند و با مداخلهٔ بزرگ‌ترها در بازی، می‌توان این تفاوت را برطرف کرد. بزرگ‌ترها می‌توانند با ایجاد فرصت‌های بیشتر و دادن زمان کافی به دخترها برای بررسی بلوک‌ها و راهنمایی آن‌ها، این تفاوت‌های رفتاری را به حداقل برسانند.

یکی دیگر از جنبه‌های رفتاری متفاوت دخترها، تمایل آن‌ها به هم‌کلام شدن با یکدیگر و انجام کارها به شکل گروهی است و از انجام کارها به‌صورت انفرادی که خطر بالایی دارد، دوری می‌کنند. معلمان مدارس ابتدایی اغلب شاهد آن هستند که دخترها در به اشتراک‌گذاری نظرها، گوش دادن به یکدیگر و به تصویر کشیدن تصورات خود، بهتر از پسرها رفتار می‌کنند. این مشاهدات، با یافته‌های علمی در جدول ۱ و ۲ مطابقت دارد که نشان می‌دهد دخترها در «مشاهده» و «مهارت‌های زبانی»، عملکرد بهتری دارند. از سویی دیگر، پسرها غالباً رقابتی‌تر هستند و علاقه دارند در فعالیت‌هایی مشارکت کنند که برنده و بازنده داشته باشد و بتوانند با برنده شدن، توانایی‌های خود را به رخ دیگران بکشانند.

یکی دیگر از جنبه‌های رفتاری متفاوت دخترها، تمایل آن‌ها به هم‌کلام شدن با یکدیگر و انجام کارها به شکل گروهی است و از انجام کارها به‌صورت انفرادی که خطر بالایی دارد، دوری می‌کنند

فرصت‌های برابر

در برخی از نمونه‌های مشاهده شده در رابطه با تفاوت‌های ناشی از جنسیت در میزان عملکرد ریاضی، نقش نگرش و رفتار، از همه پررنگ‌تر است. اما آنچه که

مهم‌تر اســت، تأثیرات این تفاوت‌ها بر آموزش اســت و نگرانی از اینکه این عوامل، منجر به نابرابری‌های آموزشی شوند. نگرش کودکان خردسال نسبت به ریاضی، تا حدود زیادی تحت تأثیر نگرش و رفتار معلمان و والدین شکل می‌گیرد. مثلاً گاهی از بزرگ‌ترهای خود می‌شــنوند که درس ریاضی و فعالیت‌های مرتبط با آن، پسرانه و مردانه اســت و چون برای دخترها نامناســب است، پس خیلی مهم نیست که دخترها در این درس خوب باشند. موضوع مهم‌تر این اســت که این نوع نگرش‌های منفی نسبت به ریاضی، می‌تواند به‌طور ناخودآگاه، حتی از نسلی به نسل دیگر منتقل شود (بارنت و ویچمن، ۱۹۹۷)[۲۳].

نگرش متفاوت معلمان به توانایی دخترها و پسرها، هم‌چنین نگرش متفاوت دخترها و پســرها نســبت به ریاضی، می‌تواند منجــر به ایجاد فرصت‌هایی ناعادلانه و نابرابر برای دخترها و پسرها شود. این خطر همیشه وجود دارد که رفتار آموزگار با دخترها و پسرها در کلاس ریاضی، یکسان نباشد[۲۴] و در نتیجهٔ آن، فرصت‌های متفاوتی را در اختیار هرکدام قرار دهد. بعضی از معلمان بر این باورند که چون به‌طور ذاتی، دخترها و پسرها با هم متفاوت هستند، پــس باید انتظارات متفاوتی نیز از آن‌ها داشــت که این نوع نگاه معلمان نیز، تحت تأثیر هنجارهای جامعه شکل می‌گیرد. برای مثال، سورو (۲۰۰۲)[۲۵] گزارش می‌دهد که در کشور فنلاند، بیشتر معلمان بر این باورند که دختران در ریاضــی، به فرآیندهای حفظ کردنی، متداول و دارای الگوریتم‌هــای معین، تمایل بیشــتری دارند و برعکس، پسرها علاقه و توجه‌شان هنگامی برانگیخته می‌شود که معلم، مباحث را از حالت معمول و معین خود خارج کرده و مســائلی جدید و چالش‌برانگیز مطرح کند. هم‌چنین، این تصــور بین معلمان فنلاندی وجود دارد که دخترها، انرژی خود را در اســتمرار، سخت‌کوشی، زیاد خواندن و حفظ کردن صرف می‌کنند، در حالی که پســرها بدون نیاز به سخت‌کوشــی و زحمت دادن به خود، از مغزشان کار می‌کشند.

نگرش متفاوت معلمان به توانایی دخترها و پسرها، هم‌چنین نگرش متفاوت دخترها و پسرها نسبت به ریاضی، می‌تواند منجر به ایجاد فرصت‌هایی ناعادلانه و نابرابر برای دخترها و پسرها شود. این خطر همیشه وجود دارد که رفتار آموزگار با دخترها و پسرها در کلاس ریاضی، یکسان نباشد و در نتیجهٔ آن، فرصت‌های متفاوتی را در اختیار هرکدام قرار دهد

سورو (۲۰۰۲)، نسبت به احتمال افزایش این حس «ترســناک[۲۶]» در بین معلمان هشدار می‌دهد و معتقد است که بســیاری از معلمان فنلاندی، به اشتباه بر این باورند که باید در اتخاذ روش‌های آموزشی بین دخترها و پسرها، تفاوت قائل شد. معلمان فنلاندی، به‌خصوص معلمــان مرد، گاهی اوقات در نوع ارتباط با مســائل یا در شــیوهٔ تدریس خود در درس ریاضی، برای دخترها محافظه‌کارانه‌تــر عمل می‌کردند. به این معنا که معلم، به تصور اینکه دخترها در ریاضی، به‌ویژه ریاضی سطح بالاتر، مشــکل دارند و اگر سطح تدریســش را از نظر پیچیدگی مطالب بالا ببرد، ممکن است هم در تدریس خــود و هم در یادگیری آن‌ها، مشــکلاتی به‌وجود آید. پس با انتخاب یک روش تدریس بی‌خطر و بدون چالش و تقریباً بدون توجه به رویکرد حل‌مسئله، به خیال خود در حق دخترها لطف کرده و متناسب با ظرفیت آن‌ها، عمل کردند. این در حالی اســت کــه همین معلمان، برای پســرها فرصت‌های چالش‌برانگیز و مبتنی بر حل مسئلهٔ بیشــتری ایجاد نموده و مسائل را تا آنجایی که امکان داشــت، دشوار و ســطح بالا انتخاب کردند و در کلاس خــود، ارائه نمودند. نتیجهٔ ایــن دیدگاه، چیزی جز بی‌عدالتی آموزشــی و ایجاد فرصت‌های نابرابر برای جنســیت‌های مختلف (قوی و قوی‌تر کردن پســرها و ضعیف و ضعیف‌تر کردن دخترها) نبود.

مثال‌های عملی

واضح است که آموزگاران مدارس ابتدایی، به تنهایی قادر نیستند نگاه جامعه را نسبت به تفاوت‌های جنسیتی بین دخترها و پسرها تغییر دهند، اما می‌توانند روش‌هایی در تدریس خود به کار گیرند که تضمین‌کنندهٔ فرصت‌های برابر آموزشــی بــرای هر دو جنس باشــد. بــا این کار، دانش‌آموزان می‌توانند از حداکثر توان خود بهره ببرند.

در وجود اصل تفاوت جنسیتی بین دخترها و پسرها و تأثیرشان بر عملکرد آن‌ها در درس ریاضی، شکی نیست. اما این موضوع، نمی‌تواند به بهانه‌ای برای ارائهٔ فرصت‌های متفاوت و اعمال نابرابری‌های آموزشی نسبت به دختران تبدیل شود. اصل و ماهیتِ ریاضی، «فرا جنسیتی» است و جدای از همهٔ ایــن تفاوت‌ها و نگرش‌های موجود بین افراد جامعه و معلمان، ریاضی مقوله‌ای انســانی است و فرصت‌های یادگیری آن نیز باید انسانی و همگانی باشد، نه اینکه متأثر از جنســیت افراد، تدریس در دو ســطح متفاوت ارائه شود.

در همین راســتا، بــه برخی از اقدامــات عملی که می‌تواننــد در کاهش نابرابری در فرصت‌های آموزشــی برای دخترها و پســرها، مؤثر باشند، اشاره می‌کنیم: (به دلیل ارتباط این بحث با بخش «اضطراب از ریاضی»، به توصیه‌های پایانی آن بخش رجوع کنید)

۱. ســعی کنید که بین فعالیت‌های فردی، دو نفری یا گروهی در درس ریاضی، یک نوع تعادل ایجاد کنید به گونه‌ای که بین فعالیت‌های ریاضی از نظر محتوا و سطح، تفاوتی نباشد.

۲. ســعی کنید که گروه‌های کلاسی، شامل هر دو جنس باشند. اما با این وجود، حواس‌تان باید بیشتر متوجه گروه‌هایی باشد که در آن‌ها، دانش‌آموزهایی از یک جنس

خاص، می‌خواهند برتـــری خود را به تمام گروه تحمیل کنند. اطمینان حاصل کنید کــه همهٔ دانش‌آموزان، به منابع برابر و فرصت‌های یکسان، دسترسی داشته باشند.

۳. در تمـــام فعالیت‌ها، باید تمام گروه‌ها مشــارکت داشـــته باشند و این طور نباشد که بعد از مدتی، گروهی از یک جنس خاص (مثلاً پسرها)، حرف اول و آخر را در انجام همهٔ فعالیت‌ها بزند و گروه دیگری از جنس مخالف، به حاشیه رانده شود.

۴. از تأکیـــد بیـــش از حد بر رقابت و ســـرعت در عملکرد، خودداری کنیـــد و هرگز رقابت بین دخترها و پسرها را معیاری برای قضاوت خود قرار ندهید.

۵. دانش‌آموزانـــی را که ممکن اســـت در یک گروه، تمایل بیشـــتری به یادگیری طوطی‌وار داشـــته باشند (معمولاً دخترها) شناســـایی کنید و با پرســـش و توجه بیشـــتر، آن‌ها را به درک و فهمیدن محاسباتی که انجام می‌دهند، تشویق کنید.

۶. در فعالیت‌هایی کـــه از ابزارهای فنی و کامپیوتر استفاده می‌شـــود، مطمئن شوید که تمام دانش‌آموزان، به آن وسایل، دسترسی یکســـان دارند. این خطر وجود دارد که یک جنس خاص (معمولاً پسرها)، به این دلیل که خود را دانای کل در امور کامپیوتر و فنی می‌پندارند، در گروه به یک راهبر دیکتاتور مبدل شده و جنس دیگر (معمولاً دخترها) را در گروه، به حاشیه برانند.

۷. در کلاس درس خـــود، رویه‌ای اتخاذ کنید که بر اساس آن، دانش‌آموزان به انجام خطرهای منطقی تشویق شوند و شما نیز، نسبت به خطاهای دانش‌آموزان، مثبت فکر کنید.

۸. نگذارید که نظرهـــا و ایده‌های افرادی در خارج از کلاس که نگاه متفاوتی نسبت به یادگیری ریاضی دختران و پسران دارند، بر برنامه، روش و طراحی تدریسِ شما، اثر بگذارند.

۹. ممکن است در کلاس درس، به‌طور طبیعی بارها تفاوت‌های جنسیتی بروز کند یا در کلاس درس، افرادی از یک جنس خاص، همیشه موفق‌تر باشند. اما به هیچ وجه نگذارید این موضوع برجســـته شده و به تقویت فرضیه‌ای نادرست در مورد جنسیت، در ذهن دانش‌آموزان دامن بزند که اگر این فرضیه به یک باور تبدیل شود، تغییر این باور نادرست از ذهن کودکان، کار آسانی نخواهد بود.

مطالعهٔ بیشتر

یکی از بهترین منابع در رابطه با برابری جنســـیتی در ریاضی، توســـط حنا[۲۷] (۱۹۹۶) نگاشـــته شده است. گالاگر و کافمـــن[۲۸] (۲۰۰۵) نیز، مجموعه‌ای از مقالات مفید را گردآوری کرده‌اند که به‌خوبی نشان‌دهنده علاقهٔ پژوهشگران، به موضوع جنسیت است. در این منبع، از ابعاد مختلف روان‌شناسی هم‌چون شناخت‌گرایی، اجتماعی، شخصیت، خودنگرشی[۲۹] و روان- زیست‌شناختی، انجام شده به مقولهٔ جنسیت نگاه شـــده است. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ نمونه‌هایی از تفاوت‌های جنسیتی و تأثیر آن‌ها بـــر موفقیت تحصیلی دانش‌آمـــوزان در بریتانیا و ایالات متحـــده، می‌توانید به منبـــع فریمن[۳۰] (۲۰۰۳) مراجعه فرمایید.

پی‌نوشت‌ها

1. Language difficulties in mathematics
2. Perry and Dockett
3. Pimm

۴. Word Problem (مســـائل کلامـــی، نوع خاصی از مسائل ریاضی است که به توصیف موقعیتی از دنیای واقعی می‌پردازد. در واقع، منظور از مســـائل کلامی، مسئله‌هایی هســـتند که در آن‌ها، صورت مســـئله حاوی داســـتان یا ماجرایی بسیار کوتاه است که قصد دارد به‌کارگیری چهار عمل اصلی را در قالب موقعیت‌های واقعی، نشان دهد.)

5. Approaching number through language
6. Wighley
7. Verschaffel and De corte
8. Nunes and Bryant
9. Grauberg
10. Gender and Mathematics
11. Achievement
12. Attitudes
13. Behavior
14. Equal opportunities
15. Raising Boys Achievement project

۱۶. برنامهٔ درسی ملی انگلستان

17. Joffe and foxman
18. Pomerantz
19. Pourd
20. Non- routine
21. Nutbrown
22. Gura
23. Burnett and Wichman

۲۴. در انگلســـتان نیز مانند ایران، اغلـــب آموزگاران زن هستند. اما در انگلستان، مدارس مختلط‌اند و بدین سبب این بحث موضوعیت دارد. در صورتی که در ایران،همیشه مـــدارس - به جـــز در موارد خاص- به تفکیک پســـرها و دخترها بوده و شاید این مورد، برای کلاس درس در ایران موضوعیت جدی نداشته باشد.

25. Soro
26. Appalling
27. Hanna
28. Gallagher and kaufman
29. Self-oriented
30. Freeman

چگونه حل کنیم؟

گزارشی از چهلمین کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی

۳ تا ۷ آگوست، سِگِد، مجارستان

زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

در سال ۱۹۷۶، با مشارکت تعدادی از ریاضی‌دان‌ها و روان‌شناسان که به آموزش ریاضی علاقه‌مند بودند و به‌طور حرفه‌ای یا تجربی، به این حوزه می‌پرداختند، یک نهاد پژوهشی به نام «گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی» دایر شد. این نهاد، تبدیل به درختی تنومند شد که به‌طور مستمر، کنفرانس‌های سالانه خود را برگزار کرده و انتخابات اعضای کمیته بین‌المللی را طبق اساس‌نامه خود که به «قانون اساسی» این گروه معروف است، انجام می‌دهد و امسال، چهلمین سال تأسیس خود را به نام جورج پولیا ریاضی‌دان و آموزشگر ریاضی مجاری، در زادگاهش جشن گرفت. نکته مهم در حفظ تعادل، دموکراسی و جلوگیری از انحصارطلبی در این گروه این است که در هر موردی که در آن، بحث «انتخاب» است، کسی بیش از یک بار، امکان «انتخاب شدن» ندارد. این بخش‌ها شامل رئیس (به مدت سه سال)، عضو کمیته بین‌المللی (به مدت چهار سال)، عضویت در میزگرد کنفرانس و سخنران عمومی است.

کلیدواژه‌ها: گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی، مجارستان، جورج پولیا

پرسیدم که «سوغات اصلی اینجا چیست که بخرم و با خودم ببرم؟»، بی‌تأمل گفت «مکعب روبیک»! تازه یادم آمد که در مجارستان هستم! کشوری که در دو سده گذشته، شاید بیش از هر نقطه دیگری در کره خاکی- نه به نسبت جمعیت- ریاضی‌دان به جهان تقدیم کرده و شاخه‌های ریاضیات مدرن را پایه‌گذاری کرده است.
از پاسخ فوری یک صاحب دکه در کنار یکی از آثار دیدنی شهر بوداپست، می‌شد حس کرد که ریاضی، اگر نه با زندگی- که قضاوت عجولانه‌ای برایم بود- ولی با فرهنگ و رسوم و زیستن مردم این کشور، عجین است. از فون نیمن واضع سیبرنیتیک گرفته تا اردوش و روبیک و پولیا و... و ظاهراً تا همیشه، این کشور مهد ریاضی‌دانان بوده و هست. چهلمین کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME40)، در دیار جوج پولیا و به نام و یاد او، با شعار «چگونه حل کنیم؟»، در دانشگاه شهر سِگِد (Zseged) در مجارستان، برگزار شد. سخنران افتتاحیه، آلن شونفیلد، چهره سرشناس حل مسئله ریاضی از دانشگاه برکلی بود که از قضا، او هم مجاری از آب درآمد! چیزی که تا به حال، نمی‌دانستم و نمی‌دانستیم!
شونفیلد قبل از شروع سخنرانی‌اش، توضیح داد که اصلیتش مجاری است و پدربزرگش در مجارستان، به تولید و صادرات فلفل قرمز (Paprika)- معروف‌ترین محصول کشاورزی این کشور- به آمریکا بوده است و آلن نوجوان، مسئول بازاریابی برای فلفل‌ها شده است! او گفت قبل از اینکه پا روی خاک مجارستان گذاشته باشد، آن خاک را در آمریکا، با فلفل قرمزها حس و لمس کرده بود. بعد از این مقدمه شیرین، شونفیلد به ارائه سخنرانی خود با عنوان «حل مسئله تدریس قوی» در ریاضی و مرور فعالیت‌هایش در زمینه حل مسئله ریاضی پرداخت. او بیان کرد که در سال ۱۹۷۴- یک سال پس از دریافت مدرک دکتری ریاضی خود از دانشگاه استانفورد، به‌طور تصادفی با کتاب معروف جورج پولیا، ریاضی‌دان معروف مجاری با عنوان «چگونه حل کنیم؟» آشنا شد و همین آشنایی، مسیر زندگی حرفه‌ای او را تغییر داد و باعث شد که به‌طور

مستمر، در حوزه پژوهش در حل مسئله ریاضی، علوم شناختی، هوش مصنوعی و برنامه درسی ریاضی بپردازد. لازم به توضیح است که در سال ۲۰۱۱، «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی» (ICMI)، شونفیلد را به پاس تلاش‌های بی‌وقفه‌اش در حوزه پژوهش حل مسئله ریاضی و برنامه درسی ریاضی دوره متوسطه و دانشگاه و ده‌ها و ده‌ها فعالیت ارزشمند و ماندگار دیگر طی ۳۰ سال گذشته، برنده جایزه معتبر فلیکس کلاین اعلام کرد و این جایزه، در سال ۲۰۱۲ در «دوازدهمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی» (ICME13) به وی اعطا شد.

شونفیلد در سخنرانی خود، به تشریح نظریه جدیدش در مورد «تدریس برای فهم و درک دقیق و قوی»: (TRU) (Teaching for Robust Understanding) پرداخت. وی رد تمایز بین تحقیقات ریاضی با آموزش ریاضی، ابراز داشت که در اولی، تلاش برای ساختن یک مدل ریاضی است و علامت «والسلام» (QED) که پای اثباتی گذاشته شود، بیان‌گر این است که فرد، به چیزی که از نظرش قطعی (Certain) است، رسیده است. در صورتی که در تحقیقات آموزشی، مسئله مهم، سازگاری درونی (Internal Consistency) یافته‌هاست.

پس از آن، به ارائه ملی (Natinal Presentation) مجارستان در حوزه ریاضی و آموزش ریاضی رسید. این برنامه شامل چندین سخنرانی کوتاه بود که طی آن‌ها، هر یک از ارائه‌دهندگان، به وجه خاصی از ریاضیاتی که مجارستان مبدع و مبتکر آن بوده پرداختند، و نقش ریاضی‌دان‌های برجسته را در تدوین و نظارت بر برنامه‌های درسی ریاضی از پیش‌دبستانی تا دوره‌های دکتری، مرور کردند.

سخنران روز دوم، روزا لِیکین (RozaLeikin) بود که در مورد «تعامل بین خلاقیت و مهارت دانستن (تخصص) در تدریس و یادگیری ریاضی» (Interplay between Creativity and Expertise inTeaching and Learning of Mathematics)، صحبت کرد.

سخنران روز سوم، ماساتاکا کویاما (Masataka Koyama) بود که با روش پیشنهادی پولیا، ابتدا به ارزیابی دو الگوی موجود درس‌پژوهی پرداخت و سپس از تعامل و تقابل آن‌ها، روش سومی را نتیجه گرفت که ویژگی اصلی آن، پویایی‌اش بود. عنوان سخنرانی «چرخه پویایی که از بازتاب بر تعامل یا تقابل دو چرخه مکمِل درس‌پژوهی در ریاضیات مدرسه‌ای حاصل می‌شود» (Dynamic Cycle Driven by the Dialectic Cycle of Two Complementary Reflections in Lesson Study on School Mathematics) بود.

طبق سنت همیشگی این کنفرانس، روز چهارم به میزگرد اختصاص داشت که در سال ۲۰۱۵، روش اجرای آن را تبدیل به مناظره کردند و چون مورد استقبال شرکت‌کنندگان واقع گردید، قرار شد که فعلاً، همین شیوه اجرا ادامه یابد. موضوع میزگرد امسال این بود که «آیا حل مسئله، قابل تدریس است؟» (Is Problem Solving Teachable?) و گرداننده میزگرد، هلن چیک (Helen Chick) بود. زیلارداندریاس (Andras Szilard) و مارکو هانولا (MarkkuHannula) نقش مخالفان و بریندرجت کار (Brinderjeet Kaur) و مِریام اَمیت (Miriam Amit)، نقش موافقان را اجرا کردند و در پایان با جمع‌بندی هلن چیک، معلوم شد که پاسخ مخالفان هم به سؤال میزگرد، به‌طور مشروط مثبت بود و تدریس و آموزش حل مسئله را طبق شرایطی که بیان کردند، ممکن دانستند.

آخرین سخنرانی، به باربارا یاورسکی (Barbara Jaworski) بود که با عنوان «چگونه حل کنیم: با تمرکز بر مسائل تدریس ریاضی» (How to Solve it: With a Focus on Problems in Mathematics Teaching) ، انجام شد.

در مجموع در این کنفرانس که بیش از ۴۰۰ نفر در آن شرکت داشتند، ۱۵۳ گزارش تحقیقی، ۱۷۱ ارائه کوتاه از پژوهش‌هایی که در حال انجام هستند، سه مجمع تحقیق (Research Forum)، دو گروه کاری، چهار گروه بحث، ۶۸ پوستر، دو نمایشگاه کتاب غیرتجاری متعلق به انتشارات اشپرینگ (Springer) و سِنس (Sense) و چندین فعالیت دیگر علمی انجام شد.

اما به نظر من، مهم‌ترین بخش هر کنفرانس، توانایی ایجاد فضای علمی و امکان تعامل بین پژوهشگران سراسر جهان با هم است. این فرصت، برای هر پژوهشگر تازه‌کار، میانه راه و کهنه‌کار، بسیار مغتنم است و حیف است که تنها، به عنوان «شرکت در کنفرانس» یا حداکثر «شرکت با ارائه مقاله» تصور شود که به عنوان امتیاز، بیشتر در اختیار افراد حقوقی قرار گیرد. شرکت در کنفرانس‌های معتبر، به شرط الزام داشتن در به اشتراک گذاشتن دستاوردهای آن، می‌تواند سوخت سالانه پژوهشگرانه را تأمین کند. در غیر این صورت، واقعاً به قول قدیمی‌ها، «بی‌مایه، فطیر است» و خمیری که به زور مواد افزودنی ور بیاید، اگرچه در کوتاه‌مدت گرسنگی را برطرف می‌کند، اما در میان‌مدت، باعث درد و نابسمانی می‌شود که شاید صدماتی که می‌زند، امکان جبران نیابد.

مهم‌ترین بخش هر کنفرانس، توانایی ایجاد فضای علمی و امکان تعامل بین پژوهشگران سراسر جهان با هم است. این فرصت، برای هر پژوهشگر تازه‌کار، میانه راه و کهنه‌کار، بسیار مغتنم است و حیف است که تنها، به عنوان «شرکت در کنفرانس» یا حداکثر «شرکت با ارائه مقاله» تصور شود که به عنوان امتیاز، بیشتر در اختیار افراد حقوقی قرار گیرد

در حاشیه: اسم یکی از هتل‌های نزدیک دانشگاه که تعدادی از شرکت‌کنندگان در آن اقامت داشتند، «علم» (Science) بود و در آستانه ورودی هتل، دو تخته گچی سیاه نصب شده بود که روی هر کدام، اثبات یک قضیه ریاضی با گچ نوشته شده بود و در کنارشان، یک لباس فارغ‌التحصیلی هم آویزان شده بود! زبانی که قوی‌تر از هر کلامی بود و توجه افراد را ناخواسته، به شهر و کشوری که شهرتش ریاضیات آن است، جلب می‌کرد!

سیزدهمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی

(۳ تا ۱۰ مرداد ۱۳۹۵)

فاطمه احمدپور
دانشجوی آموزش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

بعد از چهار سال، این بار دانشگاه هامبورگ میزبان بزرگ‌ترین اجتماع آموزشگران ریاضی شد. سیزدهمین ایکمی(ICME)، کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی، در جولای سال ۲۰۱۶ توسط جامعه آموزش ریاضی کشورهای آلمانی زبان برگزار شد. نام و چهرهٔ گابریل کایزر، دبیر علمی کنگره بیش از هر شخص دیگری دیده می‌شد و به حق، باید از او و دیگر اعضای کمیته اجرایی برای مدیریت مناسب کنگره‌ای با جمعیت ۳۴۸۶ ثبت‌نام‌کننده، تقدیر کرد.

برنامه‌های علمی کنگره

روز اولی‌ها

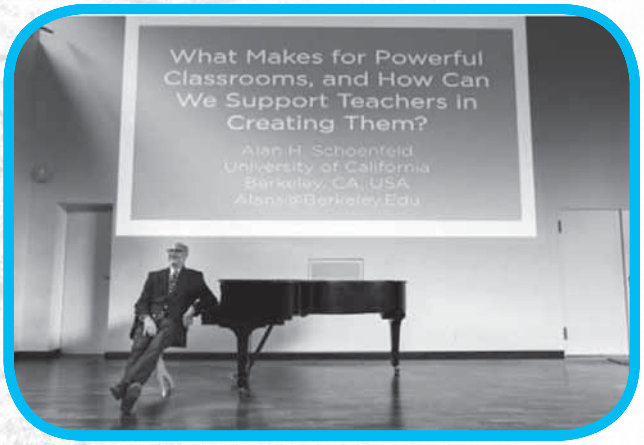
روز اول، برنامه‌ای شامل سه بخش اصلی برای ۴۰۰ پژوهشگر تازه‌کار آماده شده بود. در برنامه صبح، ۱۱ کارگاه موازی، هر یک به یکی از روش‌های پژوهش (اغلب کیفی) اختصاص یافته بود؛ از جمله تحلیل محتوای کیفی، نظریه زمینه‌ای، تحقیقات ویدئومحور، روش‌های آمیخته، مطالعات اجتماعی-فرهنگی، مطالعات قوم‌نگاری، تحلیل گفتمان[1]، تحلیل اثر متقابل[2]. سه سخنرانی موازی نیز به جنبه‌های نظری‌تر تحقیقات آموزش ریاضی پرداخت. از جمله استفان لرمن از جنبه‌های نظری تحقیقات آموزش ریاضی سخن گفت.

بعد از ظهر چندین کارگاه به‌صورت موازی به نحوه نوشتن یک مقاله علمی، بایدها و نبایدها پرداختند. چگونه مقاله بنویسیم که توسط داور پذیرفته شود!

پایان خوش روز اول، سخنرانی آلن شونفیلد بود. اساس صحبت‌های وی بر این بود که پژوهش و عمل می‌توانند و باید در یک تعامل سازنده در کنار هم باشند و به غنای یکدیگر کمک کنند.

سخنرانی‌های عمومی

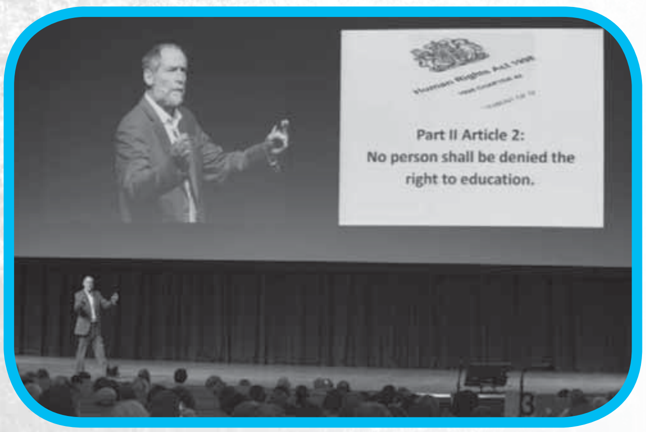
از تاثیرگذارترین آن‌ها سخنرانی بیل بارتون در مورد آموزش ریاضـــی و تأثیر آن بر فرهنگ و اخلاق فردی و اجتماعی بود. گزارشی از نتایج تحقیقات گروه ریاضیات قومی ارائه نمود. یکی دیگر از ســـخنرانی‌های این بخش مربوط به تسیگلر[۳]، ریاضی‌دان آلمانی بود، که ما او را از «کتاب اثبات»[۴] می‌شناسیم. این کتاب برای بزرگداشت پاول اردوش نوشـــته و به فارسی نیز ترجمه شده است. سخنرانی او در راستای فعالیت‌های چندین ساله‌اش در عمومی‌سازی ریاضیات بود.



شونفیلد؛ یکی از سخنران‌های مدعو

گروه‌های مطالعاتی موضوعی

وجود ۵۴ گروه مطالعاتی، نشان‌دهنده این بود که به موضوعات تحقیقاتی متنوع توجه شده است. از حوزه‌های محتوایی چون جبر و هندسه تا موضوعات فرایندی مانند اثبات و مدل‌سازی. از گروه‌های مربوط به فلسفه و تاریخ، تا حوزه‌هایی که طعم روانشناسی می‌دهند. گروه‌هایی که بر سطوح آموزشی از ابتدایی تا دانشگاه تمرکز داشتند، تا گروه‌هایی که به نیازهای دانش‌آموزان خاص و معلمان توجه می‌کردند. شرکت‌کنندگان با توجه به تخصص خود و حوزه مورد علاقه‌شان، در سخنرانی‌های کوتاه و بحث‌ها شرکت می‌کردند.



سخنرانی عمومی بیل بارتون، رئیس قبلی ICMI

سخنرانی‌های مدعو

یک بخش هم سخنرانی‌های مدعو بود که به‌صورت موازی، سخنرانی‌های موضوعی برگزار می‌شد.

بعدازظهرهای موضوعی

آشنایی با سنت‌های آموزش ریاضی در اروپا، آلمان، و نیز نقش فلیکس کلاین در آموزش ریاضی، موضوع کلی ده‌ها مقاله بود که به‌صورت موازی ارائه شدند.

بازدیدکنندگان از مقاله‌های ارائه شده به‌صورت پوستر

پوستر

از دیگر برنامه‌های کنگره، ارائهٔ پوستر همان گروه‌های مطالعاتی بود که با استقبال خوب شرکت‌کنندگان همراه بود.

گروه‌های بحث و کارگاه

دو بعـــد از ظهر از ۸ روز به گروه‌های بحث و کارگاه گذشت که یکی از آن‌ها در مورد خانه‌های ریاضیات بود. نمایندگان خانه‌های ریاضیات ایران، بلغارستان و فرانسه حضور داشتند. بعد از معرفی خانه‌ها و قابلیت‌های آن‌ها، درمورد مشکلات بحث شده و برای رفع آن‌ها ایده‌پردازی شد.

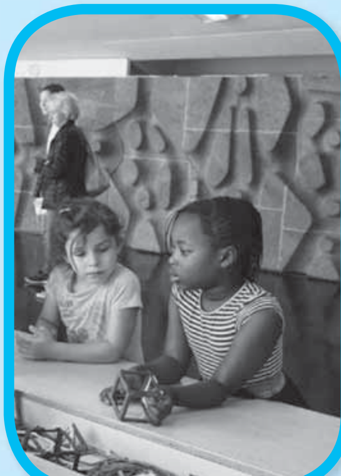
از راست به چپ:
فردریک لونگ[۶]،
میشل آرتیک،
چریل پراگر[۷]،
آلن بیشاب،
هاگ بورخارت[۸]

جوایز

امسال علاوه بر جایزهٔ فلیکس کلاین و فرودنتال، برای اولین‌بار جایزهٔ «اما-کستلنووو»[۵] نیز اهدا شد. بعد از آن هر یک از تقدیرشدگان طی یک سخنرانی، دستاوردها و حاصل تلاش سالیان خود را ارائه نمودند.

متمتیکم[۹]

از برنامه‌های جنبی جالب ایـــن کنفرانس حضور کوچک ولی پررنگ متمتیکم از «موزه تعاملی ریاضیات» از گیسن[۱۰] بود. محیطی شبیه یک آزمایشگاه ریاضی کوچک دایر کرده بودند که هر روزه افراد زیادی درگیر ایده‌های ریاضی هر یک از وسایل موجود در آنجا می‌شدند.



نمایشگاه غیر تجاری آموزش ریاضی

آخرین روز کنفرانس

در مراسم اختتامیه، رئیس ایکمای[۱۱] به کارهای انجام شده و معرفی برنامه‌های آتی پرداخت. آموزشگران چینی، ایکمای ۱۴ را معرفی و همگان را برای چهار سال آینده به شانگهای دعوت کردند. در انتها، تغییرات اعمال شده در اعضای کمیته اجرایی کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی اعلام شد و اعضای جدید معرفی شدند. خانم دکتر زهرا گویا از ایکمای گذشته همچنان به کار خود در این کمیته ادامه خواهند داد.

در پایان این گزارش از برنامهٔ پایانی روزهای برگزاری کنگره باید گفت. یکی از مهم‌ترین برنامه‌هایی که وقت اختصاصی برای آن گذاشـــته شده بود، زمانی برای گپ و گفت و آشنایی افراد با هم بود. فضایی بسیار صمیمی و دوستانه، که به راحتی امکان صحبت با اساتید پیش‌کسوت و جوان فراهم بود.

پی‌نوشت‌ها

1. Argumentation Analyses
2. Interaction Analyses
3. Ziegler
4. Proofs from the book
5. Emma-Castelnuovo
6. Frederick Leung
7. Cheryl Praeger
8. Hugh Burkhardt
9. Mathematicum
10. Giessen
11. International Commission on Mathemathical Instruction (ICMI)

پیامدهای کتاب درسی

پزشک ریاضی، فرار از رشته ریاضی، تنفر از ریاضی

سید جمال‌الدین محمودی جزیی
دبیر ریاضی شهرستان‌های استان تهران (کهریزک)

چکیده

طی چندین سالی که از تدریسم در آموزش‌وپرورش می‌گذرد، تا بدین اندازه برای ارائه درس به دانش‌آموزان، مستأصل نشده بودم. همه این‌ها یک طرف و اینکه مرتب دانش‌آموزان می‌گفتند که «آقا! مثل سال‌های قبل، فصلی از کتاب حذف می‌شود؟ معلم سال گذشته وقت نکرد، فصل آخـــر را درس نـــداد»، حکایت از این می‌کرد که آنان، به ورطه بی‌اعتمـــادی افتاده بودند. به‌نظر می‌رسید که مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی تازه تألیف هم به این نکته کمتر توجه کرده بودند که عموم دانش‌آموزان- نه فقط آن‌ها که تحت آموزش‌های ویژه هســـتند- تمام متن کتاب‌ها و حتی تک‌تک جمله‌ها، برایشان مهم‌اند و از آن‌ها، انتظار یاد گرفتن چیزی را دارند. علاوه بر این، اگر می‌دانستند که صدور چنین بخشنامه‌هایی از جمله برای حذف فصلی یا بخشی از کتاب، چه آسیب‌های جدی به اعتماد دانش‌آموزان وارد می‌کند، بیشتر دقت می‌کردند.

در هر صورت، معلم به ســـبب مسئولیت حرفه‌ای خود، تلاش می‌کند تا راه‌حل‌های مناسب پیدا کند و در شـــرایط نامساعد هم، یاور دانش‌آموزان برای درک مفاهیم باشد. در نتیجه، تلاش کردم تا راهی بیابم و در این بین، نور امیدی تابید و به کمک یکی از دوستان که در زمینه طراحی نوین برنامه درســـی ریاضی کار می‌کرد، تدریس خود را از نو طراحی نموده و به پیش بردم. این مقاله، گزارش تدریس یک موضوع با طراحی جدید، و نشان دادن آموختن آن توسط دانش‌آموزان اســـت. براســـاس نتایجی که از تدریس ریاضی با این رویکرد به برنامه درسی به دست آمد، چند پیشنهاد به برنامه‌ریزان و مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی ارائه می‌شود. این رویکرد به طراحی و تألیف کتاب درسی، فرصت را از سودجویانی که از این آشفته‌بازار، به فکر بستن بارشان هستند، سلب می‌کند؛ زیرا به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا قدرت استدلال، امکان لذت بردن از ریاضی، بالا بردن اعتمادبه‌نفس، افزایش یادگیری و درک عمیق نسبت به مفاهیم ریاضی را تجربه کنند.

کلیدواژه‌ها: برنامه درسی، لذت ریاضی، اعتمادبه‌نفس، یادگیری، بینش صحیح

مقدمه

در ابتدای ســـال ۹۵، کارت تبلیغی به دستم رســـید که روی آن نوشته شده بود «پزشک ریاضی». این کارت، حکایت از آن داشت که تعدادی از افرادِ به ظاهر مجرب با تأسیس مرکزی،

به دنبال درمان افرادی هستند که از ریاضی، فراری‌اند. در این تبلیغ، وعده داده شـــده بود که پس از آسیب‌شناسی یادگیری ریاضی، به تبیین راهکارهای مناسب مبتنی بر علم عصب‌شناسی جهت رفع این آسیب، مبادرت می‌گردد. آنچه ناراحتی مرا موجب شـــد و باعث گردید تا این مقاله نوشـــته شـــود، یکی از پیامدهای کتب درسی تازه تألیف اســـت که در این کارت تبلیغی، قابل مشاهده بوده و آن، «ســـم‌زدایی ریاضی» است. چیزی که از این واژه در ذهن متبادر می‌شـــود، این اســـت که دانش‌آموزانمان مسموم شده‌اند و لازم اســـت که بدن و ذهن آن‌ها، از این سموم زدوده شـــود و مراقب بود که دیگر در معرض ســـم، قرار نگیرند.

با ایـــن منطق، تبلیغات بســـیاری به‌طور ضمنی یا صریح، شـــکل گرفته‌اند. برای مثال، در برنامه‌ای به نام «کنکور آسان اســـت» که از رسانه ملی پخش می‌شد، مـــدرسِ برنامه با هیجان کف دســـت‌ها را به هم می‌زد و راه‌هایـــی ارائه می‌داد که «این چنین تســـت را بزنید و جـــواب دهید» تا از راه طولانی و «مزخرف» (بخوانید تشـــریحی!) خلاص شـــوید. یا اینکه تبلیغِ «پزشـــک ریاضـــی»، حکایت از وجود «بیمار» دارد و در این مورد، «بیماران» اصلی کودکان معصوم‌اند[1].

برای مقابله منطقی با این هیاهوها، بر آن شـــدم تا روایت کلاس درس ریاضی خود را بیان کنم، شاید بتوان با مســـتند کردن روایت‌های معلمان، برای جلوگیری از این اغتشاشـــات ذهنیِ دانش‌آموزان به دلیل مشکلات برنامه‌ای و تبلیغات ناروا، چاره‌ای علمی اندیشید.

کلاس امسال من مثل همیشـــه، پر از دانش‌آموزان خوب بود که با تدریس از روی کتاب درسی جدید، احساس می‌شد به تدریج، انگیزه خود را از دست می‌دهند. در تلاش برای پیدا کردن راه‌حل و برگرداندن نشاط قبلی به کلاس، یک‌باره نور امیدی تابیده شـــد و جنب‌وجوش در کلاس موج زد و انگیزه‌ها دوچندان شد، تا جایی که دانش‌آموز به اصطلاح ضعیف کلاس هم گفت که «تازه می‌فهمم ریاضی یعنی چه» و دیگری، با هیجان مسئله‌ای را که حل کرده بود نشان می‌داد، بدون آنکه «سم‌زدایی» شود، بدون آنکه انگ بیمار به او زده شده باشد، بدون آنکه به کلینیک رفته باشد و از همه بالاتر، بدون آنکه بر وی، هزینه‌ای تحمیل شده باشد. این مقاله، بازگویی «راز موفقیت بچه‌های کلاس من» اســـت که برایتان روایت می‌شود. به امید آنکه باب خیری برای کسانی باشد که کتاب درسی تألیف می‌کنند.

دانش‌آموزان را باید از زاویه جدیدی نگریســـت و به قول سهراب سپهری، «چشم‌ها را باید شست، جور دیگر باید دید».

شروع ماجرا

در ســـال تحصیلی ۹۵- ۹۴ برای تدریس پایه نهم دوره اول متوسطه، به مدرسه‌ای در یک منطقه محروم از شهرستان‌های استان تهران، معرفی شدم. بعد از آشنایی با دانش‌آموزان و پرسیدن نظرشان نسبت به ریاضی، به بیان چند معمای ریاضی پرداختم و برای حلشان، جایزه تعیین کردم. شروع درس با طرح معماها و شور و شوقی که در دانش‌آموزان ایجاد کرد، باعث شـــد که از همان جلســـه‌های اول سال، ترس و نفرت از ریاضی و از معلم ریاضی (که خودم بودم)، تا حدودی از بین رفت و یخ‌های بدبینی، شروع به آب شدن کرد. چنین شروعی، مبتنی بر این است که باور دارم دوست داشتن، بیزاری و ترس، اکتســـابی اســـت و از تجربه‌های افراد ناشی می‌شود. به همین دلیل، برای کسب تجربه‌ها و نگرش مثبت نسبت بـــه ریاضی، لازم می‌دانم کـــه دانش‌آموز با آن، به‌عنوان یک چالش شیرین روبه‌رو شود تا تجربه‌های یادگیری از ریاضی، برایش موفقیت‌آمیز و اغناکننده باشد. با این باور معلمی و پس از ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان، به عادت همیشـــگیِ معلمی‌ام، کار تدریس را از روی کتاب آغاز نمودم. ولیَ کتاب درسیِ تازه‌تألیف، پیوستگی و انسجام لازم را نداشت؛ بعضی از بخش‌ها چنان نوشته شده بود که شـــتاب‌زدگی در آن، مشهود بود. سازمان‌دهی و نوع نگارش کتاب از جمله تمرین‌ها و فعالیت‌های غیرمنسجم و کار در کلاس، انگیزه مثبتی را که از طریق شـــروع با معماها و نظایر آن در دانش‌آموزان ایجاد کرده بودم، به نوعی از بین رفت.

بعد از چند هفته تدریس از روی کتاب، متوجه شدم که انگیزه خودم نیز دست‌خوش تغییراتی شده و روحم در حال آزردن است تا چه رسد به دانش‌آموزان معصوم و بی‌دفاع، که با نگاه‌های ملتمسانه خود می‌گفتند «آقا به خدا نمی‌فهمیم!». بنابرایـــن برای جلوگیری از ادامه این روند منفی، کتاب جدید را کنار گذاشـــته و شـــروع به تنظیم درس و ارائه آن به کلاس شـــدم. با این کار، تا حدودی وضعیت کلاس بهتر شـــد، اما تا ایده‌آل فاصله زیادی بود. البته تجربه تدریس نشـــان داده است که هر کار مثبتی هم انجام شود، چند نفری در کلاس هستند

دیدگاه ساخت و سازگرایی نسبت به یادگیری این است که تا یادگیرنده، خود را در تولید یا کشف دانش سهیم نداند، انگیزه کافی برای یادگیری و تداوم آن نخواهد داشت

که به دلیل انواع محدودیت‌های شخصی یا پیرامونی، انگیزه‌ای برای یادگیری ندارند یا آنکه درس خواندن برایشان در اولویت نیست. اما روایتی که بیان می‌شود، بر اساس اکثریت دانش‌آموزان کلاس است. به هر حال امتحانات ترم برگزار شد و نتایج امتحان نیز، مطلوب نبود. پس عزم خود را جزم کردم که راه متفاوتی به غیر از کتاب درسی را پیش بگیرم و این، روایت اصلی است.

همکاری با یک آموزشگر ریاضی

در ایام امتحانات بود که با یکی از دانشجویان دکتری آموزش ریاضی آشنا شدم و در مورد مشکلات کتاب درسی جدید و تأثیرش بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان، به گفت‌وگو پرداختم. بنا شد که ایشان، فصل ششم کتاب یعنی «معادله خط» را براساس یک الگوی جدید برنامه درسی طراحی کرده بود، تدریس کند و من نیز به عنوان مشاهده‌گر، حضور داشته باشم.

تفاوت بین درس دادن و آموزش دادن

همه ما، هنگامی که درس می‌دهیم، به انجام فعالیت‌هایی مانند حرف زدن، روی تخته نوشتن، رسم نمودار، اثبات کردن، نشان دادن چیزی یا سؤال کردن از دانش‌آموزان و بالاخره پرسش و تمرین می‌پردازیم. اما آموزش دادن، صرفاً انجام این فعالیت‌ها نیست، بلکه کارهای مهم‌تر دیگری نیز هست که باید صورت گیرد که برای نمونه، می‌توان به هدایت دانش‌آموز به سمت زنجیره‌ای از فعالیت‌ها و ایجاد انگیزه در وی، فراهم کردن فرصت‌های مناسب برای همکاریِ او با همکلاسی‌ها و یادآوری مطالب گذشته از طریق طراحی مناسب تدریس، اشاره نمود. زیرا معلمی و «تدریس»، تنها به معنای ارائه مطالب به یادگیرنده نیست و دهها و دهها ویژگی دارد که همگی، لازمه یادگیری‌اند که ایجاد تعامل سازنده بین یاددهنده و یادگیرنده، از مهم‌ترین آن‌هاست.

شروع آموزش

دیدگاه ساخت و سازگرایی نسبت به یادگیری این است که تا یادگیرنده، خود را در تولید یا کشف دانش سهیم نداند، انگیزه کافی برای یادگیری و تداوم آن نخواهد داشت. در فرایند تدریس ساخت و سازگرایی، معلم و همهٔ امکانات، تسهیل‌کننده هستند و از ملزومات آموزش، به حساب می‌آیند و در این روش، دانش‌آموز نقش محوری را ایفا می‌کند. هدف جست‌وجوی فعالانه یادگیرندگان، از طریق درگیر شدن با فعالیت‌های گوناگون برای کشف و تعمیم راه‌حل‌ها، درک مفاهیم و اصول و سرانجام، پیدا کردن و کشف قوانین است. پرورش روحیه کاوشگری برای طرح سؤال، و جست‌وجو برای راه‌حل‌های مختلف، از جمله ویژگی‌های ساخت و سازگرایی است. با این دیدگاه، درس طراحی شده تدریس گردید.

تدریس با مروری بر دستگاه مختصات که مربوط به سال قبل بود، شروع شد. ابتدا چند صفحه راجع‌به همین موضوع که براساس الگوی جزئی برنامه درسی طراحی شده بود، بین دانش‌آموزان توزیع گردید، سپس معلم شروع به معرفی درس نمود.

معلم: اگر بخواهیم از نقطه A به نقطه B یا C برسیم، به‌طوری که روی خط‌های افقی یا عمودی حرکت کنیم، چگونه می‌توانیم به کسی آدرس بدهیم؟ (**آدرس‌دهی** چگونه باید انجام گیرد)

نمونه‌های زیر، دربرگیرنده تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزان است: (**د**، نشان‌دهنده دانش‌آموز است.)

د: دو خانه به راست و دو خانه به بالا

د: دو تا راست، دو تا بالا

د: دو خانه به بالا، دو خانه به راست

د: دو خانه بالا، دو خانه راست

د: دو تا روی خط افقی دو واحد روی خط عمودی.

معلم: می‌توانیم برای خلاصه کردن این نوشته‌های فارسی، با استفاده از ریاضی یک قرارداد کنیم و همگی، طبق آن عمل کنیم، قراردادی که همه آن را می‌شناسند، استفاده از نماد $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ برای نمایش و معرفی مختصات یک نقطه است. حالا شما بگویید که برای نشان دادن **راست، چپ، بالا و پایین**، چطوری عمل کنیم؟ چه کار کنیم؟ دانش‌آموزان به اتفاق گفتند که:

د: از علامت مثبت و منفی استفاده کنیم.

در ادامه درس، فعالیت‌های کتاب درسی با فعالیت‌های دیگری جایگزین شدند که برای نمونه، به چند مورد اشاره می‌شود.

معلم: لطفاً فعالیت‌های صفحه بعد را انجام دهید.

درس‌های آموخته شده از مشاهده این تدریس

۱. طرح پرسش‌های پیش‌بینی شده

هدف تدریس، تنها درخواســت از دانش‌آموزان برای کار کردن با مفاهیم ارائه شــده نبــود، بلکه هدف اصلی این بود که به کمک آنان، این مفاهیم ســاخته شود و در حین یادگیــری، از درس ریاضی لذت هم ببرند و انگیزه آن‌ها بیشتر شــود. هنگامی که شروع درس با یک جمله یا پرسش پیش‌بینی شــده یا مسئله‌ای برای حل کردن همراه بود، علاقه دانش‌آموزان برانگیخته می‌شــد و وقتی هم که با تلاش خود و تعامل با سایر هم‌کلاسی‌ها، تجربه خوشایندی به‌دست می‌آوردند، نسبت به پیگیری مطلب مصمم‌تر شــده و برای فعالیت بیشتر، میل و رغبت نشان می‌دادند. با انجام این فعالیت‌ها، تنها موضوع درسی نبود که آموخته شد، بلکه دانش‌آموزان چیزهای بیشتری یاد گرفتند و چندین مهارت فرایندی ریاضی را کسب نمودند که دانســتن آن‌ها برای تداوم با کیفیت تدریس، حیاتی اســت. این در حالی اســت که بعضی از معلمان، اگرچه نسبت به آنچه که آموزش می‌دهند آگاهی دارند، اما نسبت به چیزی که دانش‌آموزان آموخته‌اند، کمتر آشنایی دارند و این امر، شروع درس بعدی را با مشکل مواجه می‌کند.

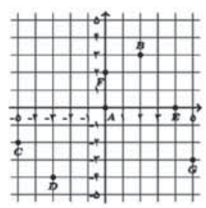
۲. پر کردن خلأهای دانش قبلی

اکثر دانش‌آموزان که به مدرسه می‌آیند، هم خواستار یادگیری هســتند و هم توانایــی آن را دارند، فقط برخی کندتر از دیگران هســتند. اینجاست که دیدگاه ساخت و سازگرایی کمک می‌کند تا معلم، درس را براساس دانش قبلی دانش‌آموزان از موضوع، بنا ساخته و از آنجا به تدریس ادامــه دهد. برای اجرای تدریس نیــز، از طریق تعامل با دانش‌آموزان مفهوم را می‌سازد و به فعالیت‌ها و حل مسائل می‌پردازد. در این رویکرد، اطمینان از داشتن دانش قبلی، تنها با یادآوری‌های یکنواخت و گاهی کســالت‌بار، ایجاد نمی‌شود و نیاز به تنوع و طراحی فعالیت‌های مناسب دارد. مثلاً، نمی‌توان و نباید از دانش‌آموزی که هنوز دســتگاه مختصات را یاد نگرفته، انتظار یادگیری خط و طریقه رسم آن را داشت، اما می‌توان از طریق طراحی «فعالیت»های منســجم، پرچالش، دقیق و انگیزه‌بخش، خلأهای دانش قبلی را پر نمود.

۳. کسب بینش صحیح

یکی از اهداف آمــوزش از طریق این برنامه، درک مفهومی نســبت به یک موضوع، توســط دانش‌آموزان اســت. نتایج این تدریس نشــان داد که از طریق انجام این فعالیت‌ها و تمرین‌ها، دانش‌آموزان به چنین درکی

*مثال مختصات نقاط زیر را بیابید و در هر نقطه مقادیر x و y را تعیین کنید.



$A = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

$B = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

$C = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

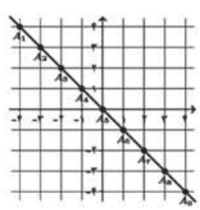
$D = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

$E = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

$F = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

$G = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, \quad x = \quad , y =$

II) در شکل زیر یکی از نیمســازهای زاویهٔ بین محورهای عمودی و افقی رسم شده است. مختصات نقاطی را که در این شکل مشخص شده‌اند، بیابید؛



$A_1 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

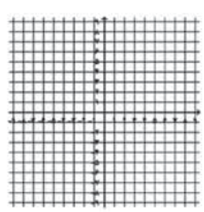
$A_6 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, A_9 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

ویژگی مشترک این نقاط چیست؟ __________

آیا سایر نقاط روی این خط هم دارای این ویژگی هستند؟ __________

چه رابطه‌ای بین x و y این نقاط وجود دارد؟ __________

رابطهٔ بین x و y این نقاط را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید. __________



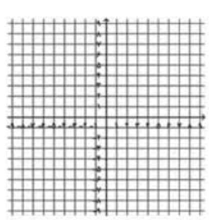
۱) عرض نقاط زیر چنان بیابید که بین عرض و طول هر نقطه رابطهٔ $y = 3x$ برقرار باشد. یعنی عرض آنها ۳ برابر طول آنها باشد.

$A_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix},$

$A_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} 3 \\ \end{bmatrix},$

نقاط فوق را در دستگاه مختصات رسم کنید.

اگر این نقاط را به هم وصل کنیم چه شکلی به‌دست می‌آید؟ __________



۱) رابطهٔ $y = 4x$ را در نظر بگیرید. عرض نقطهٔ زیر را طوری بیابید که بین طول و عرض این نقطه رابطهٔ $y = 4x$ برقرار باشد. سپس این نقطه را روی دستگاه مختصات مشخص کنید و خطی را که از مبدأ مختصات و این نقطه می‌گذرد رسم کنید.

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix},$

عرض نقاط زیر چنان بیابید که بین عرض و طول این نقاط هم رابطهٔ $y = 4x$ برقرار باشد.

$A_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix}$

نقاط فوق را در دستگاه مختصات رسم کنید.

این نقاط با خطی که در قسمت قبل رسم کردیم چه رابطه ای دارند؟ __________

رسیدند. به گفته اسکمپ (۱۹۸۱) از نظر یادگیری ریاضی، هنگامی که از یک شیء معین، مفهومی در ذهن داریم، در واقع دارای اندیشه و تصوری از خصیصه‌های اصلی آن شیء هستیم. مثلاً وقتی به دانش‌آموزی می‌گوییم که «مدرسه را توصیف کن»، او سعی می‌کند تصویری را که از مدرسه در ذهن خود دارد، بیان کند. اما اگر بپرسیم، «معنای مدرسه چیست»، پاسخ وی فرق می‌کند و ممکن است بگوید که «جایی برای یاد گرفتن» است. بنابراین، باید تلاش نمود تا مفاهیمی که در ذهن دانش‌آموزان شکل می‌گیرد، نسبتاً درست باشند. سپس می‌توان به‌تدریج آن مفاهیم را بسط و گسترش داد و بدین ترتیب، آن‌ها را عمیق‌تر نمود. برای نمونه، هنگامی که دانش‌آموز می‌خواهد بداند که آیا نقطه $A\begin{pmatrix}۱\\۳\end{pmatrix}$ روی خط $y=۲x+۱$ قرار دارد یا خیر، یا وقتی که از خود می‌پرسد که چند نقطه روی خط $y=۲x+۱$ می‌تواند بنویسد، یا اگر $A\begin{pmatrix}۳\\ \ \end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}\ \\ ۱۱\end{pmatrix}$ روی خط $y=۲x+۱$ قرار داشته باشند، چه x برای B و چه y برای A در جای خالی باید قرار بگیرد؟ معلوم می‌شود که وی، در تلاش برای درک عمیق‌تر مفهوم است و هر سه سؤال، بیانگر این است که دانش‌آموز، پیشرفت مستمری داشته و مفهوم را به خوبی درک کرده است.

۴. لذت بردن از یادگیری

اگرچه تا قبل از تدریس خط، دانش‌آموزان تکلیف‌هایشان را انجام می‌دادند و طی تدریس نیز، معلم را یاری می‌نمودند، اما آنچه مشهود بود، بی‌توجهی یا شاید بی‌انگیزگی اکثرشان نسبت به یادگیری ریاضی بود. در حالی که با شروع تدریس معادله خط، به تدریج توجه آنان بیشتر شد. این تدریس نشان داد که دانش‌آموزان، به شرطی با یک مسئله درگیر می‌شوند که خواستار حل آن باشند. طی تدریس، دانش‌آموزان آنچنان عمیق درگیر حل مسئله می‌شدند که گاهی برای یک موضوع، با هم‌کلاسی‌های مجاور خود به بحث می‌پرداختند و آن‌قدر تعامل با هم را ادامه می‌دادند، تا همدیگر را قانع کنند.

۵. بالا رفتن حس اعتمادبه‌نفس

در این تدریس، هر مسئله جزئی برای دانش‌آموزان، به صورت حل معمایی جذاب خودنمایی می‌کرد و آن‌ها، بدون آنکه بخواهند به حافظه‌های خود فشار بیاورند، در ساختن دانشِ خود نقش داشته، به کشف رابطه‌ها پرداخته و به خلق دانش جدید می‌رسیدند. برای نمونه، هنگامی که دانش‌آموزان می‌خواستند رابطه بین x و y را در نقاط $\begin{pmatrix}۱\\۳\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}۲\\۶\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-۱\\-۳\end{pmatrix}$ کشف کنند، یا وقتی از رابطه $y=\frac{۱}{۲}x$ مقدار x را در نقطه $\begin{pmatrix}x\\۸\end{pmatrix}$ بیابند، به هیجان می‌آمدند. برای مثال، در مورد اخیر می‌گفتند که «برای به‌دست آوردن x باید داشته باشیم $\frac{۱}{۲}x=۸$ و به جای آنکه به حل معادله بپردازند، از خود می‌پرسیدند که چه عددی به جای x قرار دهند تا تساوی برقرار باشد و با این سؤال از خود، فوراً به جواب ۱۶ می‌رسیدند. با توسعه درک مفهومی، رضایت دانش‌آموزان نیز از یادگیری ریاضی، افزایش می‌یافت. این رضایت‌مندی، احساس اعتمادبه‌نفس آن‌ها را بالا برده و به عامل تشویقی برای تلاش‌های بعدی تبدیل شد.

۶. تنظیم فعالیت‌ها براساس توانایی دانش‌آموزان

به‌طور قابل انتظار، یادگیری یک موضوع، موجب علاقه دانش‌آموز می‌شود. اما چنانچه فرد مشاهده کند که در کار و فعالیت خود پیشرفتی ندارد، ممکن است دلسرد شود و علاقه‌اش را به ادامه کار، از دست بدهد. بنابراین، تنظیم سؤال‌ها به‌گونه‌ای که دانش‌آموزان به این وضعیت دچار نشوند، از ویژگی‌های تدریس طراحی شده برای این کلاس بود. همچنین، تمام فعالیت‌ها با وجودی که چالش‌برانگیز بودند، به این نکته توجه داشتند که دانش‌آموزان مبتدی را هم، همراه خود کنند.

۷. کشف برخی از عادت‌های بازدارنده دانش‌آموزان

بسیاری از افراد، به خاطر عادت به رفتارهای نادرست در یادگیری و حل مسائل، دچار مشکل می‌شوند. در مشاهده این تدریس، دیده شد که بعضی از دانش‌آموزان، هنوز برای جمع و تفریق، از انگشتان دست

با توسعه درک مفهومی، رضایت دانش‌آموزان نیز از یادگیری ریاضی، افزایش می‌یافت. این رضایت‌مندی، احساس اعتمادبه‌نفس آن‌ها را بالا برده و به عامل تشویقی برای تلاش‌های بعدی تبدیل شد

خود کمک می‌گیرند. این عمل، هر چند در توانایی آن‌ها برای جمع‌های ســـاده، مشـــکلی ایجاد نمی‌کرد، اما در محاســـبات پیشرفته مانع سرعت عملشان می‌شد. یکی دیگر از عادت‌های بازدارنده دانش‌آموزان این بود که قبل از آنکه سؤال را کامل بخوانند و درک درستی از مسئله بیابند، شروع به حل می‌کردند. دیدن اینکه درک مسئله، نیمی از حل مسئله است، برایشان بسیار با اهمیت بود.

۸. بار معانی کلمات و استفاده به موقع از آن‌ها

نقش و بار کلمات، بســـیار مهم اســـت[۲]. در شروع ایـــن درس و یـــادآوری دســـتگاه مختصـــات، از کلمه «آدرس‌دهی» استفاده شده بود. نکته‌ای که بار معنایی خوبی در ذهن دانش‌آموزان ایجاد کرد و آنان را به یکی از نیازهایی که ممکن است پیدا کنند، آگاه می‌نمود. این کار به‌خصوص، به کسانی که بیشتر از طریق تصویرسازی یاد می‌گیرند، کمک زیادی کرد. دانش‌آموزان، تجسمی از مفهوم را در ذهن خود ایجاد می‌کردند و ســـپس، این تجســـم با موضوع درسی گره می‌خورد و نتیجه آن شد که هرگاه می‌خواستند دستگاه مختصات را به یادآورند، این تصویرسازی در ذهنشان فعال می‌شد و دسترسی به موضوع، برایشان راحت‌تر می‌گردید.

۹. آگاه شدن دانش‌آموزان از دلایل پیشرفت و عدم پیشرفتِ خود

یکی از اتفاقات جالب طی جلسات تدریس، آن بود که دانش‌آموزان در جریـــان فعالیت‌ها و حل تمرین‌ها، چنانچه با مشـــکلی مواجه می‌شـــدند یا راه را اشـــتباه می‌رفتند، مدرس با پرســـش‌های مناســـب، آن‌ها را از اشتباهاتشـــان آگاه می‌نمود و آن‌ها، علت اصلی اشتباه خود را در حل مسئله، همان جلسه متوجه می‌شدند و به رفعشان می‌پرداختند. این اتفاق، نیرو و توانی مضاعف به آن‌ها می‌داد تا کارشان را پیش ببرند و با شور و هیجان بیشتری، برای دانستن و کشف موارد بعدی، بکوشند.

نتیجه‌گیری

تمام تلاش معلمان برای آن است که دانش‌آموزانی خلاق، توانمند، کوشـــا، با تفکر و سازنده دانش، پرورش دهند و این مهم، وقتی حاصل می‌شـــود که کتاب‌های نوشـــته شـــده، به‌گونه‌ای باشـــد که این امکان را ایجاد کند، کـــه در کتاب‌های تازه‌تألیف، چنین موقعیت‌هایی به نـــدرت وجود دارد. در این مقاله، گوشـــه کوچکی از طراحی یک بخش درســـی توسط یک آموزشگر ریاضی و براساس طراحی نوین برنامه درسی ارائه شد. از جمله دستاوردهای این برنامه، افزایش توانمندی دانش‌آموزان در حل مســـئله، افزایش اعتمادبه‌نفـــس، لذت بردن از آموزش و مشارکت در فعالیت‌ها را می‌توان برشمرد. به دلیل اینکه دانش‌آموزان به ساختن دانش خود پرداخته و در آن ســـهیم شدند، نســـبت به آن احساس مالکیت کردند و برایشان ارزشمند شـــد. دوست دارم به عنوان حسن ختام و نتیجه‌گیری اصلی، این مقاله را با قسمتی از شعر علیرضا قزوه، به پایان ببرم.

ما کتاب کهنه‌ای هستیم، سر تا پا غلط
خواندنی‌ها را سراسر خوانده‌ایم، اما غلط
سال‌ها تدریس می‌کردم خطا را با خطا
سال‌ها تصحیح می‌کردم غلط را با غلط
بی‌خبر بودم دریغا از اصول‌الدین عشق
خط غلط، انشا غلط، دانش غلط، تقوا غلط

پی‌نوشت‌ها

۱. ماجرای پزشک ریاضی، مرا یاد حکایتی انداخت که «گویند شـــهری بود که مردمانش مبتلا به مرض خـــارش بدن بوده و تمام روز، به خاراندن خویش مشـــغول بودند. روزی جهانگردی وارد شهر شـــد که خود را نمی‌خاراند! مردم شهر او را گرفته و اســـیر کردند که بیمار است و باید درمان شـــود، چون خود را نمی‌خاراند.»

۲. در سالیان دور، به اهمیت نقش کلمات و بار معانی آن‌ها پی برده بودم و در این اهمیت، خاطرات بسیاری دارم مثلاً در سال ۸۲ در بانـــک بودم که یک‌باره، مردی مســـن با متصدی باجه، درگیری لفظی پیدا نمود و شـــروع به گفتن بد و بیراه کرد. هر چه این روند ادامه پیدا می‌کرد، متصدی آرامش خود را بیشتر از دست می‌داد و نمی‌توانست کارش را به درستی ادامه دهد. از نظر اخلاقی و تربیتی هم، این مشاجره برای دیگران، اثر سوء داشت. بنابراین به کنار وی رفتم و در گوشش به آرامی گفتم «پدر جان، در شأن شما نیست». کلمه شأن چنان اثری داشت (البته خدا خواست) که باور کردنی نبود.

منابع

۱. سرکارآرانی، محمدرضا و مقدم، علی‌رضا. (۱۳۸۴). **فناوری برای آموزش**، ترجمه، نشر نی، تهران.
۲. خواجوی نوری، نظام. (۱۳۸۶). **کاربرد روان‌شناســـی در آموزش**. ترجمه، نسل نواندیش. تهران.

مُنحنیِ قامتم، تابعِ ابرویِ توست!

کاظم قاسمی
دانشجوی کارشناسی ارشد ایران‌شناسی دانشگاه شهید بهشتی تهران
دبیر آموزش‌وپرورش شهرستان چالوس

مشخصات اثر:
نام کتاب: منحنی قامتم تابع ابروی توســـت (مفاهیم ریاضی در گسترهٔ ادب فارسی)
تألیف: علی‌اکبر قاسمی گل‌افشانی
نشر: رسانش نوین، (تلفن: ۷۷۵۳۰۵۳۶)
چاپ اول، تابستان ۱۳۹۳

یادگیری یکی از اساسی‌ترین فرایندهای روان‌شناختی است. نحوهٔ انتقال اطلاعات به فراگیران به طوری که فرایند یاددهی- یادگیری را پویاتر و کاراتر سازد، همواره موضوع مورد اهمیت در نظام یادگیری بوده است. «عده‌ای از روانشناسان معتقدند معلمان باید بر مهارت‌های تفکر، مطالعه و یادگیری مجهز باشـــند؛ زیرا وظیفهٔ آن‌ها آموزش روش یادگیری به دانش‌آموزان اســـت نه آموزش موضوعات درسی.» (کدیور، ۱۳۸۷: ۹) اگر در فراینـــد یاددهی- یادگیری از روش‌های متنوع و خلاقانه اســـتفاده گردد، اســـتقبال فراگیران از آن بیشتر خواهد بود و نتیجه آنکه یادگیری کامل‌تر و موفق‌تر صورت خواهدگرفت. یکی از این روش‌ها، استفاده از زبانِ شعر است. فراگیر بودن شـــعر و ادبیات فارسی همواره مایهٔ فخر فارسی‌زبانان بوده است. در شعر فارسی می‌توان سراغ از علوم مختلف همچون ریاضیات، نجوم، پزشکی، فلسفه، اخلاق و ... را گرفت. این خود دلیلی است بر ادعای همه جانبه بودن شعر فارسی. ما در اینجا سعی در معرفی و نقد کتابی که به مفاهیم ریاضی در گسترهٔ ادب فارسی پرداخته، داریم.

کتاب منحنی قامتم تابع ابروی توست در تابستان ۱۳۹۳ به قلم علی‌اکبر قاسمی گل‌افشـــانی منتشر شد. انتشارات رســـانَش‌نوین مسئولیت نشـــر این کتابِ ۲۱۰۰ نسخه‌ای را برعهده گرفـــت. خواندن این کتاب بـــرای دانش‌آموزان، دانشجویان، دبیران و هر کسی که به ادبیات فارسی و ریاضی علاقه‌مند است، می‌تواند مفید واقع شود.

عنوان کتاب مصراعی از شعر روانشاد پروفسور محسن هشترودی یکی از برجسته‌ترین استادان ریاضی ایران است.

منحنی قامتم تابع ابروی توست
خطِ مجانب بر آن سلسله گیسوی توست

تصویر روی جلد کتاب آرامگاه خیام نیشـــابوری شاعر و ریاضی‌دان مشـــهور قرن پنجم هجری قمری است که با محتوای اثر که پیوند شـــعر و ریاضی است، هم‌خوانی دارد. مؤلف، کتاب را به پروفســـور فضل‌الله رضا، دانشمند مشهور ایـــران، و دانش‌آموزان و معلمانِ گروهِ ریاضیِ شهرســـتانِ سوادکوه تقدیم کرده است.

کتاب از پنج بخش تشکیل شده‌است.

بخش اول

بخش اول پیش‌درآمد است. نویسنده در این بخش ایدهٔ تألیف کتاب را حاصل ارائهٔ دو مقالهٔ خود در کنفرانس داخلی و خارجی می‌داند. مقالهٔ نخست با عنوان مفاهیم ریاضی در گسترهٔ شعر فارسی اســـت که در یازدهمین کنفرانس ملی آمـــوزش ریاضی ایران ارائه گردید و مقالـــهٔ دوم را با عنوان منحنی قامتم تابع ابروی توســـت در کنفرانس بین‌المللی ابومحمود خجندی در کشور تاجیکستان ارائه کرد.

بخش دوم

مؤلف در بخش دوم که گنجینهٔ ادب پارسی نام دارد، به نفوذ زبان و ادبیات فارسی در مجامع علمی کشورهای مختلف اشاره نموده است. اینکه امروزه زبان و ادبیات فارسی موضوع مورد مطالعه و تحقیق بسیاری از انجمن‌های ایران‌شناسی دانشگاه‌های معروف جهان است.

نویســـنده در ادامهٔ همین بخش به بـــزرگان داخلی و خارجـــی که زبان و ادبیات فارســـی را مورد توجه و مطالعه قرار داده‌اند، اشـــاره نموده است. در خارج از ایران می‌توان به

بزرگانی همچون ادوارد براون، رینولد نیکلسون، هلموت ریتر، ژوکوفسکی، ریچارد فرای و ... اشاره نمود. در داخل ایران نیز شخصیت‌های علمی همچون پروفسور سیدمحمود حسابی (پدر علم فیزیک و مهندس نوین ایران)، پروفسور فضل‌الله رضا (دانشمند حوزه‌های مهندسی برق و مخابرات) و دکتر قاسم غنی(پزشک) از دلدادگان فرهنگ و ادب ایران بودند که آثار ادبی گرانقدری را نیز تألیف نموده‌اند. عشق به زبان و ادبیات فارسی به‌گونه‌ای بود که بزرگانی همچون دکتر سیروس شمیسا و استاد بهاءالدین خرّمشاهی رشتهٔ پزشکی را ناتمام رها کردند و به خیل عشاق ادب فارسی پیوستند.

بخش سوم

نویسنده در این بخش به پیوندهای میان ادبیات فارسی با علوم گوناگون همچون قرآن، حدیث، موسیقی، علم کلام، نجوم و طبِ قدیم اشاره دارد و برای هر کدام مصداق‌هایی آورده است.

بخش چهارم

بخش چهار که موضوع اصلی کتاب است با عنوان مفاهیم ریاضی در گسترهٔ ادب فارسی، به نگارش در آمده است. نویسنده این بخش را با شعری از سهراب سپهری آغاز کرده است:

زندگی «مجذور» آینه است.
زندگی گل به «توانِ» ابدیت،
زندگی «ضربِ» زمین در ضربانِ دلِ ما،
زندگی «هندسهٔ» ساده و یکسانِ نفَس‌هاست.

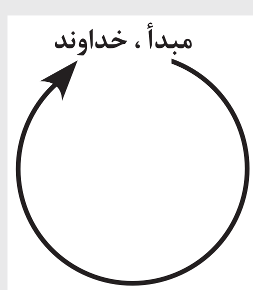
سپس سعی نموده نمونه‌هایی از مفاهیم ریاضی را در اشعار فارسی سراغ بگیرد. در ذیل به برخی از این نمودها اشاره می‌گردد:

۱. اولین مفهوم ریاضی که نویسنده به آن اشاره می‌کند، دایره است. برای ترسیم دایره از مثنوی مولوی کمک می‌گیرد:

هر کسی کو دور ماند از اصلِ خویش
باز جوید روزگارِ وصلِ خویش

(قاسمی گل‌افشانی، ۱۳۹۳ : ۲۸)

ملاحظه می‌کنید که این بیت مفهوم دایره را در ذهن خواننده تداعی می‌کند.



۲. نویسنده برای نشان دادن جدول تناسب از شعر خاقانی استفاده کرده. شعری که خاقانی بعد از مشاهدهٔ ویرانه‌های کاخِ ساسانیان در مداین از زبانِ کاخ سروده است:

ما بارگه دادیم، این رفت ستم بر ما
بر قصرِ ستمکاران گویی چه رسد خذلان؟

(همان: ۳۲)

به جانت	نگارا	که داری	وفا
نگارا	وفا کن	به دل	بی‌جفا
که داری	به دل	دوست‌تر	مَرمَرا
وفا	بی‌جفا	مرمرا	خوش ترا

۳. نویسنده برای ترسیم مربع از آرایهٔ تربیع استفاده می‌کند: صنعت تربیع آن است که مثلاً چهار بیت یا چهار مصراع آورند که هم از طول و هم از عرض بتوان آن‌را خواند به‌طوری که در معنا و مفهوم آن خللی بوجود نیاید. اگر مسیر طولی و عرضی خواندنِ آن را با خطی نشان دهیم، مربع شکل می‌گیرد.

قصرستمکاران	بارگه عدل و داد
x	ویرانی

مثال: **به جانت نگارا که داری وفا**
نگارا وفا کن به دل بی‌جفا
که داری به دل دوست‌تر مَرمَرا
وفا بی‌جفا مرمرا خوش‌تَرا

(همان: ۴۲)

بخش پنجم

بخش پنجم به فهرست منابع و سرچشمه‌ها اختصاص داده شده‌است. نویسنده در تألیف این کتاب از ۴۶ منبع استفاده نموده است.

ما در این صفحات مختصر نتوانستیم نمونه‌های بیشتری را به تماشا بگذاریم، لذا شما خوانندگان محترم را به اصل کتاب ارجاع می‌دهیم. این کتاب می‌تواند برای دانش‌آموزان، دانشجویان، دبیران ریاضی مفید باشد. نویسندهٔ کتاب دنیای تازه‌ای را در پیش چشم خواننده می‌گشاید.

منابع

۱. قاسمی گل‌افشانی، علی‌اکبر. (۱۳۹۳). **منحنی قامتم تابع ابروی توست**. تهران: رسانش‌نوین.
۲. کدیور، پروین.(۱۳۸۷). **روان‌شناسی تربیتی**.تهران: سمت

نامه‌های رسیده

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌هـــا، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شـــد. تا پایان آبان ۱۳۹۵، نامه‌ها و مطالب دوســـتان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- سمیه سادات میرمعینی، از تهران؛
- افسانه عسگری، از تهران؛
- افشین ارمی، از مرودشت؛
- سمیه صابری، از مرودشت؛
- طوبی میرانپور، از پلدختر؛
- ولی حسینی، از پلدختر؛
- سید حسین اصولی، از تهران؛
- فیروزه فروزبخش، از تهران؛
- زهرا ملکی، از قزوین؛
- قاسم حسین قنبری، از سمنان؛
- سیمین افروزان، از تهران؛
- سهیلا کیانی، از تهران؛
- فاطمه منفرد، از شیراز؛
- امین کشاورز، از شیراز؛
- احسان رضائی، از کرمانشاه؛
- اصغر شریفی، از رودهن؛
- محمدنقی ایمانی، از رودهن؛
- سمیه صابران‌بحری، از رودهن.

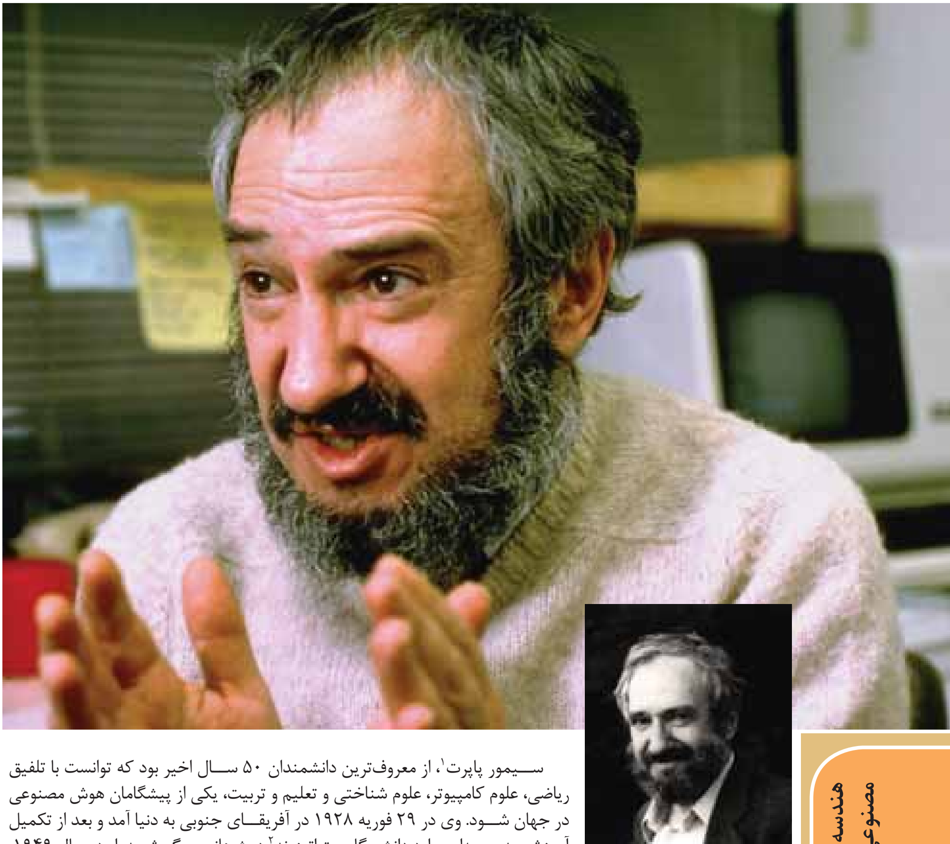
IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications &Teaching Technology Office

125 Roshd
Mathematics
Education Journal

vol.34 no.2 2016 ISSN:1606-9188

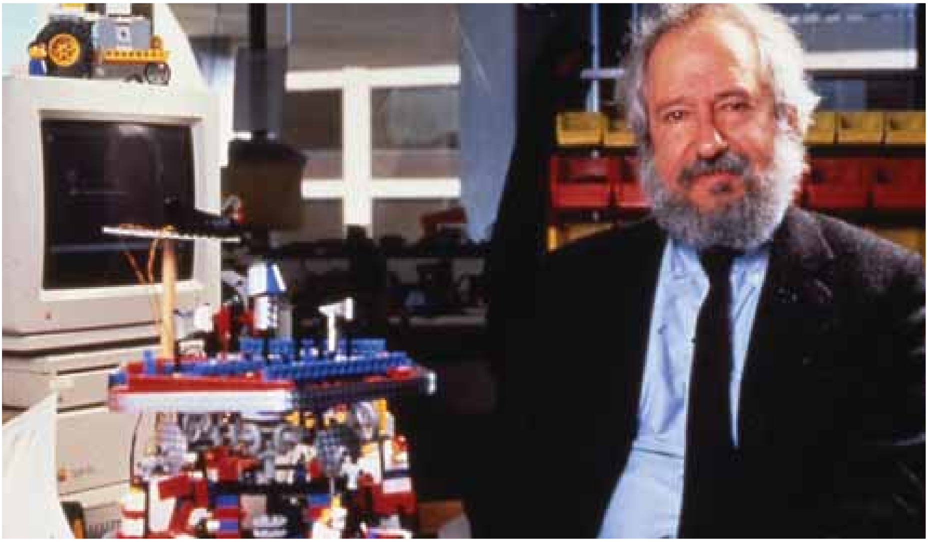
هندسه لاک‌پشت: میراث پاپرت در تلفیق ریاضی، هوش مصنوعی و علوم شناختی و تبیین نظریهٔ ساختن‌گرائی



ســیمور پاپرت[1]، از معروف‌ترین دانشمندان ۵۰ ســال اخیر بود که توانست با تلفیق ریاضی، علوم کامپیوتر، علوم شناختی و تعلیم و تربیت، یکی از پیشگامان هوش مصنوعی در جهان شــود. وی در ۲۹ فوریه ۱۹۲۸ در آفریقــای جنوبی به دنیا آمد و بعد از تکمیل آموزش مدرســه‌ای، وارد دانشــگاه ویتواترزرند[2] در ژوهانسبورگ شــد. او در سال ۱۹۴۹، مدرک کارشناسی‌اش را در فلسفه، دریافت نمود و در همان دانشگاه، به ادامه تحصیل در رشته ریاضی پرداخت. پاپرت در سال ۱۹۵۲، پس از گرفتن مدرک دکترای تخصصی ریاضی (PhD)، عازم انگلســتان شد و برای بار دوم، به ادامه تحصیل در دوره دکترای ریاضی تحت راهنمایی فرانک اسمیتیز[3] مشغول شد و در سال ۱۹۵۹، دومین مدرک دکتری خود را در ریاضی، از دانشگاه کمبریج دریافت نمود.

پاپرت ابتدا به عنوان محقق، در دانشــگاه کمبریج، دانشــگاه ژنو، مؤسســه هنری پوانکاره در پاریس مرکز پژوهشی دیگر کار کرد و ســپس در سال ۱۹۶۳ به مؤسسه تکنولوژی ماساچوست (MIT) رفت و تا پایان، در آنجا به فعالیت‌های آموزشی- پژوهشــی مشغول بود. وی سال ۱۹۶۷، استاد تمام ریاضیات کاربردی شد و هم زمان با همکارش پروفسور ماروین مینسکی[4]، مسئولیت «آزمایشگاه هوش مصنوعی ام‌آی‌تی» را تا سال ۱۹۸۱، به عهده داشتند.

پاپرت در آموزش ریاضی و هوش مصنوعی، شهرتش به خاطر ابداع «زبان برنامه‌نویسی لوگو[5]» با همکاری والی فیورزیگ[6] و تبیین نظریه یادگیری «ســاختن‌گرایی[7]» اســت که برای آن، از نظریه تحول ذهنی پیاژه که از خانواده نظریه‌های ساخت و سازگرایی[8] است، استفاده نمود. پاپرت قبلاً در دانشگاه ژنو، با پیاژه همکاری کرده بود و وی، بارها بیان کرده بود که هیچ‌کس به خوبی پاپرت، نظریه‌اش را درک نمی‌کند. تمایز اصلی دیدگاه ساخت و سازگرایی با ساختن‌گرایی پاپرت، نقش «ابزار[9]» به عنوان تسهیل‌کننده[10] یادگیری اســت. در این زبان برنامه‌نویسی، به کودکان نشان داده می‌شود که چگونه در یک فضای بازی‌گونه، از روبات متحرک کوچکی به نام «قورباغه لوگو[11]» یا «لوگو قورباغه» استفاده کنند و از طریق آن، مسائل ساده را حل کرده و ترسیمات هندسی را انجام دهند.



با این دغدغه، پاپرت در «گروه معماریِ ماشـــین ام‌آی‌تی[12]»، یک گروه تحقیقی ایجاد نمود که بعدها، تبدیل به «لابراتوار رسانه ام‌آی‌تی[13]» شد.

پاپرت برای معرفی نظریه یادگیری ساختن‌گرایی و نشان دادن قابلیت‌های زبان لوگو، چندین کتاب نوشت که معروف‌ترین آن‌ها، «طوفان ذهن: کودکان، کامپیوتر و ایده‌های قدرتمند[14]» است که در سال ۱۹۸۰، چاپ شد. پاپرت هم‌چنین، در راستای ارتقای دسترسی کودکان به تکنولوژی، ایده «ماشین دانش[15]» را مطرح کرد و آن را توسعه داد؛ ایده‌ای که کودکان را قادر سازد تا با موقعیت درگیر شوند و آن را کشف کنند.

پارپرت در ماه دسامبر سال ۲۰۰۶ و در سن ۷۸ سالگی، برای شرکت در «هفدهمین مطالعه کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضـــی[16]» بـــا عنوان «آموزش ریاضی و تکنولوژی: بازاندیشـــی این حوزه»، به هانوی پایتخت ویتنـــام رفت. در هانوی با یک موتورسوار تصادف کرد و دچار ضربه شدید مغزی شد. او بعد از چِندین عمل جراحی در هانوی و بوستون، به خانه خویش رفت و عملاً جز انجام کارهای ساده روزانه، توانایی‌های خود را به تدریج از دست داد. پاپرت در ۳۱ جولای ۲۰۱۶، در سن ۸۸ سالگی در خانه خود در شهر بلوهیل واقع در ایالت مِین، زندگی را بدرود گفت.

رئیس دانشـــگاه ام‌آی‌تی در بزرگداشـــتش گفت که پاپرت، ذهن فوق‌العاده وسیع وخلاقی داشت و حداقل، انقلابی در سه حوزه برپا نمود که شامل چگونگی معناسازی کودکان از دنیای واقعی، توسعه هوش مصنوعی و ایجاد ارتباط غنی بین آموزش و تکنولوژی بوده است. به گفته وی، اثری که پاپرت بر ام‌آی‌تی گذاشت، آن چنان عمیق است که تا همیشه باقی است و باعث ارتقای تفکر دیجیتالی و ارتباط بهتر این دانشگاه با تمام سطوح آموزشی در سراسر جهان بوده و خواهد بود.

پی‌نوشت‌ها

1. Seymour A. Papert
2. Witwatersrand
3. Frank Smithies
4. Marvin Minsky
5. Logo Programming Language
6. Wally Faurzeig
7. Constructionist
8. Constructivist Learning Theory
9. Tool
10. Facilitator
11. Logo Turtle
12. MIT Architecture Machine Group
13. MIT Media Lab
14. Mind Storms: Children, Computers, and Powerful Ideas
15. Knowledge Machine
16. 17th Study of International Commission on Mathematical Instruction Study17: ICMI Study17

کارآمدی و توسعهٔ جامعه در سایه خودکفایی
و افزایش بهره وری