بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۰۶

دورهٔ بیست و نهم، شمارهٔ ۲، زمستان ۱۳۹۰
فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.

هم‌چنین:
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات کمک‌آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

- نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
- نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸
- وب‌گاه: www.roshdmag.ir
- رایانامه: riazi@roshdmag.ir
- تلفن پیام‌گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲
- کد مدیرمسئول: ۱۰۲
- کد دفتر مجله: ۱۱۳
- کد امور مشترکین: ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ – ۷۷۳۳۶۶۵۵
- چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
- شمارگان: ۱۲۰۰۰

WWW.RIAZISARA.IR

ارتقای حرفه‌ای معلمان ریاضی

یک مسئله و دو راه حل

از دیرباز، و هم‌زمان با تأسیس و توسعه آموزش‌های عمومی تاکنون، مراکز مختلفی اعم از دانش‌سراهای مقدماتی و عالی، دانشگاه‌ها، مراکز تربیت معلم و انواع مجتمع‌های دولتی و خصوصی، عهده‌دار آموزش معلمان بوده‌اند. در واقع، دوره‌های کارشناسی ریاضی در جهان، مولود نیازمندی نظام‌های آموزشی به مدرسان ریاضی بوده است. در ایران نیز این دوره، هم‌زمان با تأسیس **دارالمعلمین عالی** آغاز شد و در جریان تکامل خود، به **دانش‌سرای عالی** تغییر نام یافت.

اما با توجه به نیازهای برخاسته از واقعیت‌های تدریس و یادگیری و به دلیل محدودیت این نوع آموزش‌ها، در چند دهه اخیر، حوزه تحقیقی گسترده‌ای به نام **آموزش معلمان** شکل گرفته است و نتایج نظری و اجرایی قابل توجهی نیز به‌دست آورده است. به گفته کیل پاتریک (۲۰۰۸)، طی ۱۵ سال گذشته، توجه پژوهشگران از **یادگیرندگان** به **یاددهندگان** یعنی **معلمان**، تغییر جهت داده است. در این راستا، بعضی پژوهشگران تلاش کرده‌اند تا چگونگی به‌کار بردن دانش پداگوژیکی ـ محتوایی را در آموزش ریاضی، به تصویر بکشند و بعضی دیگر، در جستجوی آن‌چه که دانش ریاضی برای تدریس نامیده می‌شود، هستند. سؤال اساسی اکثر این پژوهش‌ها این است که «معلمان ریاضی **چه** ریاضی‌ای می‌دانند و **چگونه** می‌توانند آن را درک کنند و در تدریس خود، از آن استفاده نمایند» و این همان سؤال اساسی است که لی‌پینگ ما در سال ۱۳۹۹ مطرح کرد.

به‌باور ایون و بال (۲۰۰۳)، این سؤال، اهمیت ایجاد و تبیین رویکردهای جدید را برای **توسعه دانش ریاضی قابل استفاده معلمان** و به‌وجود آوردن ابزارهای معتبر و قابل اتکا برای سنجش چنان دانشی، برجسته نمود. در حالی که به عقیده آن‌ها، این کار جز با شناخت همه‌جانبه عمل تدریس ریاضی توسط معلمان، امکان‌پذیر نیست.

در هر صورت، آموزش معلمان در عصر جدید، پرفراز و نشیب‌تر از گذشته شده است، زیرا دانش‌آموزان باهوش‌تر، پرخواسته‌تر، دنیا دیده‌تر ـ اگرچه این دنیا مجازی و از طریق تکنولوژی باشد ـ بلندپروازتر و عجول‌تر شده‌اند! اما با وجود پر فراز و فرود بودن این حوزه، مسیر نسبتاً روشنی هم پیش‌پایمان است و شناخت این مسیر، نیازمند دانش، آگاهی و درس گرفتن از گذشته درخشان آموزش معلمان در ایران و توجه به یافته‌های جدید پژوهشی مبتنی بر واقعیت عمل تدریس در سطح جهانی است.

یکی از درس‌های مهمی که از تجربه‌های ایرانی آموزش معلمان می‌توان گرفت این است که آن آموزش هرچه که بود، قادر به تربیت معلمانی متناسب با خواسته‌های آموزشی زمان خود و همگام با یافته‌های پژوهشی در آن دوران بود. هم‌چنین، به دانشجو ـ معلمانِ آن زمان فرصت داده می‌شد تا تدریس‌های عملی ـ نه تدریس‌های نمایشی ـ داشته باشند و از حداقل‌های معلمی که «کلاس‌داری» است تا «تدریس موضوعی مستقل» را به همراه یک معلم راهنما، تجربه کنند. در سطح جهانی نیز، به سبب خوب بودن اوضاع اقتصادی در کشورهای توسعه یافته، درصد پایین فارغ‌التحصیلان ریاضی دانشگاه‌ها و افزایش تدریجی تقاضاهای اجتماعی برای معلمانِ

آموزش‌دیده ریاضی به سبب گسترش آموزش عمومی، تمهیداتی اندیشیده می‌شد. برای مثال، در بسیاری از استان‌ها و ایالت‌های کانادا و آمریکا، به سبب حمایت قوی دولت‌های استانی/ایالتی و دولت فدرال از خواسته‌های حرفه‌ای و معیشتی معلمان ریاضی، ناگهان میزان توجه به حرفه معلمی شدت گرفت و بدین سبب، رقابت شدیدی بین داوطلبان ورود به حرفه معلمی پدید آمد که در موارد زیادی، شانس ورود به این حرفه، به ۱۰ درصد رسید. در چنین وضعیتی، تجربه بومی و جهانی نشان می‌دهد که امکان انتخاب معلمان از بین علاقه‌مندترین‌ها، راسخ‌ترین‌ها و باسوادترین‌ها وجود داشت. بعد از طی این مراحل سخت برای ورود به دوره، یک یا دو سال کامل هم باید می‌گذراندند که دوره «دریافت گواهی تدریس» نامیده می‌شد و هدف آن، تربیت حرفه‌ای معلمان و آماده‌کردن آن‌ها برای شروع به تدریس بود. این دوره شامل تنها چند درس نظری تدریس و علوم پایه بود و قسمت اصلی آن، شامل درس‌های پداگوژیکی و تدریس‌های عملی و متعدد و نسبتاً طولانی بود. در زمانی که تقاضا برای معلمی بسیار زیاد بود ـ زیرا اوضاع اقتصادی آن جوامع، امنیت شغلی، شأن اجتماعی و وضعیت معیشتی خوبی برای معلمان ایجاد کرده بود، این دوره‌ها بهتر جواب می‌داد؟ و معلمان پس از گذراندن ۱۲ ماه کامل در عرض یک سال یا ۱۸ ماه طی دو سال ـ سالی ۹ ماه ـ موفق به اخذ لیسانس معلمی یا گواهی تدریس می‌شدند.

در صورتی که در سال‌های اخیر، غرب و شرق جهان شاهد مشکلات اقتصادی فراوان است که بر روند آموزش معلمان ـ به عنوان یکی از بزرگ‌ترین جمعیت‌های حرفه‌ای جهان ـ تأثیرات ناگواری گذاشته است یعنی مسئله تاحدودی روشن است!

تعداد فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌ها افزایش یافته، از بودجه‌های اختصاص داده شده به آموزش‌های معلمان کاسته شده و وضعیت معیشتی ـ آن‌ها دچار افت شدید گردیده است. در نتیجه، افراد کمتری علاقه‌مند به ادامه تحصیل در دوره‌های معلمی شده‌اند و با تمام این وجود، یک حقیقت صریح و شفاف وجود دارد که آموزش عمومی بدون معلمِ آموزش دیده و توانمند، قادر نیست وظایف خود را که مهم‌ترین آن‌ها، تربیت علمی و اخلاقی دانش‌آموزان است، انجام دهد. پس باید به فکر چاره بود!

خوشبختانه در یکی دو سال گذشته، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، بخشنامه‌ای مبنی بر راه‌اندازی دوره‌های **کارشناسی ارشد بدون پایان‌نامه**، به دانشگاه‌ها ابلاغ کرده است. اگرچه این خبر نویدبخش است و به‌خصوص برای آموزش معلمان، می‌تواند روزنه‌ای پرنور تلقی شود، اما لازم نیست در این مورد، تعجیل شود. برعکس، برای تضمین موفقیت این طرح، لازم است که به کمک مطالعه پیشینه دوره‌های کارشناسی ارشد با پایان‌نامه و بدون پایان‌نامه در کشورهای دیگر، و با انجام نیازسنجی موقعیت‌مدار و مخاطب‌شناسی واقعی، برنامه‌های درسی مناسب برای دوره‌های ارتقای معلمی که به نوعی، معادل گواهی تدریس‌های قبلی و فعلی است، پرداخت.

ایجاد این ظرفیت جدید در رشته آموزش ریاضی، می‌تواند به تأسیس دوره‌های **کارشناسی ارشد تدریس ریاضی** منجر شود. این دوره‌ها می‌توانند تأمین کننده نیاز شدید کشور به تربیت نیروهایی باشند که اغلب شاغل به تدریس یا علاقه‌مند به تدریس و ارایه سایر خدمات آموزشی در حوزه ریاضی‌اند، اما آموزش‌های حرفه‌ای لازم را برای این کار، ندیده‌اند.

هدف **کارشناسی ارشد تدریس ریاضی** به عنوان جایگزین مناسب‌تری برای دوره‌های **گواهی معلمی**، تربیت چنین افرادی می‌تواند باشد:

۱. دبیران ریاضی با کیفیت بالا
۲. ارتقای دانش‌های موضوعی و پداگوژیکی معلمان ریاضی شاغل به تحصیل
۳. آموزشگرانِ معلمانِ دوره‌های ابتدایی و راهنمایی
۴. سرگروه‌های ریاضی برای استان‌ها و ناحیه‌های مختلف آموزش‌وپرورش
۵. برنامه‌ریزان درسی برای گروه ریاضی درسی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی.

ویژگی چنین برنامه‌ای این است که پایان‌نامه ندارد و بدین سبب، فرصت تربیت نیروی مورد نیاز را به **صورت انبوه** ایجاد می‌کند. اما در عوض، دانشجویان واحدهای درسی مرتبط‌تر و متمرکز بیشتری می‌گذرانند و درس‌های کارورزی آن‌ها همگی با حضور در کلاس درس واقعی و با نظارت و مشورت استاد راهنمای درس و معلم کلاس انجام می‌شود. به‌طور خلاصه، هدف اصلی دوره کارشناسی ارشد بدون پایان‌نامه آموزش ریاضی، ارتقای انواع دانش‌های مورد نیاز تدریس معلمان ریاضی، ارتقای شغلی آن‌ها و افزایش صلاحیت‌های حرفه‌ای ایشان است. پاسخ به این نیازها، مستلزم تولید انبوه است و دوره‌های کارشناسی ارشد بدون پایان‌نامه، می‌توانند از عهده این مهم برآیند و با نوآوری و هدفمندی بیشتری، جایگزین دوره‌های ختم به **گواهی تدریس** شوند.

اما تحقق این مهم، نیازمند دوباره‌نگری نسبت به کل برنامه‌های آموزش معلمان در ایران از منظری وسیع‌تر شامل هدف، محتوا، سازماندهی، تنوع و دقت کافی در اجرا است.

***

در این‌جا برخود لازم می‌دانم که از زحمات سرکار خانم سپیده چمن‌آرا که چند سال عضو فعال هیئت تحریریه مجله بودند، تشکر و قدردانی کنم. هم‌چنین، پیوستن جناب آقای دکتر سیدحسن علم‌الهدایی را به جمع هیئت تحریریه تبریک می‌گویم و امیدوارم که شاهد ایفای نقش بارز ایشان در مجله باشیم.

مقاله

آیا آن‌ها را باور داریم؟!

باورها در آموزش ریاضی

عبداله حسام
دبیر دبیرستان‌های اصفهان

چکیده

باورهای دانش‌آموزان نسبت به مقوله‌های مختلف مرتبط با ریاضی و آموزش آن، به‌طور آگاهانه یا ناآگاهانه همه فعالیت‌های آنان را در این حوزه تحت تأثیر قرار می‌دهد. برای مثال، باورهای منفی و نادرست می‌توانند باعث کاهش انگیزه و اعتماد به نفس شده و تلاش‌های معلم و دانش‌آموز را ناکارآمد سازند. در این مقاله، ابتدا ارتباط باورها با اهداف آموزش ریاضی مورد اشاره قرار گرفته است. سپس، براساس مدل حل مسئله شونفیلد، توضیح داده‌ایم که چگونه باورها زمینه‌ای شناختی را تشکیل می‌دهند که سایر عوامل مؤثر در حل مسئله در این زمینه عمل می‌نمایند. با توجه به این که عامل عمده در شکل‌گیری باورهای دانش‌آموزان تجارب کلاس درسی آنها است، این مطلب نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، چگونگی تأثیرگذاری باورها در یادگیری ریاضی افراد بحث شده است. قسمت آخر مقاله نیز، به نقش معلمان و باورهای آنها در شکل‌گیری باورهای مرتبط با ریاضی دانش‌آموزان و اهمیت این مسئله در فرایند آموزش اختصاص داده شده است.

کلیدواژه‌ها: باورها، حل مسئله، یادگیری ریاضی، تجارب کلاس درس

باورهای یادگیرنده نسبت به‌خود و نسبت به یادگیری، ریاضی، معلم و نظایر این‌ها، به‌عنوان قسمتی از دانش غیررسمی فرد، یکی از پایه‌های یادگیری وی را تشکیل می‌دهند و باید همواره مورد توجه باشند

❑ مقدمه

یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در بروز رفتارهای انسان، باورهایی است که در ذهن دارد. تأثیر این باورها به حدی است که برخی بیان کرده‌اند که «انسان همان است که باور دارد». گاهی حاضر نیستیم برای رسیدن به دستاوردهایی که شخص دیگری، عمری را صرف آن کرده، یک روز از وقت خود را بگذاریم. این اختلاف رویکرد، ناشی از تفاوت در نوع باورها و نگرش‌هاست. به عبارتی، می‌توان گفت که رفتارهای مشهود هر شخص، به‌طور عمده، بازتاب و نمای بیرونی باورهای خودآگاه و ناخودآگاهی است که وی در خاطر داشته است. بر همین اساس، دلیل به ثمر نرسیدن بسیاری از تلاش‌ها برای تغییر رفتار بیرونی افراد را نیز، می‌توان در تمرکز بر روی سطح و کم توجهی به باورها به‌عنوان ریشه رفتارهای بیرونی جستجو کرد.

شونفیلد (۱۹۸۵) بیان کرده است که باورها در همه حوزه‌های مرتبط با شناخت انسان تأثیر دارند. وی، در عین حال ابراز می‌دارد که چون در ریاضیات، با ساختارهای مجردتری سر و کار داریم، تأثیر باورهای افراد بر شکل‌گیری شناخت آنها در این حوزه، عمیق‌تر است. بر همین اساس، توجه فزاینده‌ای بر نقش باورها در یادگیری و آموزش ریاضی صورت گرفته و به گفته پلاسدوتیر (۲۰۰۷)، این موضوع به عنوان یکی از عناصر اصلی تحقیقات آموزش ریاضی درآمده است.

شاهورانی و ساویزی (۲۰۰۷) به نقل از تامپسون (۱۹۹۲) بیان می‌کنند که باورها، می‌توانند به عنوان دیدگاه‌های شخصی، تصورات، برداشت‌ها و نگرش‌های یک فرد در نظر گرفته شوند. کورت و اینده (۲۰۰۷) نیز ابراز می‌دارند که باورهای مرتبط با ریاضی دانش‌آموزان، عبارتند از برداشت‌های ذهنی که به طور صریح یا ضمنی در خاطر آنها وجود دارد. آنها، این باورها را دارای تعامل با یکدیگر دانسته و رقم زننده یادگیری و حل مسئله ریاضی معرفی می‌نمایند.

از طرفی، شونفیلد (۱۹۸۵) اصطلاح «نظام باوری[1]» را به کار برده و آن را در یک کلمه، به عنوان «جهان‌بینی ریاضی[2]» فرد معرفی نموده است. وی، مؤلفه‌های اصلی این جهان‌بینی را به طور عمده در نگرش فرد نسبت به خود، نسبت به محیط و نسبت به ریاضیات و موضوع‌های مختلف ریاضی دانسته است. به گفته او، این جهان‌بینی همان دیدگاهی است که فرد با آن به ریاضی نزدیک شده و تکالیف ریاضی خود را انجام می‌دهد.

❑ باورها و اهداف آموزش ریاضی

در مورد اهداف متعدد و متنوع آموزش ریاضی، بارها سخن گفته شده است. به‌طور خاص، شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM) در استانداردهای ۲۰۰۰ خود، ریاضی را از یک دیدگاه، به‌عنوان بخشی از میراث فرهنگی بشر مورد توجه قرار داده و آورده است که «باید شهروندانی تربیت کنیم که برای ریاضی ارزش قایل شوند». این «ارزشمند بودن ریاضی»، جزو باورهایی است که لازم است که در یادگیرندگان آن ایجاد گردد. از این رو، صرفاً آموزش چند مفهوم و رویه، بدون توجه به باوری که در اثر این آموزش ایجاد شده است، به معنای انجام وظیفه آموزشی نخواهد بود. این شورا در ادامه آورده است که باید با این نگرش که ریاضی تنها برای عده‌ای نخبه است، مقابله نمود و ضروری است همه دانش‌آموزان فرصت یادگیری معنادار ریاضی را داشته باشند.

ما نیز به عنوان معلمان ریاضی در پایان آموزش هر مطلب، دانش و مهارت‌های دانش‌آموزان خود را مورد ارزشیابی قرار می‌دهیم. با این وجود، آیا تاکنون باورهای محصول این آموزش را نیز بررسی و ارزیابی نموده‌ایم؟ شهریاری (۱۳۸۴) روایتی را از قول فه. تی. موف نقل می‌کند که دانش‌آموزی به دوست خود

می‌گفت: «هندسه، درس عجیبی است. معلم وارد کلاس شده، دو مثلث برابر روی تخته رسم می‌کند و در تمام طول ساعت تلاش می‌کند تا برابر بودن آنها را برای ما اثبات کند. هیچ‌کس نمی‌فهمد که این تلاش بیهوده برای اثبات مطلبی که واضح است، برای چیست!» وجود باور فوق در خاطر دانش‌آموزان، برای بسیاری از معلمان درس هندسه تجربه شده است. با ایجاد چنین باوری، به فرض این‌که دانش‌آموزان بتوانند به سؤالات امتحان پاسخ دهند، آیا در آموزش هندسه موفق بوده‌ایم؟

به‌عنوان معلمان ریاضی، بارها ملاحظه نموده‌ایم که با وجود تلاش‌های ما برای آموزش استدلال استنتاجی در هندسه، عملکرد دانش‌آموزان در این حوزه، چندان رضایت‌بخش نیست

◻ نقش باورها در فرایند حل مسئله

شونفیلد (۱۹۸۵)، نتایج تحقیقات خود را در حل مسئله ریاضی در قالب مدل زیر ارایه نموده است که مشتمل بر چهار عامل اساسی مؤثر در حل مسئله ریاضی است:

منابع[۳]: دانش ریاضی در اختیار فرد، شامل شهودات و دانش غیر رسمی در مورد یک موضوع، رویه‌های الگوریتمی و غیر الگوریتمی معمولی (روتین) و درک و فهم نسبت به قوانین کار در یک حوزه؛

رهیافت‌ها[۴]: راهبردها و سازوکارهای کار روی مسایل ناآشنا و قوانین سرانگشتی برای حل مؤثر مسئله، مانند رسم شکل، انتخاب نمادهای مناسب، جستجوی یک مسئله مرتبط و نظایر آن

کنترل[۵]: تصمیم‌گیری‌های کلان درمورد انتخاب و به کارگیری منابع و راهبردها شامل طرح نقشه، نظارت و ارزیابی، تصمیم‌سازی و اعمال فراشناختی آگاهانه؛

نظام باوری[۶]: که قبلاً به آن اشاره شده است.

وی، مواردی را ارایه نموده است که در آنها دانش‌آموزان، منابع و دانش مورد نیاز را برای حل مسئله در اختیار داشته‌اند؛ ولی به دلیل عدم باور به کارایی این منابع، موفق به بازخوانی به موقع آنها و حل مسئله نشده‌اند. به‌علاوه، باورها در انتخاب سازوکارها، مدت زمان کار روی مسئله و میزان جدیت در حل مسئله نیز اثر گذارند. شونفیلد، بیان می‌کند که حتی دانش‌آموزان موفق‌تر، اغلب دارای باورهایی هستند که عمیقاً «ضد ریاضی» است و تأثیر منفی واضحی بر روی رفتار حل مسئله آنها دارد. وی برای نمونه، سه باور رایج در دانش‌آموزان و پیامد آنها را ذکر می‌نماید:

باور ۱: ریاضی رسمی و صوری، برای تفکر در موقعیت‌های واقعی یا حل مسئله یا چیزی نداشته یا اندک دارد.

پیامد: در مسایلی که به دنبال کشف هستند، ریاضی رسمی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

باور ۲: مسئله ریاضی اگر حل شدنی باشد، در کمتر از ۱۰ دقیقه حل می‌شود.

پیامد: اگر دانش‌آموزان نتوانند مسئله‌ای را در مدت ۱۰ دقیقه حل کنند، آن را رها می‌کنند.

باور ۳: تنها نوابغ قادر به کشف یا ابداع ریاضی هستند.

پیامد ۱: اگر شما (دانش‌آموز) چیزی را فراموش کردید، اتفاق بسیار بدی است، زیرا چون یک نابغه نیستند، نمی‌توانید خودتان آن را استنباط کرده و به دست آورید.

پیامد ۲: دانش‌آموزان رویه‌هایی را که با آنها مواجهند می‌پذیرند، بدون سعی در این که بفهمند چرا درست هستند. برای آنها، تنها همین که توسط یک قدرت فراتر تأیید شده‌اند، کافی است.

به دفعات، معلمان ریاضی این باورهای رایج در دانش‌آموزان را تجربه کرده‌اند و چه بسا در اثر رواج بسیار، برایشان یک امر طبیعی به نظر آید. با این حال، تحقیقات متعدد نشان می‌دهند که این باورها، تأثیر قابل توجهی در توانایی‌های کنترلی و فراشناختی افراد و کیفیت حل مسئله ریاضی آنها دارند (ایوبیان و گویا، ۱۳۸۲). بنابراین، به‌طور خلاصه می‌توان گفت که، باورها

ـ آگاهانه ـ یک زمینه روان‌شناختی را بنا می‌نهند که سایر عوامل حل مسئله در بستر آن عمل می‌کنند.

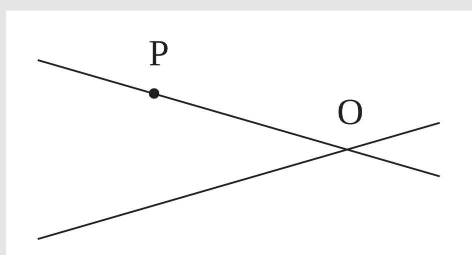
شونفیلد (۱۹۸۵) بیان کرده است که باورها در همه حوزه‌های مرتبط با شناخت انسان تأثیر دارند. وی، در عین حال ابراز می‌دارد که چون در ریاضیات، با ساختارهای مجردتری سر و کار داریم، تأثیر باورهای افراد بر شکل‌گیری شناخت آنها در این حوزه، عمیق‌تر است

❐ تأملی بر یک مثال

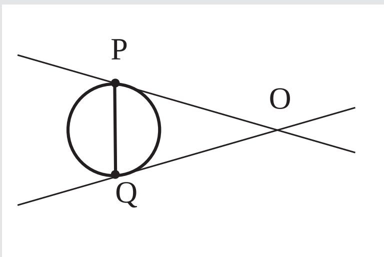
به‌عنوان معلمان ریاضی، بارها ملاحظه نموده‌ایم که با وجود تلاش‌های ما برای آموزش استدلال استنتاجی در هندسه، عملکرد دانش‌آموزان در این حوزه، چندان رضایت‌بخش نیست. به‌عبارتی، بسیاری از آنها با این روش، احساس بیگانگی نموده، یا با کراهت و بی‌میلی با آن مواجه می‌گردند. به نظر می‌رسد که باورهای دانش‌آموزان، نقشی اساسی در ایجاد چنین وضعیتی دارند. برای مثال، گاهی باور آنها این است که زحمتی بدون دلیل را برای اثبات آن چه که نیاز به اثبات ندارد متحمل می‌شوند. تلاش‌های معلم در حل مسایل بیشتر و تکرار و تمرین نیز، توفیق چندانی به دست نمی‌دهد. نمونه زیر مؤیدی بر این دیدگاه است.

سال‌ها پیش، شونفیلد (۱۹۸۵)، مسئله زیر را برای دو دانشجوی سال اول مطرح نموده است:

مسئله: با استفاده از خط‌کش غیر مدرج و پرگار، دایره‌ای رسم کنید که بر این دو خط مماس باشد و نقطه تماس با یکی از آنها P باشد. پاسخ خود را توجیه نمایید.

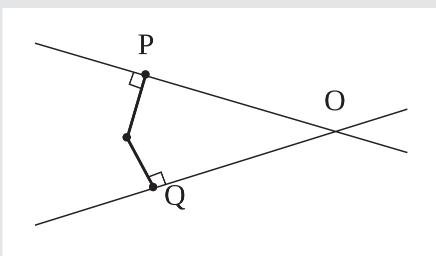


آنها ابتدا نقطه Q را در فاصله برابر با P انتخاب کرده و حدس می زنند که PQ قطر دایره است و چنین دایره‌ای رسم می‌نمایند.



سپس ملاحظه می کنند که ظاهراً دایره خط‌ها را قطع کرده است.

در تأمل برای یافتن مشکل، یکی از آنها می گوید که «فکر کنم باید بر نقطه P عمود باشد». لذا شروع به رسم دو پاره خط عمود بر P و Q می‌نمایند:



این بار، به دلیل خطای رسم، طول‌های PO و QO مساوی نشده و متوقف می‌گردند. شونفیلد وارد شده و می‌پرسد: «چرا باید این پاره خط‌ها دارای طول‌های مساوی باشند؟» و پاسخ می‌شنود که «زیرا به نظر می‌رسد باید این چنین باشد!»

سپس دانشجویان دقایقی دچار سردرگمی می‌شوند. با سؤال مجدد شونفیلد از آنها که «چه دلیلی برای درست یا نادرست بودن حدس خود دارید؟» یکی از آنها می‌گوید، فکر کنم این که نقطه Q باید با همان فاصله نقطه P باشد، نادرست است.»

باورها ــ آگاهانه ــ یک زمینه روان‌شناختی را بنا می‌نهند که سایر عوامل حل مسئله در بستر آن عمل می‌کنند

لذا فرضیه درست قبلی خود را رد می‌کند! شونفیلد، با تحقیقات در جلسات بعدی متوجه می‌شود که این دو دانشجو با ابراز استنتاجی مورد نیاز برای حل مسئله فوق، نظیر اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها، عمود بودن در نقطه تماس و نظایر آن آشنا بوده‌اند و مشکل، به‌جای در اختیار نداشتن منابع مورد نیاز، عدم باور آنها به کارایی رویکرد استنتاجی در مسئله ترسیمی مذکور است. وی با بررسی بیش از ۱۰۰ مورد دیگر، نتیجه می‌گیرد که این پدیده، به جای یک استثناء یک قانون است! یعنی اکثر افراد، با بی‌ارتباط دانستن برهان ریاضی به یافتن جواب مسئله ترسیمی، نمی‌توانند از منابع خود بهره ببرند.

علاوه بر مسایل هندسی نظیر مسئله مذکور، در موارد متعدد دیگری نیز که دانش‌آموز ما به فرضیه یا جواب درست دست یافته و به او می‌گوییم «خوب! حالا همین را اثبات کن!» و او با تعجب می‌گوید «این که معلوم است، چه چیز را ثابت کنم؟!» در چنین شرایطی ما نیز با چنین پدیده‌ای روبرو هستیم. شهریاری (۱۳۸۴) چند راه کار ساده ارایه نموده است یا به ایجاد این باور در دانش‌آموزان کمک کنیم که آن چه می‌بینیم، شایدقابل اعتماد نبوده و برای مطمئن شدن، به برهان نیاز داریم.

◻ باورها ریشه در تجارب کلاس درس دارند

اگر چه در شکل‌گیری باورهای مرتبط با ریاضی در ذهن دانش‌آموزان، عوامل متعددی نقش دارند، ولی تحقیقات مختلف، سهم عمده را به تجارب کلاس درسی آنها اختصاص داده است. یک کلاس ریاضی را در نظر بگیریم که رفتار معلم در آن، وی را به عنوان قدرت بی‌بدیل که راه‌حل هر مسئله‌ای را از قبل می‌داند و تنها مرجع تعیین درستی یا نادرستی راه‌حل‌هاست، معرفی می‌کند. در کلاس دیگر، معلم به همراه دانش‌آموزان روی یک مسئله فکر می‌کند، دلیل انتخاب یک راهبرد را توضیح می‌دهد و در ارزیابی راه‌حل‌ها، ذهن‌های دانش آموزان را به چالش می‌کشد.

اختلاف باورهای برآمده از این دو کلاس را، می‌توان به راحتی درک نمود.

در واقع، فرهنگ حاکم بر کلاس درس ریاضی، نقشی اساسی در شکل‌گیری باورهای دانش‌آموزان نسبت به این حوزه و نسبت به توانایی خود در یادگیری آن دارد و چه بسا، به‌کارگیری یک سازوکار نامناسب در کلاس درس ریاضی، باور به ناتوانی را در یادگیری آن برای بسیاری از افراد به دنبال داشته باشد. شونفیلد (۱۳۸۵) معتقد است که جهان‌بینی ریاضی افراد، انتزاعی است که آنها از تجارب خود در این حوزه به دست آورده‌اند. در مثالی که ذکر شد، وی عامل ایجاد این نگرش را که «برهان، کاری با فرایند کشف و درک ریاضی ندارد» در عدم تجربه کلاس درسی دانش‌آموزان از چنین نقش و فرایندی می‌داند. به‌علاوه، باورهای ایجاد شده در اثر انتزاع از تجارب، خود در تجارب آتی یادگیری دانش‌آموزان نقش داشته و این فرایند متقابل ادامه دارد. لذا، شایسته است که نظری به تأثیر باورها در فرایند یاددهی ـ یادگیری داشته باشیم.

◻ نقش باورها در فرایند یادگیری

به‌طور کلی، هر دو عامل شناختی و عاطفی در تعیین حد و مرزی که فرد قادر به یادگیری و عمل در درون آن است، مؤثر هستند و بنابر تحقیقات متعدد، باورهای شخص، هر دو مقوله مذکور را تحت تأثیر قرار می‌دهند (کورت و اینده، ۲۰۰۷). برای مثال، باور و نگرش یادگیرنده در مورد این که یک موضوع حفظی یا فهمیدنی است، در میزان و کیفیت سعی و تلاش او برای یادگیری مؤثر است. هم‌چنین، شونفیلد (۱۹۸۵) «اضطراب ریاضی» و «ترس از موفقیت» را به‌عنوان در نمونهٔ عاطفی ناشی از باورهای نادرست می‌داند که تأثیر مشخص آنها، ضعیف یادگیری و عملکرد ریاضی یادگیرندگان است. وی، ترس از موفقیت را معلول عوامل خود پنداری ـ اجتماعی می‌داند. مثلاً این‌که برخی از دختران، به خاطر این تلقی که ریاضی موضوعی مردانه

است، نگرانند که در صورت موفقیت در آن از روحیه زنانگی خود فاصله گرفته و دچار دافعه اجتماعی شوند. البته، این‌گونه باورها قابل تغییرند و یافته‌های تحقیقی جدیدتر مانند پانزدوتیر (۲۰۰۷) نشان دهنده این است که اکثر دانش‌آموزان، دیگر ریاضی را به عنوان موضوع تحت سلطه مردان نمی‌بینند.

صرفاً آموزش چند مفهوم و رویه، بدون توجه به باوری که در اثر این آموزش ایجاد شده است، به معنای انجام‌وظیفه آموزشی نخواهدبود

به‌علاوه، بیان شد که ایجاد باورهای مثبت و صحیح در مورد ریاضی، یکی از اهداف آموزش است آن است. بنابراین، نه تنها باورهای مثبت با تقویت انگیزه و اعتماد به نفس، یادگیری را پشتیبانی می‌کنند، بلکه جزیی از فرایند یادگیری مؤثر آن هم هستند «مک‌لید و مک‌لید، ۲۰۰۲؛ ذکر شده در پالزدوتیر (۲۰۰۷).) از سوی دیگر، باورهای منفی و نادرست نیز باعث می‌شوند تا تلاش‌ها برای یادگیری، دارای بازده مورد انتظار نباشند. در توجیه این مطلب، کورت و اینده (۲۰۰۷) بیان کرده‌اند که طرحواره‌های ذهنی افراد، ساخت‌های سطح بالاتری هستند که بر سطوح مفهومی پایین‌تری استوارند و آنها خود، متشکل از باورها و دانش پیشین فرد هستند. این محققان، هم‌چنین توضیح می‌دهند که اگرچه باورها و دانش بسیار به هم نزدیکند، ولی دارای تفاوت‌های اساسی‌اند، از جمله این‌که باورها ساختاری نیمه ـ منطقی دارند ولی ساختار دانش، منطقی است. بنابر بحث فوق، می‌توان نتیجه گرفت که باورهای یادگیرنده نسبت به خود و نسبت به یادگیری، ریاضی، معلم و نظایر این‌ها، به‌عنوان قسمتی از دانش غیررسمی فرد، یکی از پایه‌های یادگیری وی را تشکیل می‌دهند و باید همواره مورد توجه باشند.

□ معلم و باورها در فرایند آموزش

پژوهش‌ها و تجربه‌ها نشان می‌دهند که بسیاری از باورها، بر آمده از متن کلاس درس ریاضی است و معلمان، نقش اساسی در شکل‌گیری آنها دارند. به علاوه، باید توجه کرد که وجوه مختلف باورها دارای ارتباط متقابل هستند. برای مثال، تحقیقات کورت و اینده (۲۰۰۷) نشان می‌دهد که دانش‌آموزانی که باورهای مثبت‌تری نسبت به معلم خود دارند، ریاضی را نیز با ارزش‌تر دیده و احساس اعتماد به نفس بیشتری نسبت به آن می‌نمایند و نگرش مثبت‌تری نیز نسبت به عملکرد وی در کلاس دارند. هم‌چنین، تحقیقات متعدد نشان می‌دهد که نگرش معلم نسبت به ماهیت ریاضی، باور او را نسبت به چگونگی تحقق یادگیری و این‌که چه نقشی برای خود در فرایند تدریس قایل است، هر کدام تأثیری اساسی بر تعامل وی با دانش‌آموزان و ماهیت آموزش ریاضی آنها دارد (ایوبیان و گویا، ۱۳۸۲؛ شونفیلد، ۱۹۸۵). بر همین اساس، معلمان با آگاه بودن از

ـ باورها و شرایط دانش‌آموزانی که در کلاس درس حضور دارند؛

ـ نقش باورهای دانش‌آموزان در یادگیری آنها؛

ـ باورهای خود به‌عنوان هدایت کنندگان جریان آموزش؛

ـ نقش و تأثیر باورهای خود در عملکرد کلاس درسی و تجارب یادگیری دانش‌آموزان؛

می‌توانند به آموزش مؤثرتر و مطلوب‌تر دست یابند.

بر همین اساس، باید توجه نمود که تدریس مؤثر، تابعی از مؤلفه‌های فوق است و ارایه یک نسخه واحد برای عملکرد مطلوب همه معلمان در همه کلاس‌ها و ارزشیابی آنها براساس هدف‌های رفتاری برآمده از این نسخه، غیر منطقی و غیر ممکن است. زیرا احتمال دارد حتی حل یک مثال واحد در دو کلاس متفاوت، باعث ارتقای انگیزه دانش‌آموزان یکی و کاهش اعتماد به نفس و باور به ناتوانی در دانش‌آموزان دیگری گردد. در عوض، باید در جهت ارتقای حرفه‌ای معلمان سرمایه‌گذاری نمود تا آنها به‌عنوان کارشناس، قابلیت تشخیص و بهره‌گیری از راهکارهای متناسب با شرایط کلاس درس خود را برای ایجاد باورهای مثبت در دانش‌آموزان داشته باشند.

در واقع، هر تحولی در آموزش ریاضی نیز، باید از تغییر و تحول در باورهای معلمان در این حوزه آغاز گردد و در غیر این صورت، مؤثر نخواهد بود. برای نمونه، در حالی که گرایش و شعار عمومی برنامه‌ریزان درسی و سیاست‌گذاران آموزشی در شرایط فعلی، استفاده از روش‌های فعال و مانند آنها است، برخی از تحقیقات مانند شاهورانی و ساویزی (۲۰۰۷) نشان می‌دهد که باورهای تدریس سنتی هنوز در میان معلمان غالب است. از این‌رو، نباید انتظار داشت که تنها با شعار، سخنرانی و حداکثر با تعویض کتاب‌های درسی، به نتیجه مطلوب نایل آمد.

صرفاً آموزش چند مفهوم و رویه، بدون توجه به باوری که در اثر این آموزش ایجاد شده است، به معنای انجام وظیفه آموزشی نخواهد بود

❐ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

باورها از مهم‌ترین عوامل تأثیرگذار در بروز رفتارهای آدمی هستند و به دلیل ساختار مجرد ریاضیات، تأثیر آنها در کیفیت رفتارهای مرتبط با ریاضی افراد عمیق‌تر است. برای مثال، باورهای یادگیرنده نسبت به خود، نسبت به یادگیری، نسبت به ریاضی ومعلم آن، به عنوان قسمتی از دانش غیررسمی فرد، یکی از پایه‌های یادگیری و حل مسئله ریاضی وی را تشکیل می‌دهند. از طرفی، بسیاری از این باورها بر آمده از متن کلاس درس ریاضی است و متأثر از مقوله‌های مختلف باورهای معلمان است. بر همین اساس، شایسته است که توجه فزاینده‌ای به نقش باورها در یادگیری و آموزش ریاضی صورت گیرد. امید که با آگاهی کافی در این مورد، بتوانیم تجارب کلاس درسی را برای دانش‌آموزان فراهم آوریم که حاصل آنها، ایجاد باورهای مثبت، تقویت انگیزه و اعتماد به نفس و لذت در یادگیری ریاضی دانش‌آموزان باشد.

پی‌نوشت

1. Belief system
2. Mathematical world view
3. Resouristics
4. Heuristics
5. Control
6. Belief Systems

منابع

۱. ایوبیان، مرتضی و گویا، زهرا. (۱۳۸۲). نقش فراشناخت در آموزش حل مسئله ریاضی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۴. صص ۴۰ ـ ۵۱. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۲. شهریاری، پرویز. (۱۳۸۴). آموزش ریاضی. نشر مهاجر.

3. Corte, E,D; Eynde, P.E. (2007). Unraveling students' belief systems relating to mathematics learning and problem solving. http: math.unipa.it/grim/sidecorte.pdf
4. National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Boston, MA. The Author.
5. Polsdottir, G. (2007). Girls belief about the learning of mathematics. The Montana mathematics Enthusiast. Monograph 3.p. 117 -124.
6. Shoenfeld, A, H. (1985). Mathematical problem solving. New York, Academic press.
7. Shahvarani, A; Savizi, B. (2007). Analyzing some Iranian – High school teachers beliefs on mathematics, mathematics learning and mathematics teaching. Journal of Environmental & science Education. 2 (2). 54 – 59.

خبر

سرکار خانم سپیده چمن‌آرا، از شماره ۵۹ مجله رشد برهان راهنمایی، سردبیری آن را به عهده گرفته‌اند. بدین وسیله، فرصت را مغتنم شمرده و ضمن تبریک به ایشان، به آگاهی می‌رسانم که از شماره ۵۹ این مجله، جدولی شامل **موضوع هر مقاله** و **هدف‌های آموزشی آن** از جمله ارتباط با زندگی و مهارت‌های ریاضی، در صفحه ۴۸ به چاپ می‌رسد. از دبیران محترم دعوت می‌کنم برای استفاده بهتر، به این صفحه مراجعه کنند.

سردبیر

مقاله

نویسنده: **تالیا بن‌زیو**
ترجمه و تلخیص: **سپیده چمن‌آرا**
معلم ریاضی راهنمایی منطقهٔ ۲ تهران

منشأ خطاهای دانش‌آموزان

زمانی که دانش‌آموزان در خطای ریاضی، «درست» عمل کرده‌اند!

اشاره

مطلب حاضر، خلاصه‌ای از فصل ۵ کتاب «ماهیت تفکر ریاضی»[1] با عنوان زمانی که تفکر ریاضی نادرست دقیقاً «درست» است: اکسیمورون خطاهای منطقی[2] می‌باشد.

این فصل، به منشأ خطاهای دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی می‌پردازد و آن دسته از خطاهایی را بررسی می‌کند که در واقع در اثر تعمیم یا تخصیص بیش از حد یک قانون درست، حاصل شده‌اند و لذا «منطقی» هستند! لزوم آشنایی معلمان ریاضی با این مقوله، در مقدمهٔ مقاله به خوبی آشکار است.

مقدمهٔ مقاله، عیناً ترجمه شده است، لیکن ادامهٔ مطلب، به صورت برداشت آزاد توسط مترجم آماده شده است.

کلیدواژه‌ها: تفکر ریاضی، خطاهای منطقی، بدفهمی.

مقدمه

دانش‌آموزان بسیار مبتکرند. وقتی با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که نمی‌دانند چگونه آن را حل کنند، الگوریتم‌هایی ابداع می‌کنند و برای حل آن مسئله به‌کار می‌برند اگرچه اغلب این الگوریتم‌ها، به پاسخ‌های نادرست منتهی می‌شوند. مثلاً در فرآیند یادگیری عمل تفریق، اکثر دانش‌آموزان، اشتباه معروفِ «کوچک‌تر از بزرگ‌تر کم کن» را مرتکب می‌شوند[3].

یا این‌که دانش‌آموزانی که جمع کسرها را یاد می‌گیرند، اغلب به اشتباه صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنند.

این الگوریتم‌های نادرست و الگوریتم‌های مشابه آن‌ها، تصادفی نیستند، بلکه نظام‌مند هستند و براساس قوانین درست شکل گرفته‌اند. از این‌رو، آن‌ها را، «خطاهای منطقی» می‌نامند. واژهٔ «منطقی» در این عبارت، معنای بسیار خاصی دارد و به

فرآیندی اشاره می‌کند که در آن، دانش‌آموز ابتدا یک قانون نادرست را استنتاج می‌کند و پس از آن، به روشی که به لحاظ منطقی سازگار است، آن را «به درستی» ادامه می‌دهد.

سؤال مهمی که در این جا مطرح می‌شود این است که «منشأ این خطاهای منطقی چیست»؟ قطعاً معلمان این الگوریتم‌های نادرست را به دانش‌آموزان یاد نمی‌دهند، و این در حالی است که در پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل ریاضی، دائماً چنین خطاهایی دیده می‌شود. برخی اصرار دارند از این امر نتیجه بگیرند که دانش‌آموزان در فرآیند یادگیری ریاضی، قوانین شخصی خویش را خلق می‌کنند. اما با وجود ابداعات شخصیِ دانش‌آموزان، به نظر می‌رسد شکلِ فعلی نظام آموزش ریاضی، دقیقاً محرک و مشوق تولید خطاهای منطقی توسط دانش‌آموزان است. آیا بخشی از خطاهای منطقی می‌تواند حاصل واقعیت مدرسه‌هایی باشد که در آن‌ها، دانش‌آموزان، «به‌خوبی» ریاضی را یاد می‌گیرند؟ در مقاله‌ای[۴] در سال ۱۹۸۸ میلادی، شونفیلد به این نکته اشاره نمود که آموزشی که در آن معلمان بر حفظیات طوطی‌وار تأکید دارند، منجر به شکل‌گیری بدفهمی‌هایی در دانش‌آموزان می‌شود که به نمونه‌هایی از آن‌ها در ابتدای این مقدمه اشاره شد. در این خصوص، سؤال جالب توجه این است که آیا این خطاها، در اثر «بیش یادگیری[۵]» مطالب قبلی توسط دانش‌آموزان به‌وجود می‌آیند؟ مثلاً دانش‌آموزانی که خطای «تفریق کوچک‌تر از بزرگ‌تر» را در تفریق ستونی مرتکب می‌شوند، همیشه بدون توجه به موقعیت ارقام، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنند. چنین خطایی ممکن است در اثر آموزشی که در تفریق اعداد یک رقمی پیش از این دیده است و تأکیدی که آن‌جا بر کم کردنِ عدد کوچک‌تر از عدد بزرگ‌تر می‌شده، باشد. در واقع، دانش‌آموزی که مرتکب خطای «تفریق عدد کوچک‌تر از عدد بزرگ‌تر» می‌شود، آموزش قبلی خود را بیش از حد تعمیم[۶] داده است!

در مثال جمع کسرها که دانش‌آموزان به اشتباه، صورت‌ها را با هم جمع می‌کنند و مخرج‌ها را با هم، سیلور (۱۹۸۶) توضیح می‌دهد که شاید منشأ این خطا، شیوهٔ سنتی آموزش کسرها با استفاده از بازنمایی‌های تصویری باشد زیرا معلمان و کتاب‌های درسی، اغلب کسرها را با استفاده از نمودارهای دایره‌ای (یا امثال آن) نمایش می‌دهند. به عنوان مثال، مرسوم است که «$\frac{۱}{۲}$» به عنوان یک قسمت از دو قسمتِ دایره تدریس شود. زمانی که دانش‌آموز می‌خواهد کسرها را جمع بزند، ممکن است چنین استدلال کند که «خوب! اگر $\frac{۱}{۲}$ دارم، یعنی یک قطعه از دو قطعهٔ دایره را دارم؛ می‌خواهم $\frac{۱}{۳}$ را اضافه کنم که آن هم یک قطعه از سه قطعهٔ دایره است. پس دو قطعه خواهم داشت و در کل نیز ۵ قطعهٔ دایره را دارم. پس جواب $\frac{۲}{۵}$ است.» چنین خطایی که برای دانش‌آموز معنا دار است، این حقیقت را آشکار می‌کند که بازنمایی کسرها با استفاده از شکل‌های هندسی (مثل دایره و مستطیل و...) اغلب به صورت طوطی‌وار تدریس می‌شود و از طرف دیگر، دانش‌آموزان برای حل مسائل، به دنبالِ قوانین نظام‌مندی هستند که ممکن است موجب ناکامی آن‌ها در آن مسئله شود.

مثال دیگری که نشان می‌دهد دانش‌آموزان نسبت به دانش قبلی خود بیش یادگیری دارند، توسط فن لین (۱۹۸۶) گزارش شده است. فن لین نشان داد که دانش‌آموزانی که چگونگی انتقال در تفریق را تنها در تفریق ستونی اعداد دو رقمی آموزش می‌بینند، ممکن است بعدها در حل تفریق‌های ستونی چند رقمی، تنها عمل انتقال را در ستونِ یکان انجام دهند. هم‌چنین، شونفیلد (۱۹۹۱) کلاسی را توصیف کرد که در آن، دانش‌آموزان تفریق را تنها با حل مسائلی از نوع «n-?=m» که در آن $n > m$، یاد گرفته بودند. دانش‌آموزان این کلاس، به سرعت فهمیده بودند که چنین مسائلی با کم کردن m از n، حل می‌شود. بنابراین، هنگامی که نوع جدیدی از مسائل مثلاً به صورتِ ۳-?=۷ به آن‌ها داده شد، به اشتباه جواب دادند «۴». به دلیل این‌که این نوع خطاها قانون‌مند و نظام‌مند هستند، جزو خطاهای منطقی به‌شمار می‌آیند، هرچند که با ویژگی‌های اساسی تفریق (مثل عدم وجود جابه‌جایی در آن) تناقض دارند.

بعضی از الگوریتم‌ها و قوانین شخصی که دانش‌آموزان ابداع

می‌کنند، در مقابل یا در تضاد با چیزی است که معلمان در کلاس‌ها آموزش می‌دهند. اگرچه این دانش‌آموزان، آن‌چه را که معلم آموزش داده است خوب یادگرفته‌اند، اما گاهی به‌نظر می‌رسد که آموزش‌های معلم را «زیادی خوب» یاد گرفته‌اند! زیرا آن را زیادی تعمیم می‌دهند و بدین سبب در حل مسایل، مرتکب خطا می‌شوند که چون پس از خطای اولیه، باقی مسیر را- طبق آن خطا- به درستی ادامه می‌دهند، «خطاهای منطقی» نامیده می‌شوند.

توجه کنیم که برای استفاده‌های عملی در آموزش، همان‌قدر که شناخت چگونگی یادگیری ریاضی توسط دانش‌آموزان اهمیت دارد، فهمیدن ریشه‌های خطاهای دانش‌آموزان نیز از اهمیت برخوردار است.

نویسنده پس از این مقدمه در مورد خطاهای منطقی، بر روی چهار سازوکارمکانیزم که به استناد یافته‌های پژوهشی، در اکتساب تفکر ریاضی صحیح نقش دارند، تمرکز کرده و ضمن بررسی آن‌ها، به شرایطی که موجب می‌شود این سازوکارها، مولد خطاهای منطقی باشند، اشاره کرده است. این چهار سازوکار عبارتند از: استقرا از مثال‌ها[۷]، تفکر قیاسی[۸]، تفکر طرحواره مدار[۹]، و تفکر همبسته[۱۰] که همگی با یکدیگر هم‌پوشانی دارند.

ماهیت استقرایی تفکر ریاضی

شواهد فراوانی نشان می‌دهد که دانش‌آموزان، مراحل یک رویه یا روش حل یک مسئله را از روی مثال‌های حل شده استنتاج می‌کنند و سپس آن را در موارد دیگر، تخصیص یا تعمیم می‌دهند. این نوع تعمیم یا تخصیص، یکی از روش‌های یادگیری ریاضی است. به عنوان مثال، دانش‌آموزان با دیدن نمونه‌هایی ازتجزیه چند جمله‌ای‌ها به صورتِ

$$x^۲ + ۵x + ۶ = (x + ۲)(x + ۳)$$

می‌توانند قانونِ نهفته در پَسِ این تجزیه‌ها را که به صورت

$$x^۲ + ax + b = (x + c)(x + d)$$

$$cd = b \quad , \quad c + d = a$$

است، منتزع کنند و خودشان نمونه‌های دیگر را تجزیه کنند.

یکی از انوع تفکر استقرائی، تفکر قیاسی است که در مطالعات شناختی به‌طور کلی و در بررسی تفکر ریاضی به طور خاص، تمرکز ویژه‌ای بر آن شده است. در بخش بعدی، به بررسی این سازوکار می‌پردازیم.

ماهیت قیاسی تفکر ریاضی

برای حل یک مسئله با استفاده از تفکر قیاسی، دانش‌آموز در مواجه شدن با یک مسئله جدید (مسئله «هدف[۱۱]») به دنبال مسئله‌ای مشابه با آن می‌گردد (مسئله «منبع[۱۲]») و سپس بین اجزای مسئله هدف و مسئله منبع، تناظر برقرار می‌کند تا براساس راه‌حل مسئله منبع، مسئله هدف را حل کند. در این فرآیند، در واقع طرحواره‌ای شکل می‌گیرد که ویژگی‌های اساسی (یا در واقع ساختار عمیق[۱۳]) و رویه حل مسئله را دربر می‌گیرد و این طرحواره در حل مسائل مشابه، به کار می‌آید.

برای مثال، دو مسئله زیر را در نظر بگیرید:

مسئله۱. بیماری دارای یک غده بدخیم است. برای از بین بردنِ این غده، باید از اشعه استفاده کرد ولیکن اشعه‌ای که شدّت آن برای از بین بردنِ غده، لازم است، نسوج سالم را نیز تخریب می‌کند. برای از بین بردن غدّه توسط اشعه، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

مسئله ۲. [در یک عملیات جنگی] برای فتح یک قلعه باید از جاده‌هایی گذشت که مین‌گذاری شده‌اند. مین‌ها در اثر عبور تعداد زیادی از افراد از روی آن‌ها به‌طور همزمان، منفجر می‌شوند. لیکن اگر تعداد افرادی که از روی آن‌ها عبور می‌کنند، کم باشد، مین‌ها منفجر نمی‌شوند.

ژنرالی که فرمانده عملیات فتح این قلعه است، چگونه می‌تواند از این جاده‌ها عبور کند و قلعه را فتح کند؟

هر دو مسئله، اشاره به استفاده از «تعداد زیادی نیروی کم» دارند (در مثالِ غده، تاباندن چندین اشعه با شدّت کم به غدهٔ بدخیم که به نسوج سالم تخریبی وارد نکند و مجموع شدّت

آنها با شدت مورد نیاز برای تخریب سلول‌های بدخیم برابری کند؛ و در مثالِ فتح قلعه با اعزام تعداد زیادی سپاه با نفراتِ کم از جاده‌های متعدد به سوی قلعه) و با وجود این که ساختار سطحی[۱۴] آن‌ها با یکدیگر متفاوت است، لیکن ساختار عمیق مسائل در واقع یکی است. به این ترتیب، تفکر قیاسی، یکی از ابزارهای مهم در حل مسئله است.

یکی از دلایلی که حل مسئله با کمک قیاس به شکست منجر می‌شود این است که فرد مسئله حل کن، تنها با استفاده از شباهت‌های سطحی (ساختار سطحی)، مسئلهٔ منبع را انتخاب می‌کند. مثلاً در مسائل مربوط به شمارش یا احتمال، ظاهر مسئله (در مورد تاس یا در مورد سکه بودنِ مسئله) ملاک انتخاب مسئله حل کن باشد.

دلیل دیگر این است که با وجود این که مسئله حل کن، مسئله منبع را به درستی انتخاب کرده است، نتواند میان اجزای مسئله هدف یا مسئله منبع، تناظر درستی برقرار کند تا از راه‌حلِ مسئله منبع، به حل مسئله هدف دست یابد. این مشکل، همان مشکلِ تطبیق[۱۵] است که در ادبیات مربوط به تفکر جبری و گذر از تفکر عملیاتی صرف به تفکر جبری ساختاری نیز به اهمیت آن اشاره شده است. مثال زیر را در نظر بگیرید:

مسئله منبع:

$$۳\times x+۳\times ۵=۳(x+۵)$$

مسئله هدف که با تناظر نادرست بین اجزای دو مسئله، به نادرستی حل شده است:

$$۳x+۵=۳(x+۵)$$

تفکر طرحواره مدار

در بخش قبل اشاره شد که دانش‌آموزان در حل مسئله‌ها، از قیاس استفاده می‌کنند و به این ترتیب، با استفاده از مسئله منبع، طرحواره‌ای می‌سازند که جنبه‌های اساسی آن مسئله و روند حل آن را دربر می‌گیرد. هم در علوم شناختی و هم در بررسی حافظه، طرحواره به عنوان یک سازوکار ذهنی مفید که اطلاعات کسب شده از محیط و تجربه‌ها را سازمان‌دهی می‌کند، پذیرفته شده است، لذا در بررسی چگونگی یادگیری ریاضی و تفکر ریاضی نیز بسیار اهمیت دارد.

تحقیقات فراوان نشان می‌دهند که دانش‌آموزان ابتدایی برای حل مسائل کلامی، از طرحواره‌هایی که برای انواع خاصی از مسئله‌ها ساخته‌اند، استفاده می‌کنند. حتی آموزش معلمان ابتدایی- و گاهی دوره‌های بالاتر- به‌گونه‌ای است که سعی می‌کنند برای هر یک از انواع مسائل، سرنخ‌هایی را برای دانش‌آموزان، مشخص کنند. مثلاً به دانش‌آموزان یادداده می‌شود که «با» به معنی جمع‌کردن، «از» تفریق کردن، «در» ضرب کردن و «بر» تقسیم کردن است، پس در مسایل کلامی، مفید است که به دنبال این سرنخ‌ها بگردند.

یک دسته از مسائل، نیاز به یک طرحوارهٔ جزء- کل دارند که دانش‌آموز با تشخیص جزء و کل در آن، بتواند آن را حل کند. کلمات کلیدی مانند « در ابتدا»، «روی هم» و «بیشتر» در بازیابی طرحواره مناسب، به دانش‌آموز کمک می‌کند. لیکن زمانی که چنین طرحواره‌هایی به صورت طوطی‌وار شکل گرفته باشد، استفادهٔ انعطاف‌ناپذیر از آن‌ها یا استفاده از یک طرحوارهٔ درست در یک زمینهٔ نادرست، موجب بروز خطاهای منطقی می‌گردد.

در آموزش جبر، خطاهایی از نوع اخیر به وفور دیده می‌شود. به عنوان مثال، استفاده از قوانین حل معادلات درجه ۱ در حل معادله‌های درجه بالاتر، استفاده از قوانین حل معادله‌های درجه۲ در حل نامعادله‌های درجه۲، استفاده از قوانین پخشی یک عمل نسبت به عمل دیگر در زمینه‌های نابه‌جا مانند:

$$(A\pm B)^۲=A^۲\pm B^۲$$

یا

$$\sqrt{A\pm B}=\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$$

نمونهٔ بسیار رایج دیگر، استفاده از تجزیهٔ چند جمله‌ای‌ها برای حل معادلاتی است که یک طرف آنها صفر است:

$$(x-n)(x-m)=۰\Rightarrow x-n=۰ \text{ یا } x-m=۰$$

$$\Rightarrow x=n \text{ یا } x=m$$

و استفاده از طرحوارهٔ مرتبط با آن در زمینهٔ نادرست معادلاتی

که سمت دیگر آنها، عدد غیر صفر است:

$$(x-n)(x-m)=k \Rightarrow x-n=k \text{ یا } x-m=k$$
$$\Rightarrow x=k+n \text{ یا } x=k+m$$

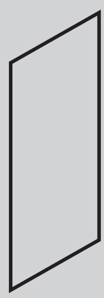
تفکر همبسته

در بخش قبل، به تفکر طرحواره‌مدار در حل مسائل ریاضی اشاره شد. یکی از انواع طرحواره‌ها که دانش‌آموزان می‌سازند، «طرحوارهٔ عملگر[۱۶]» است. این طرحواره، توسط دانش‌آموزان و ضمن دیدن مثال‌های کتاب‌های درسی یا مثال‌های معلم ضمن تدریس و در اثر وجوه همبستگی فراوان میان چند جنبهٔ خاص در آن مسائل و مثال‌ها با اعمالی که برای حل آنها استفاده می‌شود، فتح می‌شوند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، در حل مسائل هندسه که مرتبط با همنهشتی مثلث‌ها هستند، مسائلی که از راه «ض‌زض» حل می‌شوند، همواره حاوی اطلاعاتی در مورد دو ضلع و یک زاویه از مثلث هستند.

این نوع طرحواره‌ها، سازوکارهایی قوی برای حل مسائل هستند. لیکن اگر در مثال‌هایی که در یک متن آموزشی نوشته شده یا مثال‌هایی که معلم ضمن تدریس ارایه و حل می‌کند، جنبه‌های نامربوطی نیز دایم تکرار شوند به‌طوری که با آن نوع از مسائل، همبستگی کاذب زیادی به‌وجود آورند، دانش‌آموزی که تفکر همبسته دارد، این همبستگی کاذب را به صورت یک قانون منتزع می‌کند و به کار می‌برد و در عمل، موجب خطا می‌شود. مثلاً کسرهای خاصی که همیشه در مثال‌های محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرند یا شکل‌های خاصی که در حل مسائل هندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌توانند موجب این خطاها شوند.

یکی از مواردی که دانش‌آموزان از مثال‌ها منتزع می‌کنند، جنبه‌های ناوردای موجود در آن مثال‌هاست. در واقع، به قول گیبسون، «تشخیص ناورداها، یکی از مکانیزم‌های مهم در حل مسئله مفهومی در ریاضی است.» لیکن در صورتی که مثال‌های یک کتاب درسی دارای ناورداهای نامربوط باشد، این سازوکار در عمل موجب بروز خطاهای منطقی توسط دانش‌آموزان می‌گردد. این موضوع، هم برای معلمان و هم برای مؤلفان کتاب‌های درسی و کمک آموزشی، نکات هشداردهنده‌ای دارد!

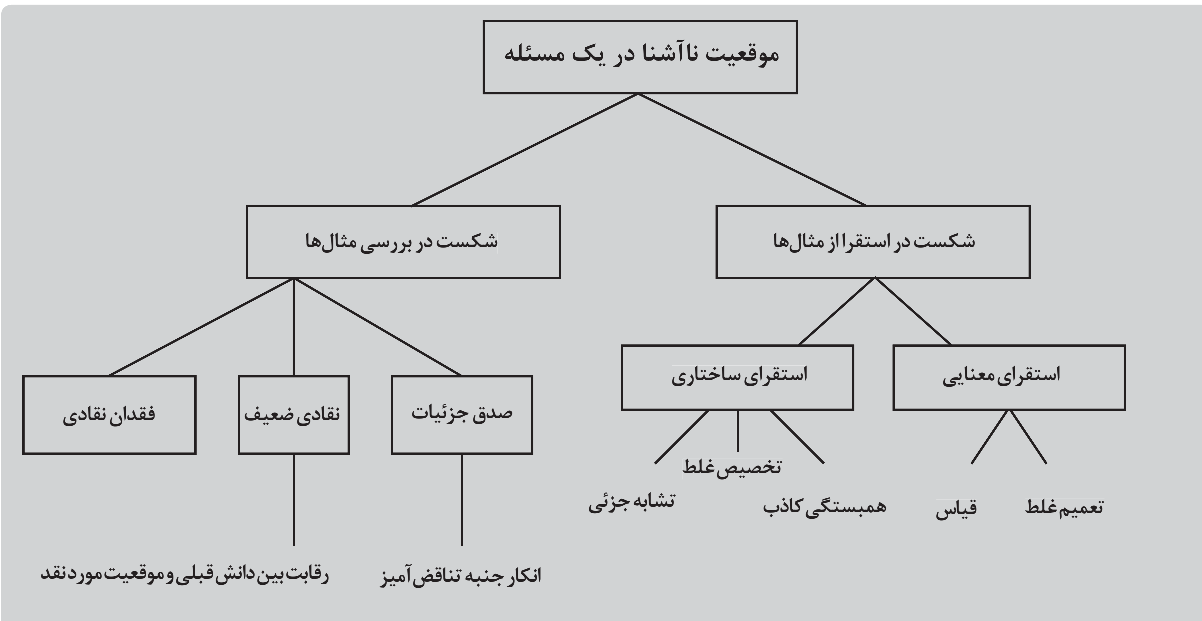
شکل۱. استفاده از شکل خاصی از متوازی‌الاضلاع در مسائل هندسی: در صورتی که متوازی‌الاضلاع به صورت زیر ترسیم شود، می‌تواند موجب بروز خطا در دانش‌آموز گردد:



مدل جدید برای بررسی خطاهای منطقی دانش‌آموزان

آن‌چه تاکنون گفته شد، همگی برگرفته از کارهای براون و فن لین و نظریهٔ تعمیری[۱۷] آنها و فرضیهٔ استقرائی[۱۸] فن لین بود. ظاهراً این نظریه، به حوزهٔ خاصی از خطاها مربوط است. نیاز به یک توصیف جامع‌تر از خطاهای منطقی که علاوه بر دربرگرفتن سازوکارهای تولید خطا در حوزه‌های خاص ریاضی، بتواند بر وجوه مشترک خطاهای منطقی که بین حوزه‌های مختلف ریاضی مشترکاً اتفاق می‌افتد نیز تأکید کند، تلاش برای رده‌بندی جدیدی از خطاهای منطقی در تفکر ریاضی را ایجاب کرده است که حاصل آن، مدلِ REASON است.

REASON در واقع مخففِ عبارتِ:
Rational Errors as Sources of Novelty
به معنای «خطاهای منطقی به عنوان منابع بدایع» است که توسط بن‌زیو ارایه شده است.
در این مدل، خطاهای منطقی به دو دسته تجزیه می‌شوند:
– خطاهای ناشی از شکست در بازبینی مثال‌ها؛
– خطاهای ناشی از شکست در استقرا از مثال‌ها.
هر دسته، خود شامل زیر دسته‌هایی است که در نمودار زیر نمایش داده شده است:
خطاهای مرتبط با شکست در استقرا از مثال‌ها، همان چهار مکانیزم قبلی را دربر می‌گیرد. برای آشنایی بیشتر با این مدل جدید، می‌توانید به منبع اصلی مراجعه کنید.



پی‌نوشت

1. When Erroneous Mathematical Thinking is Just as “Correct”: The Oxymoron of Rational Errors, pp55-78.

در این عنوان، واژه اکسیمورون Oxymoron به معنای استعمال کلمات مرکب ضد و نقیض است و علت استفاده از آن در این مقاله این است که از **درستی** و **نادرستی** با هم استفاده شده است.

2. The Nature of Mathmatical Thinking

که ویراستاران ارشد آن استرنبرگ و بن‌زیو هستند.

۳. مثلاً در تفریقی مانند ۲۹- ۶۳، چنین عمل می‌کنند:

$$\begin{array}{r} ۶۳ \\ -۲۹ \\ \hline ۴۶ \end{array}$$

۴. عنوان مقاله چنین است

“When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of “Well-Taught” Mathematics Courses.

5. Over learning
6. Overgeneralizing
7. Induction from Examples
8. Analogical Thinking
9. Schema- based Thinking
10. Correlational Thinling
11. Target
12. Sowce
13. Deep Structwe
14. Surface Structure
15. Adaptation
16. Operator Schema

بحث طرحواره‌های شکل گرفته برای حل نوع خاصی از مسایل، شبیه مفهوم chunk است که شونفیلد در کتاب حل مسئله ریاضی در برر سی رفتار مسئله حل کن خبره (مانند شطرنج‌بازان حرفه‌ای) مطرح می‌کند. م.

17. Repair Theory
18. Induction Hypothesis

منبع اصلی

R.J. Sternberg, R.J.d Ben-zeev, T. (Eds) (1996).The Nature of Mathematical Thinking. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

موجودی به نام صفر

از دنیای باستان تا امروز

احمد سعیدی
عضو هیئت علمی دانشگاه مفید
asaaeedi@yahoo.com

مقدمه

یکی از سؤالاتی که مطرح می‌شود این است که صفر به چه معنی است؟ چه کسی یا چه کسانی صفر را کشف کرده‌اند؟ صفر چه خواصی دارد؟ صفر علامتدار چیست؟ در این مقاله به این سؤالات خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها: تاریخچه صفر، معنای صفر، علامت صفر، صفر در ریاضیات

کاربردهای صفر

اولین چیزی که در مورد صفر گفته می‌شود این است که دو کاربرد بسیار مهم اما تا حدی متفاوت دارد:

کاربرد اول به عنوان نماینده جای خالی در نظام ارزش مکانی اعداد است. به این دلیل ۰ در یک عدد مانند ۳۵۰۷ به‌کار برده شده است تا موقعیت ۳ و ۵ درست باشد. در واقع، در این عدد ۷ تا یکی و ۵ تا صدتایی و ۳ تا هزارتایی داریم. تفاوت این عدد با ۳۵۷ چه خواهد بود؟ ۳۵۷ یعنی ۷ تا یکی و ۵ تا ده‌تایی و ۳ تا صدتایی.

امروزه نیز از قراین برای تفسیر معنای برخی اعداد استفاده می‌کنیم اگر سوار یک اتوبوس بین‌شهری شوید و مبلغ کرایه را شش و پانصد بگویند، شما آن‌را به معنای ۶/۵۰۰ تومان تفسیر می‌کنید و اگر بخواهید یک اتومبیل بخرید و قیمت آن‌را شش و پانصد بگویند شما آن‌را ۶/۵۰۰/۰۰۰ تومان تفسیر خواهید کرد.

از بحث اخیر می‌توانیم دریابیم که کاربرد اولیه صفر برای مشخص‌کردن مکان خالی، هرگز به معنی استفاده از آن به عنوان یک عدد نبوده است. صرفاً به عنوان نوعی از علامت‌گذاری بوده است به این منظور که تفسیر درستی از اعداد ارائه شود.

دومین کاربرد صفر این است که خودش به عنوان یک عدد

اولین چیزی که در مورد صفر گفته می‌شود این است که دو کاربرد بسیار مهم اما تا حدی متفاوت دارد:
کاربرد اول به عنوان نماینده جای خالی در نظام ارزش مکانی اعداد است
دومین کاربرد صفر این است که خودش به عنوان یک عدد به‌کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم

به‌کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم. در گذشته مسئله‌های ریاضی بیشتر به عنوان مسئله‌های واقعی و کاربردی مطرح بوده‌اند تا مسئله‌های مجرد و انتزاعی. اعداد در زمان‌های تاریخی دور (برعکس امروز) بیشتر اشیای واقعی پنداشته می‌شدند تا مفاهیمی مجرد. تفاوت معنایی عظیمی بین ۵ اسب و ۵ «چیز» و مفهوم مجرد ۵ وجود دارد که امروزه از آن به عنوان عدد اصلی یاد می‌شود. اگر مردم در گذشته، مسئله‌هایی را در مورد این‌که یک کشاورز به چند اسب نیاز دارد حل می‌کردند، به هیچ عنوان مسئله به داشتن ۰ یا ۱۳- اسب ختم نمی‌شد.

تلاش برای گسترش قوانین عدد صفر

ایده اعداد به مرور مجردتر شده سپس این تجرد، توجه به صفر و اعداد منفی را ـ که به عنوان ویژگی گردایه‌ای از اشیا مطرح نیست ـ ممکن ساخت. البته مشکل هنگامی بروز می‌کند که سعی شود صفر و منفی به عنوان عدد مطرح شوند و تلاش شود توضیح داده شود که آن‌ها نسبت به اعداد حسابی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چگونه عمل می‌کنند. ریاضی‌دانان هندی براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا در سه کتاب مهم خود تلاش کردند به این سؤالات پاسخ دهند.

براهماگوپتا در قرن هفتم سعی می‌کند قوانینی برای حساب ارایه دهد که صفر و اعداد منفی را نیز دربرگیرند. او توضیح داد که اگر یک عدد را از خودش کم کنید صفر به‌دست می‌آید. وی قانون زیر را برای جمع ارایه کرد که شامل صفر هم می‌شود: «حاصل‌جمع صفر و یک عدد منفی، عدد منفی است، حاصل‌جمع یک عدد مثبت و صفر عددی مثبت است، صفر به علاوه صفر، صفر می‌شود».

در مورد تفریق کمی سخت‌تر است: «اگر یک عدد منفی را از صفر کنیم کنیم یک عدد مثبت به‌دست می‌آوریم. اگر یک عدد مثبت را از صفر کم کنیم، حاصل یک عدد منفی است. اگر صفر را از یک عدد منفی کم کنیم حاصل عددی منفی است و اگر صفر را از یک عدد مثبت کم کنیم جواب عدد مثبت است. اگر صفر را از صفر کم کنیم حاصل صفر است.»

براهماگوپتا سپس بیان می‌کند که حاصل‌ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌شود اما هنگامی که به تقسیم می‌رسد، به مشکل برمی‌خورد: «یک عدد مثبت یا منفی هنگامی که بر صفر تقسیم می‌شود کسری با مخرج صفر است. صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی همان صفر است یا به‌طور خاص، یک کسر است با صورت صفر و مقدار متناهی در مخرج. صفر تقسیم بر صفر، صفر می‌شود».

در حقیقت، براهماگوپتا وقتی پیشنهاد می‌دهد n تقسیم بر صفر برابر $\frac{n}{0}$ است، توجیه چندانی نمی‌آورد. زمانی که می‌گوید صفر تقسیم بر صفر برابر صفر است قطعاً اشتباه می‌کند. به هر حال او به عنوان اولین فردی که تلاش کرد قوانین حساب را به اعداد صفر و منفی تعمیم دهد قابل تقدیر است.

باسکارا کتاب خود را ۵۰۰ سال بعد از براهماگوپتا نوشت. با وجود گذر زمان، او هنوز برای توضیح تقسیم بر صفر مشکلات زیادی داشت.

بنابراین، باسکارا سعی کرد مسئله را به‌وسیله نوشتن $\frac{n}{0}=\infty$ حل کند. در نگاه اول، ممکن است وسوسه شویم که گفته باسکارا را درست بیانگاریم. (البته امروزه هم برخی دانشجویان و دانش‌آموزان این تصور غلط را دارند) در این‌صورت $0\times\infty = n = 1 = 2 = \dots$ یعنی $0\times\infty$ برابر با هر عددی است، پس همه اعداد با هم مساوی خواهند بود!! باسکارا و سایر ریاضی‌دانان هندی نتوانستند بپذیرند یک بر صفر تقسیم‌پذیر نیست اما باسکارا سایر ویژگی‌های صفر را از جمله $0^2 = 0$ و

$\sqrt{0}=0$ درست بیان کرد.

این مرحله‌ای برای خوارزمی بود که کتاب «خوارزمی در هنر محاسبه هندوها» را بنویسد و نظام ارزش مکانی هندیان را که بر مبنای اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۰ بود، توضیح دهد. این اولین کار در ایران برای استفاده صفر به عنوان جانگهدار در نمادگذاری مکانی بود. ابن‌ازرا در قرن ۱۲ میلادی سه مقاله برای اعداد نوشت که در توجه اروپاییان به نمادهای هندی و ایده‌های کسر اعشاری (دهگانی) مؤثر بود. «کتاب اعداد» دستگاه اعشاری را برای اعداد صحیح با ارزش مکانی چپ به راست توضیح می‌دهد. ابن‌ازرا در این کار، صفر را به‌کار می‌برد و آن‌را گالگال (به معنی چرخ یا دایره) می‌نامد.

فیبوناچی یکی از اصلی‌ترین افرادی بود که این ایده‌های جدید نظام‌های عددی را به اروپا وارد کرد.

وی در «لیبرآباسی» ۹ نماد هندی را به همراه علامت ۰ برای اروپاییان (حدود قرن ۱۲ م) تشریح کرد اما تا مدت‌ها بعد از او، استفاده چندانی از آن نشد. فیبوناچی آنقدر جسور نبود که با صفر همان‌طور رفتار کند که با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ رفتار می‌کرد زیرا وی از صفر به عنوان علامت و از سایر اعداد به عنوان نماد یاد می‌کرد. گرچه آوردن اعداد هندی به اروپا کار مهمی بود، ولی در رفتار وی با صفر نه به مهارت هندیانی چون براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا رسید نه به مسلمانانی چون السماوال.

ممکن است گمان شود پیشرفت دستگاه‌های اعداد عموماً و صفر خصوصاً مستمراً از این زمان به بعد بوده است. در حالی‌که **کاردان** معادلات درجه ۳ و درجه ۴ را بدون استفاده از صفر حل کرد. او این کار را در ۱۵۰۰ م خیلی آسان‌تر از حالتی که صفر را در اختیار داشته باشد، انجام داد. در ۱۶۰۰ م، و بعد از مقاومت‌های زیاد، صفر کاربرد گسترده خود را آغاز کرد.

قوانین صفر در جبر امروز

(۱) صفر کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است. عدد طبیعی تالی صفر عدد ۱ است و عدد طبیعی قبل از صفر وجود ندارد. صفر هم عددی گویا و هم حقیقی و همین‌طور عددی جبری است.[1] صفر نه مثبت است نه منفی. نه اول است نه مرکب. فرد نیست ولی زوج است.[2]

(۲) جمع $x+0=0+x=0$ صفر نسبت به جمع خنثی است.

(۳) تفریق $0-x=-x$ و $x-0=x$

(۴) ضرب $x.0=0.x=0$

(۵) تقسیم $\frac{0}{x}=0$ x ناصفر. برای $\frac{0}{0}$ و $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است.

برهان: عبارت $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است زیرا وارون ضربی[3] ندارد. از آنجا که طبق قانون ضرب $0.x=0$، بنابراین هیچ عنصری نیست که حاصل‌ضرب آن در ۰ برابر ۱ شود در واقع $\frac{x}{0}$ هیچ عنصری نیست و تعریف نشده است. اما اگر در مخرج کسری عبارتی به صفر همگراه شود داریم:

$$x>0:\ \lim_{y\to 0^+}\frac{x}{y}=+\infty\ \&\ x<0:\ \lim_{y\to 0^-}\frac{x}{y}=-\infty$$

(۶) توان $1=\frac{x}{x}=x^0$ به استثنای حالتی که $x=0$ باشد.

ـ $0^x=0$ برای هر x (طبق قانون ضرب عدد ۰ هر چند بار در خودش ضرب شود برابر صفر می‌شود)

ـ 0^0 تعریف نشده است. اما اگر به‌صورت حدی باشد جزو حالات مبهم است و باید رفع ابهام شود.

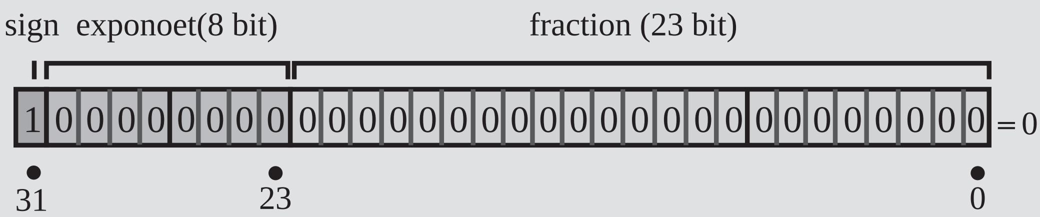
(۷) مجموع ۰ عدد برابر صفر است.

(۸) حاصل‌ضرب ۰ عدد برابر ۰ است. به عبارت دیگر اگر x عدد حقیقی باشد $0.x=0$.

اثبات: $0.x+0.x=(0+0).x=0.x$ پس طبق قانون حذف می‌توان نوشت $0.x=0$.

(۹) هرگاه $x\neq 0$ و $y\neq 0$ آنگاه $xy\neq 0$.

اثبات: فرض کنیم $x\neq 0$ و $y\neq 0$ ولی $xy=0$ در این صورت (۸) نتیجه می‌دهد $1=(\frac{1}{y})(\frac{1}{x})xy=(\frac{1}{y})(\frac{1}{x})0=0$ که



شکل (۱). استاندارد نمایش عدد IEEE ۷۵

یک تناقض است پس (۹) برقرار است.

(۱۰) تعریف صفر تابع f: نقطه‌ای مانند x را صفر تابع f گویند اگر $f(x)=۰$. مثلاً $x=۲$ صفر تابع $f(x)=x^{۲}-۳x+۲$ است زیرا $f(۲)=۲^{۲}-۳\times۲+۲=۰$

صفر علامت‌دار چیست؟

در استانداردهای مختلف نمایش شناور[۴] اعداد می‌دانیم که بسته به نوع استاندارد، بعضی از اعداد با وجود این‌که برابر صفر نیستند ولی در هنگام نمایش با کامپیوتر صفر محسوب می‌شوند به عبارت دیگر، اگر کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش در آن نظام خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که $۰<x<\varepsilon$ ، کامپیوتر و نظام نمایش اعداد آن‌را ۰ محسوب می‌کند و چون مثبت است، آن‌را ۰+ نمایش می‌دهد.

در شکل (۱)، نمونه‌ای از یک استاندارد نمایش عدد به نام IEEE ۷۵۴ را می‌بینید که جایگاه آبی (مکان ۳۱) علامت عدد و جایگاه سبز (مکان‌های ۲۳ تا ۳۰) توان عدد و جایگاه قرمز (مکان‌های ۰ تا ۲۲) نمایش اعشاری عدد را نمایش می‌دهد و به عبارت دیگر چون قسمت‌های سبز و آبی تماماً صفر هستند از نظر این استاندارد عدد مورد نظر صفر است. بنابراین اعدادی مانند $۰/\underbrace{۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}_{۲۴}۱۱۱$ از نظر این استاندارد برابر صفر هستند که آن‌را با ۰+ نمایش می‌دهند (استوارِ، ۱۹۹۱). در آنالیز عددی، نه فقط عنصر صفر بلکه مجموعه‌ای از اعداد، صفر محسوب می‌شود. به عبارت دیگر، صفر منحصربه‌فردنیست و همه اعداد بین ε و ε- صفر محسوب می‌شوند. این تعریف جدید از صفر، قوانین خاص خود را دارد که به شکل زیر است: $\frac{۱}{+۰}=+\infty$ و $\frac{۱}{-۰}=-\infty$ و در این شرایط فقط، $\frac{\pm۰}{\pm۰}$ تعریف نشده است و با NAN (Not A Number) (عدد نیست) نشان داده می‌شود.

پی‌نوشت

۱. عدد جبری عددی است که ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد.

۲. عدد زوج عددی است که مضربی صحیح از یک عدد صحیح باشد از آنجا که $۲\times۰=۰$ بنابراین ۰ عددی زوج است.

۳. گوییم عنصر a وارون ضربی دارد اگر $a\times\frac{۱}{a}=۱$ در این‌صورت $\frac{۱}{a}=a^{-۱}$ وارون ضربی a نام دارد.

4. Floating point

منابع

1. Bourbaki, Nicolas (1998). Elements of the History of Mathematics. Berlin, Heidelberg, and New York: Springer-Verlag. ISBN 3540647678.
2. R Kapian, The nothing that is: a natural history of zero (London, 1999).
3. J. Stoer, R. Bulisch, Introduction to Numericai Analysis, Second Ed. Springer 1991.
۴. اصول آنالیز ریاضی، والتر رودین، ترجمه علی اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی ۱۳۷۷

مقاله

نرم‌افزارهای ریاضی تا چه اندازه قابل اعتمادند؟

بهروز خاوری
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه ایرانشهر
khavari@hamoon.usb.ac.ir

چکیده

وسعت علم و سرعت خارق‌العاده نرم‌افزارهای ریاضی در ترسیم انواع نمودارها و انجام محاسبات پیچیده، استفاده از آن را در امر آموزش ریاضی، اجتناب‌ناپذیر ساخته است. اما به مانند هر ابزار علمی دیگری، برای استفاده صحیح از این ابزار، شناخت نقاط قوت و ضعف آن ضروری است. در این مقاله تلاش کرده‌ایم تا با ذکر مثال‌هایی، خوانندگان عزیز را با برخی از این موارد آشنا کنیم.

کلیدواژه‌ها: نرم‌افزار ریاضی، خطای نرم‌افزارها، مقایسه نرم‌افزارها

مقدمه

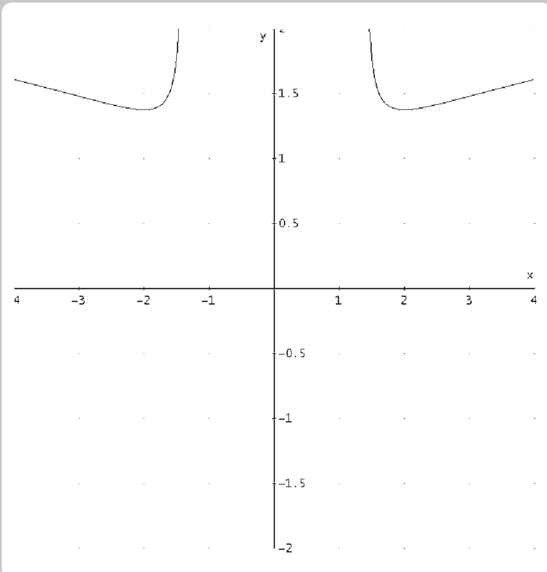
پیشرفت روزافزون و گستردگی کاربرد ریاضیات در سایر علوم، ما را متقاعد می‌سازد تا بکوشیم از هر ابزار مناسبی برای آموزش صحیح آن، به بهترین شکل ممکن استفاده کنیم. تجربه و تحقیقات نشان داده که در کنار کتاب‌های مناسب آموزشی، به‌کارگیری صحیح ابزار کمک آموزشی سبب می‌شود دانش‌آموزان و دانشجویان، سریع‌تر و عمیق‌تر با مفاهیم ریاضی آشنا شده و دید وسیع‌تری نسبت به ریاضیات و کاربردهایش پیدا کنند و در هر دوره و رشته‌ای که هستند، ارتباطی آسان‌تر و منطقی‌تر با آن برقرار نموده، در نهایت یادگیری ریاضیات برایشان شیرین‌تر و جذاب‌تر شود. نرم‌افزارهای ریاضی یکی از مفیدترین ابزارهای آموزشی در عصر حاضر به شمار می‌آیند.

و می‌توانند ما را در رسیدن به این هدف، به‌خوبی یاری کنند، ابزاری که وجه تمایز اصلی آن از سایر ابزارهای کمک آموزشی، دقت، سرعت و وسعت عمل آن است. این ویژگی‌ها، استفاده از آنها را در عصر حاضر اجتناب‌ناپذیر کرده است. هم‌اکنون سال‌هاست که در کشورهای پیشرفته، نرم‌افزارهای مناسبی جهت آموزش ریاضیات در دوره پیش‌دانشگاهی طراحی و مورد استفاده قرار می‌گیرد و خوشبختانه در سال‌های اخیر در کشور ما نیز، توجه به اهمیت به‌کارگیری این قبیل نرم‌افزارها رو به رشد بوده است. لیکن باید توجه داشت که تجربه نشان می‌دهد استفاده عجولانه و شتاب‌زده از تکنولوژی، همواره مشکل‌ساز بوده و نرم‌افزارهای ریاضی نیز از این قاعده مستثنی نیستند. بنابراین، دبیران دبیرستان‌ها و مدرسان دانشگاه‌ها باید آگاهانه وارد این عرصه شوند. در ادامه با ارائه چند مثال، نشان می‌دهیم که چگونه ممکن است عدم آگاهی، ما را دچار خطا و سردرگمی نماید. بنابراین، دبیران و استادان محترم باید هم خود به این نکات توجه کنند و هم دانش‌آموزان و دانشجویان را در به‌کارگیری نرم‌افزارها به شکلی صحیح هدایت کنند. ضمناً از آنجایی که خطاهای نرم‌افزاری در حوزه ترسیمات رایانه‌های به لحاظ کمی بیشتر و به لحاظ کیفی مشهودتر است، مثال‌های خود را به این حوزه اختصاص داده‌ایم.

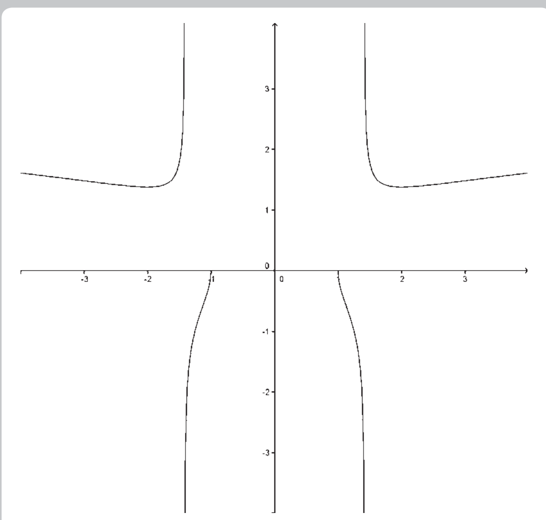
نمونه‌هایی از اشتباهات نرم‌افزاری[1]

مثال ۱: می‌خواهیم نمودار تابع نه چندان پیچیده $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ را به کمک یک نرم‌افزار ریاضی رسم کنیم. برای این منظور، از نرم‌افزار درایو[2] کمک می‌گیریم. پس از انجام مراحل لازم، نتیجه به صورت شکل ۱ است.

در نگاه اول، مشکل خاصی وجود ندارد. یک تابع داریم و یک نرم‌افزار که در نوع خود جزو نرم‌افزارهای مطرح است و به کمک آن، نمودار تابع مورد نظرمان را رسم کرده‌ایم. اما آیا این نمودار، حقیقتاً نمودار تابع مورد بحث است؟ پاسخ منفی است! با انجام چند محاسبه ساده در می‌یابیم که دامنه تابع عبارت است از:



شکل ۱: نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ رسم شده توسط نرم‌افزار درایو



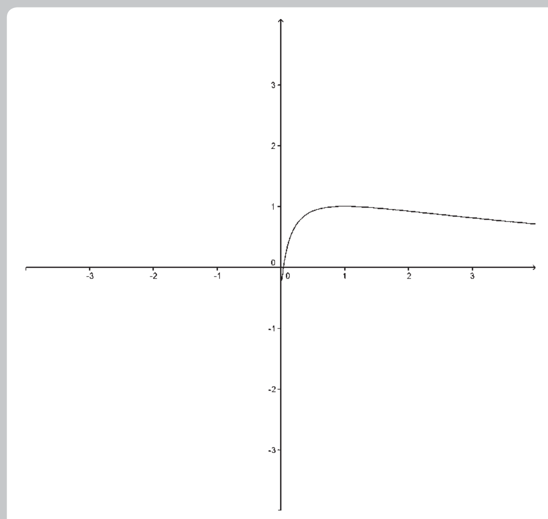
شکل ۲: نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ رسم شده توسط نرم‌افزار جئوجبرا.

$$D_f = (-\infty - \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

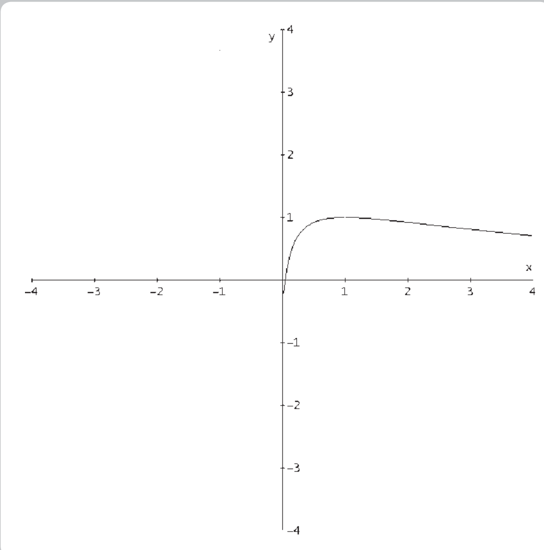
اما دامنه نمودار رسم شده فقط شامل بازه‌های $(-\infty, -\sqrt{2})$ و $(\sqrt{2}, +\infty)$ است. بنابراین، درایو نمودار را کامل رسم نکرده است. شاید دلسرد کننده به‌نظر برسد، اما به هر حال واقعیت این است که اگر از ابتدا هیچ ذهنیتی از رفتار تابع یا دست‌کم دامنه آن برای خود ایجاد نکرده باشیم، به راحتی دچار اشتباه می‌شویم.

این بار، نمودار همین تابع را به کمک نرم‌افزار جئوجبرا[۳] رسم می‌کنیم. نتیجه در شکل ۲ نمایش داده شده است. با محاسبه مشتق تابع f و انجام بررسی‌های لازم درمی‌یابیم که نمودار اخیر، دقیقاً نمودار تابع مورد بحث است.

مثال۲: این بار می‌خواهیم نمودار تابع $h(x) = \dfrac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$ را رسم کنیم. اما پیش از آن با کمی دقت مشخص می‌شود که دست‌کم عدد ۱ جزو دامنه این تابع نیست. اگر این بار نیز از نرم‌افزارهای جئوجبرا و درایو کمک بگیریم، نتیجه در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل۳: ب) نتیجه ترسیم نمودار $h(x)$ توسط جئوجبرا



شکل۳: الف) نتیجه ترسیم نمودار $h(x)$ توسط درایو

نمودار رسم شده توسط جئوجبرا کاملاً پیوسته است در حالی که با کمی دقت در نمودار رسم شده توسط درایو، متوجه گسستگی در نقطه $x = 1$ خواهیم شد. بنابراین این بار، اگر از ابتدا به دامنه تابع توجه نمی‌کردیم، نرم‌افزار جئوجبرا ما را دچار خطا می‌کرد!

البته اگر در مورد این مثال، از نرم‌افزارهای قدرتمندتری نظیر میپل[۴] و متمتیکا[۵] استفاده کنیم، خواهیم دید که این دو نیز نمودار را پیوسته رسم می‌کنند!

تا اینجا مشاهده کردیم که پاسخِ یک نرم‌افزار به تقاضای ترسیم نموداری که از آن می‌خواهیم، ممکن است ما را گمراه کند. اما شاید بهتر باشد در اینجا یک مثال امیدوارکننده هم بزنیم. زیرا گاهی هم، پاسخ غیرمنتظره ما را وادار می‌کند برای کشف حقیقت، حوزه مطالعات خود را گسترش دهیم.

برای مثال، مجدداً تابع $h(x)$ را در نظر بگیرید. تصور کنید که از ابتدا می‌خواستیم بدون آگاهی از نمودار تابع $h(x)$، دامنه آن را یافته و سپس جهت اطمینان از صحت پاسخ، نمودار $h(x)$ را با استفاده از یک نرم‌افزار، رسم کنیم. اگر شما یک دبیر ریاضی

دبیرستان باشید، احتمالاً روشنان برای یافتن دامنه h(x) چیزی شبیه این خواهد بود:

با فرض $g(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ و $f(x)=\ln(x)$ داریم $h(x)=g(f(x))$. پس با استفاده از تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\right\}=\left\{x>۰ \mid \ln(x)\neq ۰\right\}=R^+-\{۱\}$$

در نگاه اول، این پاسخ با آنچه درایو رسم کرده مطابقت می‌کند. اما شاید به طور تصادفی، متوجه نقطه‌ای به مختصات تقریبی (۶و۳و۱-) بر صفحه نمایش کامپیوتر شوید (عرض نقطه، تقریبی بیان شده است). این نقطه خارج از دامنه تعریف تابع است. آیا این نقطه لکه‌ای بر صفحه نمایش کامپیوتر است؟ یا یکی از پیکسل‌های صفحه (LCD) سوخته است؟ با یک بررسی دقیق‌تر در خواهیم یافت که هیچ یک از این دو مورد نیست، بلکه درایو این نقطه را نیز جزو نمودار تابع f رسم کرده است! یعنی به راستی نقطه x=-۱ نیز متعلق به دامنه تابع است؟!

بله! پاسخ مثبت است. در حقیقت با توسعه بحث به آنالیز مختلط و مراجعه به کتاب‌های مربوط در می‌یابیم که تابع h(x) به ازای x>۰ حقیقی مقدار و به ازای x<۰ مختلط مقدار است مگر در نقطه x=-۱ که داریم:

$$h(-۱)=\frac{\sin(\ln(-۱))}{\ln(-۱)}=\frac{\sin(i.\pi)}{i.\pi}=\frac{i.\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{۲}}{i.\pi}$$

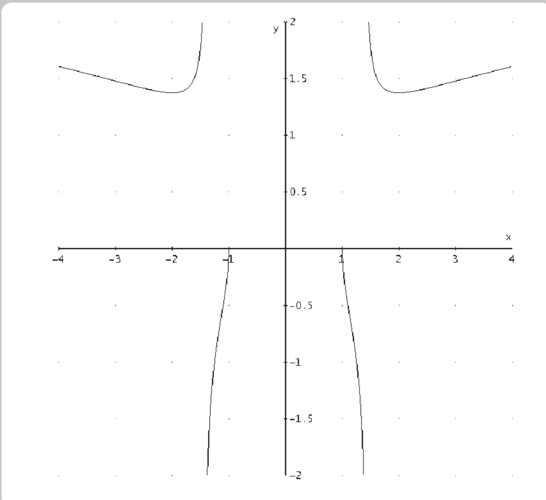
$$=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{۲\pi}\approx ۳٫۶۷۶۰۷۷۹۱۰$$

(i یکه موهومی و e عدد نپر است.)

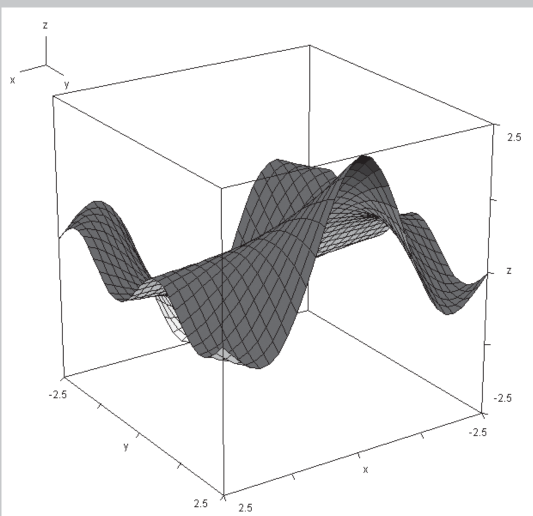
یعنی نتیجه یک عدد حقیقی است و بنابراین تعلق نقطه x=-۱ به دامنه تابع قابل توجیه است.

در مورد این قسمت از بحث نیز نرم‌افزار میپل و متمتیکا نقطه (۱,۳٫۶۷۶۰۷۷۹۱۰-) را به نمایش در نمی‌آورد (شکل ۴ را ببینید).

مثال ۳: می‌خواهیم نمودار تابع $f(x,y)=\frac{\sin(x.y)}{x}$ را رسم کنیم. اگر نمودار این تابع را به کمک درایو در مختصات دکارتی و با تنظیم (۳۰ و ۳۰): Number of panels و بدون تغییر در سایر تنظیمات رسم کنیم، نتیجه را در شکل ۵ مشاهده کنید.

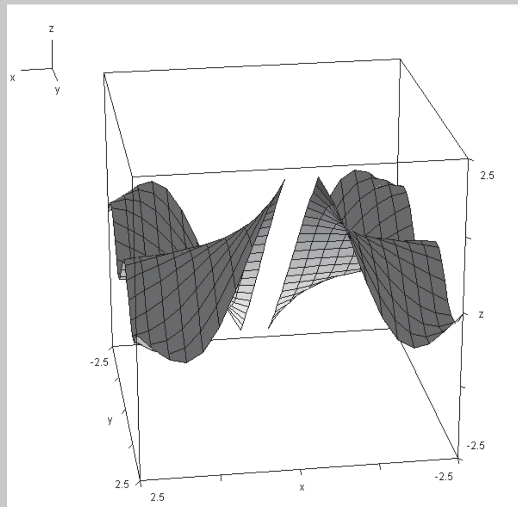


شکل ۴: نمودار تابع $h(x)=\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$ حاصل به‌کارگیری نرم‌افزار متمتیکا



شکل ۵: نمودار تابع $f(x,y)=\frac{\sin(x.y)}{x}$ رسم شده توسط نرم‌افزار درایو

ظاهراً تابع مورد بحث در محدوده ترسیم، یک تابع پیوسته است. اما ضابطه تابع به خوبی بیانگر ناپیوسته بودن آن در



شکل ۶: نمودار تابع $f(x,y)=\frac{\sin(x.y)}{x}$ رسم شده توسط نرم‌افزار درایو پس از اعمال اندکی تغییر در تنظیمات.

سراسر محور yهاست. اکنون اگر تنظیم Number of panels را به (۲۰ و ۲۰) تغییر داده، مجدداً نمودار را رسم کنیم و سپس آن را اندکی به چپ بچرخانیم، ناپیوستگی تابع در سراسر محور yها آشکار خواهد شد.

چند توصیه آموزشی و نتیجه‌گیری

همه ما آنقدر از توانایی نرم‌افزارها سخن شنیده‌ایم که با چند مثال نقض، از به‌کارگیری آن دلسرد نمی‌شویم. اما خوب است به این موضوع فکر کنیم که چه باید بکنیم تا کمتر دچار این گونه خطاها شویم. برای این منظور، بهتر است موارد زیر را در نظر داشته باشیم:

۱) اساساً به سراغ کامپیوتر نرویم! ... تعجب نکنید. برخی اوقات استفاده از کامپیوتر توجیهی ندارد. مثلاً وقتی از خود می‌پرسیم، آیا تابع $h(x)=\frac{\sin(\ln x)}{\ln x}$ در x=۱ پیوسته است یا خیر، لزومی ندارد از کامپیوتر کمک بگیریم. زیرا قاعدتاً وقتی آشنایی ما با توابع در حد آشنایی با توابع نظیر sin و ln است، باید بدانیم که ln(۱)=۰، پس تابع h(x) در آن نقطه ناپیوسته است و لزومی ندارد که برای مواردی از این دست، بلافاصله دست به دامان نرم‌افزارها شویم.

۲) در مورد سؤالات اندکی پیچیده‌تر، سعی کنیم قبل از به‌کارگیری نرم‌افزار، کلیاتی از راه حل و احتمالاً جواب آن را در ذهن بپرورانیم. به عبارت دیگر، نگذاریم در تمام مراحل، کامپیوتر به جای ما بیاندیشد، بلکه در حد امکان به گونه‌ای عمل کنیم که پاسخ کامپیوتر تأییدی بر صحت افکار ما باشد یا دست کم ما را به سمت پاسخ صحیح هدایت کند.

۳) بهتر است حداقل با دو نرم‌افزار در حد متوسط آشنایی داشته باشیم تا در صورت لزوم، توسط هر دو نرم‌افزار به بررسی مسئله مورد نظر خود بپردازیم.

۴) گاهی اوقات تغییر در بزرگنمایی یا تغییر در ظرافت ترسیم می‌تواند راهگشا باشد (نظیر آنچه در مثال ۳ دیدیم).

و نتیجه نهایی این‌که؛

نرم‌افزارها، مشاوران خوبی هستند که گاهی اشتباه می‌کنند. از آن‌ها کمک بگیریم ولی به آن‌ها تکیه نکنیم.

پی‌نوشت

۱. البته طراحان نرم‌افزارها برخی از این موارد را اشتباه نمی‌نامند، بلکه آن را تنها سوء تفاهم می‌دانند که ناشی از عدم آگاهی کاربر از عملکرد نرم‌افزار در آن مورد خاص است!

2 .Drive
3 .Geogebra
4 .Maple
5 .Mathematica

منابع

۱. خاوری، بهروز و جهانتیغ، سمیه (۱۳۸۸). خودآموز نرم‌افزار Derive. انتشارات دیباگران، تهران.

۲. نرم‌افزارهای جئوجبرا (Geogebra) نسخه ۳،۲، درایو (Derive) نسخه ۶،۱، متمتیکا (Mathematica) نسخه ۷ و میپل (Maple) نسخه ۱۳.

چکیده

چکیده گسترده رساله دکتری ریاضی

با گرایش آموزش ریاضی

ماهیت تفکر ترکیبیاتی

پژوهشگر: مانی رضائی

استاد راهنما: دکتر زهرا گویا (دانشگاه شهید بهشتی)

استاد مشاور: دکتر امیرحسین اصغری (دانشگاه شهید بهشتی)

داوران: دکتر سیدحسن علم‌الهدایی (دانشگاه فردوسی مشهد)
دکتر سید عباداله محمودیان (دانشگاه صنعتی شریف)
دکتر حسین حاجی‌ابوالحسن (دانشگاه شهید بهشتی)
دکتر سهرابعلی یوسفی (دانشگاه شهید بهشتی)

تاریخ دفاع: تیر ۱۳۹۰

دانشگاه شهید بهشتی

کلیدواژه‌ها: تفکر ریاضی، تفکر ترکیبیاتی، ترکیبیات، ریاضیات گسسته، حل مسئله

مقدمه

تفکر ترکیبیاتی، اصطلاحی آشنا در متون آموزشی است که پیاژه آن را به‌کار برد. وی از این واژه در بررسی فعالیت کودکان در جریان محاسبهٔ تعداد ترکیب‌ها، ترتیب‌ها و شمارش جایگشت‌ها استفاده کرد. پیاژه، تفکر دوره نوجوانی را نیز به‌صورت عمومی در چارچوب چند ویژگی کلی مورد مطالعه قرار داد: نخست، برای نوجوان (در مقابل کودک) محتمل بودن بر واقعیت اولویت دارد، یعنی، در رویارویی با یک مسئله علمی، نوجوان کار خود

تفکر ترکیبیاتی دانش‌آموزان/ دانشجویان به‌طور روشمند، نظام‌وار، فراگیر و گسترده‌ای متأثر از دانشگاه است، زیرا ورود ترکیبیات به برنامهٔ درسی مدرسه‌ای نسبتاً جدید است و بیشتر کسانی که به‌عنوان معلم به کلاس درس مدرسه برمی‌گردند و تفکر ترکیبیاتی را از طریق برنامه درسی رسمی در دانش‌آموزان توسعه می‌دهند، اولین زمان آشنایی‌شان با ترکیبیات در دانشگاه بوده است

را با مشاهده نتایج تجربی شروع نمی‌کند، بلکه به امکانات ذاتی موقعیت می‌اندیشد. وی در نظر خویش مجسم می‌کند که خیلی چیزها ممکن است رخ دهد و تعبیرهای بسیاری از داده‌ها حاصل ممکن است به عمل آید و آن‌چه رخ داده، ممکن است یکی از چندین حالت متفاوتی باشد که در شرایط دیگر رخ می‌دهند. نوجوان به گزاره‌ها توجه دارد، نه اشیا. تنها پس از تجزیه و تحلیل فرضیه مورد نظر است که نوجوان در جهت تأیید یا رد فرضیه خود به کسب داده‌های تجربی می‌پردازد.

دومین ویژگی متمایز تفکر نوجوان، در دوره عملیات صوری، ترکیبی بودن آن است. در رویارویی با عامل‌های گوناگونی که ممکن است در نتیجه یک آزمایش مؤثر باشند، کودک معمولاً هر یک از عامل‌ها را تک‌تک می‌آزماید، اما از تأثیر احتمالی ترکیب عامل‌ها با یکدیگر غافل می‌ماند در مقابل در رویارویی با مسئله‌ای مانند کشف ترکیبی از پنج ماده شیمیایی بی‌رنگ که مایع زرد رنگی تولید کنند، نوجوان به‌طور جامع عمل می‌کند و یک ماده با دو ماده، یک ماده با سه ماده، و سپس یک ماده با چهار ماده، و... ترکیب می‌کند تا سرانجام به همهٔ ترکیب‌های ممکن دست یابد. اگر نوجوان هم‌چون کودک همهٔ حالت‌های ممکن را در نظر نمی‌گرفت، در این صورت عملیات وی به مجموعه‌ای از آزمایش‌های مجزا از یکدیگر محدود بود. در این دوره، تفکر نوجوان به یک وضعیت پیشرفته از تعادل رسیده است. پیاژه عقیده دارد در پایان نوجوانی، شیوه‌های تفکر یا ساختارهای شناختی، تقریباً به‌طور کامل شکل گرفته است.

بسط و تعمیم تعریفی که پیاژه برای تفکر ترکیبیاتی به کاربرد، به مباحث پیشرفتهٔ ریاضیات ترکیبیاتی، بخصوص «شمارش» به مفهوم عام آن، یکی از هدف‌های این رساله بود. رساله با هدف تبیین ماهیت تفکر ترکیبیاتی و بررسی چگونگی رویارویی افراد با مسئله‌های شمارشی، به انجام رسید و با شناخت ویژگی‌های تفکر ترکیبیاتی همراه شد.

روش پژوهش

در ابتدا، پژوهشگر با مشاهده، تنوع توانایی‌های محاسباتی و استدلالی یادگیرندگان، بر آن بود تا بررسی ماهیت این توانایی‌ها را در تمام مراحل تحصیلی در یک مطالعه طولی[1] از دبستان تا دانشگاه مورد توجه قرار دهد و هدف اولیه، «شناخت ماهیت تفکر ترکیبیاتی» در تمام مباحث ترکیبیاتی و برای تمام دوره‌های تحصیلی (سنی) بود. این در حالی بود که دریافت‌های تجربی پژوهشگر حاکی از آن بود که در این بررسی عوامل گوناگونی تأثیرگذارند. از جمله مهم‌ترین عوامل «میزان آشنایی یادگیرنده با مباحث متنوع ترکیبیاتی»؛ «تجربه حل انواع مسئله‌های نمونه»؛ «یافتن ارتباط‌های مفهومی بین مباحث مختلف ترکیبیاتی»؛ و مانند آن است، که بر چگونگی درگیر شدن بادگیرنده با مسئله‌های ترکیبیاتی، نقش بسزایی دارند و وجود آن‌ها غیرقابل انکار است. ولی انجام چنین پژوهشی، نیازمند «شرایط عادی» بود که از نظر زمانی، چنین پژوهشی بسیار زمان‌بر بود و با محدودیت‌های زمانی و امکانی انجام یک رساله دکتری، سازگار نبود. بنابراین، پژوهشگر با جرح و تعدیل پژوهش، بر آن شد تا موضوع پژوهش را به «شمارش» محدود کند که یکی از مباحث ترکیبیاتی مهم و قابل مطالعه است.

از سوی دیگر، تجزیه و تحلیل تجربه‌های تدریسی، مطالعات

مجموعهٔ ویژگی‌هایی از قبیل درک مفاهیم مجرد ریاضی، تشخیص و رده‌بندی، کار با نمادها، دقت، تمرکز، توانایی‌های محاسبه‌ای، توانایی‌های استدلالی، استفاده از رهیافت‌ها در حل مسئله، رویکردهای حل مسئله‌ای، و مانند آن؛ تفکر ریاضی را شکل می‌دهند

نظری و تجارب یادگیری پژوهشگر، وی را به این جمع‌بندی رساند که راهبردهای دانشجویان برای حل مسئله‌های ترکیبیاتی، شباهت قابل توجهی به راهبردهای دانش‌آموزان دارد. تفکر ترکیبیاتی دانش‌آموزان/ دانشجویان به‌طور روشمند، نظام‌وار، فراگیر و گسترده‌ای متأثر از دانشگاه است، زیرا ورود ترکیبیات به برنامه درسی مدرسه‌ای نسبتاً جدید است و بیشتر کسانی که به‌عنوان معلم به کلاس درس مدرسه برمی‌گردند و تفکر ترکیبیاتی را از طریق برنامه درسی رسمی در دانش‌آموزان توسعه می‌دهند، اولین زمان آشنایی‌شان با ترکیبیات در دانشگاه بوده است و بر خلاف درس‌هایی مانند هندسه، راهبردهای آنان شکل ساده‌شدهٔ راهبردهای دانشگاهی است. به همین دلیل شرکت‌کنندگان در این پژوهش به دانشجویان دانشگاه محدود شد و با این در محدودیت («مسئله‌های شمارشی» و «دانشجویان») برنامه‌ریزان برای اجرای این پژوهش انجام شد و از آن‌جا که این پژوهش نظریه‌مدار[۲] نبود، بلکه نظریه‌ساز[۳] بود، روش تحقیق کیفی برای آن انتخاب شد.

یافته‌های پژوهش

به دلیل نقش مهم شمارش در مباحث ترکیبیاتی، موضوع شمارش محور این پژوهش قرار گرفت و با این انتخاب، پرسش اصلی زیر مطرح شد:

یادگیری برای حل مسئله‌های شمارشی با چه چالش‌هایی روبه‌روست؟

یافته‌های پژوهش در پاسخ به این پرسش به اختصار چنین است:

۱. درک مسئله و یافتن برخی از حالت‌های مطلوب مسئله؛

۲. تشخیص حالت‌های نامطلوب و رده‌بندی حالت‌های مطلوب؛

۳. پیدا کردن «تمام» حالت‌های ممکن برای شمارش؛

۴. به‌دست آوردن روشی که تمام حالت‌های ممکن را تولید کند؛

۵. استفاده از راهبردهای متنوع برای شمارش حالت‌ها؛

۶. ایجاد ارتباط بین مسئله پیش‌رو با مسئله‌های ترکیبیاتی دیگر؛

۷. استفاده از استدلال‌های ترکیبیاتی به ویژه برای شمارش حالت‌ها.

هر یک از موارد بالا، به‌عنوان چالش‌های پیش روی یادگیرندگان که در جریان حل مسئله‌های شمارشی با آن‌ها روبه‌رو می‌شوند، شناسایی و رده‌بندی شد و با استفاده از این رده‌بندی، پنج سطح زیر به‌عنوان سطح‌های شناختی تفکر ترکیبیاتی شناسایی شدند:

سطح ۱. پیدا کردن و بررسی حالت‌های ممکن؛

سطح ۲. اطمینان از این‌که «تمام حالت‌ها» به‌دست آمده است؛

سطح ۳. پیدا کردن روشی برای تولید تمام حالت‌ها؛

سطح ۴. تبدیل مسئله به مسئله‌های دیگر ترکیبیاتی؛

سطح ۵. درک استدلال‌های ترکیبیاتی.

پرسش‌های دیگری که در جریان این پژوهش مطرح شدند و پاسخ هر یک از آن‌ها چنین است:

تفاوت بین مسئله حل کن تازه کار و خبره در رابطه با مسئله‌های شمارشی چیست؟

وجوه تمایز و تشابه تفکر ترکیبیاتی و انواع شناخته شده تفکر ریاضی چیست؟

پرسش نخست، در مباحث دیگر ریاضی نیز بارها مطرح شده است و پاسخ به این پرسش را می‌توان زیرمجموعه‌ای از عوامل متعددی دانست که در پاسخ به این پرسش، و در حالت کلی‌تر، بیان شده است. در جریان این پژوهش، دو تفاوت عمده در این دو گروه مشاهده شد: نخست، درک مسئله و بررسی‌های مقدماتی برای شناخت حالت‌های مختلف راهبرد «مناسب» و

پژوهشگر بر این باور بود (وهست) که با شناخت «ماهیت تفکر ترکیبیاتی» معلمان می‌توانند به شناخت واقع‌بینانه‌تر و عمیق‌تری از فرایند یاددهی ـ یادگیری دست یابند و در نهایت، به ارتقای کیفیت تدریس آنان در ترکیبیات بیانجامند

سپس اجرای آن بود. در بیشتر موارد، انتخاب راهبرد متناسب با مسئلهٔ پیش رو، با توجه به تجربهٔ رویارویی با مسئله‌های مشابه انجام شد. هر دو گروه (مسئله حل کن‌های تازه کار و خبره)، سطح‌های تفکر ترکیبیاتی را طی می‌کنند، اما سرعت عبور از هر یک از این سطح‌ها متفاوت است. در برخی موارد، طی شدن سه سطح نخست به گونه‌ای بود که به نظر می‌رسید ترکیبی از این سطح‌ها طی شده است. به همین دلیل، این سه سطح متمایز، مرتبط به هم هستند. حتی در مواردی ترتیب این سطح‌ها (مانند سطح‌های ۲ و۳) عوض شد، بنابراین نتیجه‌گیری شد که سطح‌های تفکر ترکیبیاتی، سلسله مراتبی نیستند.

در پاسخ به دومین پرسش و بررسی وجوه تمایز و تشابه تفکر ترکیبیاتی با انواع شناخته شدهٔ تفکر ریاضی، مطالعهٔ عمیق‌تر تفکر ریاضی، تفکر هندسی، و تفکر جبری انجام شد و در جست‌وجوی ویژگی‌های انواع تفکر، این نکته مورد توجه قرار گرفت که استقلال برخی مباحث مقدماتی ترکیبیات از موضوعات دیگر ریاضیات باعث شده تا امکان ورود این مباحث به پایه‌های تحصیلی پایین‌تر فراهم شود و برخلاف مباحث دیگر ریاضی که پیشنیازهای متعددی دارند، در مباحث ترکیبیات (مقدماتی)، حتی کودکان بدون نیاز به توانایی درک مفاهیم مجرد، می‌توانند درگیر مسئله‌های آن شوند. همین موضوع باعث شده که در برنامهٔ درسی ترکیبیات و روش های تدریس آن، تنوع بیشتری مشاهده شود و یک روند سلسله مراتبی «سنتی» برای ارایه مباحث ترکیبیاتی وجود ندارد. بدین ترتیب، «شروع‌های متنوعی» برای این مباحث وجود دارد و در عمل، سطح‌های شناختی تفکر ترکیبیاتی می‌تواند مستقل از هم شکل بگیرند.

از سوی دیگر، شباهت‌هایی بین تفکر ترکیبیاتی با تفکر جبری مشاهده می‌شود که عمدتاً در انتخاب نمادها و نمادسازی، درک ساختارهای مشابه، و مانند آن است. هم‌چنین، تفکر ترکیبیاتی و تفکر هندسی نیز شباهت‌هایی از جمله «توانایی تشخیص دیداری و کشف روابط بین آن‌ها» که در سطح ۲ تفکر هندسی فن‌هیلی ـ فن‌هیلی مطرح شده است، یا در «ارایه استنتاج غیررسمی با استفاده از استدلال استقرایی» (سطح ۳ تفکر هندسی) وجود دارد. هم‌چنین با توجه به مفاهیم ترکیبیاتی، می‌توان «دقت» (سطح ۵ تفکر هندسی) را نیز به تفکر ترکیبیاتی تعمیم داد.

بازتابی بر پژوهش انجام شده

بحث درمورد تفکر ریاضی، ممکن است با این پرسش همراه باشد که آیا تفکیک «تفکر ریاضی» به انواع تفکر مناسب است؟ مجموعهٔ ویژگی‌هایی از قبیل درک مفاهیم مجرد ریاضی، تشخیص و رده‌بندی، کار با نمادها، دقت، تمرکز، توانایی‌های محاسبه‌ای، توانایی‌های استدلالی، استفاده از رهیافت‌ها در حل مسئله، رویکردهای حل مسئله‌ای، و مانند آن؛ تفکر ریاضی را شکل می‌دهند، و انواع «تفکر ریاضی» مانند تفکر هندسی، تفکر جبری، یا تفکر ترکیبیاتی به کمک این ویژگی‌ها شناخته می‌شوند که ممکن است در حالی که آن‌ها در یکی یا چند ویژگی با هم اشتراک دارند. در همان حال، ویژگی اختصاصی خود را داشته باشند. برای مثال، توانایی رده‌بندی حالت‌ها (در شمارش) را می‌توان از جمله ویژگی‌های «تفکر ترکیبیاتی» به حساب آورد.

با توجه به ورود مباحث ترکیبیاتی به آموزش عمومی، پژوهش‌های آموزشی پیرامون تدریس ترکیبیات اهمیت بیشتری به دست آورد، اما چگونگی تدریس این مباحث، موضوع این رساله قرار نگرفت، زیرا پژوهشگر بر این باور بود (وهست) که با شناخت «ماهیت تفکر ترکیبیاتی» معلمان می‌توانند به شناخت واقع‌بینانه‌تر و عمیق‌تری از فرایند یاددهی ـ یادگیری دست یابند و در نهایت، به ارتقای کیفیت تدریس آنان در ترکیبیات بیانجامند.

پی‌نوشت

1.Longitudenal
2.Theory - driven
3. Theory - generating

مسئله این است!
منفی یا مثبت؟

محمدجواد نظری
دبیر ریاضی شهرستان اسلام‌شهر

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

رشد آموزش ریاضی

چکیده

اعداد منفی و عملیات با آن، هم‌چنان یکی از مباحث پرچالش در کلاس‌های درس ریاضی است. در این روایت، به چند چالش پیش‌آمده برای یکی از معلمان ریاضی که یک سال است تدریس را شروع کرده‌اند، می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها: اعداد مثبت و منفی، علامت یک عدد، بدفهمی.

برخی اشتباهاتی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند، نتیجهٔ الگوهای پایداری می‌باشد که آن‌ها را به صورت ناقص یاد گرفته‌اند. نویسنده، این قبیل خطاهای روشمند و پایدار را «خطاهای مخفی» نامیده است

بحث و جدال بر سر علامت یک عدد:

مفهوم اعداد منفی توسط هندی‌ها در سده اول پیش از میلاد پدید آمد. آن‌ها برای این مفهوم از یک مدل ساده که **قرض و دارایی** نام داشت استفاده می‌کردند. به این‌صورت که عددهای منفی را (قرض یا وام) و اعداد مثبت را (دارایی) می‌نامیدند.

هم‌چنین، ابولوفا بوزجانی در کتاب هفت منزل خود، کاربرد اعداد منفی را برای اولین بار در تاریخ اسلام ذکر کرده است و از اصطلاح (دِین یا وام) برای این مفهوم استفاده کرده است، اما ریاضی‌دانان اروپایی به جواب‌های منفی یک معادله توجهی نداشته و آن‌ها را جواب‌های کاذب و بی‌معنا می‌دانستند.

به هر صورت، در گذشته برای اعداد مثبت و منفی علامت‌های مختلفی استفاده می‌شد ولی امروزه همان علامت‌های (+) و (−) عمومیت یافته است. اما تدریس و یادگیری این مفهوم برای دانش‌آموزان دوره‌های راهنمایی یا حتی دبیرستان عموماً از چالش‌های دبیران محترم بوده و هست. مفاهیمی که اگر به مدل قرض و وام متناظر شوند، می‌توان حدس زد که برای دانش‌آموزان دوره ابتدایی هم مفهومی قابل درک شود. اما سؤال اینجاست که چرا وقتی این مفاهیم در قالب اعداد و علامت‌ها ظاهر می‌شوند، به یکی از چالش‌های تدریس تبدیل می‌شوند؟ برای روشن‌شدن این بحث، مثالی می‌زنم:

یکی از مسائل صفحهٔ ۷ کتاب ریاضی اول دبیرستان، مربوط به جمع و تفریق سادهٔ اعداد است. وقتی از دانش‌آموزان خواسته شد که این محاسبات را انجام دهند، پاسخ‌های متفاوتی دریافت گردید که به دو نمونه از آن‌ها اشاره می‌شود:

دانش‌آموز (A): $2\times(-7+5)=2\times(-2)=4$

دانش‌آموز (B): $2\times(-7+5)=2\times(-12)=24$

می‌توان فرض کرد که این مسائل در قالب یک مسئله قرض و وام بیان شوند، دانش‌آموز به جواب صحیح برسید. برای نمونه، اگر مسئله را به این شکل برای دانش‌آموز (B) مطرح می‌کردیم، شاید به جواب صحیح می‌رسید:

«اگر شخصی ۷ تومان بدهی داشته باشد ولی ۵ تومان آن‌را باز گرداند، وضعیت دارایی او چگونه است؟»

ممکن است زمانی که معلمان محترم به‌خصوص دبیران دوره متوسطه با این موارد مواجه شوند، علت را در سال‌های قبل جستجو کنند. به عبارتی، مشکل را در نحوهٔ تدریس معلمان سال‌های قبل بدانند. البته ممکن است در برخی موارد این حرف درست باشد، ولی نکتهٔ مهم این است که من در حین تدریس خود متوجه شده‌ام که اغلب دانش‌آموزانی که با مفهوم عدد منفی آشنا هستند، نسبت به این اعداد باز هم نامأنوس‌اند. بنا به گفتهٔ یکی از سال سومی‌ها: «خیلی علامت عدد برای من مهم نیست. حالا چه منفی، چه مثبت. کلاً با اعداد منفی رابطه خوبی ندارم.»

در هر یک از پاسخ‌های دانش‌آموزان (A) و (B)، دو نوع اشتباه با کمی تفاوت وجود دارد. در جواب دانش‌آموز (A)، حاصل جمع به درستی محاسبه شده است ولی حاصل‌ضرب اشتباه است. البته خود دانش‌آموز A، بی‌دقتی را عامل این اشتباه می‌دانست. ولی این اشتباه، با سایر اشتباهاتی که در موضوعات دیگر از قبیل اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، کاربرد اتحادها، ضرب اعداد چند رقمی اتفاق می‌افتد، کمی متفاوت است. مشاهدات تدریس نویسنده نشان می‌دهند که در موضوعات مذکور، تصور دانش‌آموز نسبت به اجزا و عملگرها عمدتاً یکسان است و به عنوان مثال، در بحث مجموعه‌ها اجتماع دو مجموعه همان‌قدر مهم است که اشتراک آن‌ها اهمیت دارد و دانش‌آموز برای آن‌ها یکسان ارزش قائل است. اما در مورد اعداد منفی وضع این‌گونه نیست.

برای روشن‌تر شدن موضوع دو مثال زیر را در نظر بگیرید:

۱) دو مجموعه مقابل را به شکل بازه‌ای مشخص کنید. سپس مجموعه‌ای بیابید که مشمول در آن‌ها باشد؟

الف) $\left\{x \in R \mid \frac{1}{x} \le x\right\}$

ب) $\left\{x \in R \mid \frac{1}{x} \ge x\right\}$

۲) شیب خط واصل بین دو نقطهٔ $A=(0,20)$ و $B=(12,14)$ را بیابید؟

در سؤال اول، دانش‌آموز هر دو مجموعه را به‌درستی به شکل

شاید بتوان گفت که اگر دانش‌آموز در ارایه پاسخ درست باز بماند، به این معناست که هنوز آن مفهوم را به درستی درک نکرده است. هم‌چنین لازم است که منبع خطای دانش‌آموز، به درستی تشخص داده شود تا قبل از این که روش‌های نادرست در ذهن وی به صورت «طرحواره‌هایی» صحیح ایجاد شوند، بتوان از آن جلوگیری نمود

بازه‌ای مشخص کرد. اما در قسمت دوم سؤال، به جای اشتراک دو مجموعه ({۱،۱-})، اجتماع دو مجموعه را ({R}) اعلام کرد و پس از پی‌بردن به اشتباهش، آن را پذیرفت و اعتراضی هم نداشت زیرا برایش چالشی ایجاد نکرده بود. اما او در سؤال دوم، به این شکل عمل کرد:

$$\frac{(y-y_.)}{(x-x_.)}=\frac{(۱۴-۲۰)}{(۱۲-۰)}=\frac{۶}{۱۲}=۰/۵$$

این دانش‌آموز در مرحله آخر، به جای (۶-)، (۶+) قرار داد و جوابی قرینه به‌دست آورد. اما او این اشتباه را ناچیز دانست و انتظار نداشت که برای آن، نمره‌ای در نظر گرفته شود.

تجربه تدریس هشدار می‌دهد که صرفاً بی‌دقتی یا حواس‌پرتی را نمی‌توان علت این اشتباهات دانست. بلکه عوامل دیگری هم در بروز این اشتباهات مؤثراند.

سه عبارت زیر را که از نوشته‌های چند دانش‌آموز در دوره‌های راهنمایی و اول متوسطه انتخاب شده است در نظر بگیرید:

عبارت (۱) ۲=۴-۲

عبارت (۲) ۹-=۴+۵-

عبارت (۳) ۵=۲-۳-

پاسخ عبارت (۱): شکل ظاهری عبارت (۱)، تقریباً مشابه تفریق‌هایی است که این دانش‌آموز، در سال‌های ابتدایی مشاهده کرده است. یعنی، عددی از عدد دیگر کم شده است. در نتیجه او در ذهن خود، همان محاسبهٔ (۲=۲-۴) را انجام داده بود و عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کرده بود. هر چند که ممکن است کمی دچار شک و تردید شده باشد.

پاسخ عبارت (۲): پاسخ (۲)، مربوط به دانش‌آموز دیگری است که راه‌حل خود را این‌گونه تفسیر نمود:

«مجموع دو عدد چهار و پنج، برابر نه است و علامت آن‌ها، علامت عدد بزرگ‌تر است.»

در یک سری تحقیقاتی که توسط براون[۱] و گروه تحقیقاتی بورتون[۲] (۱۹۷۸) انجام شد، به پیچیدگی ماهیت روش‌های به ظاهر ساده، مانند جمع و تفریق اعداد پرداخته شده بود. به گفتهٔ آن‌ها، برخی اشتباهاتی را که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند، نتیجهٔ الگوهای پایداری می‌باشد که آن‌ها را به صورت ناقص یاد گرفته‌اند (شونفیلد، ۱۹۸۵). این قبیل خطاهای روشمند و پایدار را «خطاهای مخفی» نامیده است.

در مورد عبارت (۲)، الگویی که دانش‌آموز برای حل این نوع مسائل یاد گرفته بود که در این حالت‌ها، «دو عدد را از هم کم کرده و علامت عدد بزرگ‌تر را می‌گذرایم» برای وی الگویی آنقدر پایدار بوده که آن را به موارد دیگری مانند عبارت (۲) نیز تعمیم داده است. نقص یادگیری این دانش‌آموز از این الگو، کاملاً مشخص است.

پاسخ عبارت (۳): اشتباه مسئلهٔ (۳) هم، به نوعی یک خطای مخفی محسوب می‌شود. زیرا این دانش‌آموز با وجودی که می‌دانست ضرب دو عدد، مطلوب سؤال نیست؛ اما در مورد علامت آن‌ها، قوانین ضرب را به‌کار بسته بود و به نظر می‌رسد که چنین استدلال «سه و دو، می‌شود پنج. منفی در منفی هم مثبت می‌شود، پس جواب ۵ است.»

شاید بتوان گفت که اگر دانش‌آموز در ارایه پاسخ درست باز بماند، به این معناست که هنوز آن مفهوم را به درستی درک نکرده است. هم‌چنین لازم است که منبع خطای دانش‌آموز، به درستی تشخص داده شود تا قبل از این که روش‌های نادرست در ذهن وی به صورت «طرحواره‌هایی» صحیح ایجاد شوند، بتوان از آن جلوگیری نمود.

پی‌نوشت

1. John Seely Brown
2. Richard Burtons

منبع

A Shoenfeld, H. (1985), Mathematical problem solving. Acadamic Press INC.

مفهوم تابع پله‌ای

استفاده از مثال‌های مثبت و منفی در آموزش

رباب افشاری
دبیر ریاضی استان زنجان

چکیده

بسیاری از فعالیت‌های آموزشی به صورت کلامی انجام می‌گیرد و اکثر توضیحات معلم در قالب مفاهیم و اصول بیان می‌شوند. کلمات و عبارات، مفاهیم و اصول را در ذهن دانش‌آموزان زنده می‌کنند و به آنها یاری می‌دهند تا آنچه را که معلم بر زبان می‌آورد، درک کنند. با وجود این نباید فراموش کرد که در بسیاری از موارد، به ویژه زمانی که دانش‌آموزان برای اولین بار با یک مفهوم آشنا می‌شوند، معلم باید با تکیه بر امور محسوس و عینی به آموزش مطالب بپردازد و تا حد امکان از کاربرد مسائل انتزاعی دوری جوید. وقتی مفاهیم و اصول به درستی آموخته نشوند و رابطه آنها با دنیای واقعی روشن نگردد، موانع زیادی در راه یادگیری به‌وجود خواهد آمد. یکی از مفاهیم مهمی که دانش‌آموزان در دوره متوسطه با آن آشنا می‌شوند، مفهوم تابع پله‌ای است. یکی از ابزارهای مهم نیز برای آموزش صحیح این مفهوم، استفاده از مثال‌های مثبت و منفی مفهوم است. نگارنده در این مقاله، سعی کرده است تجربه‌ای را که خود شخصاً در یکی از کلاس‌های درس ریاضی سال چهارم متوسطه داشته و توانسته با به‌کارگیری این ابزار، بدفهمی دانش‌آموزان را اصلاح نماید، بیان کند.

کلیدواژه‌ها: تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح، مثال‌های مثبت و منفی.

مفهوم چیست؟

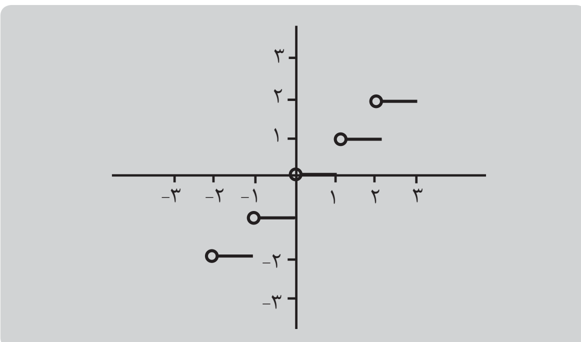
مفاهیم ابزارهای ذهنی هستند که ما توسط آنها فکر می‌کنیم. مفاهیم ما را قادر می‌سازند تا جهان اجتماعی و فیزیکی را درک کرده و ارتباطات معنی‌داری با آن برقرار سازیم. به گفته رضوی (؟)، مفهوم نوعی سازمان ذهنی است که نه تنها پدیده‌های عینی بلکه پدیده‌های انتزاعی را نیز در بر می‌گیرد. در هر روشی که برای تدریس مفاهیم اتخاذ شود، باید چهار جزء اساسی در نظر گرفته شود، نام مفهوم، تعریف مفهوم، صفات مناسب و نامناسب، مثال‌های مثبت و منفی. نام مفهوم برای برقراری ارتباط مهم است. هر چند که نام یا برچسب برای درک مفاهیم لازم است، اما یادگیری یک نام باعث نمی‌گردد که فرد مفهوم را درک کند. تعریف، هویت مفهوم را روشن‌تر می‌کند. یک تعریف خوب دو ویژگی باید داشته باشد؛ اول این‌که مفهوم جدید را به یک طبقه کلی‌تر ارتباط دهد و دوم این‌که صفات مفهوم جدید را بیان کند. مشخص کردن صفات مناسب و نامناسب، جنبه دیگری از تدریس مفاهیم است. به‌عنوان مثال، توانایی پرواز، یک صفت مناسب برای حیواناتی تحت عنوان پرنده نیست زیرا اگرچه بسیاری از پرندگان پرواز می‌کنند اما برخی از آن‌ها مانند پنگوئن و شترمرغ، پرواز نمی‌کنند.

مثال‌های مثبت و منفی یک مفهوم

سیف (۱۳۷۰) معتقد است که یکی از مراحل مهم در مدل عمومی آموزش، به شیوه‌های آموزش مفهوم اختصاص دارد. در این مرحله توصیه شده است که مثال‌های مثبت و منفی مفهوم را در اختیار یادگیرندگان قرار دهید چرا که استفاده از مثال‌های مثبت و منفی، یادگیری مفاهیم را آسان‌تر می‌سازد. منظور از مثال مثبت یک مفهوم، مثالی است که دارای صفات مفهوم مورد نظر است و مثال منفی، مثالی است که فاقد صفات آن مفهوم است. قبلاً نیز هاتن لوچر (۱۹۶۲) به مطالعه تأثیر مثال‌های مثبت، منفی و ترکیبی از این دو بر یادگیری مفاهیم پرداخت. نتیجه پژوهش او نشان داد که یادگیری مفاهیم در شرایط استفاده هم‌زمان از مثال‌های مثبت و منفی از شرایط استفاده از مثال‌های مثبت یا منفی به تنهایی بهتر است. در این باره که چه تعداد مثال مثبت و منفی باید برای هر مفهوم ارائه شود، دی سِا و کرافورد (۱۹۷۴) بیان می‌دارند که «معلم باید تعداد کافی مثال مثبت به دانش‌آموزان بدهد، به‌گونه‌ای که تمامی صفات و ارزش‌های صفات مفهوم را شامل شود. هم‌چنین، آنقدر باید مثال منفی به‌کار برد که تمامی صفات نامربوطی را که ممکن است یادگیرنده اشتباهاً به عنوان صفات مثبت مفهوم به کار برد، از ذهن او دور سازد.»

حال با این مقدمه، نگارنده به بیان تجربه‌ای مرتبط با این موضوع که در یکی ازکلاس‌های درس ریاضی داشته، می‌پردازد.

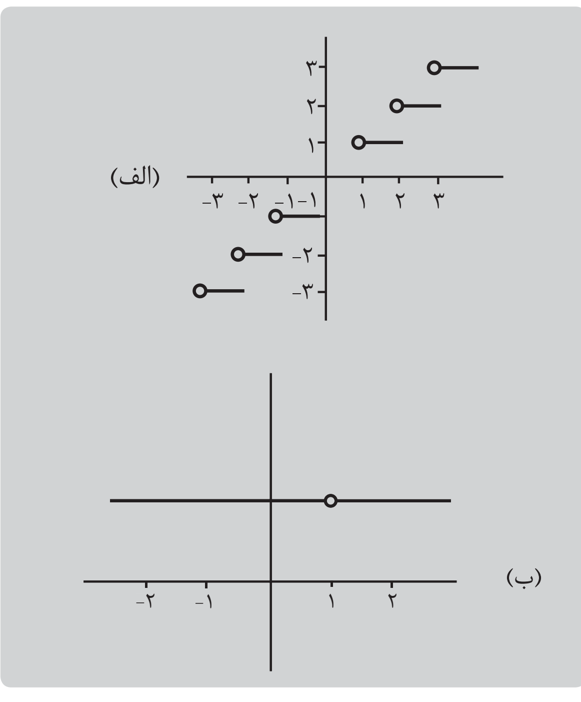
مسأله از آنجا آغاز شد که روزی در یک کلاس ریاضی سال چهارم متوسطه، از دانش‌آموزی خواستم تا مثالی از یک تابع پله‌ای که در سال‌های قبل آن را آموخته، روی تابلو بنویسد. او شروع کرد به ترسیم نمودار تابع پله‌ای به شکل زیر:

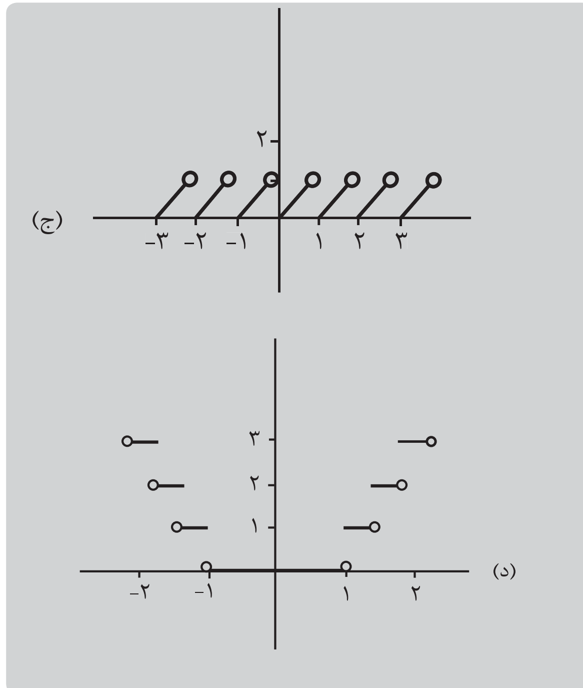


مثال او کاملاً درست بود، ولی چیزی که ذهن من را بعد از آن به خود مشغول کرد زمانی بود که دانش‌آموزان خواستم به سؤال زیر پاسخ دهند:

سؤال: کدامیک از توابع زیر پله‌ای‌اند؟

جالب است بدانید پاسخی که اکثریت دانش‌آموزان دادند





به قرار زیر بود:

شکل (الف) و (ج) نمودار تابع پله‌ای است زیرا نمودارهای آن به شکل پله‌ای بوده و طول پله‌ها یکسان‌اند. شکل (ب) نمودار تابع پله‌ای نیست زیرا نمودار آن به صورت پله نیست. شکل (د) تابع پله‌ای نیست، زیرا اگرچه شکل آن به صورت پله‌ای است، ولی طول پله‌ها با هم فرق دارند.

بعد از مشاهده پاسخ‌ها، هم‌چنان که مشاهده می‌شود، دانش‌آموزان در تشخیص پله‌ای بودن یا نبودن تابع، فقط از نام مفهوم استفاده کرده و در نتیجه در تشخیص توابع پله‌ای دچار اشتباه شدند و در بسیاری از موارد، پاسخ نادرست دادند. در حقیقت دانش‌آموزان در عمل به سه خصوصیت مهم تابع پله‌ای دقت نکرده بودند که لزومی ندارد که:

ـ مقدار تابع در زیر بازه‌ها ثابت باشد.

ـ مقدار تابع (مقدار ثابت) در بازه‌ها، حتماً متفاوت باشد.

ـ حتماً طول بازه‌ها یکسان باشد.

از این رو، برای متوجه ساختن دانش‌آموزان به این خواص مهم، از آنها خواستم تا مفهوم تابع پله‌ای را به زبان آورند نمی‌دانم چرا ولی اکثریت عنوان کردند که «تابعی که نمودار آن شبیه پله باشد تابع پله‌ای است.» ولی نتوانستند تعریف جامعی از آن بیان کنند. از این‌رو، تصمیم گرفتم که تعریف تابع پله‌ای را بر روی تابلو نوشته و با دانش‌آموزان به تحلیل آن تعریف بپردازم.

تعریف تابع پله‌ای: تابعی پله‌ای است که بتوان دامنه آن را به تعداد بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها، تابع ثابت باشد.

بعد از نوشتن تعریف تابع، از دانش‌آموزان پرسیدم که

آیا در تعریف اشاره کرده است که مقدار تابع باید ثابت باشد یا خیر

آیا تأکید کرده که مقدار ثابت در بازه‌های مختلف، باید متفاوت باشد؟

آیا تأکید کرده که طول بازه‌ها یکسان باشد؟ سپس در ادامه، برای این‌که دانش‌آموان به طور شهودی مفهوم تابع پله‌ای را با استفاده از مثال‌های مثبت و منفی درک کنند، مجدداً از آنها خواستم تا سؤالی را که مطرح شده بود، دوباره نگاه کنند. جالب بود که آنها برای هر نمودار، بررسی می‌کردند که آیا خصوصیات تعریف در آنها صدق می‌کند یا خیر؟ جالب است بدانید که دانش‌آموزان با بررسی نمودارها در سؤال، اکثریت بیان کردند که تنها تابعی که در این تعریف صدق نمی‌کند، مورد (ج) است.

نتیجه‌گیری

در آموزش هر مفهومی از جمله تابع پله‌ای، لازم است بعد از بیان تعریف آن، از مثال‌های مثبت و منفی در عمق بخشیدن به یادگیری استفاده شود. مثال‌هایی بهتر است ارائه شود که شامل خواص مهم تعریف باشد. متأسفانه در برخی موارد، مشاهده می‌شود که بعضی همکاران محترم در کلاس درس، برای ایجاد ارتباط بین نام مفهوم و نمودار تابع، بیان می‌کنند که علت این‌که این تابع پله‌ای نامیده می‌شود این است که نمودار آن به شکل پله است. اما این حالت خاصی از تابع پله‌ای را شامل می‌شود (تابع جزء صحیح) و دانش‌آموزان با این اشاره کوتاه، دچار بدفهمی شده و آن را به صورت کلی تعمیم می‌دهند. در حقیقت، معلم باید دانش‌آموزان را با موقعیت‌های گوناگون روبرو سازد و از آنها بخواهد تا مفهوم آموخته شده را در این موقعیت‌ها به‌کار برند. اگر آنها در انجام این امر موفق بودند، معلم مطمئن می‌شود که دانش‌آموزان به هدف آموزشی رسیده‌اند و کار معلم موفقیت‌آمیز بوده است.

منابع

۱. رضوی سید عباس، چند رسانه‌ای‌ها و آموزش مفاهیم، وبگاه تکنولوژی آموزشی http://tut.blogfa.com

۲. سیف علی‌اکبر، روان‌شناسی یادگیری و آموزش، چاپ ششم ۱۳۷۰، انتشارات آگاه

3. Huttenlocher, J. (1962) Some effects of negative instances on the formation of simple concepts. Psychological reports, 11: 35 – 42

4. De cecco, J. p. & Crawford, w. r. (1974) The psychology of learning and instruction: educational psychology (2d. ed.) Englewood cliffs, N. J.: Prentice- hall.

تعاریف

در کتاب‌های ریاضی دوره‌ی متوسط

قاسم حسین قنبری
مرکز تربیت معلم شهید رجایی سمنان

اشاره

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال کرده‌اند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیئت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. درضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآمدتر کنند.

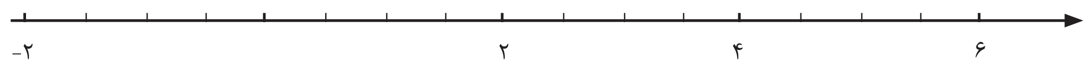
رشد آموزش ریاضی

چکیده

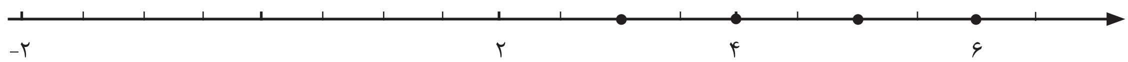
با توجه به اهمیت تعریف در ریاضی، بررسی و نقد برخی تعاریف کتب دوره متوسطه و پیش‌دانشگاهی موضوع این مقاله است. این مسئله در این دوره اهمیت زیادی دارد. زیرا کتاب‌های ریاضی به سرعت در حال تغییر و تحول‌اند و به نظر می‌رسد که این سال با توجه به بهار آن، سال نکویی نخواهد بود.

کلیدواژه‌ها: تعریف، عبارت جبری، نقطهٔ بحرانی.

عدالت آموزشی یکی از مقدمات داشتن جامعه‌ای مطلوب است؛ جامعه‌ای که در آن امکانات آموزشی برای همهٔ افراد جامعه به‌طور یکسان وجود داشته باشد. در این راستا، کتاب درسی مناسب، استاندارد و خودآموز، از اولین این امکانات می‌باشد



شکل ۱



شکل ۲

مقدمه

عدالت آموزشی یکی از مقدمات داشتن جامعه‌ای مطلوب است؛ جامعه‌ای که در آن امکانات آموزشی برای همهٔ افراد جامعه به‌طور یکسان وجود داشته باشد. در این راستا، کتاب درسی مناسب، استاندارد و خودآموز، از اولین این امکانات می‌باشد. اما آیا در حال حاضر، کتاب‌های ما این‌گونه هستند و در این مختصر، آیا کتاب‌های ریاضی این ویژگی‌ها را دارند؟ با توجه به وجود این همه کتاب‌های کمک‌درسی، آموزشگاه‌های آزاد، کلاس‌های خصوصی و باز هم افت تحصیلی، طبیعی است که جواب منفی باشد. هر چند که عوامل بسیار زیاد دیگری هم در این افت دخیل هستند. از آنجایی‌که تعاریف در ریاضی نقش مهمی دارند، برخی تعاریف را مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ از این نظر که آیا تعریف مورد نیاز در هر مورد وجود دارد و در صورت وجود، این تعریف جامع و کامل است یا خیر؟ در واقع، هدف این نوشته این است که نشان دهد عدم دقت در ارایه تعریف‌های ریاضی در کتاب‌های درسی، در میزان افت تحصیلی تأثیرگذار است و در نتیجه، مانعی برای تحقق عدالت آموزشی است.

موضوع را با مسئله ساده‌ای آغاز می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهید دو مجموعه را روی شکل ۱ مشخص کنیم.

تجربه تدریس نگارنده نشان داده است که معمولاً بیشتر دانش‌آموزان هر دو مجموعه را به صورت شکل ۲ نشان می‌دهند.

با بررسی کتاب‌های دورهٔ راهنمایی و متوسطه، می‌بینیم که برای نمایش چنین مجموعه‌ای، هیچ تعریفی نداریم. البته این سؤال به شکل عکس هم می‌تواند مطرح شود که باز هم دو جواب متفاوت به دست خواهد آمد. در موارد بسیاری هم تعریف وجود دارد ولی تعریفی جامع و کامل نیست. در ادامه، به بررسی تعریف‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱، ریاضی ۲ و حسابان تازه تألیف و کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال فعلی می‌پردازیم.

ریاضیات ۱ تازه تألیف (چاپ ۱۳۸۹)

متغیر

در این کتاب متغیر به این صورت تعریف شده است:

«نمادهایی که اعداد دلخواهی را نشان می‌دهند، متغیر می‌نامند. زیرا به جای آنها هر عدد می‌توان قرار داد.» (صفحه ۷۸ از ریاضیات ۲) آیا به جای هر متغیری می‌توان هر عددی را قرار دارد و هیچ محدودیتی در آن وجود ندارد؟

واضح است که چنین نیست. چرا که در فعالیت قبل (صفحه ۷۸ همین کتاب) از این تعریف دانش‌آموز مساحت مستطیل را xy و محیط آن‌را $2(x+y)$ محاسبه کرده است که در آن، y و x نمی‌توانند اعداد منفی باشد. واضح است که تعریف دامنه تغییر، قبل از این ضروری است که در کتاب وجود ندارد.

عبارت‌های جبری

«هر کدام از عبارت‌هایی که در فعالیت بالا به‌دست آورده‌اید به صورت محاسباتی روی متغیرهای y و x از طریق اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و توان‌رسانی و ریشه‌گیری بوده است. این اعمال را اعمال جبری و عبارت‌های به‌دست آمده را عبارت‌های جبری می‌نامند. در حالت خاص، یک عدد را هم به عنوان یک عبارت جبری می‌پذیریم.» (صفحه ۷۸ ریاضیات ۱)

هدف این نوشته این است که نشان دهد عدم دقت در ارایه تعریف‌های ریاضی در کتاب‌های درسی، در میزان افت تحصیلی تأثیرگذار است و در نتیجه، مانعی برای تحقق عدالت آموزشی است

هر چند مؤلفان قصد داشته‌اند با یک مثال ساده مفهوم را بیان کنند، اما آیا یک عدد عبارت جبری هست یا یک نمایش از عدد؟ به عبارتی دیگر، یک عدد عبارتی جبری است یا یک رقم؟

آیا صفر یک عبارت جبری است؟ چرا که صفر هم یک عدد است؟

آیا عبارت جبری فقط روی متغیرهای y و x تعریف می‌شود؟

آیا عبارت $1+x+x^2+x^3+...$ جبری است؟

این‌ها همه سؤالاتی هستند که تعریف ارایه شده در کتاب، پاسخگوی آنها نیست.

رابطهٔ خطی

«در حالت‌هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به صورت خط باشد، گوییم آن دو مقدار به‌طور خطی به هم مرتبط‌اند و با هم رابطهٔ خطی دارند.» (صفحه ۱۱۱ از ریاضیات ۱)

این تعریف فقط متغیرهای پیوسته را شامل می‌شود، چرا که نمودار متغیرهای گسسته هیچ‌گاه یک خط نمی‌شود، بلکه فقط نقاطی روی خط را شامل می‌شود. با توجه به این موضوع مسئلهٔ ۱ صفحه ۱۱۵ رابطهٔ خطی نیست چرا که متغیر پیوسته نیست. هم‌چنین، تمرین در کلاس صفحه ۱۲۱ نیز یک رابطهٔ خطی نیست چرا که نمودار یک نیم‌خط است نه یک خط.

هم‌چنین، عبارت **رابطه بین دو مقدار** و **به صورت خط** معنی مشخصی ندارد. به عنوان مثال، آیا رابطهٔ $(x-1)^2+y^2=0$ که فقط یک زوج مرتب $\{(1,0)\}$ را مشخص می‌کند، رابطهٔ خطی است یا خیر؟ آیا در اینجا می‌توان گفت y و x تغییری دارند؟

ریاضیات ۲ تازه تألیف (چاپ ۱۳۸۹)

در این کتاب نیز، یک تعریف را بررسی می‌کنیم:

نزدیک‌شدن جملات یک دنباله به یک عدد

«اگر جملات دنباله‌ای را از عددی معین کم کنیم و جملات حاصل به صفر نزدیک شود گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می‌شود» (صفحه ۱۳ از ریاضیات ۲)

در این تعریف چند نکته مبهم وجود دارد:

۱. مفهوم «نزدیک شدن» چیست؟

به عنوان مثال، آیا دنبالهٔ $a: 1,1,1,...$ به عددی نزدیک می‌شود؟ هرچند مؤلف در تبصره‌ای این مشکل را حل کرده است، ولی آیا این کار از نظر آموزشی پسندیده است که مطلب اصلی در تبصره بیاید؟ شاید مناسب بود که این مفهوم در این مرحله بیان نمی‌شد.

۲. چه دنباله‌هایی به صفر نزدیک می‌شوند؟

در واقع در این تعریف، فقط صورت مسئله عوض شده است. چرا که قبل از این موضوع، نزدیکی به صفر مطرح نشده است. در این وضعیت حداقل دو سؤال مطرح می‌شود که اولاً وجود این تعریف چه ضرورتی دارد؟ و آیا باحذف آن مشکلی در ادامه بحث پیش می‌آید؟

ریاضی عمومی دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشته تجربی (چاپ ۱۳۸۹)

در این کتاب آمده است:

«**نقطهٔ بحرانی:** تابع f با قلمرو $[a,b]$ مفروض است. نقاطی از بازهٔ (a,b) که مشتق در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق تابع در آن نقاط وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع می‌نامند.»

بنابراین نقاط بحرانی به توابعی محدود شده است که دامنه آنها به شکل $[a,b]$ است. در نتیجه تمرین‌های ۱ تا ۵ صفحه ۱۲۳ این کتاب که قصد محاسبه نقاط بحرانی توابعی مثل $f(x)=2x^3-9x^2+12x+60$ را دارد بی‌مورد است چرا که دامنه این پنج تابع R است که در شرایط مختلف صدق نمی‌کند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی (چاپ ۱۳۸۹)

در تعریف نقطهٔ بحرانی آمده است:

«نقطهٔ $c\in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f می‌نامند، هرگاه $f'(c)$ تعریف نشده باشد و یا $f'(c)=0$»

با این تعریف، اگر در $x=c$ مشتق تعریف شود، در

«تعریف نشده» و «وجود ندارد» دو اصطلاحی هستند که در موارد بسیاری از جمله همین مورد نقطهٔ بحرانی، به‌کار می‌روند ولی خود آنها در کتاب‌های درسی تعریف نشده‌اند

صورتی بحرانی است که $f'(c)=0$. به عنوان مثال، در تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x\in Q\\ -2 & x\in Q'\end{cases}$، تابع در $x=1$ نقطهٔ بحرانی ندارد زیرا $f'(1)$ تعریف می‌شود، ولی وجود ندارد.

حال تابع $g(x)=\begin{cases}x & -1\le x<0\\ 2x^2-x & 0\le x\le 1\end{cases}$ را که مثال صفحه ۱۲۹ این کتاب است در نظر می‌گیریم که مشتق آن به شکل زیر است:

$$g'(x)=\begin{cases}1 & -1<x<0\\ \text{وجود ندارد} & x=0\\ 4x-1 & 0<x<1\end{cases}$$

مؤلفان کتاب نقاط $x_1=-1$ و $x_2=0$ و $x_3=\frac{1}{4}$ و $x_4=1$ را جزء نقاط بحرانی در نظر گرفته‌اند در صورتی‌که در $x=0$ مشتق تعریف می‌شود، اما وجود ندارد. پس نمی‌تواند بحرانی باشد. جالب این است که این نقطه با تعریف ریاضی تجربی بحرانی است.

تعریف نشده‌ها وجود دارند یا خیر؟

«تعریف نشده» و «وجود ندارد» دو اصطلاحی هستند که در موارد بسیاری از جمله همین مورد نقطهٔ بحرانی، به‌کار می‌روند ولی خود آنها در کتاب‌های درسی تعریف نشده‌اند. سؤال این است که این دو یکی هستند یا فرق دارند. به عنوان مثال، در تابع $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$، آیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ تعریف می‌شود؟ آیا این حد وجود دارد؟

واضح است که این حد تعریف می‌شود اما وجود ندارد، زیرا در تعریف حد می‌گنجد.

هم‌چنین در تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x\in Q\\ -2 & x\in Q'\end{cases}$، $\int_0^3 f(x)d(x)$ تعریف می‌شود اما وجود ندارد، چرا که در شرایط تعریف صدق نمی‌کند. پس قبل از همه باید جواب این سؤالات معلوم باشد که؛

ـ آیا تعریف شده‌ها وجود دارند؟

ـ آیا آن‌که وجود ندارد تعریف نمی‌شود؟

ـ آیا تعریف نشده‌ها، وجود ندارند؟

به عنوان مثالی دیگر، در تابع $f(x)=|x|, -1<x<2$ با توجه به تعریف ریاضیِ تجربی $x=0$ نقطهٔ بحرانی است اما با تعریف کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بحرانی نیست زیرا مشتق در این نقطه تعریف می‌شود.

مورد دیگری هم که نیاز به دقت دارد، حد بینهایت است. با توجه به تعریف کتاب ریاضیات ۳ رشته تجربی، حدی مثل $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ وجود دارد و ∞ است اما با توجه به تعریف کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین حدی وجود ندارد. به این منظور به نکته صفحه ۷۴ این کتاب دقت می‌کنیم:

نکته: نمایش $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ یا $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ فقط یک علامت‌گذاری است و همان‌طور که در مثال ۳۶ دیدیم، در هر یک از این حالت‌ها، تابع f حد ندارد.

نتیجه‌گیری

۱. با توجه به این‌که ریاضی علمی است که در آن، تعریف‌ها نقش اساسی دارند، پسندیده است که دقت بیشتری در این موارد به عمل بیاید.

۲. بهتر است مفاهیم مشخص در کتاب‌های مختلف با هم هماهنگ باشند، زیرا هم یک معلم ممکن است که کتاب‌های مختلف را تدریس کَند و هم این‌که دانش‌آموزان رشته‌های مختلف با هم تبادل اطلاعات کنند. صلاح نیست که کتاب‌های درسی به صورت جزیره‌های دور از هم باشند.

منابع

۱. ایرانمنش، علی و همکاران. (۱۳۸۹). **ریاضیات ۲**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

۲. بخشعلی‌زاده، شهرناز و همکاران. (۱۳۸۹). **ریاضیات ۱**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

۳. بیژن‌زاده، محمدحسن و همکاران. (۱۳۸۹). **ریاضی عمومی دوره پیش‌دانشگاهی رشته تجربی**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

۴. خردپژوه، فرزان و رجالی، علی. (۱۳۸۹). **حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش‌دانشگاهی**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

۵. رستمی، محمدهاشم و همکاران. (۱۳۸۹). **ریاضیات ۳**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

نقد و بررسی حسابان تازه تألیف چاپ ۱۳۸۹

حسابان با روش فعّال

اسفند ملیح ملکی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های ملکان
esfand.malih@yahoo.com

چکیده

در راستای تغییر کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ کتاب حسابان نیز به‌طور کلی تغییر یافت و به شیوه‌ای کاملاً متفاوت از کتاب قبلی و به روش حل مسئله تألیف و چاپ گردید. با توجه به اینکه حسابان و دیفرانسیل دروس زیربنایی رشته ریاضی بوده و بیش از نیمی از سؤالات ریاضی آزمون سراسری از این دو درس طرح می‌گردد، لذا اهمیت نقد و بررسی آن احساس می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل محتوای کمی، حسابان، روش فعال، حل مسئله، روش ویلیام رومی

مقدمه

هدف این مقاله، تحلیل محتوای کمّی کتاب تازه تألیف حسابان چاپ ۱۳۸۹ با استفاده از روش ویلیام رومی است. در این روش، ضریب درگیری صفحاتی از کتاب که به‌طور تصادفی انتخاب شده و براساس ملاک‌های تعیین شده، اندازه‌گیری می‌شود و میزان استاندارد بودن کتاب با توجه به ضرایب تعیین شده، مشخص می‌گردد. از جمله این ملاک‌ها، شیوه فعال تهیه و تنظیم کتاب و جنبه هنری و طراحی آموزشی است که این روش، انطباق کامل کتاب حسابان را با روش فعال مورد تأیید قرار می‌دهد.

بخش اول: نقد و بررسی محتوایی

بیشتر موضوعات مطرح شده در این کتاب ادامه مطالب ریاضی ۲ است و مباحث آن را تکمیل می‌کند اما روش آموزشی این کتاب «روش حل مسئله» است و با کتب قبلی متفاوت بوده و اهداف اصلی آن طبق گفته مؤلفان، عبارتند از: «درک معنادار مفاهیم ریاضی، توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل واقعی ـ یادگیری استراتژی‌های حل مسئله ـ توانایی استدلال و مباحثه و موشکافی». برای آن‌که امر مهم یادگیری اتفاق بیفتد، لازم است این‌گونه روش‌ها جایگزین روش‌های سنتی آموزشی شوند. در روش‌های قبلی، ابتدا یک مفهوم ریاضی در قالب تعریف ـ اصل و یا قضیه به دانش‌آموز معرفی می‌شد، سپس بدون آنکه دانش‌آموز نقشی داشته باشد اثبات می‌شد و با ذکر مثال‌هایی به‌طور موقت، به حافظه دانش‌آموز سپرده می‌شد و دانش‌آموز نسبت به آن مفهوم احساس بیگانگی می‌کرد و چون از هیچ‌یک از کاربردهای آن مفهوم در دنیای واقعی اطلاع نداشت، انگیزه‌ای برای یادگیری آن نداشت و این دلایل کافی است تا درس شیرین ریاضی که به‌طور فطری هر انسانی باهوش معمولی قادر به درک و لذت بردن از آن است این‌گونه مورد بی‌مهری قرار گرفته و در حال حاضر روزبه‌روز شاهد کم‌شدن تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی باشیم. ولی با فرایند آموزشی که در این کتاب گنجانده شده است، دانش‌آموز به دلیل آن‌که خود در به دست آوردن نتایج سهم دارد، نسبت به آن احساس مالکیت می‌کند و نسبت به آن علاقه‌مند می‌شود و به جای آن‌که شاهد راه رفتن معلم باشد، خود راه رفتن را تجربه می‌کند و با دیدن ریاضی در طبیعت و توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل واقعی، موجب می‌شود تا دانش‌آموزان درک صحیح‌تری از ریاضی بیابند و نگرش مثبتی به ریاضی پیدا کنند.

در این کتاب، آموزش مفهوم جدید با استراتژی حل مسئله صورت می‌گیرد یعنی ابتدا با طرح مسئله دانش‌آموز نسبت به آن احساس نیاز می‌کند و به تفکر وادار می‌شود. سپس با انجام فعالیت‌های مناسب، تجربه جدیدی نسبت به مفاهیم موردنظر به‌دست می‌آورد و آمادگی درک مفاهیم را پیدا می‌کند و با تمرین در کلاس، آموخته‌هایش تثبیت می‌شوند و بدفهمی‌های او اصلاح می‌شوند و با بحث در کلاس به کمک معلم و راهنمایی‌های او، دانش‌آموزان وارد مباحثه شده قدرت و توانایی استدلال پیدا می‌کنند. هم‌چنین، برقراری ارتباط با همدیگر، درک همدیگر و انتقادپذیری را می‌آموزند و نقاط ضعف خویش را پیدا نموده و برای رفع آنها تلاش می‌کنند. در نهایت، با حل چند مثال به وحدت در رفتار که آخرین مرحله از فازهای متوالی روش فعال است می‌رسند. این روند در سراسر کتاب مشهود است به عنوان یکی از آنها را بیان می‌کنیم.

در صفحه ۱۱۶ کتاب برای تدریس مفهوم جدید «اتحادهای مثلثاتی»، در داخل یک کادر مسئله‌ای به صورت زیر مطرح می‌شود «اگر زاویه‌ای دو برابر شود، نسبت‌های مثلثاتی آن چه تغییری می‌کند؟» هر دانش‌آموز با توجه به معلومات خود جوابی برای این مسئله می‌دهد ولی کتاب نخواسته بلافاصله جواب این مسئله را بگوید، بلکه ابتدا برای ایجاد انگیزه نامی از ابوالوفای بوزجانی، دانشمند ایرانی که نقش زیادی در گسترش مثلثات آن زمان داشته است ذکر شده که برای اولین بار به این سؤال پاسخ داده است. سپس در یک فعالیت، روش ابوالوفا برای محاسبه $\sin 2\alpha$ در پنج مرحله توضیح داده شده است البته در هر مرحله با سؤالات مختلف، دانش‌آموز را با این مفهوم درگیر کرده است. سپس برای روشن‌شدن بیشتر موضوع، مثال‌های ریاضی برای محاسبه نسبت‌های مختلف و اثبات چند اتحاد مثلثاتی آورده است. در نهایت با تمرین در کلاسِ مناسب، خواسته تا دانش‌آموز آموخته‌های خود را برای سایر اتحادها به‌کار گیرد.

اهداف آموزش ریاضی دوره متوسطه طبق مصوبات شورای‌عالی آموزش‌وپرورش بر ۴ دسته تقسیم می‌شوند.

۱. نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان (به جرأت می‌توان گفت هیچ کتاب درسی تا این حد مثال‌های کاربردی ریاضی در زندگی روزمره نداشته است و بدون استثنا هر مفهومی از ریاضیات را به دنیای واقعی ارتباط داده است.)

۲. نقش ریاضیات در تربیت فکر (شروع یادگیری با طرح یک مسئله و گاهی اوقات با عنوان بحث در کلاس آغاز شده که قوه خلاقیت و ابتکار دانش‌آموز را برمی‌انگیزد و او را به تفکر وادار می‌کند و در پایان درس، تعدادی مسئله فکری و بدیع گنجانده شده که بالاتر از حد متوسط بوده و در شکوفایی استعداد دانش‌آموزان ممتاز و تیزهوش مؤثر است از جمله مسئله ۸

صفحه ۱۱ و مسئله ۱۲ صفحه ۲۴ و تمرین دوره‌ای صفحه ۱۳۶.

۳. نقش ریاضیات در تأمین آینده فرد و جامعه (برای تأمین این هدف هم در کتاب تلاش‌هایی صورت گرفته است؛ دانش‌آموز پس از مطالعه حسابان با کاربردهای وسیع ریاضیات در زندگی آشنا می‌شود و رشته موردنظر خود را انتخاب می‌کند حتی اگر ادامه تحصیل هم ندهد با فکر باز و ذهنی خلاق در خدمت جامعه خواهد بود)

۴. نقش ریاضیات در تربیت فرهنگی (در این کتاب نیز با برخی دیگر از علایم و نمادهای ریاضی آشنا شده و گوشه‌ای از تاریخ ریاضی سرزمین خود را می‌شناسد و با آگاهی از سیر تکاملی ریاضیات از نقطه‌نظر فرهنگی نیز، به علم و آگاهی‌های او افزوده می‌شود.)

در اینجا به ذکر نکاتی در مورد محتوای کتاب می‌پردازیم.

۱. بسیاری از موضوعات در کتاب حسابان قبلی نبود از جمله بسط دو جمله‌ای (قبلاً در کتاب ریاضی عمومی ۱ پیش‌دانشگاهی تجربی بوده و برای رشته ریاضی به این صورت مطرح نشده بود و آوردن این مطلب به‌خاطر اثبات مشتق $y=x^n$ و کاربرد آن در محاسبه حدها و تجزیه عبارات جبری و... لازم بود) ـ مشتق تابع معکوس (در کتاب حسابان قبلی این بحث نبود و این مطلب در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال رشته ریاضی درج شده است البته برای اثبات مشتق توابع معکوس مثلثاتی این امر لازم بود) ـ حل نامعادله به روش هندسی (تاکنون در هیچ کتاب درسی این مطلب نوشته نشده بود یکی از نکات برجسته کتاب می‌باشد و هندسی‌سازی کمک بزرگی برای فهم مطالب مجرد ریاضی است) ـ بهینه‌سازی بدون استفاده از مشتق (جای این مطلب هم در حسابان خالی بود. درج این مطلب برای آگاهی دانش‌آموز از توانمندی‌های ریاضیات در حل مسائل مختلف به شیوه‌های گوناگون مفید است.) ـ مفهوم همسایگی (قبلاً این مفهوم در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بود و در کتاب فعلی به خوبی آورده شده چون تعاریف حد و پیوستگی و مشتق تابع ساده‌تر شده است. قبلاً بدون این مفهوم، جملات زیادی در تعاریف ذکر می‌شد.)

۲. مثال‌های متعددی از کاربردهای ریاضیات در زندگی روزمره در این کتاب به چشم می‌خورد که از نظر کیفی و کمی در هیچ کتاب درسی تا این اندازه به این مقوله مهم که باعث خوشایند جلوه‌دادن ریاضی و افزایش علاقه و انگیزه دانش‌آموزان می‌شود توجه نشده بود حتی به نیازهای معلم نیز توجه شده و کار او را در تدریس و پاسخ به سؤالات متعدد دانش‌آموزان از جمله این‌که «ریاضیات به چه درد می‌خورد؟» آسان نموده است.

۳. قبلاً در کتاب‌های درسی سؤالات خیلی دشوار و المپیادی نبود و شاید به نیاز برخی از دانش‌آموزان مستعد پاسخ داده نمی‌شد. اما این کتاب در هر زمینه یک سؤال از این نوع را دربردارد از جمله محاسبه حجم تانکر خوابیده.

۴. روند این کتاب طوری است که دانش‌آموز را از مرحله پایین آموزش یعنی حفظ‌کردن به سطح بالایی از یادگیری یعنی درک عمیق و مفهومی مطالب سوق می‌دهد. روش‌های هندسی حل معادلات و نامعادلات و اثبات‌های بدیع و هندسی و مثال‌های عینی متعدد، گواه بر این مدعاست.

۵. برخی از کاستی‌های حسابان قبلی نیز در این کتاب بهبود یافته است که در این‌جا به ذکر چند نمونه اکتفا می‌کنیم. مفهوم قدرمطلق با مفهوم فاصله به خوبی توضیح داده شده و خواص مختلف آن با ذکر دلیل آورده شده و به حل معادلات و نامعادلات قدرمطلق توجه زیادی شده است. مفهوم تابع که یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است در مقایسه با کتب قبلی، با در نظر گرفتن حالات مختلف تشخیص آن به بهترین شکل توضیح داده شده و مکمل خوبی برای قسمت تابع کتاب ریاضی ۲ است. انواع تابع نیز به خوبی بررسی شده، از جمله توابع زوج و فرد ـ تابع پله‌ای ـ توابع صعودی نزولی و تابع مرکب که در حسابان قبلی به این صورت و بدون عیب و نقص نوشته نشده بود.

۶. فصل حد و پیوستگی بسیار متحول شده است. تعاریف با وجود آوردن مفهوم همسایگی سهل‌تر شده است. آموزش حد با نوشتن شیب و معادله خط مماس شروع شده که قبلاً چنین نبود و در آغاز مشتق، از این مثال استفاده می‌شد. البته کار فعلی بهتر است چون نوشتن شیب خط مماس دقیقاً یک عمل حد حدگیری است. قراردادهایی که برای اولین بار در این قسمت آورده شده در مورد حدهای یک‌طرفه و این‌که تنها در دامنه تابع مفهوم حد قابل بحث است برخی از مشکلات از جمله پیوستگی تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه را حل نموده است. در اثبات حد تابع

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x\to ۰$ قبلاً از قضیه فشردگی استفاده می‌شد ولی در این کتاب از روشی متفاوت استفاده شده است. از این قبیل نوآوری‌ها در این کتاب، زیاد به چشم می‌خورد.

۷. مثلثات در سطحی بسیار عالی نگارش شده است. در کتب قبلی دانش‌آموز به حفظ فرمول روی می‌آورد ولی در این کتاب هر فرمولی با اثباتی که توسط خود دانش‌آموز و با راهنمایی کتاب صورت می‌گیرد نوشته شده است. مبحث معادله مثلثاتی علاوه بر آن‌که به شیوه‌ای ساده و روان قابل فهم با رسم شکل‌های گویا بیان شده است، نسبت به کتاب قبلی تکمیل‌تر شده است. توابع معکوس مثلثاتی یکی از قسمت‌های بسیار خوب کتاب است در تمرینات، دانش‌آموز را به رسم شکل سوق داده که آسان‌تر و قابل فهم‌تر از روش‌های جبری است و در تمرین دوره‌ای، مسئله حجم تانکر خوابیده را آورده که بهترین مثال کاربردی ممکن برای توابع معکوس مثلثاتی است.

۸. مشتق نیز بدون تغییر باقی‌نمانده است؛ مشتق با توضیح چگونگی رسم مماس بر یک منحنی دلخواه شروع شده که یک نگرش جدید به مسئله دارد. هر فرمولی چه در قالب تمرین در کلاس چه در قالب قضیه یا تمرین بالاخره با اثبات همراه است. مشتق تابع مرکب برخلاف کتاب قبلی در آخر فصل ذکر شده همچنین در این قسمت نیز مثل فصل‌های قبل از تمرینات و مسائل بدیع و نو استفاده شده است.

بخش دوم: نقد و بررسی انتقادی

در بخش اول، اهداف کلی آموزش ریاضیات دوره دبیرستان مورد بررسی قرار گرفت و معلوم شد که این اهداف قابل تحقق با کتاب جدید می‌باشند. در این قسمت، کتاب را از دیدگاه هنری مورد بررسی قرار می‌دهیم تناسب متن کتاب با روش فعال را در نظر می‌گیریم و از جنبه انتقادی نیز نکاتی را ذکر می‌کنیم. هم‌چنین اشاره‌ای نیز به اشکالات چاپی کتاب خواهیم داشت.

از بعد هنری، توجه زیادی به کتاب شده است تصویری از دانشمندان ایرانی و افتخارات آنان از جمله ماهواره امید بر روی جلد و پشت آن که در یک نگاه اجمالی به تمام اهداف کلی آموزش ریاضیات نظر دارد باعث ایجاد علاقه و انگیزه در دانش‌آموز می‌شود. شروع هر فصل هم با تصویری متناسب با مطالب آن به فهم و یادگیری مطالب کمک می‌کند. بالای هر صفحه نام فصل با شماره آن در رنگی جداگانه که برای آن فصل در نظر گرفته شده، باعث تسریع در پیداکردن مطلب موردنظر شده و نقش زیادی در زیبایی این اثر هنری دارد. عناوین هر بخش و مسائل و تمرین در کلاس و بحث در کلاس هر کدام، با رنگ مشخص به خود و در داخل یک کادر مناسب قرار داده شده است. هم‌چنین، نتایج به‌دست آمده، با رنگ قرمز از مطالب دیگر متمرکز شده تا خواننده به سرعت مطلب موردنظر خود را پیدا کند و از سوی دیگر، در نگاه دانش‌آموز زیبا جلوه می‌کند. در داخل هر فصل هم، هر جا که لازم شده از تصویر مرتبط با موضوع استفاده شده است. تصویر عمارت ایل گلی تبریز در بحث تقارن و سی‌وسه پل اصفهان و باغ دولت‌آباد یزد در موضوعات دیگر، نمونه‌هایی هستند که علاوه بر مفاهیم ریاضی، جاهای دیدنی کشور را به خواننده معرفی می‌کند. ابعاد کتاب نیز نسبت به حسابان قبلی افزایش پیدا کرده تا فضای کافی برای ارائه مطالب و تصاویر مورد نیاز وجود داشته باشد که این امر در یادگیری مؤثر است.

برخلاف روش‌های منفعل که معلم محور است، روش فعال دانش‌آموز محور است. دانش‌آموز در امر یادگیری شرکت فعال دارد با مسائل مواجه می‌شود، راجع به آنها فکر می‌کند و با راهنمایی معلم به حل آنها می‌پردازد و در اثر کارهای آموزشی خودش، به مفاهیم پی می‌برد. در این صورت است که دانش‌آموز به حل مسئله‌ها علاقه‌مند می‌گردد. هر دانش‌آموز مطالب را به سرعت خود یاد می‌گیرد و فرصت دارد به مطالب فکر کند. در جریان کار فعال، دانش‌آموز رشد می‌کند و تفکر منطقی خود را تقویت می‌کند البته موفقیت این روش به مهارت معلم و تسلط او به درس بستگی دارد. وظیفه معلم توجه به کاریکایک دانش‌آموزان و دادن راهنمایی در موارد لازم، علاقه‌مند کردن آنها به کار و فعالیت درسی، شناخت دانش‌آموزان و پی‌بردن به توانایی‌های آنها و از همه مهم‌تر قدم به قدم پیش‌بردن دانش‌آموز برای یادگیری یک مطلب درسی جدید طی مراحل مختلف آن است. وظیفه دانش‌آموز هم فعالیت و کارآموزی و کاوشگری دتر حد توانایی خود می‌باشد. سه اصل مهم برای تدریس ثمربخش وجود دارد: ۱. اصل یادگیری فعال ۲. اصل بهترین انگیزه ۳. اصل تسلسل مرحله‌ها (دانش‌آموز حدس می‌زند، سپس آن را به صورت کلمات درمی‌آورد و در پایان، برای تثبیت یادگیری،

تمرین و ممارست انجام می‌دهد). کتاب حسابان فعلی این سه مرحله را به خوبی در نظر گرفته و سه اصل یادگیری را نیز به خوبی به کار برده است. دانش‌آموز در قسمت حل یک مسئله اندیشه می‌کند و در فعالیت‌ها افکار خود را بیان می‌کند و در تمرین در کلاس‌ها به رفتارسازی می‌پردازد. بنابراین، کتاب حاضر کاملاً منطبق با روش فعال است، به شرطی که معلم و اولیا و مدرسه نیز خود را با کتاب هماهنگ نمایند. اکنون از جنبه انتقادی نکاتی را ذکر می‌کنیم البته در مقایسه با محاسن کتاب خیلی اندک است.

۱. کلمه حسابان به معنی دو حساب ـ یکی حساب دیفرانسیل و مشتق و دیگری حساب انتگرال می‌باشد. با توجه به این‌که بخش انتگرال حذف شده، دیگر کلمه حسابان اسم بامسمایی برای کتاب به نظر نمی‌رسد.

۲. روش فعال نیازمند صرف وقت زیاد و مستلزم داشتن صبر و حوصله از سوی معلم و مدیر و ناظم و اولیاست؛ اختصاص ۴ ساعت در هفته برای تدریس این کتاب بسیار کم و حجم کتاب با توجه به این وقت کم بسیار زیاد می‌باشد، به‌طوری‌که بنده و سایر معلمان این درس نتوانستیم در موعد مقرر بودجه‌بندی را تمام کنیم و مجبور شدیم ۶ ساعت در هفته به جای ۴ ساعت تدریس داشته باشیم. پیشنهاد می‌شود یا از حجم کتاب کاسته شود یا ساعات تدریس در هفته افزایش یابد.

۳. به نظر می‌رسد این کتاب با سایر دروس سال سوم از جمله فیزیک ۳ و ریاضی ۳ هماهنگی لازم را ندارد چون دانش‌آموزان فرمول‌های مشتق را قبل از این‌که در حسابان بخوانند در فیزیک ۳ به‌کار می‌گیرند و هم‌چنین توسیع حد و حدهای بینهایت را دانش‌آموزان تجربی می‌خوانند، اما رشته ریاضی در سال سوم آنها را نمی‌خواند و قراردادهایی که به فصل حد اضافه شده برای رشته تجربی لحاظ نشده است و این برای معلمی که با هر دو کلاس تجربی و ریاضی درس دارد، مشکلاتی را به همراه دارد.

۴. برخلاف فصل‌های سوم، چهارم و پنجم که یک مطلب را مورد بررسی قرار می‌دهد، تنوع مطالب در فصل اول زیاد است و ارتباط کمی نسبت به هم دارند.

۵. مجزا کردن مجموع جملات تصاعدها و قراردادن آنها در کتاب سوم به شرطی که دانش‌آموز قبل از شروع کلاس قسمت تصاعدها را از کتاب ریاضی ۲ خوانده باشد کار خوبی است. اما به دلیل قرارگرفتن تصاعدها در اول کتاب، معمولاً دانش‌آموزان بدون مطالعه به کلاس می‌آیند و این کار معلم را دشوار می‌کند.

۶. بهتر است در کتاب، نرم‌افزارهای ریاضی لازم از جمله نرم‌افزار mc۶ برای رسم نمودار معرفی گردد تا مشکلات ترسمی نمودارهایی از قبیل نمودار $y=\frac{\sin x}{x}$ مرتفع گردد.

۷. اکثر دانش‌آموزان و برخی از دبیران در استفاده از ماشین‌حساب‌های علمی و پیشرفته دچار مشکل می‌شوند. لذا بهتر است در این کتاب که بیشتر به استفاده از ماشین‌حساب توصیه شده، راه‌های استفاده از آن نیز ذکر شود.

۸. تعداد تمرینات دوره‌ای در فصل‌های اول ودوم بسیار زیاد است، اما در فصل چهارم اصلاً تمرین دوره‌ای وجود ندارد و در فصل‌های سوم و پنجم یک تمرین با عنوان تمرینات دوره‌ای آورده شده است. بهتر است تعداد تمرینات دوره‌ای فصل‌ها نیز با همدیگر تناسب داشته باشند.

۹. به بسط دو جمله‌ای و دوره تناوب در مقایسه با بخش‌های دیگر اشاره کوتاهی شده در حالی‌که محاسبه دوره تناوب در رسم نمودار و حل معادلات، کاربرد فراوانی دارد و بسط دو جمله‌ای دارای نکات گفتنی زیادی است.

فصل مثلثات هر چند به صورت کامل بیان شده و تمام فرمول‌ها اثبات گردیده است، اما اثبات‌های دشواری انتخاب گردیده در حالی‌که برای بعضی از آنها از جمله محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ اثبات‌های ساده‌تری نیز وجود داشت و این با روند کتاب‌های ریاضی ۱ و ۲ که سعی در ساده‌سازی مثلثات و کشاندن آن به زندگی روزمره داشتند کمی مغایرت دارد. پیشنهاد می‌شود از حجم کتاب در قسمت مثلثات کاسته شود واثبات‌های مشکل در قسمت تمرینات دوره‌ای درج شود.

۱۰. اشکالات چاپی متعددی در چاپ اول وجود دارد که هر چند در شروع کار این‌گونه اشکالات طبیعی است، اما دانش‌آموز وجود اشکال در کتاب را به این راحتی برنمی‌تابد و بیان آن از سوی معلم را حمل بر بی‌سوادی معلم می‌کند و معلم هم اگر به همه این اشکالات قبل از تدریس واقف نباشد، در تدریس دچار مشکل خواهد بود. پس پیشنهاد می‌شود اشکالات چاپی به نحو مقتضی در شروع سال تحصیلی در اختیار دانش‌آموزان و معلمان قرار گیرد. بعضی از این اشکالات در قسمت‌های اساسی از جمله تعریف توابع صعودی و نزولی و فرمول $\tan(\alpha+\beta)$ صورت گرفته است.

۱۱. ترتیب قرار گرفتن موضوعات مختلف در فصل‌ها از لحاظ رعایت موارد پیش‌نیاز به خوبی انجام گرفته و عناوین به

ترتیب از ساده به مشکل تنظیم شده‌اند، اما پیشنهاد می‌شود تابع درجه دوم و قدرمطلق از فصل اول به فصل دوم و بعد از معرفی تابع و انواع آن منتقل شود.

بخش سوم: تحلیل محتوا به روش ویلیام رومی

این روش از نوع تجزیه و تحلیل کمی[1] است. که در آن میزان یادگیری دانش‌آموزان در فرایند یادگیری ارزیابی می‌شود. هر چند این روش همه ابعاد مسئله را دربرنمی‌گیرد، اما یکی از بهترین تکنیک‌های موجود برای تعیین میزان فعال‌سازی دانش‌آموزان است. در این روش، تعدادی از صفحات کتاب به عنوان نمونه تصادفی انتخاب شده و از هر صفحه ۲۵ جمله انتخاب می‌شود، در این انتخاب‌ها، به هر یک از واحدهای درسی اعم از تصاویر، نمودارها، پرسش‌ها، خلاصه درس و فعالیت‌های درسی، یک حرف به صورت زیر اختصاص داده می‌شود.

a) بیان واقعیت‌ها

b) استنتاج و تعمیم

c) تعاریف

d) پرسش‌هایی که بلافاصله پاسخ داده شده است.

e) جمله‌ای که هیچ یک از موارد بالا نیست.

f) سؤال‌هایی که دانش‌آموزان را به تجزیه و تحلیل وادار می‌کند.

g) جمله‌هایی که فعالیت خاصی را از دانش‌آموز می‌خواهد.

h) پرسش‌ها و تمرین‌هایی که پاسخ آنها مستلزم آزمایش و تحقیق است.

i) جملاتی که دانش‌آموزان را به نگاه کردن به تصاویر وادار می‌کند و دستور عمل انجام کاری را می‌دهد.

j) سؤال‌هایی که بلافاصله جواب را به همراه ندارد.

ضریب درگیری[2] از نظر رومی، $I=\sum\frac{fghij}{abcde}$ است که در آن مقدار هر حرف ۱ در نظر گرفته می‌شود. تحلیل ضریب درگیری به صورت زیر است:

الف) اگر $I<0/4$ آنگاه متن، دانش‌آموز را در زمان تدریس درگیر نمی‌کند یعنی به شیوه غیرفعال نوشته شده است.

ب) اگر $I>1/5$ آنگاه متن مورد مطالعه دشوار بوده و برای استعدادهای درخشان قابل استفاده است.

ج) اگر $0/4\leq I\leq 1/5$ متن مورد مطالعه استاندارد است و ارائه مطلب به صورت فعال است.

با به‌کارگیری این روش، ابتدا به‌طور تصادفی صفحات ۹۲ و ۱۳۲ و ۱۲۴ از کتاب حاضر انتخاب شدند و نتیجه به صورت زیر حاصل شد.

الف) صفحه ۹۲ $\quad 0/4\leq I\leq 1/5$

$$I=\sum\frac{fghij}{abcde}=\frac{0+0+0+9+2}{7+5+1+0+1}=\frac{11}{14}=0/78$$

ب) صفحه ۱۳۲ $\quad 0/4\leq I\leq 1/5$

$$I=\sum\frac{fghij}{abcde}=\frac{0+2+4+5+3}{6+0+0+0+5}=\frac{14}{11}=1/27$$

ج) صفحه ۱۲۴ $\quad 0/4\leq I\leq 1/5$

$$I=\sum\frac{fghij}{abcde}=\frac{0+0+5+1+2}{3+9+0+0+5}=\frac{8}{17}=0/47$$

از این اعداد نتیجه می‌گیریم که متن صفحات ۹۲، ۱۲۴ و ۱۳۲ کتاب حسابان جدید استاندارد بوده و ارائه مطلب به صورت فعال است.

این مقاله را با بررسی این‌که آیا مطالب کتاب تحقق اهداف کلی آموزش ریاضی دوره متوسطه و هم‌چنین اهداف جزئی حسابان را تضمین می‌کند شروع کردیم سپس در مورد این‌که این کتاب به شیوه فعال تهیه و تنظیم شده است مطالبی بیان شد همچنین به این واقعیت که از حیث هنری و طراحی آموزشی مناسب است اشاره شد و البته این مقاله بیش از آن‌که یک نقد باشد یک بررسی جهت آشکارشدن گوشه‌ای از زحمات گروه مؤلفان در پیدایش اثری ماندگار در تاریخ آموزش ریاضی کشور است که خواهد توانست طبع خلاق دانش‌آموز را با دنیای ریاضی آشتی دهد.

پی‌نوشت

1. Quantitative Content Analysis
2. Involvement Index

منابع

۱. بخشعلی‌زاده، شهرناز و همکاران. (۱۳۸۷). **ریاضیات ۱**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

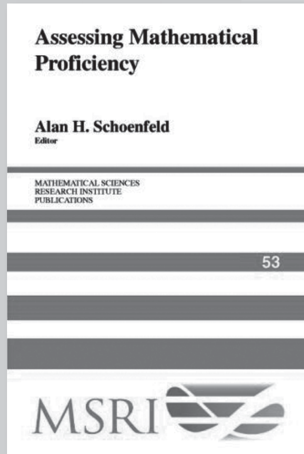
۲. ایرانمنش، علی و همکاران. (۱۳۸۹). **ریاضیات ۲**. شرکت چاپ و نشر کتب درسی ایران.

۳. بیژن‌زاده، محمدحسن، فرشادی غلامعلی و ایلخانی پوریدالله. (۱۳۸۷). **حسابان**. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۴. اصلاح پذیر، بهمن و همکاران. (۱۳۸۹). **حسابان**. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

۵. رستمی، ارسلان. (۱۳۹۰). نقد و بررسی کتب به روش ویلیام رومی. وبلاگ گروه ریاضی آذربایجان شرقی

۶. بیژن‌زاده، محمدحسن. (۱۳۸۹). جزوه درسی آموزش و یادگیری ریاضی ۲.



ارزیابی کارآمدی ریاضی

لیلا قدک‌ساز خسروشاهی
نرگس مرتاضی مهربانی

کلیدواژه‌ها: ارزیابی ریاضی، کارآمدی ریاضی

ساختار و اهداف کتاب

کتاب ارزیابی کارآمدی ریاضی، شامل مجموعه مقالاتی است که در ۶ بخش اصلی و ۲۲ فصل، دسته‌بندی شده است:

بخش ۱. ارایه تصویری کلی از ارزیابی ریاضی؛

❋ فصل۱. بحث‌ها و تنش‌های موجود در ارزیابی کارآمدی ریاضی.

❋ فصل۲. اهداف آموزش ریاضی.

❋ فصل۳. هیچ کودکی عقب نماند: زمینه‌های سیاسی و اهداف ملی.

بخش۲. دیدگاه‌هایی در مورد کارآمدی ریاضی؛

❋ فصل۴. کارآمدی ریاضی چیست؟

❋ فصل۵. کارآمدی ریاضی چیست و چگونه می‌توان آن را ارزیابی نمود؟

بخش۳. ارزیابی چه چیزی را ارزیابی می‌کند؟ بحث‌ها و مثال‌ها؛

❋ فصل۶. کارآمدی ریاضی؛ چه چیزی مهم است؟ چگونه می‌توان آن را اندازه‌گیری نمود؟

❋ فصل۷. جنبه‌های هنر طراحی ارزیابی
❋ فصل۸. کارآمدی ریاضی برای شهروندی
❋ فصل۹. یادگیری از ارزیابی
❋ فصل۱۰. وقتی ارزیابی، آموزش را هدایت می‌کند.

بخش۴. مورد جبر؛
❋ فصل۱۱. ارزیابی لایه‌های کارآمدی دانش‌آموزان در جبر مقدماتی
❋ فصل۱۲. معناسازی در جبر؛ بررسی درک و بدفهمی‌های دانش‌آموزان
❋ فصل۱۳. زمینه تکلیف و ارزیابی

بخش۵. ارزیابی چه‌چیزی را ارزیابی می‌کند؟ مورد کسر؛
❋ فصل۱۴. یادگیری از ارزیابی در مورد کسرها
❋ فصل۱۵. ارزیابی دانش ریاضی یک دانش‌آموز از طریق مصاحبه
❋ فصل۱۶. بازتاب‌هایی بر ارزیابی از طریق مصاحبه: نگاه موشکافانه به درک دانش‌آموز چه چیزی را آشکار می‌کند؟

بخش۶. اهمیت زمینه‌های اجتماعی در ارزیابی؛
❋ فصل۱۷. ارزیابی در فرانسه
❋ فصل۱۸. ارزیابی به منظور ارتقای یادگیری در ریاضی: ارزیابی تحقیقات ارزشیابی و ارزیابی بر کلی (BEAR)[۲]
❋ فصل۱۹. یادگیری ریاضی و یادگیرندگانی که زبان انگلیسی، زبان دوم آن‌هاست: بحث‌هایی در مورد زبان
❋ فصل ۲۰. فراتر از واژه‌ها در محتوای ریاضی: ارزیابی یادگیرندگانی که زبان انگلیسی، زبان دوم آن‌هاست در کلاس ریاضی
❋ فصل ۲۱. ارزیابی در دنیای واقعی: مورد شهر نیویورک
❋ فصل ۲۲. دیدگاه‌هایی راجع به ارزیابی‌های ایالتی در کالیفرنیا

محور اصلی کتاب، پرداختن به دو سؤال اساسی زیر است:
۱. کارآمدی ریاضی چیست؟
۲. چگونه می‌توان کارآمدی ریاضی را اندازه‌گیری نمود؟

به منظور بررسی وضعیت موجود و چالش‌های پیش رو در زمینهٔ ارزیابی ریاضی، هر یک از بخش‌های کتاب، رویکردهای متفاوتی اتخاذ نموده است تا بدین ترتیب، برای پاسخگویی به دو سؤال بالا، دیدی همه‌جانبه‌تر ارائه نمایند.

مروری بر محتوای کتاب

ارزیابی همیشه یکی از موضوعات بحث‌برانگیز در آموزش بوده و به‌خصوص به دلیل اهمیت جایگاه ریاضی در برنامه درسی، ارزیابی ریاضی توجه بسیاری را در بین دانش‌آموزان، والدین، معلمان، مدارس، آموزشگران و سیاستگذاران آموزشی جلب نموده است.

شونفیلد در کتاب ارزیابی کارآمدی ریاضی بیان می‌کند که افراد مختلف از ارزیابی ریاضی، اهداف متفاوتی را دنبال می‌کنند که حتی گاهی این اهداف با هم سازگار نیستند. در زیر، تعدادی از این گروه‌ها و انتظارات آن‌ها از ارزیابی ریاضی و داده‌های حاصل از آزمون‌های ریاضی به اختصار آورده شده است.

❑ **ریاضی‌دان‌ها:** به اعتقاد این گروه، ارزیابی ریاضی باید نشان دهد که دانش‌آموزان تا چه اندازه ایده‌های اساسی ریاضی را یاد گرفته‌اند و آیا واقعاً آن‌ها را یاد گرفته‌اند.

❑ **محققان آموزش ریاضی:** این گروه می‌گویند که ارزیابی ریاضی باید طیف وسیعی از محتوا و فرآیندهای ریاضی را که شامل تفکر ریاضی‌وار هستند بازتاب دهد. محققان آموزش ریاضی، طیف وسیعی از ابزارهای ارزیابی از مصاحبه و ارزیابی فردی دانش‌آموزان تا تحلیل داده‌های آزمون‌های سراسری در سطح کلان را به کار می‌گیرند.

❑ **والدین:** از دیدگاه والدین، ارزیابی ریاضی باید به آن‌ها کمک کند تا دانش و پیشرفت کودکان خود را بسنجند تا در صورت لزوم به کودکان شان کمک نمایند. به همین دلیل، والدین تمایل دارند که تحلیل‌های آماری ساده‌ای روی داده‌های ارزیابی‌های ریاضی صورت گیرد تا نقاط ضعف و قدرت کودکانشان مشخص

شود و جایگاه کودکانشان را روی یک طیف (در کلاس درس و پایهٔ تحصیلی) ببینند.

❑ **سیاستگذاران آموزشی:** به نظر این گروه، ارزیابی ریاضی باید نشان دهد که نظام آموزشی چگونه حرکت می‌کند. این گروه به محتوای ارزیابی و دانسته‌های دانش‌آموزان توجه چندانی ندارند. سیر صعودی نمرات نشان‌دهنده بهبود وضعیت نظام آموزشی است.

❑ **ناشران و برگزارکنندگان آزمون‌ها:** دغدغه‌های اصلی این گروه، کاهش هزینه‌ها، افزایش امنیت برگزاری آزمون‌ها، کم کردن دخالت انسان در تصحیح آزمون‌ها و رعایت معیارهای روان‌سنجی در آزمون ریاضی است. به همین دلیل، در بیش‌تر مواقع، آزمون‌های چند گزینه‌ای به آزمون‌های عملکردی (ساختن یک مدل ریاضی و نوشتن اثبات ریاضی) ترجیح داده می‌شوند.

❑ **معلمان:** این گروه معتقدند که ارزیابی باید در مشخص کردن دانسته‌های دانش‌آموزان هم به معلم و هم به دانش‌آموزان کمک کند. هم‌چنین، ارزیابی می‌تواند حوزه‌هایی را که در آن‌ها دانش‌آموزان به تلاش بیش‌تری نیازمندند مشخص نماید. به‌دلیل محدودیت ساعات آموزشی، ملعمان ترجیح می‌دهند تا ارزیابی را جزئی از فرآیند تدریس- یادگیری ببینند و از روش‌های غیررسمی ارزیابی مانند مشاهده، نمره‌دهی به تکالیف، تحلیل تعاملات کلاسی، آزمون‌های کلاسی، آزمون‌های کوتاه و نیز روش‌های رسمی مانند آزمون‌های سراسری و هماهنگ استفاده کنند.

❑ **سازمان‌های مسئول ارتقای حرفه‌ای نیروی انسانی:** این گروه، به معلمان کمک می‌کنند تا تدریس خود را ارتقا بخشند و درک بهتری از درک ریاضی‌دانش‌آموزان شان داشته باشند. داده‌های حاصل از ارزیابی‌ها، اطلاعاتی در اختیار این گروه قرار می‌دهد تا محتوا و حوزه‌های برنامه درسی که به توجه بیش‌تری نیاز دارند را شناسایی نمایند.

❑ **دانش‌آموزان:** ارزیابی، اطلاعات مفیدی از دانسته‌ها و ندانسته‌های دانش‌آموزان در اختیار آن‌ها قرار می‌دهد.

در یک نگاه کلی، به نظر می‌رسد گوناگونی اهداف ارزیابی، آن را امری پیچیده و گاه ناممکن می‌سازد.

علاوه بر هدف ارزیابی، یکی از مسایلی که در مورد هر ارزیابی باید به آن توجه داشت، این است که «چه چیز» قرار است ارزیابی شود؟ اگر تصور بر این است که ارزیابی ریاضی می‌خواهد میزان کارآمدی ریاضی‌دانش‌آموز را بسنجد، چیستی «کارآمدی ریاضی» یکی از دغدغه‌های اصلی ارزیابی ریاضی و البته پیش از آن برنامه درسی ریاضی خواهد بود. پاسخ‌های مختلف به این پرسش که کارآمدی ریاضی چیست و چه ریاضیاتی باید آموخته شود و یا به گفتهٔ شونفیلد این‌که آیا ریاضی یک اسم است یا یک فعل، الزامات مختلفی را بر برنامه درسی و متعاقباً ارزیابی ریاضی خواهد داشت. از طرفی کارآمدی ریاضی از دید افراد مختلف مثل ریاضی‌دانان، آموزشگران و برنامه‌ریزان متفاوت است. گرچه می‌توان ریاضیات را با عبارت‌هایی مانند «علم الگوها» یا «زبان علوم» توصیف کرد اما اکثر ریاضی‌دانان حرفه‌ای از تعریف آن خودداری می‌کنند و معتقدند که نمی توان آن را با زبان متداول تعریف نمود. همین امر باعث می‌شود تا برداشت‌های متفاوتی از ریاضیات وجود داشته باشد و به‌تبع آن تعاریف متنوعی از «کارآمدی ریاضی» ارایه گردد. به طور مثال، میلگرام (فصل چهار) ریاضی را با مشخصه‌هایی مانند دقت (تعریف دقیق تمام اصطلاحات، عمل گرها و ویژگی‌های این عمل گرها) و **مسایل خوب طرح شده** (تمام اصطلاحات آن خوب تعریف شده باشد) و **حل مسئله** معرفی می‌کند. از این دیدگاه، کارآمدی ریاضی، شامل توانایی درک، استفاده و خلق تعاریف و **حل مسئله** است. شونفیلد در فصل پنج نیز کل ریاضی را حل مسئله می‌داند و ابراز می‌دارد داشتن دانش ریاضی کافی نیست. او توانایی به کارگیری دانش را در موقعیت‌های مناسب یکی از مؤلفه‌های ضروری کارآمدی ریاضی می‌داند. شونفیلد، مولفه‌هایی مانند **دانش پایه** (رویه‌ها، تعاریف و مفاهیم)، **استراتژی‌ها**(توانایی صورت بندی کردن و بازنمایی و حل مسائل ریاضی)، فراشناخت (بازتاب بر مسیر حل مسئله، خود- نظامی و نظارت) و باورها و گرایشات را کارآمدی ریاضی معرفی می‌کند.

شورای تحقیقات ملی، پنج رشتهٔ در هم تنیدهٔ کارآمدی ریاضی را به صورت زیر معرفی می‌کند:

ــ **درک مفهومی:** درک مفاهیم، عمل گرها و روابط ریاضی

ــ **روان بودن در رویه‌ها:** مهارت در انجام رویه‌ها به طور منعطف، دقیق، کارا و مناسب

ــ **کارآمدی استراتژیکی:** توانایی صورت بندی کردن، بازنمایی و حل مسایل ریاضی

ــ **استدلال انعطاف‌پذیر:** قابلیت تفکر منطقی، بازتاب، توضیح و قضاوت

ــ **تمایلات مولّدی:** تمایل برای دیدن ریاضی به عنوان نظامی معقول، سودمند و ارزشمند، همراه با لزوم پشتکار فرد

شورای ملی معلمان ریاضی نیز به مولفه‌های ظریف‌تری به عنوان کارآمدی ریاضی اشاره می‌کند:

ــ **محتوا:** اعداد و عمل گرها، جبر، هندسه، اندازه گیری، تجزیه و تحلیل داده‌ها و احتمال

ــ **فرآیند:** حل مسئله، استدلال و اثبات، ارتباطات و اتصالات، ارتباط شفاهی و نوشتاری، استفاده از بازنمایی‌های ریاضی

وجود چنین تنوعی می‌تواند در تعیین هدف، روش و محتوای ارزیابی پیچیدگی‌هایی ایجاد نماید.

همان‌طور که رامالی در فصل دو، بیان می‌دارد زمانی می‌توان در مورد ارزیابی صحبت کرد که اهداف و فلسفهٔ آموزشی خود را در رابطه با تمام کودکان، مشخص کرده باشیم. از طرفی، تا زمانی که از دیدگاه‌هایی متفاوت به نقش ریاضی در برنامهٔ درسی بنگریم، در مورد این‌که کودکان چه باید یاد بگیرند و چگونه یاد بگیرند، به سختی به توافق خواهیم رسید. گروهی از دست‌اندر کاران آموزشی بر **ریاضیات تخصصی** تأکید می‌کنند و معتقدند هدف آموزش ریاضی، درک بحث‌های اساسی در رابطه با حقیقت، زیبایی و انسجام فکری ریاضی است. گروهی دیگر، **ریاضیات کارکردی** را مهم‌تر می‌پندارند و ابراز می‌دارند که کاربرد ریاضی در علوم، تکنولوژی و مهندسی نیازمند درک عمیقی از ریاضی، توانایی حل مسئله و استدلال کمّی است و هدف آموزش ریاضی باید ایجاد و ارتقای این توانایی‌ها باشد.

رامالی در فصل دو، بر لزوم به توافق رسیدن در مورد تعریف «سواد ریاضی»، چگونگی تعریف «مهارت‌های اساسی ریاضی» و «درک مفهومی و حل مسئله»، مشخص کردن رابطه بین این مؤلفه‌ها و نیز یافتن نقطهٔ تعادل در برنامه درسی تأکید می‌کند، بورخارد در فصل شش نیز بر لزوم شفاف‌سازی این حوزه تأکید دارد و معتقد است دست‌اندر کاران آموزشی باید مشخص نمایند آن منظور آن‌ها از سواد ریاضی، سواد در ریاضی یا سواد در استفاده از ریاضی است.

در هر صورت طبق گفتهٔ شونفیلد، آزمون‌هایی که دانش‌آموزان در آن‌ها شرکت می‌کنند، تصور آن‌ها از کارآمدی ریاضی و آن چه باید بیاموزند را شکل می‌دهد. بنابراین مشاهده و بررسی ارزیابی‌های مختلف ریاضی در جوامع مختلف می‌تواند راهی برای شناخت کارآمدی ریاضی از دید آن‌ها باشد.

مقایسهٔ آزمون‌های ریاضی در جوامع مختلف و یا مقایسهٔ آزمون‌های یک جامعه در طول زمان و بررسی تاریخی آن نشان می‌دهد که با وجود شباهت‌های بسیاری که در ارزیابی مشاهده می‌شود، مسایل دیگری که جنبهٔ آموزشی ندارند، روی آزمون‌ها تأثیرگذار هستند. انتظارات دانشگاه، بازار کار، صنعت، جامعه و سیاستمداران از مدرسه بر شکل و محتوای ارزیابی‌ها تأثیرگذار هستند. این انتظارات، بالقوه می‌توانند به ارزیابی‌های ریاضی و در واقع تعاریف موجود از کارآمدی ریاضی غنای بیش‌تری بخشند و تأثیرات مثبتی را بر برنامه درسی داشته باشند. اما در عمل وقتی یک ارزیابی قرار است پاسخ گوی اهداف مختلفی باشد و نتایج آن مبنای تصمیم‌گیری‌های مهم و متفاوتی مثل اجازهٔ ورود به دانشگاه، رتبه بندی مدارس، تخصیص بودجه به آن‌ها، ارزیابی معلم و مانند آن قرار بگیرد، به عنوان هدف غایی آموزش تلقی می‌شود. این مشکل، آموزش را تحت تأثیر قرار می‌دهد و در نتیجه به جای این‌که ارزیابی در خدمت آموزش باشد، آموزش در خدمت ارزیابی قرار می‌گیرد. به گفتهٔ شونفیلد (فصل یک) ارزیابی مانند تیغ دو لبه است. از یک سو می‌تواند در به حرکت درآمدن نظام آموزشی نقش مؤثری ایفا نماید و از سوی دیگر قادر است اثراتی منفی بر برنامه درسی و نظام آموزشی داشته باشد. اکثر مدارس برای بالا بردن امتیازهای کسب شده در آزمون‌های سراسری و هماهنگ ریاضی ترجیح می‌دهند تا بیش‌تر ساعات آموزشی را به تکرار و تمرین سؤالات آزمون‌های

ریاضی اختصاص دهند. بنابراین، اغلب معلمان، در ساعات درس‌هایی مانند علوم، تاریخ و هنر به ریاضی می‌پردازند. به خصوص اگر آزمون‌های هماهنگ بر رویه‌ها تأکید بیش‌تری داشته باشند، معلمان به جای تمرکز بر تدریس ایده‌ها و مفاهیم اساسی ریاضی بیش‌تر به رویه‌ها و حفظ کردن آن‌ها متمرکز می‌شوند. از طرف دیگر آزمون‌هایی که در سطح وسیع برگزار می‌شوند، معمولاً برای مقرون به صرفه بودن از الگوهای خاصی مثل سؤالات چند گزینه‌ای استفاده می‌کنند. در حالی که این الگوها قابلیت سنجش بسیاری از مؤلفه‌های کارآمدی ریاضی را نخواهند داشت و بنابراین آموزش در کلاس ریاضی تنها به برخی مؤلفه‌های کارآمدی ریاضی که در سطح وسیع قابل ارزیابی هستند، محدود می‌شود. تکرار و تمرین و محدود شدن به مهارت‌های مورد نیاز برای آزمون‌ها مانع بروز ایده‌های نو در معلم و دانش‌آموز می‌شود که افراد زیادی این امر را مخالف با اهداف آموزش ریاضی می‌دانند. در مجموع ارزیابی‌های هماهنگ که در جوامع مختلف با بهانه‌های متفاوت در سطح وسیع برگزار می‌شوند، محدودیت‌های خاص خود را داشته، الزامات فراوانی را بر برنامه درسی و کلاس درس وارد نموده و نمی توانند برخی اهداف آموزشی را برآورده سازند. آزمون ورود به دانشگاه فرانسه، و آزمون‌های هماهنگ ایالات متحده آمریکا که پس از جریان هیچ کودکی عقب نماند (NCLB)[۳] برای ارزیابی مدارس و معلمین برگزار می‌شوند، از این نمونه‌اند.

یکی دیگر از موضوعات مطرح در زمینهٔ ارزیابی، روش‌های ارزیابی ریاضی است که باید متناسب با اهداف ارزیابی باشد. مثلاً شونفیلد نشان می‌دهد که چگونه فهم یک دانش‌آموز از موضوع کسرها در ریاضی را می‌توان با مصاحبه ارزیابی کرد، در حالی که آزمون قلم و کاغذی قادر به برآورده کردن چنین هدفی نیست. در هر صورت، آزمون‌های چندگزینه‌ای، تشریحی، مصاحبه، پروژه‌ها و شکل‌های دیگر ارزیابی، هر یک جایگاه و کارکردهای خاص خود را داشته و نمی توان نسخه‌ای را برای بهترین شکل ارزیابی تجویز نمود. علاوه بر قالب ارزیابی، نوع سؤال‌ها و نحوهٔ بیان آن‌ها را نیز از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. در ارزیابی بعضی زمینه‌های ریاضی مانند جبر و کسرها تحقیقات بسیاری انجام شده که در طراحی آزمون‌ها می‌توان از آن‌ها استفاده نمود. به عنوان مثال می‌توان از تحقیقاتی یاد کرد که دربارهٔ چگونگی طرح سؤالات کاربردی دارای زمینه، در موضوع جبر انجام شده و تأثیراتی را که طرح یک مسئله واحد در زمینه‌های مختلف می‌تواند بر درجه سختی مسئله داشته باشد، بررسی می‌کنند. علاوه بر این، مسئله زبان نیز موضوعی اثرگذار بر نتایج ارزیابی است. وقتی دانش‌آموز به سؤال‌هایی که با زبان مادری‌اش بیان نشده پاسخ می‌دهد، ممکن است در فهم سؤال یا در نحوه نوشتن پاسخ سؤال دچار مشکل شود، نه در ریاضیات مربوط به آن، در حالی که نتایج ارزیابی، چنین مسئله‌ای را نادیده می‌گیرد. بنابراین در جوامعی که از نظر زبان و فرهنگ تنوع زیادی دارند، باید به راهکارهایی برای تولید ارزیابی‌های واقعی ریاضی اندیشید.

به طور کلی، یکی از اهداف اصلی این کتاب، نشان دادن این واقعیت است که ارزیابی ریاضی دارای ماهیت پیچیده‌ای است و عوامل گوناگونی از قبیل **وجود دیدگاه‌های متفاوت در رابطه با ریاضی و اهداف آموزش ریاضی، انتظارات متفاوت از ارزیابی ریاضی و داده‌های حاصل از آزمون‌های ریاضی، پیچیدگی جنبه‌های تفکر ریاضی و ارزیابی آن‌ها و نیز ابزارهای متفاوت ارزیابی و منفعل نبودن این ابزارها و تأثیرات خواسته و ناخواستهٔ آن‌ها بر نظام آموزشی** در ایجاد این پیچیدگی دخیل هستند.

پی‌نوشت

1. Assessing Mathematical Proficiency.(2007). Edited by Alan H. Schoenfeld. MSRI Publications- Volume 53.
2. Berkeley Evaluation and Assessment Research (BEAR)
۳. No Child Left Behind (NCLB) برای اطلاعات بیش‌تر می‌توانید به مقالهٔ «هیچ کودکی عقب نماند» در شمارهٔ ۱۰۵ همین مجله مراجعه کنید.

مروری بر فعالیت‌های خانهٔ ریاضیات کرمان

گزارش: اعظم کریمیان‌زاده
دبیر آموزش و پرورش و مدیر خانه ریاضیات کرمان
Karimianzade@gmail.com

اشاره

خانه ریاضیات کرمان در سال ۷۹ همزمان با سال جهانی ریاضیات، با پیگیری‌های دکتر مهدی رجبعلی‌پور و همسرشان سرکار خانم بتول باقری یکی از دبیران پیشکسوت ریاضی در شهر کرمان شکل گرفت. این خانه، اساسی‌ترین هدف خویش را عمومی کردن ریاضیات در سطح جامعه قرار داده است. در این خانه، تلاش می‌شود تا ذهنیت خشن و غیرملموسی که عموم مردم از ریاضیات دارند تغییر پیدا کند و تنوع و گستردگی‌های ریاضیات را تا آنجا که امکان دارد به طور عینی و شهودی به عموم مردم آموزش دهد. در این راستا، خانه ریاضیات فعالیت‌های گسترده‌ای انجام داده است. جشنواره‌های ریاضی، لیگ‌های بازی و اندیشه، کارگاه‌ها، پارک ریاضی، جشن‌های روز ریاضی، جلسات سرگذشت ریاضی و شرکت در جشنواره‌ها و نمایشگاه‌های علمی، همگی از جمله فعالیت‌هایی هستند که عموم مردم در آنها شرکت می‌کنند و به ادعای بسیاری از شرکت‌کنندگان، لذت ریاضی را پس از سال‌های جدایی از مدرسه و دانشگاه در فضای آرام و بدون اضطراب چشیده‌اند. شاید آنچه که خانه ریاضیات کرمان را ویژه می‌کند، فعالیت‌های عام‌المنفعه‌ای است که مخاطبانی از سنین مختلف را به خود جذب نموده است. در زیر به برخی از فعالیت‌های خانه ریاضیات که از سال ۸۶ به بعد صورت گرفته است، اشاره می‌شود.

کلیدواژه‌ها: عمومی کردن ریاضیات، خانه ریاضیات کرمان

❑ جشنواره‌های ریاضی

نخستین جشنواره ریاضیات با هدف آشنایی عموم با ریاضیات و کاربردهای آن در علوم مختلف، در سال ۸۶ برگزار گردید. این جشنواره شامل ۱۵ غرفه از جمله ریاضیات و طبیعت، کاشیکاری، فراکتال، هندسه، بازی‌های چوب کبریتی، ساخت اشکال فضایی، خطای دید و نرم‌افزارهای ریاضی در مساحتی نزدیک به ۶۰۰ متر مربع در پارک ریاضیات کرمان برگزار گردید. خانه ریاضیات کرمان در طول این جشنواره که به مدت ۸ روز برگزار شده بود، با استقبال بی‌نظیر دانش‌آموزان، معلمان و خانواده‌ها و مسئولان شهر کرمان روبرو شد. به‌طوری که خود مسئولان پیشنهاد برگزاری جشنواره‌های بعدی و قول مساعدت را به خانه ریاضیات دادند. در این جشنواره، استاد پرویز شهریاری و جناب آقای دکتر خردپژوه و بعضی از دبیران ریاضی استان‌های دیگر از غرفه‌های نمایشگاهی بازدید کرده و به ایراد سخنرانی پرداختند. قابل ذکر است که در حاشیه برگزاری نمایشگاه، چندین کارگاه آموزش ریاضی با موضوعات متنوع ویژه معلمان ریاضی برگزار شد.

در دهه ریاضیات سال ۸۸، دومین جشنواره ریاضیات در سطحی گسترده‌تر از جشنواره قبل در مساحتی حدود ۹۰۰ متر مربع در پارک ریاضیات با موضوعات رد پای ریاضی در سخت‌افزار، رمزنگاری و رمزگشایی، ریاضیات و معماری، ایستگاه بازی، دیوار پارادوکس، غرفه مغلطه، اریگامی و کاربرد آن، ریاضیات و طبیعت، کودک خلاقیت و ریاضیات، گرانش و نسبیت، ریاضیات و نجوم و ریاضیات و فیزیک برگزار شد. در این جشنواره، حدود ۱۵ هزار دانش‌آموز در دوره‌های مختلف تحصیلی از نمایشگاه دعوت شده بودند، استاد محمد باقری و جناب آقای دکتر رجالی از مهمانان ویژه این جشنواره بودند که در طول اقامت در کرمان، کارگاه‌هایی برای معلمان برگزار کردند. قابل ذکر است که این جشنواره‌ها با حمایت‌های ماده و معنوی استانداری کرمان، اداره کل آموزش و پرورش استان کومان، معاونت فرهنگی و هنری شهرداری کرمان، سازمان ملی جوانان، دانشگاه‌های شهید باهنر، آزاد، مرکز تحصیلات تکمیلی و مرکز بین‌المللی علوم، تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی و هم‌چنین تلاش و همت بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار گردید.

❑ کارگاه‌های پارک

خانه ریاضیات کرمان با هدف استفاده درست عموم از اوقات فراغت خود، تصمیم گرفت که در طول تابستان، جمعه شب‌ها در پارک ریاضیات شهر کرمان کارگاه‌های سرگرمی برگزار نماید. برگزاری این کارگاه در محل پارک سبب شد تا پرداختن به مسایل و معماهای ریاضی و به تبع آن پرورش نیروی تفکر و استدلال، برای افراد به تفریح و سرگرمی تبدیل گردد. هم‌چنین در حاشیه برگزاری هر کارگاه، کتاب‌های ریاضیات مرتبط با موضوع کارگاه و نیز برخی دستورالعمل‌های ترسیم یا ساخت برخی اشکال هندسی و کار کردن با آنها در معرض نمایش قرار داده شد تا افراد با تهیه این کتاب‌ها و دستورالعمل‌ها با مفاهیم طرح شده در کارگاه بیشتر آشنا شده و زمینه‌های پیگیری دقیق‌تر آن مسایل برایشان فراهم شود.

❑ لیگ بازی و اندیشه

لیگ بازی و اندیشه مسابقه‌ای است که به ابتکار خانه ریاضیات جهت پرورش قدرت ابتکار، خلاقیت و تفکر عموم مردم طراحی شده است و شرکت در آن، محدودیت سنی ندارد. این مسابقه برای اولین بار در دهه ریاضی سال ۸۷ (دهه اول آبان ماه) توسط خانه ریاضیات

کرمان با شرکت ۷۳ تیم سه نفره برگزار گردید. این مسابقه دارای سه تکلیف عملی بود. اول این‌که شرکت‌کنندگان بایستی با ۱۰۰ عدد نیِ نوشابه، بلندترین برج ممکن را می‌ساختند. دوم این‌که با مقداری کاغذ و روزنامه، نایلون، بادکنک، یک سبد مخروطی کوچک، کش و یک تخم‌مرغ، بایستی وسیله‌ای می‌ساختند که پس از انداختن آن از ارتفاع ۱۵ متری، تخم‌مرغ سالم بماند. آخرین تکلیف مسابقه رمز نگاری بود، به‌طوری که یکی از اعضای تیم با چشم بسته داخل زمینی که پر از موانع و بطری‌های آب بود قرار می‌گرفت. نفر دیگر هم در بیرون زمین با یک سوت معمولی، فرد داخل زمین را طوری هدایت می‌کرد که بتواند بطری و قیف را پیدا کرده و در آنها آب بریزد. بسته به میزان جمع‌اوری آب در داخل بطری، به تیم‌ها امتیاز داده می‌شد. این مسابقه در نوروز سال ۸۸ با حمایت سازمان میراث فرهنگی برای مهمانان نوروزی نیز برگزار گردید.

❑ برگزاری لیگ بازی‌های منصفانه در بعضی از مدارس کرمان

خانه ریاضیات کرمان به منظور استفاده بهینه دانش‌آموزان از اوقات فراغت و ترغیب آنها به فکر کردن، لیگ‌های بازی منصفانه را در بعضی از مدارس برگزار می‌نماید. در این مسابقات که در قالب گروه‌های سه نفری هستند، ۳ تا ۵ بازی به دانش‌آموزان داده می‌شود و به تیم‌ها بین ۳۰ دقیقه تا ۱ ساعت فرصت داده می‌شود که به بازی‌ها و استراتژی آنها فکر کنند و سپس گروه‌ها به رقابت با هم در مسابقه می‌پردازند.

❑ برگزاری کارگاه‌های بازی و آموزشی در پرورشگاه صنعتی کرمان

یکی دیگر از فعالیت‌های خانه ریاضیات حضور در پرورشگاه‌ها و برگزاری کارگاه و کلاس‌های آموزشی در این مراکز است.

❑ کارگاه‌های ریاضی ویژه دبیران ریاضی

خانه ریاضیات تاکنون بیش از ۲۰ کارگاه علمی و آموزشی برای معلمان ریاضی برگزار کرده است. از جمله این کارگاه‌ها می‌توان به کارگاه مدل‌سازی توسط دکتر اسلامی، آمار توسط دکتر رجالی، ساعت‌های آفتابی توسط استاد محمدباقری، آموزش ریاضی به کودکان توسط خانم مهرا جلیلی، خلاقیت توسط خانم نسرین اسدی، تشابه و مبنا توسط سرکار خانم هانی و کسر توسط خانم عباسی اشاره کرد.

❑ شرکت در جشنواره‌ها و کنفرانس‌ها

خانه ریاضیات در سی و نهمین کنفرانس ریاضی کشور در کرمان و در دهمین کنفرانس آموزش ریاضی در یزد اقدام به برگزاری نمایشگاه نمود. هم‌چنین، در نمایشگاه سی‌امین سال دستاوردهای انقلاب و در اولین و دومین جشنواره توانمندی‌های سازمان‌های مردم نهاد استان کرمان در سال‌های ۸۸ و ۹۰ و اولین جشنواره کودک و نوجوان در شهر رمان، حضوری فعال داشته است. خانه ریاضیات کرمان در هر دو دوره جشنواره توانمندی‌های سازمان‌های مردم نهاد، به عنوان سمن برگزیده انتخاب و مورد تشویق استاندار کرمان قرار گرفت.

❑ مسابقات تورنمنت شهرها

خانه ریاضیات کرمان از سال ۸۷ تصمیم به برگزاری مسابقه تورنمنت شهرها در کرمان نمود. در این مسابقه، دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان در قالب گروه‌های سه نفری به رقابت می‌پردازند. سؤالات مرحله اول این مسابقه توسط خانه ریاضیات طراحی می‌شود و سپس برگزیدگان در مرحله دوم این مسابقات که سؤالات آن توسط نهادی مربوط به ریاضی در کشور روسیه طراحی شده، شرکت می‌کنند. خانه ریاضیات برگه‌های تیم‌های برگزیده را

پس از تصحیح ترجمه و به روسیه می‌فرستد. در پایان، دانش‌آموزان مستعد برای شرکت در مرحله نهایی به روسیه دعوت می‌شوند. در تابستان سال ۸۸ دو تیم سه نفری از خانه ریاضیات کرمان به روسیه دعوت شدند.

❑ جشن روز ریاضی و بزرگداشت خیام

خانه ریاضیات کرمان هر ساله در روز ۲۸ اردیبهشت (روز ریاضی) جشن روز ریاضی وبزرگداشت خیام را برگزار می‌نماید. اولین جشن روز ریاضی در اردیبهشت سال ۸۷ با سخنرانی خانم دکتر کهن با موضوع خیام در ادبیات فارسی و سخنرانی آقای دکتر رجبعلی‌پور با موضوع نقش خیام در ریاضیات و سخنرانی آقای دکتر محمودیان برگزار گردید. دومین جشن روز ریاضی و بزرگداشت خیام در سال ۱۳۸۸، با سخنرانی دکتر مهدی رجبعلی‌پور و دکتر جوادپور از دانشگاه شهید باهنر، دکتر شرف‌الدین عضو هیات علمی دانشگاه هرمزگان و دکتر بروجردیان از دانشگاه امیرکبیر برگزار شد. هم‌چنین در جشن روز ریاضی سال ۹۰، آقای دکتر رجبعلی‌پور یک سخنرانی پیرامون خیام و کارهای علمی او ایراد نمودند. و سپس، یک مستند در رابطه با خیام و نقش او در ریاضیات، موسیقی، نجوم و ادبیات پخش شد

و در انتها آقای آشناب، برنده مدال نقره مسابقات ریاضی دانشجویی به ایراد یک سخنرانی با موضوع «ریاضیات رابطه‌ای و ریاضیات ابزاری» پرداختند.

❑ سخن‌رانی و جلسات سرگذشت ریاضی

خانه ریاضیات کرمان به منظور آشنایی عموم با علم ریاضی، جلساتی به نام سرگذشت ریاضیات را برگزار می‌کند. این جلسات در فضای بسیار صمیمی با حضور دانش‌آموزان، دانشجویان، دبیران و همه علاقه‌مندان به ریاضی صورت می‌گیرد. موضوعات مورد بحث در این جلسات به گونه‌ای انتخاب می‌شود که همه شرکت کنندگان بتوانند

از آن بهره بگیرند. مثلاً بعضی از آنها بیان خاطرات اساتید و پرسش و پاسخ است که بسیار مورد استقبال دانش‌آموزان و دانشجویان واقع می‌شود. بسیاری از این جلسات توسط دکتر رجبعلی‌پور با موضوع تاریخ ریاضیات برگزار شده است. هم‌چنین دکتر اسفندیار اسلامی، دکتر سالمی، دکتر جوادپور، دکتر مومنایی، دکتر یعقوبی، دکتر بهرام‌پور، دکتر محسنی مقدم و خانم دکتر تاتا از دانشگاه شهید باهنر کرمان و دکتر علی رجالی از دانشگاه صنعتی اصفهان، خانم دکتر گویا از دانشگاه شهید بهشتی، خانم دکتر اقلیدس از دانشگاه صنعتی شریف، دکتر بامداد یاحقی از مرکز تحقیقات فیزیک نظری

و ریاضیات، پروفسور هوشیار نوشین استاد ممتاز دانشگاه ساری گیلفورد انگلستان، دکتر یونس ایپکچی استاد شیمی آلی دانشگاه گیسن آلمان و دکتر اعتمادی از دانشگاه ایلینویز شیکاگو در جلسات سرگذشت ریاضیات سخنرانی نموده‌اند.

❑ کسب مقام دوم در اولین مسابقه ملی طراحی و ساخت اسباب‌بازی

یک گروه ۵ نفری دانش‌آموزی خانه ریاضیات که علاقه‌مند به موضوع نظریه بازی‌ها بودند، موفق شدند که در تیر ماه سال ۸۹ در اولین مسابقه ملی طراحی و ساخت اسباب‌بازی در دانشگاه صنعتی شریف شرکت نموده و با ساخت بازی زیک زاک، در دسته اسباب‌بازی‌های فکری، رتبه دوم کشوری را کسب نمایند.

❑ دهمین سالگرد تأسیس خانه ریاضیات به همراه تجلیل از برندگان مسابقات خانه ریاضیات

در اسفند سال ۸۹، به مناسبت دهمین سالگرد تأسیس خانه ریاضیات، مراسمی با حضور مدیران خانه ریاضیات کرمان از زمان تأسیس تاکنون، اساتید دانشگاه، دانشجویان و دانش‌آموزان برگزار گردید. در این مراسم، کلیپ‌هایی از فعالیت‌های خانه ریاضیات پخش شد و گزارش عملکرد خانه توسط مدیر خانه ریاضیات به اطلاع حضار رسانده شد. هم‌چنین در این مراسم، از دانش‌آموزان برگزیده مسابقات و اعضای کمیته علمی خانه ریاضیات کرمان تجلیل به عمل آمد. در انتهای مراسم، اعضای خانه ریاضیات در یک مهمانی صمیمانه در منزل دکتر مهدی رجبعلی‌پور حضور پیدا کردند.

❑ بازدید دانشگاه‌ها و مدارس از خانه ریاضیات

بخش نمایشگاهی خانه ریاضیات کرمان تاکنون میزبان بسیاری از دانش‌آموزان مدارس شهرستان‌های استان کرمان بوده است. هم‌چنین، دانشجویان رشته ریاضی دانشگاه‌های شیراز، ولیعصر رفسنجان و شهید باهنر کرمان نیز از خانه ریاضیات بازدید به عمل آورده‌اند.

❑ کارگاه‌های آموزش مفاهیم ریاضی ویژه دانش‌آموزان دبستانی و راهنمایی تحصیلی

خانه ریاضیات کرمان از تابستان سال ۸۹ و ۹۰، به دلیل اهمیت مفاهیم ابتدایی ریاضی، تمرکز خود را بر روی دانش‌آموزان دبستانی و راهنمایی قرار داده است. در این راستا، دوره‌های ۱۴ جلسه‌ای که به صورت کارگاه برگزار می‌شوند، برای دانش‌آموزان دوره‌های دبستانی و راهنمایی برگزار نموده است. از جمله کارگاه‌های برگزار شده برای دانش‌آموزان دوره ابتدایی، کارگاه آموزش مفهوم کسر، ضرب و تقسیم، شمارش، اندازه‌گیری و مدل‌سازی بوده است. کارگاه‌های برگزار شده برای دانش‌آموزان راهنمایی نیز کارگاه مبنا، اعداد، عبارت‌های جبری و معادله خط با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا و هندسه بوده است.

❑ کارگاه‌های حل مسئله دوره‌های راهنمایی و دبیرستان

دوره‌های حل مسئله خانه ریاضیات طی ۷ جلسه سه ساعتی برگزار می‌شوند. در ابتدای هر جلسه، با قرعه‌کشی دانش‌آموزان به گروه‌های سه نفری تقسیم می‌شوند و پس از گروه‌بندی، ۶ تا ۱۰

مسئله که دارای سطوح دشواری متفاوتی هستند به دانش‌آموزان داده می‌شود. دانش‌آموزان ۴۵ دقیقه به‌طور انفرادی روی مسائل فکر می‌کنند و در ۴۵ دقیقه بعدی، می‌توانند با اعضای گروه خود بحث و تبادل نظر داشته باشند. در ساعت بعد، مسائل در کلاس به بحث گذاشته می‌شوند و هر گروه، راه‌حل خود را برای سایر گروه‌ها توضیح می‌دهد. در انتهای هر جلسه، یک گروه به عنوان گروه برتر شناخته می‌شود.

گزارش
سی‌وپنجمین کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی

۱۰ تا ۱۵ جولای ۲۰۱۱

گزارش: ابوالفضل رفیع پورگتابی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان

اشاره

سی‌وپنجمین کنفرانس سالانه روان‌شناسی آموزش ریاضی[۱] از ۱۰ تا ۱۵ جولای در دانشگاه فنی خاورمیانه[۲] در شهر آنکارا کشور ترکیه برگزار شد. این دانشگاه ملی است و به ادعای برگزارکنندگان، بهترین رتبه را در بین دانشگاه‌های کشور ترکیه داراست. رتبه بین‌المللی این دانشگاه در سال ۲۰۱۰ بر طبق طبقه‌بندی تایمز[۳]، ۱۸۵ بوده است. آنکارا دومین شهر بزرگ ترکیه پس از استامبول است. جمعیت فعلی شهر آنکارا حدود ۴ میلیون نفر است. این شهر پس از جنگ جهانی اول و در سال ۱۹۲۳ توسط کمال آتاتورک به عنوان پایتخت کشور ترکیه انتخاب شد.

یکشنبه ۱۰ جولای

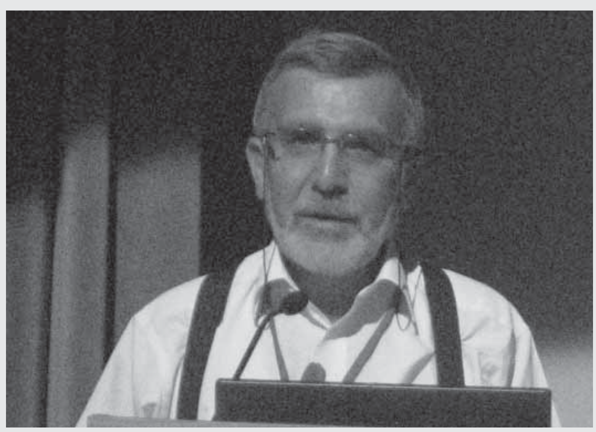
برنامه افتتاحیه کنفرانس عصر روز یکشنبه ۱۰ جولای با خوش‌آمدگویی و سخنرانی کوتاه رییس دانشگاه فنی خاورمیانه شروع شد. در ادامه، رییس انجمن بین‌المللی روان شناسی آموزش ریاضی، جو فیلیپ ماتئوس[۴] ضمن خوش‌آمد گویی در مورد مضمون اصلی کنفرانس به‌طور مختصر صحبت کرد. تمرکز اصلی کنفرانس امسال **توسعه تفکر ریاضی** بود. او صحبت‌های خود را این‌گونه آغاز کرد که «توانایی استفاده از تفکر ریاضی برای حل انواع مسایل یکی از اهداف اساسی تدریس ریاضی بوده است.» او به عادی شدن فرآیند تفکر ریاضی در نزد بسیاری از افراد جامعه

رئیس انجمن بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی

اشاره نمود و بیان کرد که این فرآیند چنان عادی شده است که بسیاری از افراد، استفاده از تفکر ریاضی را برای حل مسایل، مانند نفس کشیدن طبیعی می‌پندارند. ماتئوس همانند پاول هالموس، تفکر ریاضی را «قلب ریاضی» معرفی کرد و معتقد بود که همه افراد درگیر در آموزش ریاضی باید به اهمیت توسعه تفکر ریاضی واقف باشند و آن را به عنوان یکی از اهداف اصلی آموزش مدرسه‌ای در نظر بگیرند. در پایان، او اظهار امیدواری کرد که در کنفرانس امسال، گام بلندی در راستای توسعه تفکر ریاضی برداشته شود.

پس از سخنرانی رییس انجمن بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی، بهیه اُبوز[۵] به عنوان دبیر کنفرانس، در مورد نحوه میزبانی ترکیه برای این کنفرانس توضیحاتی ارایه کرد.

پس از این‌که صحبت‌های دبیر کنفرانس به پایان رسید طبق اساسنامه این انجمن که همیشه سخنران افتتاحیه فردی خارج از دیسیپلین آموزش ریاضی است. اولین سخنرانی عمومی علی


علی دوقانک سوی: سخنران مدعو روز اول کنفرانس

دوقانک سوی[۶] دانشیار ریاضی از دانشکده ریاضی در دانشگاه فنی خاورمیانه سخنرانی خود را در مورد نقش حکایت[۷] به عنوان نقطه شروع تدریس ریاضی ارایه کرد. او در ابتدا سه مزیت استفاده از حکایت‌ها را در تدریس ریاضی برشمرد.

- استفاده از حکایت باعث می‌شود توجه دانش‌آموزان برانگیخته شود.
- استفاده از حکایت باعث می‌شود ریاضی را در همه جا در اطراف خود مشاهده کنیم.
- استفاده از حکایت باعث توسعه تفکر انتقادی[۸] می‌شود. به این ترتیب که افراد می‌توانند با استفاده از رویکرد معرفی شده در اینجا، تقریباً اکثر مسایل را به‌طور ریاضی مورد نقد و بررسی قرار دهند.

به منظور آغاز بحث در مورد حکایت‌ها، سخنران جلسه، ملانصرالدین را به عنوان یک شخصیت مشهور ترکیه که در قرن ۱۴ در آناتولی می‌زیسته معرفی نمود. شخصیت بذله‌گویی دیگری که در بین مردم ترکیه مشهور است، تمال[۹] نام دارد.

در زبان ترکی واژه تمال معادل واژه پایه و اساس[۱۰] در انگلیسی است. دوقانک سوی سخنرانی خود را در مورد ریاضی تمال (یا به عبارتی ریاضی پایه) با اشاره به چند حکایت ادامه داد و در نهایت به این جمع‌بندی رسید که استفاده از حکایت‌ها و لطیفه‌ها در تدریس ریاضی، اثر مثبتی بر روی فرآیند یاددهی و یادگیری دارد.

پایان بخش برنامه‌های روز اول کنفرانس، موسیقی محلی و نمایش‌های آیینی کشور ترکیه بود.

دوشنبه ۱۱ جولای: روز دوم کنفرانس

سخنران مدعو روز دوم جَنِت آینلی[۱۱] از دانشگاه لنکستر[۱۲] انگلستان بود. رئیس جلسه سخنرانی عمومی در روز دوم باربارا ورسکی[۱۳] بود که در ابتدا، به معرفی سخنران پرداخت از جمله این که وی از سال ۲۰۰۶، رئیس دانشکده علوم ترتیبتی دانشگاه لنکستر است، در ابتدا معلم دوره ابتدایی بوده و سپس به عنوان محقق و آموزشگر معلمان ریاضی به مدت طولانی، در دانشگاه واریک مشغول به کار بوده است.

آینلی سخنرانی خود را با عنوان «توسعه هدفمند تفکر ریاضی: داستانی فریبنده از درختان سیب» ارایه کرد. او سخنرانی خود را با این سؤال آغاز کرد که هدف آموزش ریاضی در مدرسه چیست؟ به عقیده او این سؤالی است که در همه سندهای برنامه درسی

به چشم می‌خورد. سپس جواب‌های ممکن را برای این سؤال به صورت زیر فهرست کرد:

۱. اقتصاد ما وابسته به انسان‌هایی است که می‌توانند از مهارت‌های ریاضی خود در علوم، تکنولوژی، مهندسی، تجارت و اقتصاد استفاده نمایند.

۲. ریاضی یک حوزه از دانش منطقی است که ذهن انسان را به‌طور منطقی پرورش می‌دهد.

۳. ریاضی یک فعالیت لذت‌بخش است.

۴. ریاضی بخشی از میراث فرهنگی ماست.

۵. ریاضی برای درک جهان واقعی و برای زندگی روزمره ضروری است.

وی سپس، بر روی آخرین هدف متمرکز شد و آن را در سه سطح برنامه درسی قصد شده، برنامه درسی اجرا شده و برنامه درسی کسب شده مورد بررسی قرار داد. به گفته او، اگرچه برقراری ارتباط بین ریاضی و دنیای واقعی در سطح برنامه درسی قصد شده و در خط مشی‌های کلی به‌طور مؤکد وجود دارد، ولی این هدف به‌طور کامل در سطح کلاس‌های درس محقق نمی‌شود و توسط دانش‌آموزان کسب نمی‌گردد.

او در ادامه اشاره نمود که استفاده از مسایل زمینه‌مدار دنیای واقعی برای فعالیت‌های کلاس درس ذاتاً مسئله‌ساز[۱۴] و پیچیده است، اما با این حال، وارد کردن مسایل ریاضی زمینه‌مدار در فعالیت‌های کلاس درس مفید است. آینلی برای این منظور، دو دلیل تناقض‌گونه[۱۵] ارایه کرد:

• اول این‌که زمینه‌مدار کردن مسئله ریاضی، درک آن را برای کودکان **آسان‌تر** می‌سازد.

• دوم این‌که زمینه‌مدار کردن مسئله ریاضی، مسئله را سخت‌تر می‌سازد و محک خوبی برای این است که ببینیم آیا دانش‌آموزان مفاهیم ریاضی را به‌خوبی فهمیده‌اند یا خیر؟

بنابراین، زمینه‌مدار کردن مسایل ریاضی باعث می‌شود مسئله هم سخت‌تر و هم آسان‌تر شود. از این جهت می‌توان نقش زمینه‌مدار کردن مسایل در آموزش ریاضی را یک نقش تناقض‌گونه دانست. آینلی در پایان سخنرانی خود، چند فعالیت ریاضی را به عنوان نمونه معرفی کرد که در محیط تکنولوژی[۱۶] معرفی شده بودند.

در بازتاب به سخنرانی آینلی، تِرِزا روهانا[۱۷]، توسط وی، ضمن مرور تحلیلی سخنان آینلی، متذکر شد که کارهای تحقیقاتی ارایه شده، توسط وی، دیدگاه جدیدی در مورد ارتباط بین ریاضی و دنیای واقعی است. این دیدگاه جدید، روش‌های بدیعی را برای طراحی فعالیت‌های آموزشی، در اختیار جامعه آموزش ریاضی قرار می‌دهد. به گفته روهانا، این روش جدید از این جهت دارای اهمیت دوچندان است که می‌توان از آن، برای طراحی فعالیت‌های ریاضی در محیط‌های تکنولوژی استفاده نمود.

پس از سخنرانی عمومی، برنامه‌های روز دوم کنفرانس با ارایه گزارش‌های تحقیقی و سخنرانی‌های کوتاه ادامه یافت. لازم به ذکر است که در سنت‌های برگزاری کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی، علاوه بر سخنرانی عمومی و برگزاری میزگرد و جلسه مجمع سالیانه انجمن[۱۸] که مخاطب آن همه افراد شرکت‌کننده در کنفرانس هستند، فعالیت‌های زیر نیز وجود دارند.

❐ ارایه‌های فردی:
- گزارش‌های تحقیقی[۱۹]؛
- سخنرانی‌های کوتاه[۲۰]؛
- ارایه پوستر[۲۱].

❐ فعالیت‌های گروهی:
- مجمع‌های تحقیقاتی[۲۲]؛
- گروه‌های مباحثه[۲۳]؛
- گروه‌های کاری[۲۴].

گزارش‌های تحقیقی

گزارش‌های تحقیقی ارایه شده به کنفرانس حول یکی از حوزه‌های پژوهشی[۲۵] مطرح شده در PME ارایه می‌شوند. کمیته بین‌المللی کنفرانس، ۳۰۸ مقاله در این بخش دریافت کردند. هر مقاله توسط سه داور[۲۶] مورد بررسی قرار گرفتند. مقالاتی که توسط حداقل دو داور تأیید شده بودند، به عنوان گزارش تحقیقی پذیرفته شدند. در مجموع، ۱۶۱ مقاله مورد پذیرش قرار گرفتند. گزارش‌های تحقیقی پذیرفته شده در کنفرانس در ۱۰ جلسه ۴۰

دقیقه‌ای (برای هر مقاله) ارایه شدند. از این مدت، ۲۰ دقیقه برای سخنرانی و ۲۰ دقیقه برای پرسش و پاسخ اختصاص داده شده بود. فهرست حوزه‌های پژوهشی و تعداد مقالات پذیرفته شده در هر بخش به‌شرح زیر است:

- مساوات آموزشی (۲ مقاله)؛
- تابع (۱۳ مقاله)؛
- تفکر هندسی و فضایی(۱۹ مقاله)؛
- تصور و تجسم(۱۵ مقاله)؛
- زبان و ریاضی(۱۵ مقاله)؛
- مدل‌سازی ریاضی(۲ مقاله)؛
- حل مسئله و طرح مسئله(۱۰ مقاله)؛
- اثبات(۸ مقاله)؛
- مباحث فرهنگی- اجتماعی(۱۰ مقاله)؛
- توسعه حرفه‌ای معلمان(۳۲ مقاله)؛
- دانش معلمان(۳۴ مقاله)؛
- ریاضی برای موقیت‌های کاری(۱ مقاله)؛
- احساسات، عواطف، باور و نگرش(۲۱ مقاله)؛
- جبر و تفکر جبری(۱۸ مقاله)؛
- ارزیابی و ارزشیابی(۸ مقاله)؛
- کامپیوتر و تکنولوژی(۲۰ مقاله)؛
- مفهوم و توسعه مفهومی(۳۵ مقاله)؛
- برنامه درسی(۱۰ مقاله)؛
- تفکر ریاضی(۳۸ مقاله)؛
- اندازه‌گیری(۳ مقاله)؛
- فراشناخت(۱ مقاله)؛
- درک عدد و عملیات بر روی اعداد(۱۴ مقاله)؛
- استدلال آماری و احتمالاتی(۷ مقاله)؛

در مجموع، ۲۶۰ آموزشگر ریاضی در فرآیند داوری مقالات با کمیته بین‌المللی برگزاری کنفرانس همکاری داشتند

مجمع تحقیقی

مجمع‌های تحقیقاتی به منظور تبادل‌نظر بین آموزشگران ریاضی برنامه‌ریزی شده‌اند و در این کنفرانس، دو مجمع تحقیقاتی به شرح زیر تشکیل شد:

❐ تحقیق درباره ماهیت و کاربرد تکالیف و تجربه‌ها برای آموزش و مؤثرتر معلمان ریاضی: هماهنگ‌کننده‌ها پیترسولیوان[27] و اُریت زاسلاوسکی[28]؛

❐ طرح مسئله در یاددهی و یادگیری ریاضی؛ دستورالعملی برای تحقیق: هماهنگ‌کننده فلورانس سینگر[29].

این مجمع‌های تحقیقاتی در دو نوبت و به صورت موازی در دو زمان ۹۰ دقیقه برگزار شدند. در این جلسات، پس از ارایه سخنرانی مقدماتی، از حضار برای مشارکت در بحث‌ها دعوت می‌شد. در طول برگزاری مجمع‌های تحقیقاتی، هماهنگ‌کننده جلسه از شرکت‌کنندگان می‌خواست تا با درگیر شدن در فعالیت‌های گروهی، دانش و تجارب خود را با یکدیگر در میان بگذارند. جلسات مجمع‌های تحقیقاتی با جمع‌بندی هماهنگ‌کننده جلسه از کارهای انجام شده، به پایان رسید.

گروه مباحثه

ده پیشنهاده برای برگزاری گروه مباحثه‌ای به کمیته بین‌المللی این کنفرانس ارسال شد که هشت پیشنهاده برای درج در مجموع مقالات کنفرانس مورد پذیرش قرار گرفت. زمان اختصاص یافته به هر یک از گروه‌های مباحثه، دو جلسه ۹۰ دقیقه‌ای بود که به صورت موازی با جلسات گروه‌های کاری برگزار شدند. فهرست هشت گروه مباحثه‌ای پذیرفته شده در کنفرانس به شرح زیر است:

۱. بازی‌های کامپیوتری: امکان بالقوه جدید برای یادگیری؛
۲. تفکر تحلیلی و تفکر شهودی: فعالیت برای برقراری ارتباط؛
۳. مدل‌ها و مدل‌سازی؛
۴. آماده کردن محققان تازه کار برای انجام تحقیقات کیفی سطح بالا در آموزش ریاضی؛
۵. هویت فرهنگی دانش‌آموزان و آموزش ریاضی در عصر

جهانی شدن؛

۶. فناوری در آموزش ریاضی: سطوح و انواع مختلفی از تجربه‌ها؛

۷. چالش‌های افراد دارای نیازهای ویژه آموزشی در ریاضی مدرسه‌ای؛

۸. کارکردن با معلمان کمتر موفق.

از هماهنگ‌کننده هر یک از گروه‌های مباحثه‌ای، درخواست شد که گزارشی از فعالیت‌های انجام شده و جمع‌بندی آنها را در گروه مباحثه‌ای خود، حداکثر تا ۲۰ سپتامبر ۲۰۱۱، به منظور درج در خبرنامه انجمن بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی، ارسال نمایند.

گروه کاری

پنج پیشنهاده برای برگزاری گروه کاری به کمیته بین‌المللی کنفرانس ارسال شد که همه آنها برای درج در مجموعه مقالات کنفرانس مورد پذیرش قرار گرفتند. زمان اختصاص یافته به هر یک از گروه‌های کاری دو جلسه ۹۰ دقیقه بود که به صورت موازی با جلسات گروه‌های مباحثه‌ای برگزار شد. فهرست گروه‌های کاری پذیرفته شده در کنفرانس به شرح زیر بود:

- خلاقیت و مدل‌سازی؛
- توصیف انتقال به ریاضی دانشگاهی از دیدگاه‌های مختلف؛
- نقش حرکات[۳۰] و تجسم[۳۱] در ریاضی؛
- آموزش ریاضی و جامعه؛
- یادگیری و توسعه آموزشگران و محققان در حوزه آموزش معلمان.

هماهنگ‌کننده‌های گروه‌های کاری مانند هماهنگ‌کننده‌های گروه‌های مباحثه‌ای نیز در زمان‌های مشخص شده، پیشنهاده‌های یک صفحه‌ای و گزارش چگونگی برگزاری گروه کاری خود را به منظور درج در خبرنامه گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی ارسال نماید.

سه‌شنبه ۱۲ جولای: روز سوم کنفرانس

اولین برنامه روز سوم، سخنرانی عمومی کُنراد کرینر[۳۲] بود. عنوان سخنرانی کُنراد «معلمان به عنوان شرکاء تحقیقات آموزش ریاضی» و رییس جلسه، جو پدرو داپونته[۳۳] بود.

کرینر سخنرانی خود را از نوع خود ارزیابی[۳۴] معرفی نمود و پس از بیان مقدمه در مورد آموزش معلمان، در مورد دوگانگی[۳۵] نقش معلم در تحقیقات آموزش ریاضی صحبت کرد. این دیدگاه که معلم را به عنوان یک فرد شریک در تحقیق ببینیم یا او را به عنوان فردی که از نتایج استفاده می‌کند، در نظر بگیریم که دو دیدگاه متفاوت و متضاد است و کرینر درباره آن‌ها به بحث پرداخت. کرینر در ادامه بیان نمود که این دوگانگی، در واقع ریشه در دوگانگی بین عقلانیت تکنیکی[۳۶] و عقلانیت بازتابی[۳۷] دارد و ا براز نمود که سنت پژوهشی تحقیق در عمل[۳۸] تابع عقلانیت بازتابی است که معلم را فردی فعال در تحقیق در نظر گرفت و به عنوان یک مثال مشخص از تحقیق در عمل آموزشی، از درس پژوهی[۳۹] ژاپنی یادکرد.

کرینر پس از برشمردن مراحل انجام درس پژوهی در ژاپن، دلایل موفقیت آن را شرح داد و اشاره نمود که مطالعه ویدیویی تیمز، درس پژوهی را به جهان معرفی کرد. کرینر سخنرانی خود را با ارایه سه فرضیه جمع‌بندی کرد:

• اکثر محققانی که معلمان را به عنوان مصرف‌کنندگان یک تحقیق و به صورت منفعل در نظر می‌گیرند، دانش و نظریه‌هایشان با یکدیگر هم‌پوشانی خواهند داشت؛

• همکاری خوب و اعتماد متقابل بین محققان و معلمان، توسعه هر دوی آن‌ها را در آینده در پی خواهد داشت؛

• براساس مقالات محققان در کنفرانس‌ها و مجلات پژوهشی، از محققان انتظار می‌رود به عنوان شروع‌کنندگان یک تعامل سازنده و دو طرفه بین معلمان و محققان گام‌های جدی بردارند.

پس از سخنرانی کُنراد، رییس جلسه از ماینورا اُهتانی[۴۰] دعوت کرد تا بازتاب خود را بر کُنراد ارایه نماید. اُهتانی سخنرانی خود را با اشاره به برخی از موضوعات اساسی در مورد نقش معلمان در تحقیقات آموزش ریاضی آغاز نمود. سپس ویژگی‌های بیشتری از درس پژوهی در ژاپن را ارایه کرد و در پایان به روندهای بین‌المللی

در حوزه یادگیری معلمان و درس پژوهی اشاره نمود. او هم‌چنین خبر تشکیل انجمن جهانی درس پژوهی [41] را در سال ۲۰۰۷ اعلام کرد و گفت که ژاپن می‌تواند از سایر کشورها در حوزه درس پژوهی، مطالب جدیدی بیاموزد.

چهارشنبه ۱۳ جولای: روز چهارم کنفرانس

روز چهارم کنفرانس با جلسه میزگرد به ریاست اُلیو چاپمن[42] از کانادا آغاز شد. اعضای این میزگرد یوری لِرون[43]، کارولین مار[44]، گابریل کایسِر[45] و فِردریک لونگ[46] بودند. چاپمن با اشاره به این که تفکر ریاضی نقطه تمرکز کارهای ریاضی است، این‌گونه استدلال نمود که نقطه تمرکز یاددهی و یادگیری ریاضی در تمام سطوح نیز تفکر ریاضی است. به گفته او، لازم است که آموزشگران و معلمان ریاضی، دانش‌آموزان را در فعالیت‌هایی که تفکر ریاضی را توسعه می‌دهد، درگیر نمایند. برنامه‌های درسی ریاضی نیز روی چنین فعالیت‌هایی متمرکز شوند، به‌گونه‌ای که تفکر ریاضی تبدیل به یکی از عادت‌های ذهنی در بین دانش‌آموزان شود. چاپمن در ادامه صحبت‌های خود، چیستی تفکر را مورد بحث قرار داد و به برخی از تحقیقات انجام شده با موضوعِ توسعه تفکر ریاضی دانش‌آموزان، اشاره نمود.

سخنران بعدی میزگرد، یوری لِرون بود که در مورد رابطه بین تفکر تحلیلی[47] و تفکر شهودی[48] صحبت کرد. ریشه مباحث مطرح شده توسط او، نظریه پردازش دوگانه[49] برگرفته از حوزه روان‌شناسی شناختی بود. او شکاف بین این دو نوع تفکر را مورد بررسی قرار داد و اصولی را برای برقراری ارتباط بین این دو نوع تفکر ارایه نمود و در پایان، به این مطلب اشاره کرد که برقراری ارتباط بین تفکر تحلیلی و تفکر شهودی، می‌تواند گام مهمی در راستای توسعه تفکر ریاضی باشد. پس از لِرون، کارولین مار، سخنرانی خود را ارایه کرد. او تفکر ریاضی را معادل تفکر حل مسئله و استدلال معرفی کرد و راجع‌به یک سلسله تحقیقات طولی (به مدت ۲۳ سال) که در دانشگاه راتگِرز انجام شده بود، بحث نمود. نتایج این تحقیق طولی نشان داده‌اند که عملکرد معلمان در تشخیص انواع استدلال‌های دانش‌آموزان، در فرآیند حل مسئله، بهبود پیدا کرده است.

سخنران بعدی میزگرد، گابریل کایسِر آموزشگر ریاضی از دانشگاه هامبورگ آلمان بود که تمرکز اصلی کارهای تحقیقاتی او مدل‌سازی در آموزش ریاضی است. سخنرانی کایسِر در مورد نقش تفکر ریاضی در فرآیند مدل‌سازی بود. به گفته وی، در انجام فعالیت‌های مدل‌سازی، دانش‌آموزان با موانع متعددی روبه‌رو می‌شوند و برای غلبه بر این موانع، دانش‌آموزان می‌توانند از استراتژی‌های فراشناختی استفاده نمایند که این به نوبه خود موجب تقویت تفکر ریاضی دانش‌آموزان می‌شود.

آخرین سخنران میزگرد، فِردریک لونگ از دانشگاه بین‌المللی هنک‌کنگ بود که در مورد نقش زمینه‌های فرهنگی- اجتماعی در تفکر ریاضی صحبت کرد. کایسِر در سخنرانی خود گفت: «من آلمانی هستم، پس باید سخنرانی خود را سر وقت تمام کنم». لونگ از این گفته کیاسِر استفاده کرد و به عنوان سخنران پس از وی، از حضار پرسید: «چرا کایسِر سر وقت باید سخنرانی خود را تمام کند. آیا این مطلب وابسته به فرهنگ آلمان است». لِونگ در ادامه چنین نتیجه‌گیری کرد که محیط‌های فرهنگی و اجتماعی، بر تفکر ریاضی تأثیر زیادی دارند و به نوعی می‌توان تفکر ریاضی را یک محصول فرهنگی دانست. او در پایان، به نقش زبان و باورهای فرهنگی نیز در شکل‌گیری تفکر ریاضی پرداخت.

بعد از میزگرد و یک استراحت کوتاه، برنامه معرفی ملی ترکیه شروع شد. در این برنامه که توسط آموزشگران ریاضی از کشور ترکیه آماده شده بود، وضعیت آموزش ریاضی ترکیه در سه بخش مورد بررسی قرار گرفت. در بخش اول، در مورد برنامه دکتری رشته آموزش ریاضی در ترکیه بحث شد. در بخش دوم معرفی ملی، تحقیقات انجام شده توسط آموزشگران ریاضی ترکیه در حوزه تفکر ریاضی مرور شد و در بخش سوم، گزارشی از نحوه آموزش معلمان ریاضی برای مدارس ابتدایی و دبیرستان داده شد.

پنج‌شنبه ۱۴ جولای: روز پنجم کنفرانس

در روز پنجم کنفرانس، علاوه بر برنامه‌های علمی کنفرانس، جلسه مجمع عمومی سالانه انجمن بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی به مدت ۲ ساعت برگزار گردید.

جمعه ۱۵ جولای: روز ششم کنفرانس (آخرین روز کنفرانس)

سخنران عمومی روز آخر کنفرانس، برایان دویج[50] از کشور استرالیا بود که سخنرانی خود را در مورد استدلال‌های غیررسمی کوکان دبستانی و پیش‌دبستانی ارایه کرد. او در ابتدا، با اشاره به بیست سؤالی استین[51] که درباره استدلال ریاضی در حالت کلی مطرح شده است، روی دو سؤال آخر متمرکز شد و به آن‌ها پاسخ داد. این دو سؤال از این قرار بودند:

- آیا استدلال ریاضی ذاتی است؟
- آیا برای شروع یادگیری استدلال، مدرسه خیلی دیر است؟

او در ادامه، استدلال غیررسمی[52] را تعریف کرد و سپس مثال‌هایی از استدلال‌های غیررسمی کودکان زد. این مثال‌ها از دوره پیش‌دبستانی و دبستان انتخاب شده بودند و به حوزه ریاضی و علوم مربوط می‌شدند. در پایان سخنرانی، او در پاسخ به سؤال اول استین جواب داد که «بله، استدلال ریاضی ذاتی است.»

او دلیل این پاسخ را استدلال‌های غیررسمی کودکان پیش‌دبستانی دانست و معتقد بود که لازم است از این توانایی بالقوه کودکان پیش‌دبستانی، در آموزش مدرسه‌ای استفاده شود. در پاسخ به سؤال دوم استین، او اعتقاد داشت که» خیر، مدرسه برای شروع آموزش استدلال خیلی دیر نیست، بلکه حمایت‌های مدرسه برای توسعه توانایی استدلال دانش‌آموزان بسیار اندک است.»

در اختتامیه کنفرانس PME۳۵، فرصتی در اختیار گروهی از آموزشگران کشور تایوان قرار داده شد تا در مورد کنفرانس PME۳۶ که قرار است در سال آینده در شهر تایپه، پایتخت کشور تایوان برگزار شود، توضیحاتی بدهند و از همه، برای شرکت در این کنفرانس دعوت نمایند. سال آینده، جنوب شرق آسیا میزبان سه رویداد مهم آموزش ریاضی در سطح بین‌المللی است، کنفرانس PME۳۶ در کشور تایوان دوازدهمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME۱۲)[53] در کره جنوبی، و کنفرانس سالانه گروه تحقیقی آموزش ریاضی در استرالیا و آسیا (MERGA)[54] در سنگاپور.

پی‌نوشت

1. Psychology of Mathematics Education (PME)
2. Middle East Technical University (METU)
3. Times Higher Education
4. Joao Filipe Matos
5. Behiye Ubuz
6. Ali Doganaksoy
7. Critical Thinking
8. Critical Thinking
9. Temal
10. Basic
11. Janet Ainley
12. Leicester
13. Barbara Jaworski
14. Problematic
15. Paradoxical
16. Techonology Environment
17. Tresa Rojana
18. Annual General Meeting
19. Research Report
20. Short Oral Communication
21. Poster Presentaion
22. Research Forum
23. Discussion Group
24. Working Group
25. Research Domain
26. Blind Referee
27. Peter Sullivan
28. Orit Zaslavsky
29. Florence Mihaela Singer
30. Gesture
31. Embodiment
32. Konrad Krainer
33. Joao Pedro da Ponte
34. Self Reflection
35. Duality
36. Technical Rationality
37. Reflective Rationality
38. Action Research
39. Lesson Study
40. Minoru Ohtani
41. World Association of Lesson Study
42. Olive Chapman
43. Uri Leron
44. Carolyn Maher
45. Gabriele Kaiser
46. Frederick K.S Leung
47. Analytical Thinking
48. Intuitive Thinking
49. Dual Process Theory
50. Brian Doig
51. Steen
52. Informal Reasoning
53. The International Congress on Mathematical Education (ICME)
54. 35th Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)

خبری از دنیای ریاضی

مترجم: مریم رفیع دبیر ریاضی تهران

اکنون تأیید شده است که دو عدد اول مرسن جدید پیدا شده است و از این رو ما دو عدد تام جدید داریم. آن‌ها چهل و پنجمین و چهل و ششمین عدد تام شناخته شده‌اند. یونانیان باستان فقط چهار عدد تام می‌شناختند.

عدد تام عددی است که مجموع مقسوم علیه‌های سره‌اش برابر خودش است. برای مثال ۶=۱+۲+۳ اولین و ۲۸=۱+۲+۴+۷+۱۴ دومین و ۴۹۶ و ۸۱۲۸ و ۳۳,۵۵۰,۳۳۶ سومین و چهارمین و پنجمین عدد تام هستند (خودتان بررسی کنید!). تمام اعداد تام زوج به شکل $2^{p-1}(2^p-1)$ هستند که در آن p و عبارت داخل پرانتز اعدادی اولند و عبارت داخل پرانتز عدد اول مرسن نامیده می‌شود، لذا هرگاه یک عدد اول مرسن جدید پیدا شود، یک عدد تام جدید نیز در پی آن می‌آید. (تصادفاً تاکنون کسی عدد تام فرد نیافته است، اما اثبات هم نشده است که نمی‌تواند وجود داشته باشد). خبر اینجا منتشر شده است:

http://www.mersenne. org/m45and46.htm

در همین وب‌سایت می‌توانید اطلاعات بیشتری از اعداد اول مرسن و به‌روزرسانی‌ها مشاهده کنید: http://www.mersenne.org/

اطلاعات تخصصی‌تر و تاریخی نیز در این سایت موجود است:

http://primes.utm.edu/mersenne/index.html

(اگرچه در آخرین مشاهده، هنوز این صفحه برای نشان دادن چهل و پنجمین و چهل و ششمین عدد تام به‌روزرسانی نشده بود.)

اعداد اول مرسن تازه پیدا شده را می‌توان به شکل $2^{43,112,609}-1$ و $2^{37,156,667}-1$ بیان کرد.

(مطابق با الگوی استاندارد اعداد اول مرسن به شکل 2^p-1 که در آن p عددی اول است). این دو عدد اول مرسن دارای ۱۲,۹۷۸,۱۸۹ و ۱۱,۱۸۵,۲۷۲ رقم هستند، و دو عدد تام متناظر با آن‌ها ۲۵,۹۷۴,۳۷۸ و ۲۲,۳۷۰,۵۴۴ رقم خواهند داشت. (می‌توان حساب کرد که نوشتن در صفحه با فونت Arial سایز ۱۰ دارای ۸۴ کاراکتر در هر سطر و ۵۶ سطر در صفحه یا ۴۷۰۴ کاراکتر در صفحه است. با این نسبت، عدد تام جدید بزرگ‌تر، به ۵۵۲۲ صفحه برای چاپ شدن نیاز دارد؛ اگر این عدد که بیش از ۲۵ میلیون کاراکتر دارد، در یک سطر با فونت Arial سایز ۱۰ نوشته شود، ۵۱ کیلومتر طول خواهد داشت!

به تازگی تأیید شده است که چهل و هفتمین عدد اول مرسن پیدا شده است. این جدیدترین اما نه بزرگ‌ترین عدد اول مرسن است، اما عددی که ماه آگوست گذشته پیدا شد، بزرگ‌تر است. با این حال، این عدد هنوز بسیار بزرگ است: عدد اول مرسن که $2^{42,643,801}-1$ است عددی ۱۲,۸۳۷,۰۶۴ رقمی است و عدد تام دو برابر این تعداد رقم دارد.

این عدد در واقع در ماه آوریل پیدا شده بود، اما دو ماه طول کشید تا تأیید شود. ماجرای یافتن این عدد و پیوندهای مرتبط با آن را نیز می‌توان از طریق http://www.mersenne.org/ مشاهده کرد.

IN THE NAME OF GOD

Ministry of Education
Orgrnization of Research & Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

106 Roshd Mathematics Education Journal

آموزش ریاضی

vol.29 no.2 2012 ISSN:1606-9188

www.roshdmag.ir
e-mail: rizai@roshdmag.ir
P. O. Bax: Tehran 15875 - 6585