

آموزش ریاضی

دوره ی بیست و هفتم / شماره ی ۴ / تابستان ۱۳۸۹

فصلنامه ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

مدیر مسئول: محمد ناصری

سرمدیر: زهرا گویا

مدیر داخلی: سپیده چمن آرا

هیئت تحریریه: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی،

سپیده چمن آرا، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی،

شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و

محمد رضا فدائی

طراح گرافیک: مهدی کریم خانی

سخن سردبیر	۲	زهرا گویا
از میلاد تا میلاد، یا از بهار ۶۳ تا ...	۴	میرزا جلیلی
نمایش اعداد در مبناهای مختلف و کاربرد آن ها در رایانه	۷	اسماعیل بابلیان
جبر و احتمال به روایت تاریخ	۱۳	بیژن ظهوری زنگنه
گزیده ی من از شماره های ۹۴ و ۹۵ مجله	۱۷	شیوا زمانی
توصیه هایی برای بازنگری اهداف مجله	۱۶	مهدی رجبعلی پور / محمدرضا فدایی
$\frac{0}{9} = 1$ یک واقعیت ریاضی یا حقیقتی باور نکردنی!	۱۹	مانی رضائی
سه مرد گرسنه و راهبردهای حل مسئله	۲۴	اقتباس: سهیلا غلام آزاد
تحقیق عمل (بخش نخست)	۳۳	سپیده چمن آرا
میزگرد مجله ی رشد آموزش ریاضی	۳۸	اعضای هیئت تحریریه
چه می دانیم و چگونه می دانیم؟	۴۶	میشل آرتیک و جرمی کیل پاتریک
جای a چه خالی است؟	۵۶	امیرحسین اصغری
مروری کوتاه بر یافته های مطالعه ی تیمز پیشرفته ۲۰۰۸	۵۷	ابوالفضل رفیع پور
راه حل های درست و نادرست مسائل، هر دو متنوعند!	۶۲	عبداله حسام
بازنمایی های چندگانه در آموزش ریاضی	۷۰	حمید دافعی
نقش آشنایی با تاریخ ریاضیات در یادگیری بهتر ریاضی	۷۶	ندا مهدوی غروی
سخن گفتن با صداهای متفاوت	۷۹	استو تورنتون / ترجمه: نرگس مرتضائی مهربانی
تفکر ریاضیاتی از دیدگاه حل مسئله و حوزه ی یادگیری مفاهیم	۸۵	کارویوشی اکوبا / ترجمه: لیلا قربانلو
دنباله ی هندسی، حد مجموع	۹۱	نرگس عصارزادگان
یک مسئله و چند راه حل	۹۴	محمدکریم نائل
تجربه ی زیسته ی زندگی ام!	۹۶	مریم گویا
انتظارم از معلم خوب ریاضی	۱۰۱	الله ابراهیم پور
نامه های رسیده	۱۰۳	

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوسته و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- بی نوشت ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از اثر و مقاله ی ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله های تحقیقی یا توصیفی، واژه های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود.
- هم چنین:
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبنی نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

- نشانی دفتر مجله: تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۲۶۶.
- صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۲۷۴)
- نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸
- پایگاه اینترنتی: www.roshdmag.ir
- رایانامه: riazzi@roshdmag.ir
- تلفن پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲
- کد مدیرمسئول: ۱۰۲ ● کد دفتر مجله: ۱۱۳ ● کد امور مشترکین: ۱۱۴
- نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
- تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶-۷۷۳۳۶۶۵۵
- چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
- شمارگان: ۱۱۵۰۰

صده یا سده؟!؟

مسئله، تولید صد مجموعه است!

بالاخره، مجله‌ی ما تا صد شماره تداوم یافت و الهی که به همت همه‌ی دوستدارانش، صدساله هم بشود! در فرهنگ فارسی، صد نشانه‌ی اوج و بلوغ و تکامل و بی‌شماری و امثال آن است: الهی که صدساله شوی! صمدبار گفتم که...! صد شب و روز صبر می‌کنیم تا به بالندگی بهار برسیم - یعنی جشن سده. خلاصه گاهی حتی به جای هزار، از صدها استفاده می‌کنیم، انگار که اندازه‌ی صد، بزرگ‌تر از هزار است و هزار با آن موجودیت می‌یابد!

بگذریم و به انتشار صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی بپردازیم. صد شماره‌ای که حاصل تلاش جمعی چندین انسان علاقه‌مند، با پشتکار، مصمم و معتقد به اثربخشی این کار بوده است. اینان کاری را انجام داده‌اند که شاید اگر بعضی‌ها از بیرون به آن نگاه کنند، بگویند: این همه زحمت برای چه بوده است؟! کار نوشتن و تولید مجله مرا به یاد «مناظره‌ی سوزن و رفوگر» می‌اندازد که پروین اعتصامی، با شیوایی و زیرکی و عمق فراوان، به آن پرداخته است:

گفت سوزن با رفوگر وقت شام شب شد و آخر نشد کارت تمام روز و شب بیهوده سوزن می‌زنی هر دمی، صد زخم بر من می‌زنی اما قلم آگاه نیست که این کار، پایانی ندارد زیرا کمال، نقطه‌ی انتهایی ندارد و چیزی که مهم است، تلاش برای حرکت و پیشرفت مستمر است حتی اگر به اندازه‌ی سر سوزنی باشد؛ پیشرفتی که قلم تنها ابزار آن است و رفوگر در جواب سوزن نیز که ابزار اوست چنین پاسخ می‌دهد:

گفت در پاسخ رفوگر کای رفیق نیست هر رهپوی، از اهل طریق سوزنی، برتر ز سوزن نیستی

آگهی از جامه، از تن نیستی من نهان را بینم و تو آشکار تو یکی می‌دانی، اما من هزار نویسندگان عزیز مجله که اکثراً معلمان محترم ریاضی ایران هستند، تلاش کرده‌اند تا نهان‌های کلاس درس ریاضی را با قلم خود به تصویر بکشند و آن هزارهائی را که از واقعیت تدریس و یادگیری تجربه کرده‌اند، در اختیار دیگران بگذارند تا چشم‌های معلمان و محققان را نسبت به امر خطیر یادگیری مدرسه‌ای روشن‌تر کنند.

من درین جا هرچه سوزن می‌زنم سوزنی بر چشم روشن می‌زنم و می‌دانند که فرصت هر فرد برای ایفای نقش و پذیرش مسئولیت خویش، اندک است و بدین سبب، خسته نمی‌شوند و ادامه می‌دهند:

من چو گردم خسته، فرصت بگذرد چون گذشت، آن‌گه که بازش آورد؟ و هشدار می‌دهند که:

دیده را چون عاقبت نادیدن است به که نیکو بنگرد تا روشن است

از چه وامانم؟ چو فرصت رفتنی است چون نگویم؟ کاین حکایت گفتنی است. اما مخاطبان مجله، توقع و انتظار خود را بارها در قالب نوشته‌ها و نامه‌ها و بیان دیدگاه‌هایشان اعلام کرده‌اند که به هر قلم و قلم‌زنی نیاز ندارند، بلکه تقاضایشان این است که فرصت‌ها را - هرچند اندک - از دست ندهیم و تا می‌توانیم، از لحظه‌ها استفاده کنیم، کمبودها را با چاشنی عشق و علاقه جبران کنیم و به جای فکر کردن به نداشته‌ها، داشته‌هایمان را قدر بدانیم و از آن‌ها، در جهت اعتلای آموزش بهره بگیریم!

سوزنی باید که در دل نشکند جای جامه، بخیه اندر جان زند جهد را بسیار کن، عمر اندک است

کار را نیکو گزین، فرصت کم است کاردانان چون رفو آموختند پاره‌های وقت، بر هم دوختند عمر را باید رفو با کار کرد وقت کم را با هنر، بسیار کرد

نصایح پروین اعتصامی چراغ راهمان بوده است. همه‌ی دست‌اندرکاران مجله می‌دانستند و می‌دانند که جز دوختن پاره‌های وقت به هم و با هنرمندی جبران کمبود را کردن، چاره‌ای نیست. از همه مهم‌تر این که همه می‌دانیم که در هر جای این هستی، افراد محدود به شرایط و چارچوب‌هایی هستند که در آن‌ها قرار دارند. پس به جای عذر و بهانه آوردن، وقت را

غنیمت می‌شمیریم و ضمن تبریک انتشار صدمین شماره‌ی مجله به خوانندگان محترم که مشوقان ما در این راه طولانی بوده‌اند، با توجه به چارچوبی که دفتر انتشارات کمک‌آموزشی

برای ارتقای کمی و کیفی مجلات رشد تهیه کرده است، برنامه‌های آتی مجله را به آگاهی مخاطبان می‌رسانیم و معترفیم که:

کار را از وقت چون کردی جدا این یکی گردد تباه، آن یک هبّا

گرچه اندر دیده و دل نور نیست تا نفس باقی است، تن معذور نیست

در چارچوب پیشنهادی دفتر برای ارایه‌ی برنامه‌ی سالانه‌ی مجله بر این موارد تأکید شده است:

بحث و بررسی «شیوه‌های بهبود کیفیت مجلات رشد» از منظرهای «نیازسنجی از مخاطبان»، «برنامه‌ریزی سالانه»، «تولید محتوای فرهنگی»، «ویرایش»، «تولید فنی - هنری» «چاپ»، «توزیع»، «نظرسنجی و تحلیل محتوا» و «رویه‌های عملیاتی تولید مجلات».

در این مختصر، موضوع‌هایی را که به تولید محتوای مجله مربوط می‌شود، مورد

بررسی اجمالی قرار می‌دهم و راجع به موضوع‌هایی که مربوط به بخش فنی هستند، تنها به ارائه‌ی نظر می‌پردازم زیرا تخصصی در آن بخش‌ها ندارم و اما، نظر من درباره‌ی تولید محتوا نظرات جسته و گریخته‌ای است که در گذشته‌های معلمان ریاضی شنیده‌ام و یا نامه‌هایی که از طریق دفتر مجله دریافت کرده‌ام. در ضمن نظراتی که بیان می‌کنم، بازتاب نظرات اعضای محترم هیئت تحریریه نیز هست.

شیوه‌های بهبود کیفیت مجلات رشد

امیدواریم که با عنایت به تجربه‌ی گران‌بهای تولید صد شماره‌ی مجله، و با تجزیه و تحلیل محتوای آن‌ها، بتوانیم شیوه‌های کارآمدتر و اثربخش‌تری بیابیم تا با تأسی به آن‌ها، کیفیت مجله را به طور مستمر بهبود بخشیم. بعضی از راهکارهایی که تا به حال اندیشیده‌ایم و اثرات مثبت آن‌ها را در ارتقای مجله دیده‌ایم، از منظرهای طرح شده توسط دفتر، به شرح زیرند:

الف. نیازسنجی از مخاطبان

برای آشنایی بیشتر با نیازهای بالقوه و عینی مخاطبان، راهکارهای زیر را به کار برده‌ایم:

۱. توجه به مبانی نظری حوزه‌ی آموزش ریاضی به طور عام و حوزه‌ی آموزش معلمان ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی به طور خاص؛
۲. سفارش و تشویق نویسندگان به تألیف و ترجمه‌ی مقالات نظری حوزه‌های بالا برای پاسخ‌گویی به نیازهای شناخته شده، از طریق تحقیقات بنیادی و توسعه‌ای و کاربردی در آموزش ریاضی؛
۳. ایجاد ستون دیدگاه برای آشنایی عینی تر و ملموس تر با نظرات و نیازهای ابراز شده توسط مخاطبان؛
۴. تهیه و توزیع پرسش‌نامه برای نیازسنجی از مخاطبان در یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی و استفاده از نتایج آن در توجه به این امر خطیر؛
۵. توجه به نیازهای اعلام شده از جانب مخاطبان از طریق نامه‌های ارسالی.

ب. برنامه‌ریزی سالانه

در این بخش، برنامه‌های کلان مجله توسط

اعضای محترم هیئت تحریریه‌ی مجله بازنگری می‌شود و با توجه به نتایج بخش (الف) و در صورت لزوم، برنامه‌ی سالانه‌ی مجله جرح و تعدیل می‌گردد. در این بازنگری‌ها، یافته‌های جدید پژوهشی در حوزه‌ی آموزش ریاضی در سطح جهانی، تغییرات انجام شده در سطح ملی، ویژگی‌های جدید جمعیتی جامعه‌ی دانش آموزی در ایران و از همه مهم‌تر ارتقای سطح شعور و آگاهی و توقع و انتظارات معلمان و آموزشگران، موردنظر هستند.

پ. تولید محتوای فرهنگی

اعضای هیئت تحریریه‌ی مجله تلاش می‌کنند تا در زمینه‌ی تخصصی آموزش ریاضی که شامل آموزش معلمان، برنامه‌ی درسی، کتاب‌های درسی، ارزش‌یابی، روش‌های یاددهی - یادگیری و تدریس ریاضی است، محتوا تولید کنند و از این طریق فرهنگ جامعه‌ی آموزش ریاضی ایران و به تبع آن، فرهنگ آموزشی و مدرسه‌ای و تدریس ریاضی را ارتقا دهند. از نظر هیئت تحریریه، وظیفه‌ی مجله، تولید محتوای فرهنگی در حوزه‌ی تخصصی آموزش ریاضی است که برای آن، مأموریت یافته و مسئولیت پذیرفته است. در واقع، تحریریه‌ی مجله نسبت به حوزه‌ی فرهنگی مرتبط خود واقف است و تلاش می‌کند که تولیدات خود را بر این حوزه متمرکز کند. البته این تمرکز، مانع توجه به برنامه‌ی درسی تلفیقی و رویکردهای میان‌رشته‌ای معنادار نیست.

ت. ویرایش

با پذیرش توضیحات سردبیر توسط مسئولان محترم مجلات، سال‌هاست که کار ویرایش این مجله توسط تحریریه‌ی مجله انجام می‌شود. علت این امر این است که حوزه‌ی آموزش ریاضی به عنوان یک دیسپلین جدید، نسبتاً نوپاست و واژگان تخصصی و منابع آن، قبلاً در ادبیات آموزشی ایران حضور نداشته است. بدین سبب، با رعایت شیوه‌نامه‌ی مجلات، مسئولیت ویرایش به عهده‌ی مجله است. امیدواریم در میان مدت، بتوانیم واژگان تخصصی این رشته را به صورت کتاب، منتشر کنیم که انتشار چنان کتابی، مدیون معادل‌های انتخاب شده برای محتوای مجلات از طریق ویرایش و یکسان‌سازی معادل‌هاست.

ث. تولید فنی - هنری

با توجه به رهنمودهایی که در جلسات توجیهی یا بازآموزی دفتر کمک آموزشی دریافت کرده‌ایم، سعی نموده‌ایم که هنر را از دید ریاضی و نیازهای مخاطبان آن ببینیم. البته بسیار پیش آمده است که این زاویه‌ی دید، با انتظارات تخصصی حوزه‌ی عمومی فنی - هنری تفاوت‌های ماهوی داشته است. ولی در هر صورت، تلاش کرده‌ایم تا بدون عبور از چارچوب‌های تعیین شده، به هنر از دیدگاه ریاضی و آموزش ریاضی عنایت داشته باشیم که بیشترین مسئولیت این کار نیز، به عهده‌ی مدیر داخلی مجله است که فردی هنرمند و هنرناس و از نظر اجرایی واقع بین، کارآمد و قاعده‌مند است.

ج. چاپ

در زمینه‌ی چاپ، هیئت تحریریه‌ی مجله نقشی ندارد، زیرا این حوزه، مشخصاً اجرایی است و بستگی به سیاست‌گذاری‌های اجرایی دارد.

چ. توزیع

برای توزیع مجلات، هیئت تحریریه پیشنهاد دارد که علاوه بر ارسال مجله برای مشترکان و از طریق بخش‌های دولتی آموزش و پرورش در استان‌ها، تمهیداتی اندیشیده شود تا علاقه‌مندان، بتوانند مجله را از طریق مکان‌های دیگری مانند دکه‌های روزنامه‌فروشی تهیه نمایند.

ح. نظرسنجی و تحلیل محتوا

توضیحات مربوط به این بخش، در بند الف آمده است و تکرار آن، غیر ضروری است.

خ. رویه‌های عملیاتی تولید مجلات

این حوزه هم بیشتر مربوط به سیاست‌های اجرایی است و اگر مسئولان محترم لازم بدانند، اعضای تحریریه‌ی مجله با کمال رضایت، اگر پیشنهاد قابل اجرایی داشتند، ارائه می‌دهند.

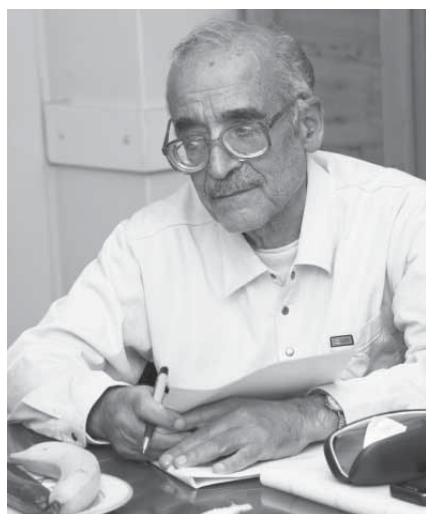
بالاخره، انتظار داریم و امید داریم که همه‌ی این تلاش‌ها، افراد زیادی را آموزش دهد و علاقه‌مندشان کند تا به تداوم مجله و تنوع محتوای آن، کمک کنند. شاید که آیندگان، تولد دوصده‌ی مجله را جشن بگیرند و همه بدانیم که گذشته، واقعاً چراغ راه آینده است.

از میلاد تا میلاد

یا از بهار ۶۳ تا ...

● میرزا جلیلی

عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی



است، در صورت امکان، از طرف سازمان کمک مالی به آن داده شود تا تعطیل نشود که البته تقاضا مورد توجه قرار نگرفت.

بعد از انقلاب با شرایط جدیدی که به وجود آمده بود؛ مجدداً موضوع کمک مالی به یکان پی گیری شد که باز به نتیجه‌ای نرسید اما مشکلی که در این زمان وزارت آموزش و پرورش با آن مواجه شد، مسئله‌ی «کاهش تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی» بود. بدین معنا که تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی در کلاس، یک باره تقلیل یافت و کلاس‌های ریاضی خلوت شد.

برای بررسی این مسئله، شورای آفت ریاضی از استادان، دبیران ریاضی و رؤسای مدارس و به کارگردانی گروه ریاضی در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف تشکیل شد، این شورا بعد از یک سال یا بیشتر، با بحث در جلسات تفکیکی خود، به این نتیجه رسید که علت آفت عبارت بوده است از:

۱. تعطیلی موقت دانشگاه‌ها و عدم وجود انگیزه برای انتخاب رشته‌ی ریاضی؛

از سال ۱۳۴۵، در «سازمان کتاب‌های درسی ایران»، مجلات غیرتخصصی تحت عنوان «پیک دانش‌آموز»، «پیک معلم» و بعدها «پیک راهنمایی»، ... منتشر و مستقیماً هم چون کتب درسی ابتدایی، در کلاس‌های درس توزیع می‌شد.

بعد از انقلاب، این مجلات با عنوان جدید «رشد دانش‌آموز» و «رشد معلم»، با آرایش و دیدگاه‌های نو کار خود را آغاز کرد که مورد استقبال مدارس قرار گرفت و توزیع این مجلات نیز در مدارس انجام می‌گیرد.

لازم به یادآوری است که تنها مجله‌ی اختصاصی ریاضی قبل از انقلاب، مجله‌ی «یکان» بود که با هزینه‌ی شخصی و مسئولیت آقای دکتر عبدالحسین مصحفی و مدیریت داخلی همسرش که رئیس مرکز تربیت معلم دختران بود منتشر می‌شد. در آن مجله، مسائل و مطالب مختلف مورد بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت، از جمله مسائل کنکور و مخاطبان مجله، دبیران و دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی بودند.

متأسفانه این مجله در سال ۱۳۵۶ با مشکلات مالی مواجه شد و در آستانه‌ی تعطیلی قرار گرفت. گروه ریاضی سازمان کتاب‌های درسی موضوع را با رئیس وقت سازمان مطرح نموده پیشنهاد کردند که چون «یکان»، مجله‌ی مفیدی برای معلمان و دانش‌آموزان



ویژه‌نامه‌ی صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی - مطالب اعضای هیئت تحریریه



در بهار ۱۳۶۳، اولین شماره‌ی مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» به بهای ۱۰۰ ریال از چاپ خارج و وارد مدارس شد. این، هم اولین شماره‌ی رشد ریاضی بود و هم نخستین مجله‌ی تخصصی از سری رشد‌های تخصصی، هم چون فیزیک، شیمی، زیست ... که بعدها به تدریج انتشار یافتند

سری رشد‌های اختصاصی دبیران، هم چون فیزیک، شیمی، زیست ... که بعدها به تدریج انتشار یافتند.

در صفحه‌ی دوم «جلد مجله»، بعد از نشانی چنین آمده بود: «مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نشریه‌ی «گروه ریاضی» دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی سازمان پژوهش است که هر ۳ ماه یک‌بار منتشر می‌شود.

هدف از انتشار این مجله در وهله‌ی اول، ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی کشور و دفتر مذکور به منظور تبادل تجارب و آراء در زمینه‌ی آموزشی ریاضی است و در مرحله‌ی بعد، طرح و بررسی مسائل بنیادی ریاضیات و مطالب جنبی و مفید درسی به منظور ارتقای سطح علمی و معلومات دبیران ریاضی دبیرستان‌هاست». این مقدمه تا چند سال در آن جا آورده می‌شد.

هم چنین، در صفحه‌ی اول نخستین شماره مطلبی تحت عنوان «پیش‌گفتار»، به قلم مسئول وقت سازمان آمده که در آن «موضوعاتی» که لازم است مورد توجه قرار بگیرد به طور مفصل مورد بحث قرار گرفته است:

دانش افزایی، آشنایی با روش‌های تدریس، معرفی وسایل کمک آموزشی و استفاده از آن‌ها در کلاس، تاریخ ریاضی (علوم)، آشنایی با معلمین موفق از طریق مصاحبه با آن‌ها، آگاهی از مسائل و پرسش‌های معلمین نمونه، طرح موضوعات مربوط به آینده‌ی رشته‌ی ریاضی، آگاهی از تصمیم‌گیری‌ها و بخشنامه‌ها، آگاهی از تغییر برنامه‌ها و برنامه‌ریزی و تألیف (تغییرات کتب درسی) و اظهارنظر درباره‌ی آن‌ها، اطلاع از تحقیقات و اخبار به روز مربوط به رشته‌ی

۲. ممنوعیت تدریس آقایان در مدارس دخترانه؛

۳. بازنشته شدن عده‌ی زیادی از دبیران قدیمی و باتجربه. این علل موجب شده بود که خود معلمان تازه‌کار در تدریس مطالب رشته‌ی ریاضی ضعف داشته و دانش‌آموزان از کلاس‌ها ناراضی باشند.

شورای آفت در پایان کار خود، چندین پیشنهاد به مسئولان داد که از جمله گفته شد لازم است یک مجله‌ی ریاضی از طرف دفتر برنامه‌ریزی و تألیف با همکاری گروه ریاضی منتشر شود تا مؤلفان و کارشناسان مستقیماً با دبیران کشور در تماس باشند و عین مفاهیم پایه‌ای کتاب‌ها به زبان ساده و باز شده در مجله مطرح شود تا مورد استفاده‌ی معلمان قرار گیرد.

در سال ۱۳۶۲، گروه ریاضی دفتر تألیف، مسئول انتشار این مجله شد.

در گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم - که از سال ۱۳۵۹ مشغول همکاری با گروه ریاضی دفتر بود - و با شناختی که نسبت به آقای دکتر علیرضا جمالی وجود داشت که فردی جدی، دقیق، کاردار و صاحب نظر و علاقه‌مند است؛ از طرف دفتر از ایشان دعوت به عمل آمد تا به عنوان «سردبیر» مجله، کار خود را آغاز کند.

خوشبختانه ایشان نیز دعوت دفتر را پذیرفته و شروع کردند و عده‌ای از علاقه‌مندان شورای برنامه‌ریزی که در آن زمان مشغول تنظیم و تألیف کتب ابتدایی و راهنمایی جدید بودند و جمعی از اعضای شورای ریاضی، به عنوان اعضای هیئت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی انتخاب شدند؛ در حقیقت، همان افراد برنامه‌ریز و مؤلف، مسئولیت کارگردانی مجله را نیز به عهده گرفتند.

در بهار ۱۳۶۳، اولین شماره‌ی مجله‌ی «رشد آموزش ریاضی» به بهای ۱۰۰ ریال از چاپ خارج و وارد مدارس شد. این، هم اولین شماره‌ی رشد ریاضی بود و هم نخستین مجله‌ی تخصصی از

ریاضی، معرفی نشریات و کتب.

قابل توجه است که در این مقدمه یا پیشگفتار نامی از دانش آموز به میان نیامده است، در حقیقت هدف از انتشار «رشد آموزش ریاضی» صرفاً بهبود تدریس دبیران و معلمان ریاضی کشور بوده و خواهد بود.

بعدها دفتر کمک آموزشی تصمیم گرفت که مجله ای نظیر رشد به نام «برهان» برای دانش آموزان منتشر کند که مطالب و محتوای برهان بیشتر موضوعات ریاضی مدرسه ای و بحث های مربوط به آن است. مجلات رشد تخصصی، در ابتدا مستقیماً از طرف دفتر برنامه ریزی و تألیف و در همان چاپ خانه هایی که کتب درسی را چاپ می کردند، حروف چینی و آماده می شد و هم چون کتب درسی ابتدایی، در مدارس توزیع می گردید.

دبیران، مخصوصاً تهرانی ها گله داشتند که مجله توی بساط روزنامه فروش ها (روی دکه)، نیست و به دست آن ها نمی رسد. ابتدا تا چندین شماره، این مجلات به وسیله ی دو نفر از اعضای علاقه مند هیئت تحریریه، به کتاب فروشی های خیابان انقلاب - روبه روی دانشگاه تهران - برده و بین کتاب فروشی ها توزیع می شد. البته مشکل توزیع مجله همیشه مطرح بوده است.

مقالات اولین شماره ی رشد آموزش ریاضی، به شرح زیر است:

- نگرشی بر فلسفه و آموزش ریاضیات (دکتر بیژن زاده)، درباره ی هندسه (حسین غیور)، گفتاری در باب منشاء و مبدا ریاضیات (دکتر محمد قاسم وحیدی)، زندگینامه ی خوارزمی، اصول مجموعه ای اعداد طبیعی و بحثی در اصل استقراء ریاضی (دکتر لالی)، میانگین های حسابی و هندسی و کاربردهایی از آن (رضا شهریاری اردبیلی)، مثال هایی در رابطه با آموزش مفهوم «گروه» در ریاضیات مقدماتی (دکتر علیرضا جمالی)، احتمال هندسی (دکتر عبدالرحمن آذری)، حل یک مسئله با استفاده از جبر بول (دکتر اسماعیل بابلیان)، یک روش مقدماتی برای اثبات دستور محاسبه ی مساحت دایره، مسائل، مسئله ی برج هانویی و شگفتانه های حسابی، آشنایی با فعالیت های گروه ریاضی دفتر تحقیقات و تألیف، گزارشی از برگزاری اولین مسابقه ی ریاضی اصفهان، معرفی کتاب، نامه ها؛ که البته در شماره های بعدی، سؤالات کنکور و بررسی آن ها یا مسائل مسابقات المپیادهای ریاضی نیز چاپ و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در برهه ای از زمان انتشار، به علت حضور آقایان؛ شادروان حسین غیور، ابراهیم دارابی، محمود نصیری، دکتر امیر خسروی که همه از علاقه مندان هندسه بودند، مطالب مربوط به هندسه در مجله بر سایر مباحث فزونی گرفته و بیشتر بود.

علاقه مندی و دیدگاه هر «سردبیر» در نوع مقالات مجله تأثیرگذار بود. مثلاً زمانی که جناب دکتر قاسم وحیدی اصل سردبیر مجله بودند، مقالات مربوط به تاریخ ریاضیات همیشه جزو مقالات مجله بود یا آقای دکتر علیرضا مدقالچی به مقالات آنالیز

علاقه مند بودند و...

یکی از سری مقالاتی که از شماره های ۵ یا ۶ در مجله دیده می شود، مقالات آقای دکتر غلامرضا دانش نارویی تحت عنوان: «نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت» بود که با استقبال خوانندگان مواجه شد.

استادان محترم دیگری که با مجله همکاری مرتب داشتند، دکتر جواد بهبودیان از دانشگاه شیراز، دکتر محمود خاتون آبادی از اصفهان، دکتر محمدرضا درفشه از دانشگاه تهران، دکتر عین الله پاشا دانشگاه تربیت معلم، زنده یاد دکتر مسعود فروزان از دانشگاه تربیت معلم بودند.

سردبیران محترم مجله در این ۲۵ سال به ترتیب عبارت بوده اند از: دکتر علیرضا جمالی، دکتر علیرضا مدقالچی، دکتر قاسم وحیدی، دکتر محمدحسن بیژن زاده، دکتر علیرضا مدقالچی (نوبت دوم) و سرکار خانم دکتر زهرا گویا که تاکنون بیش از ۵۰ شماره را منتشر کرده اند.

مدیران داخلی مجله به ترتیب: رضا شهریاری، محمدعلی بصام تبار، میرزا جلیلی، سهیلا غلام آزاد و سپیده چمن آرا بوده اند.

در رابطه با گفت وگو با معلمان موفق، مجله به ترتیب با آقایان: زنده یاد غلامرضا عسجدی، زنده یاد حسین غیور، جلیل قره گوزلو و میرزا جلیلی مصاحبه کرده است.

از نظر ارتباط مجله با دبیران در ۱۰ یا ۱۲ سال اول انتشار، خاصه سال های اول و دوم، بسیار عالی به نظر می رسید. چه شروع انتشار مجله هم زمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود. این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب ها یا مواد حذف شده یا جابه جا شده از طریق مجله به اطلاع معلمان رسانده شود. به خصوص از طرف دفتر برنامه ریزی و تألیف بخشنامه شده بود که شورای معلمان هر شهرستان تشکیل شود در آن شورا، اشکالات و مشکلات کتاب ها مطرح و همه ی جلسه ها به رشد ارسال گردد.

از جمله دبیران قدیمی که بسیار با مجله در تماس بوده و مقالات ارسال می کردند، آقایان: علی اکبر بناگر، علی اکبر جاویدمهر و فؤاد ابراهیمی بوده اند.

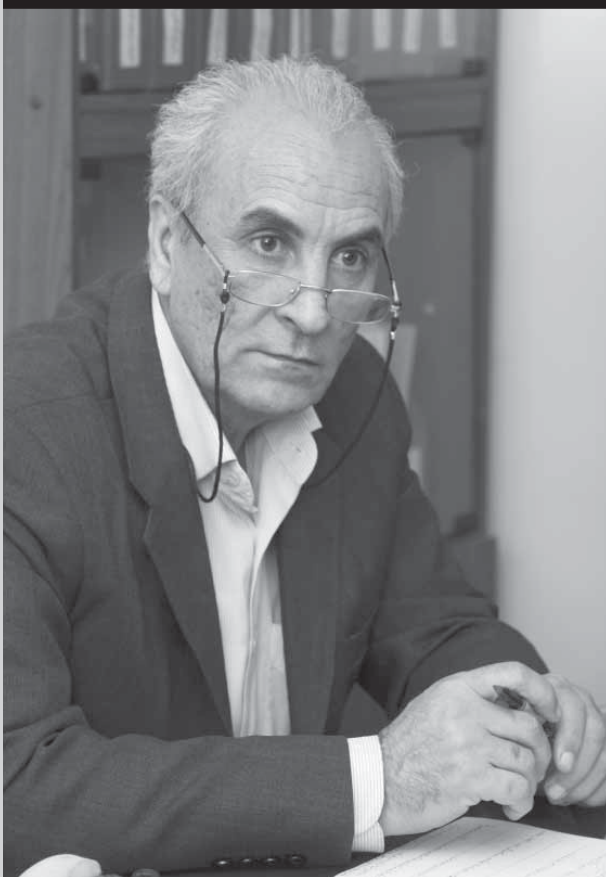
در خاتمه، این جانب به عنوان یک همکار ۳۰ ساله و با تجربه، به گروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف پیشنهاد می کنم رابطه ی گروه را با مجله ی خودشان قطع نکنند؛ به ویژه، در این زمان که تألیف کتاب های جدید ریاضی مطرح می باشد، لازم است که راجع به اهداف، روش ها و شیوه های آموزش این کتاب ها به مجله مقاله بدهند و از دبیران سراسر کشور نیز بخواهند که نظرات خود را در مجله منعکس نمایند. به عبارت دیگر، ارتباط خود را با دبیران از طریق مجله قوت بخشند.

و این، همان طور که گفته شد، هدف اصلی انتشار مجله ی «رشد آموزش ریاضی» بوده است.

نمایش اعداد در مبناهای مختلف و کاربرد آن‌ها در رایانه

اسماعیل بابلیان

استاد ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر - دانشگاه تربیت معلم



چکیده

تاکنون چنین متداول بوده است که بسط هر عدد حقیقی در مبنای یک عدد صحیح بزرگ تر از یک، نوشته شود. در این مقاله، در مورد امکان استفاده از یک عدد صحیح کوچک تر از ۱ - به عنوان مبنا بحث می شود.

ضمناً، با معرفی اعداد مختلط گاوسی بسط این اعداد را در مبناهای مختلف، به ویژه برای ذخیره در رایانه، مورد بررسی قرار می دهیم. کاربرد بسط اعداد مختلط در مبناهای مختلف نیز ذکر خواهد شد.

کلید واژه‌ها: نمایش اعداد، مبنای عددی، رایانه، اعداد مختلط گاوسی، بسط اعداد.

۱. مقدمه

مبنایی که در رایانه برای بسط و نمایش اعداد به کار می رود، مبنای ۲ است. علت انتخاب ۲ به عنوان مبنا این است که نمایش هر عدد صحیح در این مبنا، با ارقام ۰ و ۱ میسر است و از نظر فیزیکی، ایجاد دو وضعیت متفاوت برای نمایش ۰ و ۱ آسان است. البته، برای سرعت بخشیدن به تبادل اطلاعات، از مبناهای ۸ و ۱۶ نیز به دلیل ارتباط ساده و نزدیکی که با مبنای ۲ دارند، استفاده می شود.

برای نمایش یک رقم در مبنای ۲ از عنصری به اسم بیت (BIT \rightarrow Binary digiT) استفاده می شود و برای نمایش

ذخیره‌ی یک عدد صحیح، چند بایت (Byte) به کار می رود. هر بایت دارای ۸ بیت است.

۲. نمایش اعداد صحیح

به طور معمول، اگر n عددی صحیح باشد بسط درمبنای ۲ نوشته می شود و اگر n منفی باشد، کنار بسط $|n|$ نماد (-) قرار می گیرد. اما در رایانه برای نمایش (\pm) باید فکری کرد. فرض کنید اعداد صحیح قابل نمایش در یک بایت (۸ بیت) مورد نظر باشند.

یک روش این است که بیت اول را مخصوص علامت عدد بگیریم و در ۷ بیت بعدی ارقام قدر مطلق عدد را ذخیره کنیم. در این صورت، تعداد اعداد قابل ذخیره در یک بایت عبارت است از:

$$(از\ ۱۲۷\ -\ تا\ ۱۲۷\ +)\quad 2 \times 2^7 - 1 = 2^8 - 1 = 255$$

نمایش اعداد ۷۱- و ۱۰۱ را در زیر ملاحظه می کنید:

$$-71 \quad \boxed{1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1}$$

$$101 \quad \boxed{0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1}$$

همان طور که ملاحظه می کنید، در این نحوه ی نمایش ± 0 داریم!

برای جلوگیری از این مشکل، از روش مکمل دوها (Twos Complement) استفاده می شود. ابتدا به مثالی در مبنای ۱۰ توجه کنید.

تفریق اعداد در مبنای ۱۰ را می توان با استفاده از جمع به دست آورد! مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} 314 - 139 &= 314 + (1000 - 139) - 1000 \\ &= (314 + 861) - 1000 \\ &= 1175 - 1000 = 175 \end{aligned}$$

توجه کنید:

$$\begin{aligned} 1000 - 139 &= 999 - 139 + 1 \\ &= 860 + 1 = 861 \end{aligned}$$

عدد ۸۶۱ بدون هیچ زحمتی به دست می آید! عدد ۸۶۱ مکمل عدد ۱۳۹- نسبت به ۱۰۰۰ است.

معادل عملیات بالا در مبنای ۲ صورت می گیرد. مثلاً برای نمایش ۵- چنین عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} 5 &= (101)_2 \\ &\quad \text{و} \quad (11111111 - 101) + 1 \\ &= 11111010 + 1 = 11111011 \end{aligned}$$

ملاحظه کنید که

$$11111011 + 101 = 1 \quad \boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}$$

در واقع برای رقم ۱ که در محل نهم قرار می گیرد جایی وجود ندارد، لذا حذف می شود! بنابراین، برای ذخیره ی اعداد منفی، مکمل دوهای آن را ذخیره می کنیم. به این ترتیب در ۳ بیت می توان $2^3 = 8$

عدد به صورت زیر ذخیره کرد:

$$\boxed{0\ 0\ 0} \quad 0 \quad -1 \quad \boxed{1\ 1\ 1}$$

$$\boxed{0\ 0\ 1} \quad 1 \quad -2 \quad \boxed{1\ 1\ 0}$$

$$\boxed{0\ 1\ 0} \quad 2 \quad -3 \quad \boxed{1\ 0\ 1}$$

$$\boxed{0\ 1\ 1} \quad 3 \quad -4 \quad \boxed{1\ 0\ 0}$$

ملاحظه می شود که در ۳ بیت، ۸ عدد ذخیره می شود (از $2^2 - 1$ تا 2^2). به این ترتیب در ۸ بیت می توان $2^8 = 256$ عدد ذخیره کرد (از $2^7 - 1$ تا 2^7).

۱.۲ تفریق

البته نحوه ی بالا برای نمایش اعداد منفی، مبنایی برای تفریق اعداد نیز شد.

$$\begin{aligned} 7 - 2 &= 7 + (-2) \\ &= (0000111)_2 + (11111110)_2 \\ &= (00000101)_2 = 5 \end{aligned}$$

۲.۲ تقسیم

رایانه ها تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر را با استفاده از تفریق های مکرر انجام می دهند. به یک مثال در مبنای ۱۰ توجه کنید:

$$\begin{aligned} 14 \div 4 &\rightarrow \quad 14 - 4 = 10 \quad 1 \\ 10 - 4 &= 6 \quad 2 \\ 6 - 4 &= \boxed{2} \quad \boxed{3} \end{aligned}$$

خارج قسمت ۳ و باقیمانده ۲ است. در حقیقت تعداد تفریق ها، تا رسیدن به عددی کوچک تر از مقسوم علیه، با خارج قسمت برابر است. برای انجام تقسیم بالا در مبنای ۲، چنین عمل می کنیم:

$$14 = (1110)_2 \quad 4 \text{ مکمل} = (11111100)_2$$

$$+ \frac{5}{2} \rightarrow + \frac{(1 \ 0 \ 1)_{-2}}{(1 \ 1 \ 0)_{-2}} \rightarrow \frac{\begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ + 1 \ 1 \ 0 \\ \hline (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)_{-2} \end{array}}{= 7}$$

یعنی به جای ده بر یک در مبنای 10 یا 2 بر 1 در مبنای 2 ، باید عدد 11 را به دو ستون چپ اضافه کنیم.

مثال

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 2 \ 1 \\ + 3 \\ \hline 2 \ 4 \end{array} \rightarrow + \frac{\begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \end{array}}{(1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)_{-2}} = 24$$

۴. اعداد گاوسی و بسط آن‌ها در مبنای یک عدد گاوسی

عدد $z = a + ib$ را که در آن $a, b \in \mathbb{Z}$ و $i^2 = -1$ یک عدد گاوسی نامند. مجموعه‌ی اعداد گاوسی را با $\mathbb{Z}[i]$ نمایش می‌دهند. در اعداد صحیح، وقتی $b > 1$ به عنوان مبنا انتخاب می‌شود، ارقام مجاز در این مبنا اعضای مجموعه‌ی $D = \{0, 1, \dots, b-1\}$ هستند. لذا در حالت کلی، می‌توان مجموعه‌ی D را انتخاب کرد و بر حسب کاربرد لازم، محدودیت‌هایی روی آن گذاشت.

به این ترتیب تعریف زیر را داریم:

تعریف. $b \in \mathbb{Z}[i]$ با مجموعه‌ی ارقام D (که $0 \in D \subseteq \mathbb{Z}[i]$) را یک مبنای معتبر برای $\mathbb{Z}[i]$ نامند اگر هر عدد صحیح گاوسی غیر صفر z را بتوان به شکل منحصر به فردی به صورت $z = \sum_{r=0}^k \alpha_r b^r$ نوشت که k عددی حسابی است و

$\alpha_r \in D$ و در این صورت می‌نویسند $z = (\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1 \alpha_0)_b$. داویو و گروسارت (۱۹۷۸) ثابت کردند که $b = 2 + i$ با مجموعه‌ی ارقام $D = \{0, \pm 1, \pm i\}$ یک مبنای معتبر برای $\mathbb{Z}[i]$ است. گاوس نشان داد که اگر m و n نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $\{0, 1, \dots, n^2 + m^2 - 1\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه‌ی $n + mi = b$ تشکیل می‌دهد. هم‌چنین، شرط لازم برای آن که بتوان تمام اعداد صحیح گاوسی را با استفاده از اعداد حسابی به عنوان ارقام در مبنای b نمایش داد آن است که $m = \pm 1$ (زیرا قسمت موهومی توان‌های

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array} \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{10} \\ \boxed{11} = 3 \end{array}$$

۳. استفاده از مبنای منفی

سؤالی که در این جا مطرح است این است که «آیا می‌توان هر عدد صحیح را در مبنای یک عدد صحیح کوچک‌تر از -1 نوشت؟» اگر این کار امکان‌پذیر باشد، ذخیره‌ی این اعداد در رایانه نیز آسان خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه: هر عدد صحیح را می‌توان در مبنای (-2) نمایش داد. اثبات این قضیه یکی از مسائل جالب در زمینه‌ی استقرای ریاضی است. اما چرا از این مبنا در رایانه استفاده نمی‌شود؟ علت این‌را که از مبنای -2 استفاده نمی‌شود توضیح می‌دهیم. فرض کنید فقط از سه بیت (سه رقم) استفاده کنیم.

$$\begin{array}{ll} 2 = (110)_{-2} & 0 = (000)_{-2} \\ 3 = (111)_{-2} & 1 = (001)_{-2} \\ 4 = (100)_{-2} & -1 = (011)_{-2} \\ 5 = (101)_{-2} & -2 = (010)_{-2} \end{array}$$

اگر از ۴ بیت استفاده کنیم، اعداد -10 تا 5 قابل نمایش هستند! چرا؟ یک علت این موضوع را می‌توان در قضیه زیر دید. (عدم تقارن).

قضیه: اگر $i(-2)^i \alpha_i = m$ ، $\alpha_n = 1$ و $\alpha_i \in \{0, 1\}$ ، آن‌گاه اگر n زوج (فرد) باشد m مثبت (منفی) است.

علت دوم را در جمع دو عدد که در مبنای -2 نوشته شده‌اند می‌توان یافت. با توجه به این‌که

$$2 = (110)_{-2}$$

وقتی دو عدد در مبنای -2 را با هم جمع می‌کنیم

$$1 + 1 = (110)_{-2}$$

و این کار جمع کردن را مشکل می‌کند. توجه کنید:

طبیعی b ، یعنی $(n + im)^f$ مضرب m هستند). در نتیجه، تنها مبنای ممکن $n \pm i$ با ارقام $\{0, 1, \dots, n^2\}$ است که $n \in \mathbb{Z}$.

کاتایی و زاو (۱۹۷۵) ثابت کرده‌اند که تمام اعداد صحیح گاوسی غیر صفر را می‌توان به صورت منحصر به فردی در مبنای $-n + i$ با استفاده از $D = \{0, 1, \dots, n^2\}$ نوشت. مبنای $b = (-1 + i)$ با مجموعه‌ی ارقام $\{0, 1\}$ سال‌هاست که توسط دانشمندان علوم کامپیوتر مورد استفاده قرار گرفته است (کنوت، ۱۹۸۱). بسط برخی از اعداد مختلط را در این مبنا ملاحظه کنید:

$$\begin{aligned} 5 - 3i &= (101110)_{-1+i} & 2 + 3i &= (1011)_{-1+i} \\ 9 &= (111000001)_{-1+i} & -1 - i &= (110)_{-1+i} \\ 1 + 2i &= (1110101)_{-1+i} & 2 - 5i &= (11101001010)_{-1+i} \end{aligned}$$

۱.۴ محاسبه در مبناهای مختلف

ارقام مجاز در مبنای $-n + i$ عبارتند از $0, 1, \dots, n^2$. پس اگر مجموع یک ستون (در جمع دو عدد) از n^2 تجاوز کند، آن‌گاه $n^2 + 1$ یا مضربی از آن به ستون‌های سمت چپ آن منتقل می‌شود.

چون $(n-1)^2 = (n^2 - 2n + 1)$ پس سرریز $n^2 + 1$ در یک ستون به این معنی است که ارقام $(n-1)^2$ ، $2n-1$ و ۱ به سه ستون سمت چپ آن منتقل می‌شود. برای مبنای $-1 + i$ باید ارقام 0 ، 1 و 1 به سه ستون سمت چپ اضافه شوند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ 2 \ + \ 3i \qquad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ + \ (-1 \ - \ i) \rightarrow \qquad + \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ + \ 2i \qquad 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 2 \ + \ 3i \qquad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \times \ (-1 \ - \ i) \rightarrow \qquad \times \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ - \ 5i \qquad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

توجه کنید که رقم‌های ۱ و ۲ در $\{0, 1\}$ نیستند.

مثال: اگر $b = -3 + i$ آن‌گاه $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ محاسبات زیر حاصل ضرب دو عدد را حساب می‌کند:

$$(182)_{-3+i} \times (38)_{-3+i} = (13546)_{-3+i}$$

البته روش دیگری هم وجود دارد که در زیر، آن را توضیح می‌دهیم.

هر نمایش یک عدد در مبنای b را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای با متغیر b در نظر گرفت و جمع، تفریق و ضرب را بدون در نظر گرفتن انتقال‌ها در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های صوری $\mathbb{Z}[b]$ انجام داد. تا این مرحله هیچ محدودیتی برای ضرایب توان‌های b ایجاد نمی‌شود. پس از پایان محاسبات چندجمله‌ای، حاصل باید واضح شود، یعنی تمام ضرایب در مجموعه‌ی D قرار گیرند.

چندجمله‌ای $(n^2 + 1) + 2nb + b^2$ در مبنای $-n + i$ صفر است. این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مینیمم نامند که اضافه کردن هر مضرب آن به هر چندجمله‌ای از b تغییری حاصل نمی‌کند. لذا هر ضریبی که خارج از مجموعه‌ی D باشد، توسط مضربی از $b(n^2 + 1)$ واضح‌سازی می‌شود. برای مبنای $-1 + i$ داریم $n = 1$ و از $(1 \ 2 \ 2)_{-1+i}$ استفاده می‌شود. جواب مثال قبل را به این روش به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{r} 2 \ + \ 3i \qquad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ + \ (-1 \ - \ i) \rightarrow \qquad 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ + \ 2i \qquad 1 \ 1 \ 2 \ 1 \\ -1 \ -2 \ -2 \\ \hline 0 \ -1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 2 \\ \hline 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \\ -1 \ -2 \ -2 \\ \hline -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 2 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times \quad 1 \quad 8 \quad 2 \\ \quad \quad 3 \quad 8 \\ \hline 8 \quad 64 \quad 16 \\ \quad \quad 3 \quad 24 \quad 6 \\ \hline 3 \quad 32 \quad 70 \quad 16 \\ \quad \quad -1 \quad -6 \quad -10 \\ \hline 3 \quad 31 \quad 64 \quad 6 \\ \quad \quad -6 \quad -36 \quad -60 \\ \hline -3 \quad -5 \quad 4 \quad 6 \\ \quad \quad 1 \quad 6 \quad 10 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \end{array}$$

از سمت راست واضح سازی انجام می دهیم

برای مبنای $b = -3 + i$ داریم

$$(1 \ 6 \ 10)_b = b^2 + 6b + 10 = 0$$

الگوریتم واضح سازی، روشی برای نوشتن بسط یک عدد گاوسی در یک مبنا به دست می دهد.

برای نوشتن عدد گاوسی $s + it$ در مبنای $-n + i$ داریم:

$$s + it = t(-n + i) + (s + nt)$$

اما ممکن است $s + nt$ یا t به مجموعه $D = \{0, 1, \dots, n^2\}$ تعلق نداشته باشد. با عمل واضح سازی ضرایب را متعلق به D می سازیم.

مثال: عدد ۹ را در مبنای $-1 + i$ با $D = \{0, 1\}$ بنویسید.

می دانیم که $(1 \ 2 \ 2)_{-1+i} = 0$ با کم و زیاد کردن sb^r برابر

$(1 \ 2 \ 2)$ به طوری که اگر $a_r \notin D$ ، $0 \leq a_r + s(n^2 + 1) \leq n^2$

ضرایب را واضح سازی می کنیم.

۲.۴ بسط یک عدد مختلط (گاوسی یا غیرگاوسی) در مبنای مختلط

همان گونه که هر عدد حقیقی را می توان در مبنای دلخواه و صحیح $b < 1$ بسط داد، در مورد هر عدد مختلط نیز می توان چنین کرد. هر عدد مختلط را در مبنای b می توان به صورت $Z = \sum_{i=-1}^{\alpha} b^i$ نوشت که $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, n^2\}$ و به صورت زیر نشان داد:

$$z = (\alpha_k \ \alpha_{k-1} \ \dots \ \alpha_1 \ \alpha_0 \ . \ \alpha_{-1} \ \alpha_{-2} \dots)_b$$

مثلاً

$$\frac{5+i}{4} = 1 + (-1+i)^{-2} + (-1+i)^{-3} = (1/011)_{-1+i}$$

$$\frac{1}{3} = (1/\overline{4624})_{-3+i}$$

$$\sqrt{2} + i = (15/\overline{49778016\dots})_{-3+i}$$

$$\frac{1-2i}{5} = (0/\overline{001})_{-1+i} = (11/\overline{00})_{-1+i} = (111/\overline{010})_{-1+i}$$

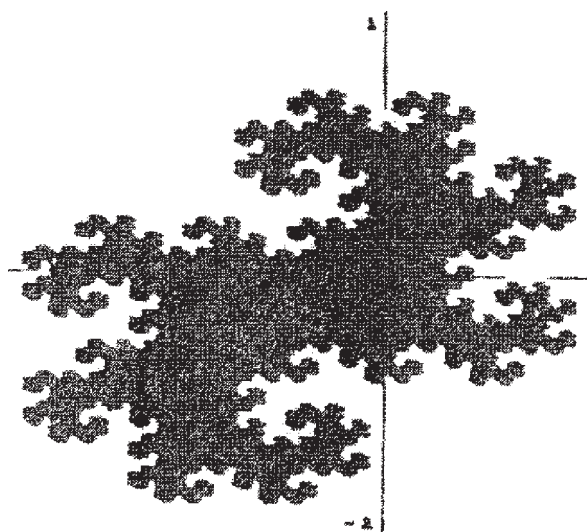
ملاحظه می شود که همانند وجود چند بسط برخی اعداد در مبنای ۲ یا ۱۰، در این جا هم یک عدد ممکن است چند بسط داشته باشد.

مشابه دستگاه اعداد حقیقی، اگر در $x + iy$ و y گویا باشند، بسط آن متناهی یا نامتناهی و متناوب است و در غیر این صورت، بسط نامتناهی و غیرمتناوب است.

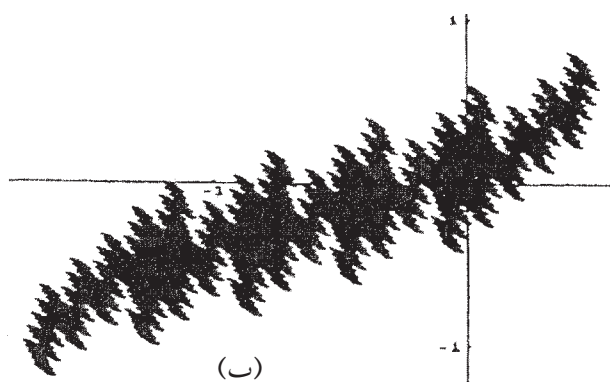
۳.۴ کاربرد در طراحی و کاشی کاری

اصولاً منظور از کاشی کاری سطح، پیدا کردن منحنی های

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline -4 \quad -8 \quad -8 \\ -4 \quad -8 \quad 1 \\ \hline 4 \quad 8 \quad 8 \\ 4 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \\ \hline -2 \quad -4 \quad -4 \\ -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline -1 \quad -2 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 2 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \quad (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)_{-1+i} = 9$$



(الف)



(ب)

منابع

1. Davio, M. Deshamps, J.P. and Grossart, G. (1978). **Complex Arithmetic. Philips M.B.L.E. Research Lab.. Report R369**, Brussels (May 1978).
2. Gilbert, W.J. (1982). Complex Numbers With Three Radix Expressions. **Canada J. Math.** 34. 1348-1355.
3. Katai, I. and Szabo, J. (1975). **Canonical Number Systems for Complex integers**. Acta. Sei. Math. (Szeqed) 37, 255-260
4. Knuth, D.E. (1981). **The Art of Computer Programming**. Vol. 2; Semi Numerical Algorithms, Addison-Wesley, Reading MA, 1981.

مسطح صفحه پرکن است. یعنی، پوشاندن تمام صفحه توسط اشکال هندسی به طوری که هم پوشانی نداشته باشند. این نقوش، دارای مرز خطی نیستند بلکه مرز فراکتالی دارند.

تعریف: به ازای هر مبنای b و مجموعه‌ی ارقام D ناحیه‌ی $T(b, D)$ را مجموعه‌ای از اعداد مختلط در نظر می‌گیریم که در مبنای b ، دارای نمایشی با قسمت صحیح صفر باشند. یعنی، $T(b, D) = \{(\alpha_0/\alpha_1\alpha_2\ldots)_b | \alpha_i \in D\}$. اگر b یک مبنای معتبر باشد، $T(b, D)$ یک مجموعه‌ی بسته با مساحت یک است که با استفاده از آن می‌توان صفحه را کاشی کاری کرد. به عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ی بالا را با تبدیلات متناظر با اعداد صحیح گاوسی انتقال دهیم، تمام صفحه بدون هم پوشانی کاشی کاری خواهد شد و نواحی فقط دارای مرز مشترک هستند. در حقیقت، اگر مجموعه‌ی $T(b, D)$ را تحت عدد گاوسی z انتقال دهیم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که حاوی تمام اعداد با قسمت صحیح عدد z است.

در شکل (الف) مجموعه‌ی $T(-1+i, \{0, 1\})$ و در شکل (ب) مجموعه‌ی $T(-2+i, \{0, 1, 2, 3\})$ را ملاحظه می‌کنید. به این ترتیب، با استفاده از رایانه و b های مختلف، می‌توان منحنی‌های زیادی تولید کرد که دارای مرز فراکتالی هستند. مثلاً اگر $b = 1 - i$ ، منحنی حاصل یک منحنی برف‌دانه (snowflake) است (گیلبرت، ۱۹۸۲).

جبر و احتمال به روایت تاریخ

● بیژن ظهوری زنگنه

استاد ریاضی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف



چکیده

سال‌ها پیش، با یکی از همکاران دانشگاهی صحبت می‌کردیم. گفت در نام کتاب «جبر و احتمال» اشتباهی رخ داده! حتماً نام این کتاب «جبر و مثلثات» یا «آمار و احتمال» بوده است زیرا این عنوان، بی‌معنی است. به او گفتم درست است که این عنوان غیرمتعارف و غریب است، ولی لحظه‌ای فکر نکرده‌اید که در پشت این نام، فلسفه‌ای وجود دارد؟ و نفس انتخاب آن، می‌خواهد که خواننده را به چالش بکشد و وادار به تفکر کند؟! سؤال این همکار، انگیزه‌ی نوشتن این مقاله شد.

در این مقاله تاریخ شکل‌گیری کتاب جبر و احتمال و فلسفه‌ی آموزش آن بیان و تبیین شده است.

کلید واژه‌ها: کتاب درسی جبر و احتمال سال سوم ریاضی، برنامه‌ی درسی، آموزش متوسطه.

کتاب جبر و احتمال و حسابان در سال سوم رشته‌ی ریاضی فیزیک تدریس می‌شوند. از سال ۱۳۷۱ و با شروع نظام جدید آموزش متوسطه، کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول و دوم، برنامه‌ریزی و به تدریج تألیف شدند و در ابتدا، با عنوان ریاضی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در چهار

در بعضی از دروس
مقدماتی احتمال، تأکید
زیادی بر روش‌های
شمارش و ترکیبیاتی
مانند ترکیب و ترتیب
می‌گردد. تجربه‌ی
تاریخی نشان داده است
که این تأکید، باعث
می‌شود که کسانی که از
این روش‌ها خوششان
نمی‌آید، علاقه‌مندی به
احتمال را هم از دست
داده‌اند



نیم سال اول تحصیلی دوره‌ی متوسطه، مورد استفاده قرار گرفتند. یعنی هم‌زمان با ورود دانش‌آموزان به هر پایه‌ی تحصیلی جدید، کتاب‌های آن پایه هم تألیف می‌شد. برای پایه‌ی سوم رشته‌ی ریاضی فیزیک، ۶ واحد ریاضی در نظر گرفته شده بود که شامل یک درس یک ساله و یک درس یک ترمی بود که درس یک ساله (با دو کتاب پشت سر هم) به حسابان اختصاص پیدا می‌کرد و در ادامه‌ی دروس ریاضی ۱ تا ۴ بود و قرار بود که ماهیت محاسبه‌ای و مدل‌سازی داشته باشد. بدین جهت، یک درس با ماهیت استدلالی و آرایه‌ی روش‌های مختلف استدلالی متناسب با استانداردهای مطرح برنامه‌ی درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه در چارچوب درس حسابان نمی‌گنجید و ظرفیت جدیدی می‌طلبید. این مفاهیم شامل استدلال استنتاجی و استقرایی، استراتژی‌های حل مسأله، جبر مجموعه‌ها، رابطه و نمودارهای هندسی آن‌ها،



نامساوی‌ها، احتمال هندسی، احتمال و اعداد مختلط بودند.

توجه به این نکته مهم است که در ابتدا، نامی که برای دروس حسابان (۱) و (۲) در نظر گرفته شده بود، ریاضی ۵ و ۶ بود و برای این درس جدید که ماهیت استدلالی داشت نیز نام ریاضی ۷ در نظر گرفته شده بود. اما پس از شور و مشورت‌های بسیار، واژه «حسابان» برای درس‌های ریاضی ۵ و ۶ و عنوان «جبر و احتمال» برای ریاضی ۷ پذیرفته شد که داستان شکل‌گیری کتاب اخیر، هدف اصلی این مقاله است. در کتاب جبر و احتمال، فصل اول به انواع استدلال از جمله استدلال‌های استقرایی و استنتاجی اختصاص یافته که مستقل از فصل‌های دیگر نیست و در واقع، ابزاری برای یادگیری و تدریس مفاهیم فصل‌های دیگر کتاب است؛ به همان ترتیبی که فصل‌های دیگر کتاب نیز، ابزاری برای تعمیق یادگیری انواع استدلال‌های استقرایی و استنتاجی است. فصل دوم کتاب مربوط به یکی از مباحث جالب و جذاب قابل طرح در سطح متوسطه است که در نظام سابق نیز این مبحث در ریاضیات جدید سال اول تدریس می‌شد. همین مبحث، ابزاری برای یاد دادن و یاد گرفتن استدلال استنتاجی و استراتژی‌های مختلف اثبات مانند برهان خلف است. ولی در کتاب ریاضیات جدید نظام سابق، این بحث بدون این که از آن به طور منسجم استفاده گردد، ارایه می‌شد و در نتیجه، ابتر باقی می‌ماند. احتمال ریاضی هم با توجه به اصول موضوع ساده‌ی آن، بهترین دستگاه برای آموزش نظام اصل موضوعی است که در آن، جبر مجموعه‌ها نقش اصلی را بازی می‌کند. بنابراین، اصول موضوع احتمال و ارتباط آن با نظریه‌ی مجموعه‌ها، به مباحث انسجام می‌دهد و مثلاً اگر احتمال را از این برنامه و کتاب حذف کنیم، ناقص می‌شود. در بخش نظریه‌ی احتمال، استفاده‌ی مکرر از استقرای ریاضی و نظریه‌ی مجموعه‌ها و با مطرح شدن احتمال هندسی و ارتباط هندسه‌ی مختصات با جبر و احتمال، وحدت ریاضی برقرار می‌شود یعنی ریاضی به صورت یک پارچه دیده می‌شود. مباحثی که ظاهراً ارتباطی با هم نداشتند در یک شکل منسجم به هم ارتباط و اتصال پیدا می‌کردند و بدین ترتیب، ارتباطات ریاضی وار که اتفاقاً، یکی از

استانداردهای مطرح آموزش ریاضی شورای ملی معلمان ریاضی بود، به بهترین نحوی برقرار می‌گشت. علاوه بر این، رویکردی که برای برنامه‌ریزی درسی این کتاب در نظر گرفته شد، برنامه‌ی درسی تلفیقی بود، بدین معنا که دو حوزه‌ی مجزای ریاضی یعنی ریاضیات پیوسته و گسسته از طریق این برنامه، به هم پیوند می‌خورد و درهم تنیده می‌شد. هم‌چنین، «جبر و احتمال» حتی بین به ظاهر دورترین حوزه‌های ریاضی نیز وحدت برقرار می‌کرد. مسلماً این نام در جای دیگری مطرح نشده و از لغات ساخته‌شده‌ی شورای برنامه‌ریزی ریاضی بین سال‌های ۱۳۷۳ تا ۱۳۷۸ است. اهمیت دیگر موضوع کتاب این بود که تلفیق ریاضی با زمینه‌های بین رشته‌ای به خصوص با محوریت احتمال، بحث اصلی ریاضیات روز است و یکی از بهترین شاهدان این ادعا، بیست و پنجمین کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی دانان است که در سال ۲۰۰۶ میلادی (۱۳۸۵)، در مادرید برگزار شد. این کنگره، ۲۰ سخنران عمومی و ۱۷۸ سخنران مدعو داشت که علت انتخاب و دعوت آن‌ها، پوشش متعادلی از موضوعات بحث‌انگیز، جذاب، به روز و رو به رشد ریاضی عنوان شده بود.

این کنگره تجلی واقعی ریاضیات مفهومی بود؛ ریاضیاتی که به شدت چهره‌ی تلفیقی و بین رشته‌ای داشت و ارتباط و اتصال شاخه‌های مختلف ریاضی در آن‌ها مشهود بود و به همین دلیل، از ریاضیات سنتی فاصله گرفته بود. در واقع ریاضیات مطرح شده در این کنگره، از ریاضیات سنتی بیشتر به منزله‌ی ابزار استفاده کرده بود، ابزارهای متداولی که زمانی هر یک مفهوم عمیقی در ریاضی بوده‌اند ولی در حال حاضر، ریاضی‌دان‌ها از آن‌ها، به خوبی، به عنوان ابزاری عادی اما عمیقاً مهم و مفید برای خلق مفاهیم پیچیده و تلفیقی استفاده می‌کنند. علاوه بر این، اکثر جایزه‌های مهم ریاضی در سال ۲۰۰۶، به کسانی تعلق گرفت که در احتمال و فرایندهای تصادفی تحقیق کرده بودند که ماهیتی تلفیقی و بین رشته‌ای داشت.

ویژگی‌های برنامه‌ی درسی جبر و احتمال

در بعضی از دروس مقدماتی احتمال، تأکید زیادی بر روش‌های شمارش و ترکیباتی مانند ترکیب و ترتیب می‌گردد. تجربه‌ی تاریخی نشان داده است که این تأکید، باعث می‌شود که کسانی که از این روش‌ها خوششان نمی‌آید، علاقه‌مندی به احتمال را هم از دست داده‌اند. واضح است که یکی از شاخه‌های رشته احتمال، «احتمال ترکیباتی» است و علاقه‌مندان به خود را نیز دارد ولی این تمام احتمال نیست. برای این منظور در برنامه‌ریزی درسی برای کتاب «جبر و احتمال»، سعی شد با وجود استفاده از این روش‌ها، تمام مباحث مقدماتی را وابسته به این مباحث نکنیم و بنابراین، از احتمال هندسی استفاده کردیم. چون بنابه باور آموزشی خود، تبدیل احتمال مقدماتی به روش‌های ترکیباتی را هم ظلم به احتمال و هم ظلم به ترکیبات می‌دانستیم.

یکی دیگر از مباحثی که در این کتاب مطرح شد، اعداد مختلط بود. معرفی «اعداد مختلط» در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای،

رویکردی که برای برنامه‌ریزی درسی این کتاب در نظر گرفته شد، برنامه‌ی درسی تلفیقی بود، بدین معنا که دو حوزه‌ی مجزای ریاضی یعنی ریاضیات پیوسته و گسسته از طریق این برنامه، به هم پیوند می‌خورد و درهم تنیده می‌شد

نظر برنامه‌ریزی درسی ریاضی داشت، با کمترین مشکل در تدریس مواجه شد. معلمان که قبلاً ریاضیات جدید تدریس می‌کردند، به تدریس این کتاب روی آوردند و به زودی بر آن مسلط شدند. معلمان تازه‌کار نیز چون از تحصیلات جدید دانشگاهی برخوردار بودند، از لحاظ موضوعی با تدریس این کتاب مشکلی پیدا نکردند. از همه مهم‌تر این که دانش‌آموزانی که مباحث جبر و احتمال را در دبیرستان یاد گرفته بودند، به مباحث آن به خصوص احتمال، علاقه‌مند شدند و در این شاخه‌ی جاذب و پویای ریاضی، به فعالیت پرداختند.

چرا آمار و احتمال نباید با هم تدریس شوند

بعد از جبر و احتمال، تصمیم گرفته شد به منظور بالا بردن «سواد کمی شهروندی»، یک درس آمار و مدل‌سازی برای تمام دانش‌آموزان دبیرستانی اجباری گردد به خصوص آن که مبارزه با بی‌سوادی کمی، یکی از اهداف سال جهانی ریاضیات بود. ریزمواد و اهداف درس آمار و مدل‌سازی متناسب با این اهداف، تنظیم و به گروه تألیف داده شد. در این درس، هدف این بود که به جای تدریس تکنیک‌های آماری صرف، دانش‌آموزان یاد بگیرند که بتوانند با جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل آن‌ها، به ارتقای توانایی‌های کمی خود بپردازند و با انتخاب مسائل ملموس، مهارت‌های شهروندی خود را افزایش دهند.

در این کتاب، مطالب مقدماتی و تجربی احتمال می‌توانست مفید باشد اما اهداف این درس، با جبر و احتمال کاملاً متفاوت بود. احتمال به عنوان بخشی جذاب و چالش‌برانگیز از ریاضی مدرسه‌ای برای دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی طراحی شده بود که توانایی حل مسأله، قدرت استدلال و تفکر تصادفی آن‌ها را ارتقا دهد. در صورتی که هدف کتاب آمار و مدل‌سازی، ایجاد یک درس عمومی برای همه‌ی شهروندان با حداقل دانش ریاضی اما استفاده از ظرفیت‌های آن بود. هدف آمار و مدل‌سازی این بود که مثلاً اگر دانش‌آموز اخبار اقتصادی تلویزیون یا روزنامه‌ها می‌شنود یا می‌خواند، بتواند آن را دنبال کند و به طور تجربی، به جمع‌آوری داده‌ها و تجزیه و تحلیل و تفسیر این داده‌ها بپردازد.

در نتیجه، برای تدریس آمار و مدل‌سازی، به معلمانی که با آمار و کاربردهای واقعی آن در علوم انسانی تسلط داشته باشند احتیاج است. در صورتی که در تدریس جبر و احتمال، به معلمانی که به ریاضی، شیوه‌های اثبات و استراتژی حل مسئله تسلط داشته باشند نیاز است. بنابراین، معلمان این دو درس، متفاوت و دارای علاقه‌مندی‌های گوناگون می‌باشند.

جایگاه ویژه‌ای دارد و از چند دهه‌ی گذشته، در دوره‌های متوسطه‌ی اغلب کشورهای دنیا - به جز ایران - تدریس شده است. برای تدریس «اعداد مختلط» در دوره‌ی متوسطه، دلیل‌های موجهی وجود دارند که از آن جمله می‌توان به حل معادلات درجه دوم و کاربرد آن در هندسه و فیزیک الکترواستاتیکی دوره‌ی متوسطه اشاره کرد.

در حال حاضر، به دلیل حذف و اضافه‌های مکرر این مبحث در دوره‌ی متوسطه، معمولاً در ابتدای تدریس ریاضی عمومی (۱) دانشگاه، «اعداد مختلط» تدریس می‌شود که سازگاری با سایر مباحث ریاضی دانشگاهی سال اول را ندارد. اما به دلیل ضروری دانستن آن برای تمام دانشجویان علوم پایه و مهندسی، در ابتدای ریاضی عمومی به این بحث پرداخته می‌شود. همه‌ی این‌ها در حالی است که جایگاه اصولی «اعداد مختلط» به شکل مقدماتی، محاسباتی و جبری آن، در دوره‌ی متوسطه است.

به هر حال و به دلایل تاریخی، در گذشته این مطلب در برنامه‌ی درسی دوره‌ی متوسطه ایران حضور نداشته است. در حالی که اگر به استانداردهای برنامه درسی ریاضی کشورهای پیشرفته توجه شود، آشنایی با «اعداد مختلط» در تمام آن‌ها وجود دارد.

باز هم برای آشنایی بیش‌تر با سیر تاریخی برنامه‌ی درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه و دانشگاه در ایران، می‌توان به درس «متمم جبر» در دانشگاه‌ها اشاره کرد. این درس شامل اعداد مختلط، آنالیز ترکیبی و دترمینان بود. هدف این درس همان‌طور که از نام آن پیدا است، پرکردن خلاءهای مدرسه‌ای بود که در زمان مناسب خود، به آن پرداخته نشده بود. به تدریج که این مباحث از سال ۱۳۵۰ وارد برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای در دوره‌ی متوسطه شد، این درس در دانشگاه، از موضوعیت خارج شد و از برنامه‌ی درسی دانشگاهی حذف گردید، اما تنها قسمتی از این درس که وارد برنامه‌ی درسی متوسطه نشد، مبحث «اعداد مختلط» بود. در ابتدا، کتاب جبر و احتمال به عنوان یک درس ۲ واحدی در نظام نیم‌سالی واحدی جدید، در چهار فصل استدلال، جبر مجموعه‌ها، احتمال و اعداد مختلط برنامه‌ریزی و تألیف شد و در اولین چاپ آن در سال ۱۳۷۳، به بازار آمد. البته بعد از سالی واحدی شدن نظام جدید، جبر و احتمال به یک درس ۳ واحدی تغییر یافت و در نتیجه، برای آن، برنامه‌ریزی جدید انجام گرفت. در سال ۱۳۷۹ این کتاب با بازسازی کلی برای یک درس سه واحدی چاپ گردید و مبحث استدلال بدون تغییر ماند و فصل احتمال شرطی اضافه شد و اعداد مختلط و جبر مجموعه‌ها نیز بازسازی کلی شد. اما تغییرات به اینجا ختم نشد و مجدداً با موج دیگری، این درس دوباره به ۲ واحد تقلیل پیدا کرد و ۱ واحد این درس به درس دیگری داده شد و فصل‌های احتمال شرطی و اعداد مختلط از این کتاب حذف شدند.

نوآوری در بستر واقع‌بینی

با وجود تغییرات پی‌در پی و بدون توضیح و توجیه علمی - آموزشی، کتاب جبر و احتمال به سبب وجود نوآوری‌های منحصر به فردی که از

توصیه‌هایی برای بازنگری اهداف مجله

● مهدی رجبعلی پور / استاد ریاضی و عضو فرهنگستان علوم ایران
● محمدرضا فدایی / عضو هیئت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان



محمدرضا فدایی

به فضل الهی و با همت دست‌اندرکاران تحریریه و اجرایی و حمایت مسئولان امر، صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی توسط دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش منتشر می‌گردد. انتشار مستمر این مجله در ربع قرن گذشته، جایگاهی ویژه و نقش‌آفرین در حوزه‌ی آموزش ریاضی کشور داشته است. به عنوان آموزشگر ریاضی، ضمن ابراز خرسندی، بر خود لازم می‌دانیم از زحمات همه‌ی عزیزان دست‌اندر کار، تقدیر و تشکر به عمل آورده و اجر معنوی آنان را از خداوند متعال مسئلت نماییم.

سیر تکاملی انتشار ۲۷ ساله‌ی این مجله، همگام با تحولات آموزشی، رشد سریع تکنولوژی، افزایش انجمن‌های علمی و مجلات آموزشی، و نهایتاً شکل‌گیری و نهادینه شدن گردهمایی‌ها و کنفرانس‌های آموزشی در خور توجه است. در ادامه‌ی راه، بازنگری و تأمل در تدوین خط‌مشی آینده‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی ضروری به نظر می‌رسد. چنانچه در اهداف مجله، بر توسعه‌ی حرفه‌ای آموزش ریاضی تأکید شود، انتشار آن با مشارکت جمعی و رعایت نکات زیر، به عنوان یک مرجع فرهنگ ساز، خلاء موجود را در این حوزه مرتفع نموده و جایگاهش را بیش از پیش تحکیم می‌نماید.

۱. هماهنگی و وحدت نظر سیاست‌گذاران، برنامه‌ریزان و مجریان نظام آموزشی کشور و یاری داوطلبان این حوزه، شرطی اساسی و ضروری است تا اقداماتی یک‌پارچه و منسجم در جهت نیل به اهداف آموزشی - فرهنگی، به عمل آید. در این راستا، لازم است ارتباط مجله با واحدهای درون سازمانی وزارت آموزش و پرورش (از جمله دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، دفتر آموزش متوسطه، دفتر آموزش و ارتقای مهارت‌های حرفه‌ای و تربیت معلم، پژوهشکده‌های آموزشی و تربیتی، و...) نهادینه شود. این کار باعث می‌شود تا با تعامل با یکدیگر، بستر مناسبی برای ارائه‌ی تجربیات و رهنمودهای لازم به مراکز آموزشی که وظیفه‌ی تربیت

آموزشگران ریاضی را عهده‌دارند فراهم شود و تداوم یابد.
۲. در شرایط فعلی که دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ایام جوانی خود را سپری می‌کند و جای خالی مجلات علمی برای دانشجویان این دوره مشهود است، ایجاب می‌کند که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به عنوان یک منبع آموزشی خوب، این کمبود را در حد توان خود برطرف کند. بدین معنی که علاوه بر سایر رسالت‌ها، وظیفه‌ی ایجاد ارتباط بین دانشجویان دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و صاحب‌نظران این حوزه را عهده‌دار شود و آنان را با نظریه‌های پایه‌ای، دیدگاه‌های جدید و تحقیقات انجام شده، آشنا سازد.
۳. در برنامه‌ریزی محتوایی مجله، جایگاه ویژه‌ای برای بررسی مؤلفه‌های تشکیل‌دهنده‌ی حوزه‌ی آموزش ریاضی اعم از برنامه‌ریزی درسی، تألیف کتب درسی، ارزشیابی تحصیلی، دوره‌های بازآموزی معلمان و نظایر آن در نظر گرفته شود تا به بررسی و تجزیه و تحلیل این فعالیت‌ها از بعد نظری و عملکردی بپردازد.



مهدی رحمتی

محتوای آن مناسب با نیاز دانشی دبیران وقت - که طبیعتاً در آن زمان، تعداد معلمان ریاضی با مدرک کارشناسی نسبت به تعداد معلمان دیپلمه یا دارای مدارک غیرمرتبط کمتر بوده است - در نظر گرفته شده با در نظر گرفتن این که اکنون اکثریت معلمان ریاضی، دوره‌های کارشناسی ریاضی را سپری نموده و تعدادی از آن‌ها دارای مدرک کارشناسی ارشد ریاضی نیز هستند، نکته‌ای حائز اهمیت و گویای ضرورت تغییر اهداف انتشار مجله می‌باشد.

با عنایت به مطالب ذکر شده، جای نگرانی وجود ندارد اگر تغییراتی اساسی در اهداف و انتخاب محتوا، در جهت ارتقای سطح علمی مخاطبان، داده شود. این نکته که در بدو تأسیس این مجله،



گزیده‌ی من از شماره‌های ۹۴ و ۹۵ مجله

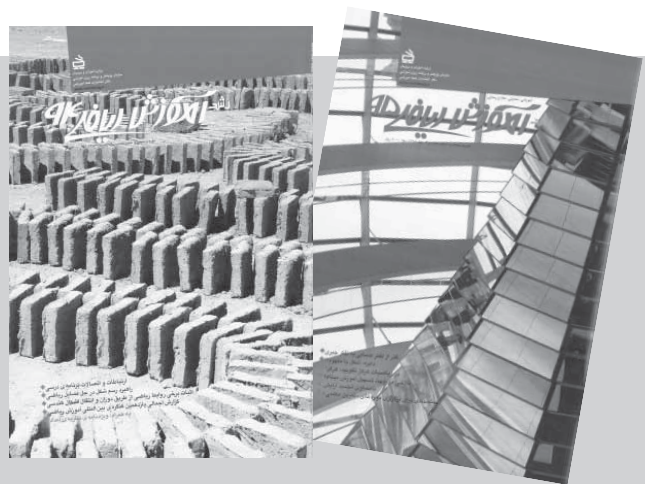
شیوا زمانی

استادیار ریاضی دانشکده‌ی مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف

به عنوان عضو کمتر فعال مجله، به دنبال یافتن ایده‌ای برای نوشتن، چند شماره‌ی اخیر مجله را از شماره‌ی ۹۴ تا ۹۷ ورق می‌زنم. آن‌چه می‌بینم، مجموعه‌ای پر محتوا، آموزنده و در عین حال جذاب است و کم‌کم به این فکر می‌رسم که به جای نوشتن متنی برای ویژه‌نامه‌ی صدمین شماره‌ی مجله که معتقدم چیزی به دانسته‌های خوانندگان آن اضافه نمی‌کند، بهتر است در مقام یکی از همین خوانندگان، بخش‌هایی را که دوست داشته‌ام بازنمایی کنم. بنابراین، آن‌چه در این نوشته می‌آید، گزیده‌ای است دوست‌داشتنی از دید من.

بخشی با عنوان «ارزیابی برای یادگیری» از مقاله‌ی «ره‌آوردی از ICMEII»، در رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۹۵ که از در میان

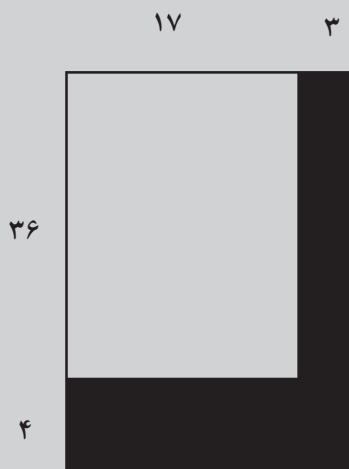
گذاشتن اهداف یادگیری با دانش‌آموزان سخن می‌گوید: «ارزیابی برای یادگیری، فرآیند استفاده از ارزیابی‌های کلاسی برای بهبود یادگیری است، در حالی که ارزیابی یادگیری، اندازه‌گیری چیزی است که دانش‌آموزان می‌توانند انجام دهند،



نمی شود، اما اگر بخواهیم همین روش را از طریق کم کردن مقادیر درستی از ۸۰۰ اصلاح کنیم، آن مقادیر درست چیست؟
 - آیا ۸۰۰، ۴ تا ۱۷ و ۳ تا ۳۶ بیشتر از حاصلضرب ۱۷×۳۶ است؟
 - آیا ۸۰۰، ۴ تا ۲۰ و ۳ تا ۴۰ بیشتر از حاصلضرب ۱۷×۳۶ است؟
 - آیا ۸۰۰، ۴ تا ۲۰ و ۳ تا ۳۶ بیشتر از حاصلضرب ۱۷×۳۶ است؟

سه راه حل زیبای زیر پاسخ درست را مشخص می کند:

- ۴۰ دانش آموز در کلاس است، و هر یک از آن ها، مبلغ ۲۰ هزار تومان برای اردو پرداخت می کند. معلم ۴۰×۲۰ یعنی ۸۰۰ هزار تومان جمع می کند. ولی در روز اردو، ۴ دانش آموز غیبت می کنند، یعنی او باید ۲۰ تومان به هر یک از آن ها پس بدهد. پس از آن، معلم با ۳۶ دانش آموز به موزه می رود، ولی وقتی به آن جا می رسند، می بینند که بلیط ورودی به جای ۲۰ هزار تومان، ۱۷ هزار تومان است. این، یعنی باید به هر یک از ۳۶ دانش آموز باقی مانده، ۳ هزار تومان پس بدهد.
- به شکل زیر توجه کنید:



- راه حل سوم استفاده از خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع است:

$$(۳۶+۴)+(۱۷+۳)=(۳۶ \times ۱۷)+(۳۶ \times ۳)+(۴ \times ۱۷)+(۴ \times ۳)$$

$$(۳۶ \times ۱۷)+(۳۶ \times ۳)+(۴ \times ۲۰)$$

و معمولاً در پایان یک دوره ی یادگیری (یک درس) انجام می شود. در ارزیابی یادگیری:

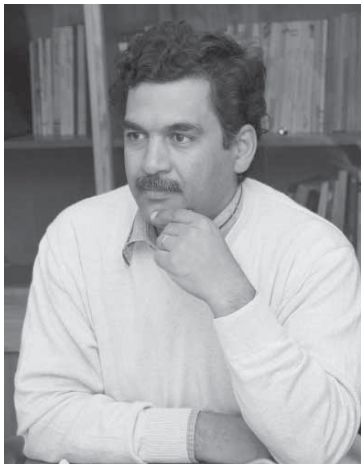
- معلمان اهداف یادگیری را با دانش آموزان در میان می گذارند؛
- دانش آموزان اهدافی را که باید به سمت تحقق آن ها بکوشند، می دانند و تشخیص می دهند؛
- بازخورد معلم، دانش آموزان را به سمت شناسایی چیزی هدایت می کند که بعد از این باید انجام دهند تا یادگیری خود را بهبود بخشند؛
- فرض بر این است که (یادگیری) هر دانش آموزی می تواند بهبود یابد؛

- دانش آموزان، عملکرد و پیشرفت خود را مرور می کنند و بر آن بازتاب می نمایند و همراه با معلمان مهارت های (لازم) را در حین ارزیابی هم کلاسی ها و خود-ارزیابی، کسب می کنند. «مطلب زیر نیز در چیه ای است به مقاله ی «در نگاه به آن چه نادرست است، چه چیزی درست است؟» از دهورا شیفت، ترجمه ی سپیده چمن آرا، شماره ی ۹۴ رشد آموزش ریاضی:

معلم مسئله ی ضرب ۱۷×۳۶ را به دانش آموزان کلاس پنجم ابتدایی که قبلاً روش معمول ضرب اعداد چندرقمی را فرا گرفته اند می دهد و از آن ها می خواهد روش های دیگری برای به دست آوردن جواب ابداع کنند. یکی از دانش آموزان استراتژی زیر را ارائه می دهد:

برای ساده تر کردن مسئله ۴ واحد به ۳۶ و ۳ واحد به ۱۷ اضافه می کنیم و اعداد حاصل یعنی ۴۰ و ۲۰ را در هم ضرب می کنیم که ۸۰۰ به دست می آید. سپس ۴ و ۳ را که قبلاً اضافه کرده بودیم از این حاصلضرب کم می کنیم.

این روش البته درست نیست و به نتیجه ی درستی هم منجر



۱ = ۰ / ۹ یک واقعیت ریاضی یا حقیقتی باور نکردنی!

● مانی رضائی

دانشجوی دکترای ریاضی با گرایش آموزش ریاضی

ویژه نامه‌ی صدمین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی - مطالب اعضای هیئت تحریریه

چکیده

در این مقاله، موضوعات متعددی به طور هم زمان مورد بررسی قرار گرفته است. اما تلاشی برای تفکیک آن ها نشده است. از جمله، موضوعات زیر قابل بیان است:

- آن چه که در مسیر آموزش ارایه می شود و دانش آموزان می آموزند (یا انتظار داریم که بیاموزند)؛
- مباحث تکمیلی که بعضی از معلمان به دانش آموزان ارایه می کنند؛

- برخی بدفهمی های دانش آموزان در مورد اعداد گویا؛ و در نهایت،
- بررسی یک باور عمومی رایج که در تناقض با یک واقعیت ریاضی است.

مقاله براساس مطالعه‌ی منابعی در این زمینه و تجربه‌ی تدریس نگارنده تهیه شده است. این مقاله در بندهای مختلفی ارایه شده است که هر یک به طور مستقل، قابل مطالعه است. تلاش شده تا ارتباط منطقی بین این بندها آشکار باشد و تا حد امکان، خلاصه گویی شده است. جمع بندی نهایی، بر عهده‌ی خوانندگان مجله که معلمان ریاضی هستند و به احتمال زیاد، تجربیاتی مرتبط در این زمینه دارند گذاشته می شود.

کلید واژه‌ها: واقعیت ریاضی، نمایش کسری، دوره‌ی گردش، بسط اعشاری

۱

توسعه‌ی اعداد از سه مسیر متفاوت قابل بررسی است: مسیر توسعه‌ی اعداد بر بستر تاریخ؛ مسیر منطقی توسعه‌ی اعداد با استفاده از اصول موضوع ریاضی و مسیری که در برنامه‌ی آموزشی گنجانده شده است. بررسی سیر تاریخی توسعه‌ی اعداد با سیر منطقی ریاضی آن را به فرصتی دیگر موهول می کنیم. در این نوشتار، روی سیر آموزشی اعداد و به طور خاص، بر روند آموزش اعداد گویا متمرکز می شویم.

آشنایی دانش آموزان با محور اعداد از سال دوم دبستان با معرفی اعداد طبیعی روی یک خط (خط کش) آغاز می شود و سپس با نمایش کسری اعداد گویا در سال سوم و بعد از آن، با نمایش اعشاری اعداد گویا در سال پنجم دبستان آشنا می شوند و در سال دوم راهنمایی، نمایش اعداد گویا و اعشاری روی محور اعداد را می بینید. دانش آموزان با استفاده از محور اعداد تا حدی ارتباط بین نمایش کسری و اعشاری اعداد گویا را تجربه می کنند.

برای مثال، نمایش مقدار «نیمی از واحد» به شکل $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{10}$ با تقسیم طول واحد روی محور نشان داده می شود و تصور کسر به عنوان یک «تقسیم» در نمایش کسر اعداد گویا را برای دانش آموزان بدیهی می نمایاند. بدین ترتیب، دانش آموزان در مسیر آموزش، از همان ابتدا، تناظری بین اعداد و نقاط روی محور برقرار می کنند. در نتیجه، در دوره‌ی راهنمایی که اعداد دیگری روی محور شناسایی و معرفی می شود، این توجیه برای دانش آموزان تا حدودی بدیهی به نظر می رسد که برای هر عدد،

جایی روی محور پیدا می شود و برعکس، هر نقطه روی محور با یک عدد متناظر است.

۲

نمایش های متعددی برای یک عدد گویا وجود دارد. برای مثال، اعداد $\frac{5}{1}$ ، $\frac{10}{2}$ ، $\frac{15}{3}$ ، یا $\frac{-5}{-1}$ و...، شکل های گوناگونی از نمایش عدد ۵ است. چنانچه صورت و مخرج یک کسر در عددی صحیح ضرب شود، شکل دیگری برای نمایش کسری آن عدد گویا به دست می آید. دانش آموزان این موضوع را از همان ابتدای آشنایی با کسر بررسی می کنند. بدین ترتیب، می توان نمایش کسری اعداد گویا را چنین تعریف کرد: عددی به صورت $\frac{p}{q}$ را «گویا» می نامیم، اگر p عددی صحیح و q عددی طبیعی باشد. وجود علامت در شکل های دیگر نمایش کسر را می توان با قرارداد زیر معرفی کرد:

$$-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$$

۳

به روش های مختلف می توانیم دو عدد را باهم مقایسه کنیم و عدد بزرگ تر را شناسایی کنیم. به علاوه، در مجموعه ای اعداد صحیح، به ازای هر عدد داده شده، می توانیم عدد «بعدی» را «تعیین» کنیم. اما این کار در اعداد گویا ممکن نیست زیرا بین هر دو عدد گویا، یک «عدد گویا» وجود دارد، بنابراین، اگر عددی گویا داده شده باشد، نمی توان عدد «بعدی» را تعیین کرد. برخلاف بسیاری از جزییاتی که در مسیر آموزش مورد تأکید قرار گرفته است، وجود عددی گویا بین هر دو عدد گویای دلخواه، به طور پراکنده بیان می شود. اما در دوره ی دبیرستان از این ویژگی، به عنوان یک پیش فرض بدیهی استفاده می شود.

۴

به روش های مختلفی می توان عددی گویا بین دو عدد داده شده ی $a = \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} = b$ پیدا کرد.

روش نخست. میانگین هر دو عدد داده شده (از جمله اعداد گویا) بین آن دو عدد قرار دارد. برای اثبات کافی است به عبارت زیر توجه کنید:

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

روش دوم. فرض کنید $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ در نتیجه $p_1 q_2 < p_2 q_1$. با استفاده از این رابطه، روش دیگری برای پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده معرفی می شود:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} &= \frac{p_1(q_1 + q_2)}{q_1(q_1 + q_2)} = \frac{p_1 q_1 + p_1 q_2}{q_1(q_1 + q_2)} \\ &< \frac{p_1 q_1 + p_2 q_1}{q_1(q_1 + q_2)} = \frac{(p_1 + p_2)q_1}{q_1(q_1 + q_2)} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} \end{aligned}$$

و به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} &= \frac{(p_1 + p_2)q_2}{(q_1 + q_2)q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_2}{(q_1 + q_2)q_2} \\ &< \frac{p_2 q_1 + p_2 q_2}{(q_1 + q_2)q_2} = \frac{p_2(q_1 + q_2)}{(q_1 + q_2)q_2} = \frac{p_2}{q_2} \end{aligned}$$

در نتیجه؛

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} < \frac{p_2}{q_2}$$

روش سوم. اگر $q_1 = q_2$ ، آن گاه می توانیم عددی صحیح مانند C بین p_1 و p_2 بیابیم که کسر $\frac{C}{q_1}$ بین این دو عدد است.

در حالتی که مخرج ها برابر نباشند، می توانیم دو عدد داده شده را به کسرهایی با مخرج های برابر تبدیل کنیم و در حالتی که p_1 و p_2 متوالی باشند، صورت و مخرج هر دو کسر را در عددی ثابت ضرب می کنیم تا فاصله ی بین صورت کسرها بیشتر شود و عددی صحیح بین آن دو پیدا شود.

برای مثال، با این روش بین دو عدد $\frac{13}{31}$ و $\frac{40}{93}$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{13}{31} &= \frac{39}{93} = \frac{78}{186} \\ \frac{40}{93} &= \frac{80}{186} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{13}{31} < \frac{79}{186} < \frac{40}{93}$$

بدین ترتیب، سه روش برای پیدا کردن عددی گویا بین دو عدد گویای داده شده معرفی شد. واضح است که روش های دیگری نیز برای تعیین چنین اعدادی وجود دارد.

۵

یکی دیگر از شکل های نمایش عدد گویا $\frac{p}{q}$ ، نمایش اعشاری آن است. نمایش اعشاری هر عدد گویا از تقسیم

صورت کسر بر مخرج آن به دست می آید. اگر در هر مرحله، باقی مانده ی تقسیم برابر با صفر شود، نمایش اعشاری آن عدد گویا منتهای است. اما چنانچه این باقی مانده در هیچ مرحله ای صفر نشود، از آن جا که به ازای هر q (مخرج کسر) $q-1$ باقی مانده ی ناصفر متمایز داریم، بنابراین حداکثر به این تعداد، رقم های اعشاری مختلف به دست می آید و از جایی به بعد، باقی مانده ی تقسیم، تکرار می شود. یک مجموعه از این رقم های تکراری «دوره ی گردش» نامیده می شود و با گذاشتن یک خط بالای این رقم ها، آن ها را مشخص می کنیم.

برای مثال، بسط اعشاری عددهای $\frac{1}{n}$ به ازای $n = 2, 3, 4, \dots, 9$ چنین است:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{6} = 0.16666\ldots = 0.1\overline{6}$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots = 0.\overline{142857}$$

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{9} = 0.11111\ldots = 0.\overline{1}$$

می توان فرض کرد هر عدد گویا به صورت حاصل جمع کسرهایی است که مخرج آن ها توانی از ۱۰ باشد:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

و برای نمایش اعداد گویا که رقم های اعشاری آن ها منتهای نیستند نیز این حکم برقرار است. در این حالت، تعداد جمله ها نامتناهی است:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \ldots$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{7}{1000000} + \ldots$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

در حالت نامتناهی، مجموع هر تعداد متناهی از جمله های این عبارت ها (مجموع جزئی سری)، تقریبی از عدد گویای مورد نظر است. هم چنین، برای هر عدد گویا با دوره ی گردش نیز می توان چنین تقریبی را به دست آورد. اما همین رویکرد در پاره ای موارد می تواند مبدأ یکی از بدفهمی ها باشد.

برای مثال، عدد $0.3333\ldots$ تقریبی از عدد $0.\overline{3}$ است. در نتیجه، $0.3333\ldots$ تقریبی برای $\frac{1}{3}$ نیز هست. اما تجربه ی تدریس، نشان می دهد که در برخی موارد، دانش آموزان با تعمیم این تقریب، عدد $0.\overline{3}$ را به عنوان تقریب $\frac{1}{3}$ می دانند!

۶

چه رابطه ای بین نمایش اعشاری عدد گویای A و نمایش اعشاری $10^a A$ وجود دارد؟ به جای بررسی حالت کلی، یک حالت خاص را مورد توجه قرار می دهیم. فرض کنید در نمایش اعشاری عدد مورد نظر، تنها یک رقم تکرار شود، یعنی طول دوره ی گردش ۱ باشد مانند $A = 0.\overline{a}$. با نمایش کسرهایی اعشاری این عدد داریم:

$$A = 0.\overline{a} = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \ldots + \frac{a}{10^n} + \ldots$$

$$10^a A = 10^a \left(\frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \ldots + \frac{a}{10^n} + \ldots \right)$$

$$= a + \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \ldots = a + \overline{a}$$

یعنی علامت اعشاری یک رقم جابه جا شده است. با تعمیم این ویژگی، می توان نشان داد که اگر عددی گویا را در 10^n ضرب کنیم، در نمایش اعشاری آن، علامت اعشاری آن به تعداد n جابه جا می شود.

۷

چگونه می توان نمایش اعشاری عدد گویا را به نمایش کسری آن تبدیل کرد؟ برای پاسخ به این پرسش، از ویژگی بند ۶ استفاده می کنیم و روش مربوط را در مثال های زیر بررسی می کنیم.
مثال. نمایش کسری عدد $A = 0.\overline{4}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} 10A &= 4.\overline{4} \\ - A &= 0.\overline{4} \\ \hline 9A &= 4 \Rightarrow A = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

مثال. نمایش کسری عدد $A = 0.\overline{123}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} 1000A &= 123.\overline{3} \\ - 100A &= 12.\overline{3} \\ \hline 900A &= 111 \Rightarrow A = \frac{111}{900} \end{aligned}$$

برای دانش آموزان جالب است که نشان دهیم انتخاب دوره ی گردش، منحصر به فرد نیست.
برای مثال، عدد گویای $A = 0.\overline{19191919\dots}$ را می توان به دو شکل $A = 0.\overline{19}$ و $A = 0.\overline{191}$ نمایش داد و داریم:

$$\begin{aligned} 1000A &= 191.\overline{91} & 100A &= 19.\overline{19} \\ - 10A &= 1.\overline{91} & - A &= 0.\overline{19} \\ \hline 990A &= 190 & 99A &= 19 \end{aligned}$$

که در هر دو حالت، $A = \frac{19}{99}$.

۸

با کشف این که $A = 0.\overline{a} = \frac{a}{9}$ ، دانش آموزان می توانند نتایج جالب دیگری را نیز به دست آورند. فرض کنید a و b و c عددهایی یک رقمی باشند که $c = ab$. رابطه ی بین نمایش کسری دو عدد گویای $A = 0.\overline{a}$ و $C = 0.\overline{c}$ را بررسی می کنیم.

$$\begin{aligned} 10A &= a.\overline{a} \\ - A &= 0.\overline{a} \\ \hline 9A &= a \Rightarrow A = \frac{a}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10C &= c.\overline{c} \\ - C &= 0.\overline{c} \\ \hline 9C &= c \Rightarrow C = \frac{ab}{9} = bA \end{aligned}$$

برای مثال، $0.\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = 2 \times 0.\overline{3}$. هم چنین اگر

$c = a + b$ ، رابطه ای مشابه بین نمایش کسری دو عدد گویای $A = 0.\overline{a}$ ، $B = 0.\overline{b}$ و $C = 0.\overline{c}$ وجود دارد.

$$A + B = \frac{a}{9} + \frac{b}{9} = \frac{a+b}{9} = \frac{c}{9} = C$$

اما توجه کنید که اگر حاصل ضرب یا حاصل جمع این عددها تک رقمی نباشد، این نتایج کارآمد نیست. با این حال می توانیم با استفاده از این ویژگی ها، حاصل را به دست آوریم. برای مثال در جمع زیر از نمایش کسری اعداد گویا استفاده شده است.

$$\begin{aligned} 0.\overline{5} + 0.\overline{8} &= \frac{5}{9} + \frac{8}{9} = \frac{13}{9} = 1\frac{4}{9} \\ &= 1 + \frac{4}{9} = 1 + 0.\overline{4} = 1.\overline{4} \end{aligned}$$

۹

نمایش کسری برای عدد گویای $0.\overline{9}$ چیست؟

$$\begin{aligned} 10A &= 9.\overline{9} \\ - A &= 0.\overline{9} \\ \hline 9A &= 9 \Rightarrow A = \frac{9}{9} = 1 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر $0.\overline{9} = 1$.

به ازای نمایش کسری هر عدد گویا، می توان با تقسیم صورت آن بر مخرج، نمایش اعشاری عدد را به دست آورد. اما نمی توان کسری مانند $\frac{p}{q}$ یافت که با عمل تقسیم، نمایش اعشاری $0.\overline{9}$

به دست بیاید. همین موضوع باعث شده تا در دوره های مختلف آموزشی، شاهد آن باشیم که دانش آموزان و دانشجویان، با وجود آن که اثبات های متعددی برای برابری 1 با $0.\overline{9}$ می بینند، اما این برابری را باور ندارند! در ادامه، دو نمونه ی دیگر از اثبات های مورد اشاره آمده است.

۹

می دانیم $\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$ و با استفاده از ویژگی های مورد اشاره

در بند ۶، مضارب این کسر را می توانیم به دست آوریم، به طور خاص $0.\overline{3} = 3 \times 0.\overline{1} = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$ یعنی $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ که پیش تر آن

را محاسبه کردیم. بدین ترتیب:

$$\frac{3}{9} = 0.\bar{3}$$

هم چنین

$$\frac{6}{9} = 0.\bar{6}$$

و در نتیجه، عبارت

$$\frac{9}{9} = 0.\bar{9}$$

همان حکم موردنظر است، یعنی $0.\bar{9} = 1$.

۹

عددی گویا می پذیرند، زیرا نمایش اعشاری آن دارای دوره‌ی گردش است. از سوی دیگر، با توجه به نامتناهی بودن رقم‌های این عدد، به نوعی برای آن ویژگی «حدی» قائل هستند و نقطه‌ای خاص (یا ثابت) روی محور اعداد به آن نسبت نمی دهند. این دانش آموزان معتقدند، در عین حال که $0.\bar{9}$ عدد است، مکان آن را روی محور اعداد «نمی توان» تعیین کرد، یعنی ماهیت این عبارت را حدی می دانند! در این حالت، مفهوم بینهایت به عنوان یک مقدار ایستا^۱ یا یک مفهوم پویا^۲ مخدوش می شود.

در کلاسی که بحث در این مورد به پایان رسیده بود، در پاسخ به سؤال امتحانی «مقدار عددی $[0.\bar{9}]$ (جزء صحیح) چیست؟» بسیاری از دانش آموزان عدد صفر را به دست آوردند! هر چند آن‌ها اثبات $0.\bar{9} = 1$ را دیده اند، اما در محاسبه‌ی $[0.\bar{9}]$ این عدد را مقداری کوچک تر از یک فرض کردند! در ریشه‌یابی این مشکل، وجود برخی میان برهای آزمون‌های تستی برجسته شد. گروهی از دانش آموزان معتقدند مقدار $0.\bar{9}$ برابر با «یک حدی» است! نه به طور دقیق یک اصطلاح «صفر حدی»، «یک حدی» و در حالت کلی تر «مقدار حدی» (نه «مقدار حد») در برخی موارد، در آزمون‌های تستی و با هدف ارائه‌ی روش‌هایی «سریع» برای محاسبه‌ی حد، به کار می رود. این که چنین مفهومی به چه معناست، حتی در بین بعضی معلمان «متخصص» این نوع آزمون‌ها، توافق وجود ندارد! اما روشن است که کاربرد آن برای این موضوع، می تواند موجب بدفهمی شود.

بحث در این باره و موضوعات پیش تر گفته شده و ریشه‌یابی این بدفهمی، نیازمند یک تحقیق آموزشی است. اما نباید با ارائه‌ی یافته‌های چنین تحقیقاتی، از جایگاه بحث‌های سازنده برای غنا بخشیدن به محتوای تدریسی کلاس، غافل شد.

• • •

کلاس درس، فرصتی برای اندیشیدن و بحث و تبادل نظر دانش آموزان است. در چنین محیطی، امکان بیشتری برای ایجاد ارتباط‌های مفهومی و توسعه‌ی شبکه‌ی مفهومی توسط خود دانش آموزان وجود دارد.

پی نوشت

1. Static
2. Dynamic

۹

به عنوان اثباتی دیگر، فرض کنید چنین نباشد (برهان خلف). یعنی $0.\bar{9} < 1$. بنابر بند ۳، بین این دو عدد باید عددی گویا مانند M وجود داشته باشد که $0.\bar{9} < M < 1$. در این صورت M چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، به نمایش اعشاری M توجه می کنیم. اگر در هر کدام از رقم‌های اعشاری M رقمی به جز ۹ باشد، $M < 0.\bar{9}$ که با انتخاب M در تناقض است، و اگر تمام رقم‌ها ۹ باشد $M = 0.\bar{9}$ که در هر دو حالت، با نتایج بند ۴ در تناقض است. پس چنین عددی نمی تواند وجود داشته باشد. بنابراین، فرض $0.\bar{9} < 1$ نادرست است. در نتیجه $0.\bar{9} = 1$.

۹

تا این جا، استدلال‌های گوناگونی برای این برابری ارایه شد و با وجود آن که بعضی از دانش آموزان و حتی دانشجوین سال‌های اول، برابری $0.\bar{9} = 1$ را به عنوان یک «واقعیت ریاضی»، می پذیرند، اما در عملکرد خود شواهدی مبنی بر باور آن کمتر به چشم می خورد. یکی دیگر از ایرادها، به شکل نمایش اعشاری این عدد است. از آن جا که نمایش اعشاری این عدد، «مشابه» عددهای بازه‌ی $(0,1)$ است، برای بعضی از دانش آموزان پذیرش این واقعیت که $0.\bar{9}$ «برابر» با ۱ است، در تناقض با تعریف «بازه‌ی باز» است.

۹

در تجربه‌ی معلمی، بارها شاهد آن بوده ایم که دانش آموزان این عبارت را یک «حقیقت باور نکردنی» برشمردند. تعبیر دانش آموزان از $0.\bar{9}$ دوگانه است. از یک سوی، آن را به عنوان

سه مرد گرسنه

وراهبرهای حل مسئله*

● اقتباس: سهیلا غلام آزاد

دکترای آموزش ریاضی و عضو مؤسسه‌ی پژوهشی برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی



کلیدواژه‌ها: راهبردهای حل مسئله، حل مسئله، راه‌حل‌های متنوع برای یک مسئله.

راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله کارآیی دارند حل مسئله بدون استفاده از کسر

راه‌حل ارائه شده در زیر، حاصل کار گروهی ۴ دانش‌آموز دختر باهوش و زرنگ کلاس سوم ابتدایی است که هنوز هیچ آموزش رسمی در زمینه‌ی کسرها نداشته‌اند. معلم این دانش‌آموزان فقط در ابتدا اطمینان حاصل کرد که آن‌ها مفهوم $\frac{1}{3}$ را می‌دانند، سپس مسئله را به آن‌ها داد. او به جای کیسه‌ی سیب، از بشقاب سیب استفاده کرد.

در ریاضی مسائلی وجود دارند که با وجود ظاهری ساده، از غنای آموزشی زیادی برخوردارند. از جمله این گونه مسائل می‌توان به مسئله‌ی سه مرد گرسنه اشاره کرد:

سه مرد گرسنه در حالی که کیسه‌ای سیب به همراه داشتند، در جایی به خواب رفتند. در نیمه‌های شب یکی از مردها بیدار شد، $\frac{1}{3}$ سیب‌ها را خورد، و به خواب برگشت. کمی بعد دومین مرد بیدار شد و $\frac{1}{2}$ باقی‌مانده‌ی سیب‌ها را خورد و برگشت و خوابید. بالاخره، مرد سوم بیدار شد و $\frac{1}{2}$ باقی‌مانده‌ی سیب‌ها را خورد. وقتی خوردن او تمام شد، ۸ سیب در کیسه باقی‌مانده بود. در ابتدا چند سیب در کیسه بوده است؟ شاید در نگاه اول، به نظر آید که طرح این مسئله به عنوان کاربردی از جبر مقدماتی مناسب است. ولی خواهید دید که این مسئله را ندیده‌اید، به شما توصیه می‌شود قبل از ادامه‌ی خواندن این مقاله، مسئله را از هر راهی که به نظر شما می‌تواند راه‌حل زیبا و خوش ساخت این مسئله باشد، حل کنید. این کار باعث خواهد شد که از خواندن ادامه‌ی این مقاله لذت بیشتری برده و ظرافت‌های این مسئله را بهتر ببینید.

جین واتسون** (۱۹۹۸) مسئله‌ی سه مرد گرسنه را در اختیار طیف وسیعی از دانش‌آموزان ابتدایی و متوسطه تا دانشجویان سال سوم دانشگاه قرار داد. این مسئله اساساً به عنوان بخشی از آزمون دانشجو-معلمان ابتدایی در قسمت کسرها مطرح بود، که در مقاله‌ی واتسون دست‌مایه‌ی پژوهشی در زمینه‌ی حل مسئله قرار گرفت. در مقاله‌ی حاضر، ضمن ارائه و بحث در مورد راه‌حل‌های منتخب واتسون، ظرفیت این مسئله به عنوان ابزاری برای آموزش حل مسئله دیده می‌شود. در پایان توصیه‌هایی برای معلمان در زمینه‌ی چگونگی به کارگیری مسئله‌های غنی مانند «سه مرد گرسنه» در آموزش ریاضی ارائه می‌شود.

حل (۱)

وقتی مردها سیب هایشان را خورده بودند، ۸ سیب باقی مانده بود. سپس مرد آخر ۱۲ سیب در بسقاب داشت قبل از آن که یک سوم خود را بخورد. یک سوم ۱۲، ۴ است، سپس مقدار باقی مانده در بسقاب بعد از آن که مرد سیبش را خورد ۱۲ به علاوه ۶ = ۱۸. سپس بعد از آن که مرد قبل از او سیب بخورد، ۱۸ سیب باقی بود. سپس مرد اول ۹ سیب خورد که جواب می شه ۲۷.

این دختران گفتند که توضیح راه حل شان سخت تر از انجام دادن آن بود.

شرکت کنندگان این مطالعه در سنین مختلف، نوعی از این راه حل را ارائه دادند که البته توضیحات بسیاری از آن ها، بهتر از توضیح ارائه شده در بالا بود.

حل مسئله با استفاده از کسرها

حل زیر، یک راه حل نمونه با استفاده از کسرها است که توسط یک دانش آموز پایه ی ۶ (معادل اول راهنمایی) ارائه شده است. استفاده ی ضعیف از علامت تساوی، مانند آن چه در حل ۲ مشاهده می شود در همه ی سطوح، حتی در سطح دانشجو-معلمان نیز قابل مشاهده بود.

یکی از مشاهدات جالب در بررسی راه حل های دانش آموزان عدم تمایل به استفاده از کلمات در توضیح راه حل مسئله ی ریاضی بود. این مشاهده را می توان به عنوان یک ویژگی نوعی بسیاری از حل ها دانست.

حل (۲)

$$8 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \text{ از } 8 = \frac{8}{3}$$

$$8 \text{ از } \frac{1}{2} = 4$$

$$8 + 4 = 12$$

$$12 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \text{ از } 12 = \frac{12}{3}$$

$$12 \text{ از } \frac{1}{2} = 6$$

$$12 + 6 = 18$$

$$18 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \text{ از } 18 = \frac{18}{3}$$

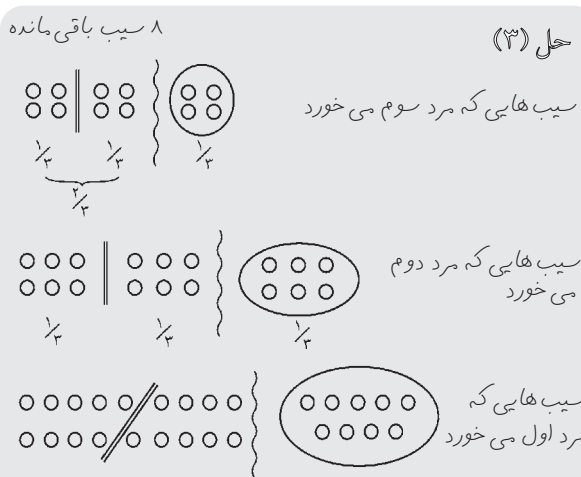
$$18 \text{ از } \frac{1}{2} = 9$$

$$18 + 9 = 27$$

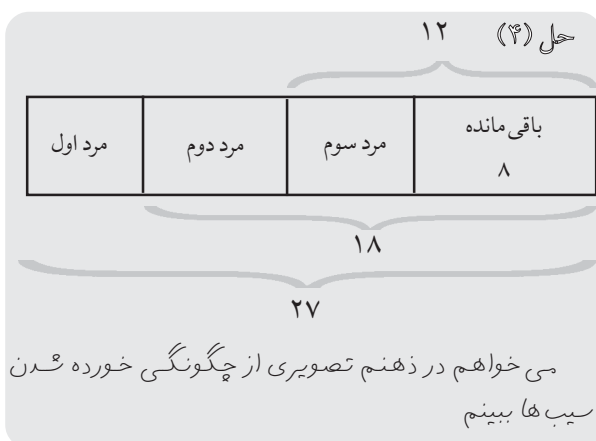
تعداد سیب های داخل کیسه = ۲۷

حل مسئله از طریق رسم نمودار یا تصویر

حل (۳)، با استفاده از رسم نمودار توسط یک دانشجو-معلم ارائه شد. احتمالاً او در ذهن خود به دنبال یک توضیح ملموس برای دانش آموزان ابتدایی بوده است.



یک دانش آموز پایه ی ۸ نیز، حل (۴) را به عنوان قسمتی از راه حل خود ارائه داد.



حل مسئله به صورت نظام دار با استفاده از جبر

دانش آموزان پایه ی ۱۱ (معادل پایه ی سوم متوسطه) عموماً مسئله را با استفاده از جبر حل کردند. حل (۵)، نمونه ای از این

خطاها در راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله به کار می‌روند

در نظر گرفتن ثلث‌های مساوی

حل ۷ توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۶ ارائه شد. البته این فرض نادرست که هر سه مرد به یک تعداد سیب خوردند در راه حل بسیاری از دانش‌آموزان تا پایه‌ی ۹ نیز مشاهده شد. در تعیین تعداد سیب‌های خورده شده توسط هر مرد، به نظر می‌آید که دانش‌آموزان سلیقه‌ای عمل کردند. بزرگ‌ترین تعداد انتخاب شده از بین این اعداد ۱۵ بود!

حل (۷)
۱۴ سیب وجود داشته
مرد اول ۲ سیب خورد
مرد دوم ۲ سیب خورد
مرد سوم ۲ سیب خورد
و ۸ سیب باقی مانده بود

نادیده گرفتن سیب‌های باقی مانده

حل (۸) توسط یک دانش‌آموز پایه‌ی ۸ انجام شد. البته خطای موجود در این حل در تمام سطوح تا سال سوم دانشگاه نیز مشاهده شد. جالب توجه این که تقریباً هیچ‌یک از این افراد از نتیجه‌ی به دست آمده، یعنی خورده شدن ۷۲ سیب توسط مرد اول نگرانی نداشتند!

حل (۸)
 $8 \div \frac{1}{3} = 24$
 $24 \div \frac{1}{3} = 72$
 $72 \div \frac{1}{3} = 216$
در ابتدا ۲۱۶ سیب در کیسه بوده است.

تمایز $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$

یکی از مشکلاتی که دانش‌آموزان پایه‌ی ۸ به بالا با آن روبه‌رو بودند این بود که کدام یک از کسرهای $\frac{1}{3}$ یا $\frac{2}{3}$ برای نمایش اطلاعات مسئله مناسب است. حل (۹)، یک رویکرد بالقوه موفق با استفاده از رسم نمودار را نشان می‌دهد که در آن، رابطه‌ی صحیح بین ثلث‌ها را در مسئله در نظر گرفته است. اما بعد از مرحله‌ی اول، دوسوم باقی مانده را فراموش کرده است. در این حل، یک خطای ضرب نیز مشاهده می‌شود.

راه حل هاست. بعضی از این دانش‌آموزان نیز به جای یک متغیر از سه متغیر (X, Y و Z) استفاده کردند. لازم به ذکر است که تعداد بسیار کمی از دانش‌آموزان زیر کلاس ۱۰ قادر به به کارگیری موفقیت آمیز روش‌های جبری بودند.

حل (۵)

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x &= 8 \\ \therefore 2x &= 24 \\ \therefore x &= 12 \text{ سیب}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x &= 12 \\ \therefore 2x &= 36 \\ \therefore x &= 18 \text{ سیب}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x &= 18 \\ \therefore 2x &= 54 \\ \therefore x &= 27 \text{ سیب}\end{aligned}$$

∴ بنابراین در ابتدا ۲۷ سیب در کیسه بوده است.

حل مسئله با استفاده از وارون یا نسبت

حل (۶) توسط یک دانش‌جوی سال سوم ارائه شد. او مسئله را با استفاده از مفهوم نسبت و به کارگیری وارون $\frac{2}{3}$ در یک روند سه مرحله‌ای حل کرد. جالب آن که هیچ‌کس حل کاملی از این مسئله با استفاده از تناسب مانند $\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$ و در ادامه‌ی آن $\frac{2}{3} = \frac{12}{x}$ و غیره، ارائه نداد.

حل (۶)

$$\begin{aligned}\text{بعد از سومی} &= 8 \\ 8 \times \frac{3}{2} &= 12 \text{ بعد از دومی} \\ 12 \times \frac{3}{2} &= 18 \text{ بعد از اولی} \\ 18 \times \frac{3}{2} &= 27 \text{ قبل از اولی} \\ \therefore & 27 \text{ سیب}\end{aligned}$$

راهبردهایی که از مسیر آخر به اول مسئله کارآیی دارند

حدس و آزمایش

راهبرد حدس و آزمایش در کلاس های ۶ تا ۹ رایج بود، خصوصاً بین آن هایی که ماشین حساب در اختیار داشتند. حل (۱۲) نشان می دهد که نویسندگان آن در مرحله ی آزمایش و بررسی جواب ها دقیق بودند و می دانستند که حدس بعدی باید بزرگ تر یا کوچک تر باشد. در بسیاری از پاسخ هایی که با این رویکرد نوشته شده بودند وقتی نویسنده به جواب غیر صحیح رسیده بود، حل متوقف شده بود.

حل (۱۲)

من از روش حدس و آزمایش استفاده کردم
۲۵ سیب

$$\frac{1}{3} \times 25 = 8 \frac{1}{3}$$

$$- 8 \frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{7} \div 3 = 5 \frac{5}{56}$$

$$- 5 \frac{5}{56}$$

$$\frac{11}{14} \div 3 = 3 \frac{713}{742}$$

$$\frac{-3}{7/427} \div 3 = 3 \frac{713}{742}$$

$$- 3 \frac{713}{742}$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

$$7/427$$

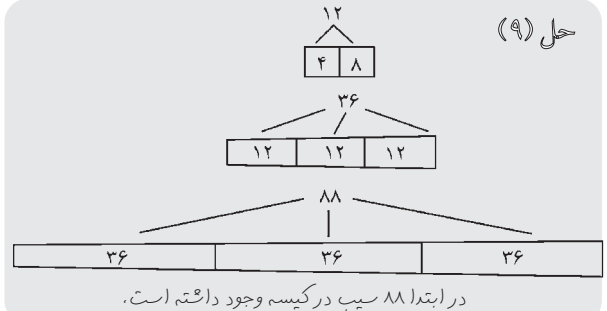
$$7/427$$

$$7/427$$

حل مسئله از طریق روش های نظام دار

دانش آموزان پایه ی ۱۱ به بالا، بیشتر تمایل داشتند مسئله را از اول به آخر حل کنند. حل (۱۳) نشان می دهد که نویسندگان موقعیت مسئله را به خوبی درک کرده و کاربرد کسر ها را می داند، ولی در چگونگی به کارگیری علامت تساوی ضعیف است.

حل (۹)



بازنمایی جبری

در حل (۱۰)، یک دانش آموز پایه ی ۸ تلاش کرده است از نمادهای جبری استفاده کند. این حل نشان می دهد که دانش آموز اصلاً این نکته را که « $\frac{1}{3}$ » قسمت های باقی مانده خورده شده اند را درک نکرده است.

حل (۱۰)

فرض کنید تعداد سیب ها x باشد

$$x = (8 \times \frac{1}{3}) + (8 \times \frac{2}{3}) + (8 \times \frac{3}{3}) + 8$$

$$= 8 \frac{1}{3} + 8 \frac{2}{3} + 8 + 8$$

$$= 8 \frac{1}{3} + 8 \frac{2}{3} + 16$$

$$= 19 + 6$$

$$= 37$$

در این حل، مشکلات ضرب اعداد صحیح با کسر ها و همین طور جمع آن ها نیز مشاهده می شود. به نظر می آید دانش آموزی که حل (۱۱) را نوشته، فهمیده بود که ۸ قسمتی از سیب های باقی مانده بوده است. وقتی مرد سوم بیدار شد و در نتیجه کسری بزرگ تر از یک برای نشان دادن این رابطه برحسب مقدار باقی مانده لازم است. در روند این حل نیز خطاهای جمع به چشم می خورد

حل (۱۱)

فرض کنید این تعداد x باشد

$$x = 8 + (1 \frac{1}{3} \times 8) + (1 \frac{1}{3} \times 8 \times 1 \frac{1}{3})$$

$$+ (1 \frac{1}{3} \times 8 \times 1 \frac{1}{3} \times 1 \frac{1}{3})$$

$$= 8 + 10 \frac{2}{3} + 14 \frac{2}{9} + 18 \frac{2}{27}$$

$$= 8 + 10 \frac{18}{27} + 14 \frac{6}{27} + 18 \frac{2}{27}$$

$$= 51 \frac{23}{27}$$

حل (۱۳)

$$\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \quad \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \quad \frac{4}{9} - \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$$

$$8 = \frac{8}{27} \text{ سیب ها}$$

$$\therefore 1 = \frac{1}{27} \text{ سیب ها}$$

$$\therefore 27 \text{ تعداد سیب ها}$$

تشکیل معادله ی جبری

در تحقیقی که انجام شد، هیچ دانش آموز مدرسه ای نتوانست معادله ای برای حل این مسئله تشکیل دهد. حل (۱۴)، حاصل تلاش سخت یک دانشجو-معلم است که به دنبال یک معادله و سپس حل صحیح آن بود. در این حل، معادله بر حسب تعداد سیب های باقی مانده (۸) تشکیل شده است.

حل (۱۴)

فرض کنید تعداد کل سیب ها = x

مرد اول $\frac{1}{3}$ سیب ها را خورد $\frac{1}{3}x$

\therefore تعداد سیب های باقی مانده = $x - \frac{1}{3}x$

مرد دوم $\frac{1}{3}$ سیب های باقی مانده را خورد = $\frac{1}{3} \times (x - \frac{1}{3}x)$

↑
سیب های باقی مانده بعد از مرد اول

\therefore تعداد سیب های باقی مانده بعد از مرد

دوم = $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x)$

مرد سوم $\frac{1}{3}$ سیب های باقی مانده بعد از مرد دوم را خورد =

$$\frac{1}{3} \left[x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) \right]$$

$$\therefore x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{3} \left[x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) \right] = 8$$

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}x = 8$$

$$x - \frac{3}{3}x + \frac{3}{9}x - \frac{1}{27}x = 8$$

$$\frac{3}{9}x - \frac{1}{27}x = 8$$

$$\frac{9-1}{27}x = 8$$

$$\frac{8}{27}x = 8$$

$$8x = 8 \times 27$$

$$8x = 216$$

$$\therefore x = 27$$

حل (۱۵)، رویکرد مشابه را بر حسب تعداد کل سیب های داخل کیسه (x) نشان می دهد.

حل (۱۵)

فرض کنید x = تعداد کل سیب های داخل کیسه

$$x = \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} \times \frac{1}{3} + (x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{9}) \times \frac{1}{3} + 8$$

مرد اول $\frac{1}{3}$ سیب ها را خورد.

با وجود این، در بین دانشجویان تا قبل از سال سوم خیلی رایج نبود که معادله ای بر حسب تعداد سیب های باقی مانده، مانند آنچه در حل (۱۶) آمده بنویسند.

$$x \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 8$$

حل (۱۶)

$$\frac{8x}{27} = 8 \text{ یعنی}$$

$$\therefore x = 27$$

خطاها در راهبردهایی که از مسیر اول به آخر مسئله کارآیی دارند

مفهوم $\frac{1}{3}$

حل (۱۷)، پاسخ نمونه ی بسیاری از دانش آموزان تا پایه ی ۶ (معادل اول راهنمایی) را نشان می دهد که فکر می کردند هر مرد ثلث یک سیب را خورده است.

حل (۱۷)

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1 \text{ سیب درست}$$

$$\text{سیب درست} + 8 \text{ سیب درست}$$

$$= 9 \text{ سیب}$$

تمایز بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$

حل (۱۸)، پاسخ نمونه‌ی دانشجویانی است که سعی کردند با استفاده از جبر، و لحاظ کردن فرضیات از اول به آخر، مسئله را در قالب یک معادله درآورند. نتیجه‌ی به دست آمده از این حل با نتیجه‌ی حل (۸) که با راهبردهای آخر به اول انجام شده بود، یکی بود.

حل (۱۸) فرض کنید مقدار اولیه $x =$

$$\therefore \frac{x}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 8$$

$$\therefore \frac{x}{27} = 8$$

(خیلی بزرگ) ؟ $x = 216$

$$\frac{216}{3} = 72 \text{ و } \frac{72}{3} = 24 \text{ و } \frac{24}{3} = 8$$

آزمایش

در ابتدا ۲۱۶ سیب در کیسه بوده است.

حل (۱۹) پاسخی را نشان می‌دهد که در آن، دانش آموز سعی کرده برخوردی نظام‌دار را داشته باشد، اما به نظر می‌رسد بعد از گام اول گیج شده باشد.

حل (۱۹)

کیسه سیب با x سیب در آن

بعد از مرد اول $\frac{2x}{3}$ سیب‌ها باقی ماند

بعد از مرد دوم $\frac{4x}{9} = \frac{2x}{3} \times \frac{2x}{3}$ سیب‌ها باقی ماند

بعد از مرد سوم $\frac{2x}{27} = \frac{2x}{9} \times \frac{1}{3}$ سیب‌ها باقی ماند

$$\frac{2x}{27} = 8$$

(زیرا $\frac{2x}{27}$ سیب‌ها باقی می‌ماند، بنا به فرض ۸ سیب باقی مانده.)

$$2x = 216$$

$$\therefore x = 108$$

\therefore در ابتدا ۱۰۸ سیب وجود داشته است.

حل (۲۰)، حل معادله‌ی دیگری را نشان می‌دهد که فقط در مؤلفه‌ی آخر این معادله، نویسنده فراموش کرده $\frac{1}{3}$ باقی مانده را کم کند.

حل (۲۰)

فرض کنید تعداد اولیه سیب‌ها x باشد، حال

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) = 8$$

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{x}{9} + \frac{x}{27} = 8$$

$$27x - 9x - 9x + 3x - 3x + x = 8 \times 27$$

$$10x = 216$$

$$x = 21.6 \text{ سیب}$$

بازنمایی جبری $\frac{1}{3}$

بسیاری از دانش آموزان، از پایه‌ی ۸ تا دانشجو-معلمان که می‌خواستند مسئله را از روش‌های جبری حل کنند، در نمایش و به کارگیری $\frac{1}{3}$ مشکل داشتند. حل (۲۱)، پاسخ یکی از دانشجو-معلمان است که نمایانگر مشکلات او در کار با کسرها می‌باشد.

حل (۲۱)

$\frac{1}{3}$ از x

$$= \frac{1}{3} \times x = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}x = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ از $[x - \frac{1}{3}]$

$$8 = [x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}] \times \frac{1}{3}$$

$$= x = \frac{8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= 8 \frac{2}{3} \times 3$$

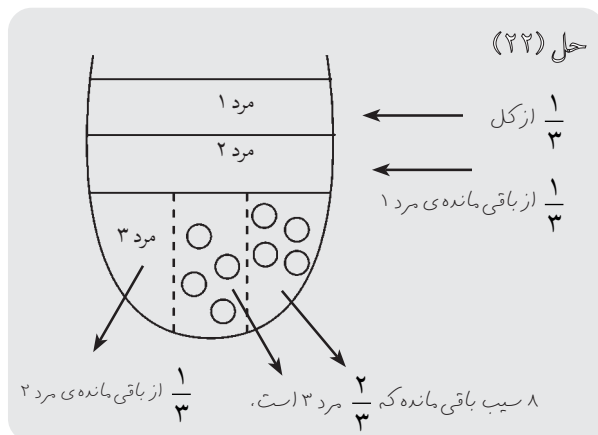
$$= \frac{26}{3} \times 3$$

$$\therefore x = 26$$

\therefore رویم ۲۶ سیب وجود داشت.

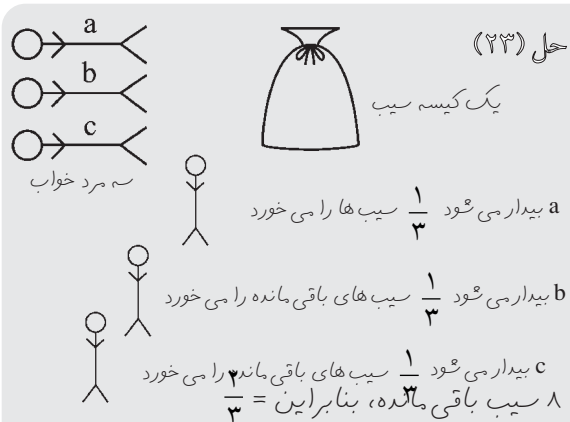
رسم نمودار اما ناتوانی در تکمیل آن

حل (۲۲)، پاسخی را نشان می‌دهد که سعی در سازمان‌دهی مسئله را در قالب یک نمودار داشته است، ولی بعد از آن هیچ اقدام دیگری صورت نگرفته است. بسیاری از دانش‌آموزان پائین‌تر از پایه‌ی ۱۰ نیز تصاویر مشابه یا کاریکاتورهایی از سه مرد گرسنه ترسیم کردند اما نتوانستند مسئله را حل کنند.



راهنماهایی که از اول به آخر و از آخر به اول مسئله کارایی دارند توضیح دقیق

تعدادی از دانش‌آموزان، خصوصاً در پایه‌های ۸ و ۹، با دقت، تعبیر خود را از مسئله، از ابتدا توضیح دادند و بعد مسئله را از آخر حل کردند. گاهی این پاسخ‌ها با رسم تصاویر همراه بود. از این نمونه پاسخ‌ها، حل (۲۳) جالب است زیرا در پایان از روش جمع استفاده کرده است که احتمالاً با علاقه‌ی دانش‌آموز، با مسیر داستان هم خوانی دارد.



$$\therefore \frac{1}{3} = ۴ \text{ سیب}$$

$$\therefore ۴ \text{ سیب می‌خورد } c$$

بعد از آن که b سیب‌هایش را می‌خورد ۱۲ سیب می‌ماند.

$$\therefore ۱۲ = \frac{۲}{۳} \text{ سیب}$$

b، ۶ سیب می‌خورد.

بعد از آن که a سیب‌هایش را می‌خورد ۱۸ سیب می‌ماند.

$$\therefore ۱۸ = \frac{۲}{۳} \text{ سیب}$$

a، ۹ سیب می‌خورد.

$$\therefore ۸ + ۴ + ۶ + ۹ = ۲۷$$

در ابتدا ۲۷ سیب در کیسه بوده است.

نگه داشتن حساب هر سه مرد

چندین دانش‌آموز کلاس‌های ۵ و ۶ بعد از شروع حل مسئله، ظاهراً فراموش می‌کنند که چند مرد در مسئله شرکت داشتند. یکی از این پاسخ‌ها در حل (۲۴) آمده است.

اولین مرد $\frac{1}{3}$ می‌خورد

دومین مرد $\frac{1}{3}$ سیب‌های باقی مانده را خورد

سومین مرد $\frac{1}{3}$ سیب‌های باقی مانده را خورد و ۸ سیب ماند

$$۸ = \frac{۲}{۳}$$

$$۱۲ = \frac{۲}{۳}$$

سیب‌هایی که با آن‌ها شروع کردند = ۱۸

اشارات

در عمل، راهنماهای درست و نادرست بسیار زیاد دیگری نیز برای این مسئله مشاهده شد، ولی به نظر می‌آید گزینش انجام شده برای نشان دادن میزان خوبی و امتیازات مسئله‌ی سه مرد گرسنه کفایت کند. در ادامه، اشارات تلویحی مسائل این چنینی در تدریس ریاضی از زاویه‌های مختلف بحث خواهد شد.

تدریس حل مسئله

تنها با در نظر گرفتن تعداد راهنماهای صحیح متفاوت برای مسئله‌ی سه مرد گرسنه، می‌توان آن را ابزاری خیلی خوب و مناسب برای آن دسته از معلمان به حساب آورد که قصد بررسی راهنماهای حل مسئله را با دانش‌آموزانشان دارند. به‌ویژه، اگر این مسئله در سطح دبیرستان

مطرح شود، تقریباً همه‌ی دانش‌آموزان خواهند توانست مسئله را درک کنند و متوجه ارزش آن باشند.

در به کارگیری این مسئله، معلمان حتی می‌توانند به بعضی از راهبردهایی که به طور صریح در حل‌های ارائه شده در اینجا نیامده بود تأکید کرده و آن‌ها را بحث قرار دهند. برای مثال، راهبرد «خواندن با دقت مسئله» می‌تواند در مواردی که دانش‌آموزان تعبیر درستی از مسئله ندارند، مثلاً می‌گویند « $\frac{1}{3}$ از یک سیب» یا باقی مانده را فراموش می‌کنند، مورد اشاره قرار گیرد. به طور مشابه «ساختن یک مدل» به وسیله‌ی اشیای واقعی می‌تواند برای کودکان دوره‌ی ابتدایی با ارزش باشد، یا «ساختن یک جدول» می‌تواند به عنوان راهی برای ضبط اطلاعات مورد استفاده قرار گیرد. البته چک کردن پاسخ‌ها نیز یکی از جنبه‌های مهم حل مسئله است که بعداً مورد اشاره قرار خواهد گرفت. در ارائه‌ی راه‌حل‌ها هیچ پیشنهادی در مورد این که کدام حل بهتر از دیگری است مطرح نشد. ممکن است به عنوان یک معلم، از دیدن این همه تنوع و ابتکار در راه‌حل‌ها ذوق زده شویم. توجه کنید که این تنوع می‌تواند نقطه‌ی شروع خوبی برای بحث و مقایسه‌ی راهبردها در کلاس درس باشد. بررسی طول و زیبایی راه‌حل‌ها می‌تواند میان برهائی به مسئله حل‌کن‌های علاقه‌مند پیشنهاد کند، خصوصاً آن‌هایی که مباحث جبر را خوانده‌اند ولی کاربردهای بسیار کمی از آن را دیده‌اند.

مشکلات بیان

ملاحظه شد که به کارگیری نادرست علامت تساوی، حتی در راه‌حل‌هایی که به جواب صحیح منجر می‌شد، عمومیت داشت. این مشاهده، تدریس اولیه‌ی ما را در مورد رایج‌ترین علامت ریاضی زیر سؤال می‌برد. به عنوان نمونه، آیا تاکنون پیش آمده از دانش‌آموزی که حلی مانند حل (۲۳) ارائه داده بخواهیم برای جلوگیری از ابهام و داشتن دقت لازم آن را دوباره نویسی کند؟ به‌ویژه اگر حل ارائه شده به جواب صحیح رسیده باشد! مثلاً در حل (۲)، دانش‌آموز ادعا می‌کند $\frac{8}{3} = \frac{3}{4}$. واضح است که این دانش‌آموز متن سؤال را فهمیده بود، اما یقیناً نوشته‌ی او از نظر ریاضی صحیح نیست. در اینجا، آوردن چند واژه‌ی کمکی مانند « $\frac{3}{4}$ از سیب‌های باقی مانده» می‌توانست منظور را نشان دهد. یکی از روش‌های کارآمد برای رفع این گونه مشکلات آن دست که یک بحث خوب حول حلی مانند حل (۲) و چگونگی بهبود آن در کلاس به اجرا درآورد.

این مثال‌ها اهمیت زبان را در ریاضیات برجسته می‌کند. بسیاری از دانش‌آموزان نیازمند توجه و آموزش در چگونگی استفاده‌ی مؤثر از زبان در ارائه‌ی راه‌حل‌هایشان هستند.

توانایی استفاده‌ی صحیح از زبان می‌تواند در تجزیه و تحلیل دانش‌آموزان از مسئله‌ی اخیر باشد. هم‌چنین، می‌تواند به معلمان در رصد راهبردهایی که به بی‌راهه رفته‌اند یاری رساند. از نظر بسیاری از دانش‌آموزان، آشنایی با جبر نیاز آن‌ها را در به کارگیری واژگان کم

می‌کند. شاید این به دلیل تأکید دائمی ما معلمان باشد که می‌گوییم جبر، زبان ریاضی برای حل مسائل است. بررسی راه‌حل‌های ارائه شده‌ی مسئله‌ی سه مرد گرسنه نشان می‌دهد که ما معلمان با این باور ممکن است برای سال‌ها دانش‌آموزان مان را به بی‌راهه هدایت کنیم. همان‌طور که ملاحظه شد حل‌های محض جبری ارائه شده در سطح مدرسه که پایان موفقیت‌آمیزی داشته باشند، خیلی کم بودند.

راه‌حل‌های نادرست

عموماً راه‌حل‌های نادرست مسائل، حرف‌های زیادی برای گفتن دارند. شاید تنوع راه‌حل‌های غلط مسئله‌ی سه مرد گرسنه شما را متعجب کرده باشد.

ولی اگر بخواهیم مثل یک معلم خوب فکر کنیم، نیاز داریم از بسیاری از راه‌هایی که دانش‌آموزان ممکن است به اشتباه بروند آگاهی داشته باشیم. کلاسی را تصور کنید که در آن، دانش‌آموزان راهبردهای خود را برای جمع حاضر در کلاس توضیح می‌دهند و از ادعاهای خود دفاع می‌کنند. در این گونه بحث‌های کلاسی، دانش‌آموزان ضمن بررسی تفاوت‌های راه‌حل‌هایشان، مطالب زیادی می‌آموزند.

جالب است توجه کنید که در سطح مدارس ابتدایی، تعداد پاسخ‌های غیرواقع‌گرایانه برای مسئله‌ی سه مرد گرسنه بسیار کم بود. در واقع، این دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر بودند که خود را موظف به استفاده از روش‌های پیچیده‌ای شامل جبر می‌دانستند و در آخر نیز پاسخ‌های غیرواقع‌گرایانه‌ی خود را بدون تردید در درستی آن‌ها ارائه می‌دادند. از جمله‌ی این گونه پاسخ‌ها، می‌توان به حل‌های (۸)، (۱۱)، (۱۹) و (۲۰) اشاره کرد.

دانش‌آموزی که حل (۱۸) را نوشت، تنها کسی بود که جواب ۲۱۶ را مورد تردید قرار داد، ولی او نیز در پایان به مسئله‌ی اصلی برگشت تا منطقی بودن جواب خود را بررسی کند. شاید یکی از مهم‌ترین جنبه‌های تدریس راهبردهای حل مسئله این باشد که از دانش‌آموزان بخواهیم جواب‌های خود را کنترل کنند و منطقی بودن آن را در مسئله‌ی اصلی مورد بررسی قرار دهند.

در اینجا قصد نداریم که اشتباهات را با هم مقایسه کنیم و بگوییم کدام یک جدی‌تر از دیگری است. احتمالاً خوانندگان نظر شخصی خود را در این زمینه دارند. ولیکن، این واضح است که بعضی از راهبردها به موفقیت نزدیک‌تر بودند. جالب است توجه کنید که برای این مسئله، جواب‌های غلط یکسان الزاماً از راهبردهای نادرست یکسان نتیجه نشده بودند. مثلاً جواب‌های ۲۱۶ و ۱۰۸ از چندین راه مختلف به دست آمدند. از این رو، لازم به نظر می‌رسد که به عنوان معلم مراقب باشیم که دانش‌آموزان را فوری براساس جواب آخری که عرضه می‌کنند طبقه‌بندی نکنیم. در واقع، مسئولیت ما خیلی بیشتر از آن است که فقط با یک علامت ضربدر قرمز، نادرستی پاسخ دانش‌آموزان مان را تأیید کنیم.

شرمندگی آن‌ها خواهد شد. در واقع این که معلمان ابتدایی فقط به مهارت‌های جبری مجهز باشند باعث می‌شود که یا مسایلی مانند سه مرد گرسنه را در کلاس‌های خود مطرح نکنند یا دانش‌آموزان را به سمت استفاده از روش‌های جبری هدایت کنند که هنوز در حد درک و فهم آن‌ها نیست. لذا ضروری به نظر می‌رسد که در کنار معرفی روش‌های جبری، استفاده از روش‌های بدیل حل مسئله نیز در برنامه‌های آموزشی تربیت معلم لحاظ شود.

قالب چند گزینه‌ای

در اینجا ممکن است این سؤال مطرح شد که اگر بخواهیم مسئله‌ی سه مرد گرسنه را در قالب سؤال چند گزینه‌ای قرار دهیم، چند گزینه برای آن مناسب است؟ با توجه به مشاهده‌ی عملکرد دانش‌آموزان، شاید برای پایه‌ی ۶، بهترین پاسخ‌ها می‌توانست ۳۲، ۲۷، ۲۴ و ۹ باشد. برای دانش‌آموزان دبیرستانی و دانشجویان نیز، بهترین بدیل می‌توانست ۲۷، ۷۲، ۱۰۸ و ۲۱۶ باشد. ولی در هر صورت، عرضه‌ی این مسئله در قالب چند گزینه‌ای، به معنای محدود کردن وسعت پاسخ‌های ممکن برای آن است. این همان بلایی است که بر سر بسیاری از مسائل دیگر نیز که در قالب چند گزینه‌ای آورده می‌شوند، می‌آید. تجربه‌ی تدریس ریاضی نشان می‌دهد که قالب سؤالات چندگزینه‌ای فقط برای پاسخ‌های سطح پایین، از نوع به یاد آوردن می‌تواند مناسب باشد.

نتیجه‌گیری

در پایان، شاید بررسی جزئیات مسئله‌ای مانند مسئله‌ی سه مرد گرسنه بتواند به ما کمک کند تا در این باور که پاسخ، مهم‌ترین چیز در حل مسئله است تجدیدنظر کنیم. عموماً، ما معلمان تمایل داریم که راه حل خودمان را بهترین راه حل ببینیم و دانش‌آموزان را به سمت آن روش هدایت کنیم، به ویژه وقتی دانش‌آموزی در حل مسئله گیر می‌کند. در صورتی که تشویق دانش‌آموزان در به کارگیری و امتحان راهبردهای متنوع ضمن ایجاد انگیزه در آن‌ها برای درگیر شدن در فرایند حل مسئله، می‌تواند دسترسی معلمان را به نوع تفکر، مشکلات و بدفهمی‌های محتمل دانش‌آموزان امکان‌پذیر سازد. شاید یکی از راه‌های پرورش دانش‌آموزان مسئله حل کن، ارائه‌ی مسائلی از نوع سه مرد گرسنه باشد و هم‌چنین، تشویق و پاداش درونی برای دانش‌آموزانی که برای پیدا کردن جواب مسئله، راه‌های جدیدی پیشنهاد می‌کنند.

پی‌نوشت

* Watson, J. (1988). Three Hungry Men and Strategies for Problem Solving. In: Pimm, D., Harper, K.O'shea, T. (Eds.). Designs for Learning: Elementary Mathematics (2002). Simon Fraser University.

** Jane Watson



در واقع این که معلمان ابتدایی فقط به مهارت‌های جبری مجهز باشند باعث می‌شود که یا مسایلی مانند سه مرد گرسنه را در کلاس‌های خود مطرح نکنند یا دانش‌آموزان را به سمت استفاده از روش‌های جبری هدایت کنند که هنوز در حد درک و فهم آن‌ها نیست. لذا ضروری به نظر می‌رسد که در کنار معرفی روش‌های جبری، استفاده از روش‌های بدیل حل مسئله نیز در برنامه‌های آموزشی تربیت معلم لحاظ شود.

تدریس جبر

اگرچه جبر تنها ابزار حل مسئله‌ی سه مرد گرسنه نیست، ولی اگر به طور صحیح مورد استفاده قرار گیرد، قطعاً می‌تواند برای این منظور کافی باشد. با این وجود بسیاری از دانش‌آموزانی که آموزش جبر دیده بودند برای حل این مسئله از راه حل جبری استفاده نکردند. شاید دلیل این باشد که ابزار جبری هنوز آن قدر مورد استفاده قرار نگرفته بود که آن را به عنوان یک ابزار کمکی ببینند، و بیشتر حکم یک چیز دست و پاگیر را برای دانش‌آموزان، خصوصاً در سال‌های اول دبیرستان، داشت. البته این عملکرد دانش‌آموزان دور از انتظار هم نبود. خود ما نیز وقتی با یک مسئله روبه‌رو می‌شویم، عموماً از آشناترین تکنیک‌ها برای حل آن استفاده می‌کنیم؛ تا استفاده از تکنیک‌های جدیدی که هنوز اعتماد به نفس کافی نسبت به آن‌ها نداریم. تبدیل تکنیک‌های جبری به ابزاری که دانش‌آموزان به طور طبیعی و ناخودآگاه برای حل مسئله به کار برند، نیازمند زمان است.

در طرف دیگر سکه‌ی جبر، دانشجو- معلمان بودند که اغلب ادعا می‌کردند به هیچ راه دیگری (غیر از جبر) برای حل این مسئله نمی‌توانستند فکر کنند. این که معلمان از جبر به عنوان یک ابزار حل مسئله استفاده کنند جای خوشحالی است، ولی این وضعیت در شرایطی که بخواهند مسئله را در سطح مدارس ابتدایی حل کنند باعث



تحقیق عمل

چرایی، ضرورت‌های تاریخی و چستی

- سلسله مقالاتی جهت آشنایی بیش تر با تحقیق عمل -

(بخش نخست)

سپیده چمن‌آرا

عضو هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

چکیده

هستند؟ و برگزاری این جشنواره‌ها تا چه حد توانسته است به هدف اصلی تحقیق عمل - که در ادامه خواهیم دید که «بهبود عمل تدریس معلم و ارتقای حرفه‌ای وی» است - نزدیک شود؟ در این مقاله، تنها قصد داریم به پرسش اول پردازیم و با اقدام پژوهی (بخوانید «تحقیق عمل») بیش تر آشنا شویم. یادآور می‌شویم که پاسخ‌گویی به پرسش دوم، نیازمند بررسی اهداف تعیین شده برای این جشنواره‌ها و برنامه‌ها و تطابق آن‌ها با اهداف واقعی و تعریف شده برای تحقیق عمل توسط آموزشگران در حالت کلی و نیز اطلاعات بیشتری درباره‌ی پژوهش‌های ارائه شده و برگزیده در این جشنواره‌ها و معلمان پژوهنده‌ی نویسنده‌ی این پژوهش‌ها می‌باشد که دسترسی به آن‌ها از توان نگارنده خارج است.

از این پس در این مقاله، واژه‌ی «تحقیق عمل» را معادل واژه‌ی Action Research به کار خواهیم برد، مگر در مواردی که از منابع دیگر، نقل قول‌های مستقیم آورده شده باشد.

تحقیق و انواع آن

پیش از معرفی «تحقیق عمل» لازم است به اجمال مفهوم پژوهش (تحقیق)، انواع آن، ریشه‌های فلسفی‌ای که پژوهش‌های علمی کلاسیک بر مبنای آن استوار است و نیز نقدهای وارد بر آن پژوهش‌ها را بررسی کنیم. دلاور (۱۳۸۰) به نقل از چند فرهنگ مختلف، واژه‌ی تحقیق را چنین معرفی می‌کند:

«واژه‌ی تحقیق از زبان عربی گرفته شده است و در لغت به معنای رسیدگی کردن، بررسی، بازجویی (فرهنگ قریب)، واری و اقصیت (فرهنگ نفیسی)، راست و درست کردن، به حقیقت امری رسیدگی کردن و بازجویی کردن (فرهنگ عمید و لغت‌نامه‌ی دهخدا) است.»

وی در ادامه می‌افزاید: «اگر از معنای لغوی تحقیق که در زبان، تعبیرهای متفاوتی دارد و خود، بازتاب ذهنی و ذوقی اهل زبان طی زمان است صرف نظر کنیم، تعریف تحقیق از نظر روش‌شناسی، امر مشکلی است و از این جهت در بین صاحب‌نظران و پژوهشگران، اختلاف نظر زیادی وجود دارد. به همین دلیل ارائه‌ی تعریفی که مورد تأیید و موافقت همه‌ی پژوهشگران باشد، آسان نیست. عدم توافق در تعریف تحقیق، بیش از همه ناشی از بهای بیش از حدی است که به نوعی از آن، به نام تحقیق آزمایشی داده می‌شود. به این معنی که با گذشت زمان و با پیشرفت‌های چشم‌گیری که در علوم فیزیکی به وجود آمد، دانشمندان سایر روش‌های علمی را مورد بی‌مهری قرار دادند.» (ص ۲۴) وی هم چنین ادامه می‌دهد: «در مباحث علمی، غالباً مفاهیم تحقیق و روش

در این مقاله و مقالاتی که در چند شماره‌ی آینده به چاپ خواهد رسید، قصد داریم با «تحقیق عمل» (که در برخی متون و کتاب‌ها، به صورت «پژوهش ضمن عمل»، «پژوهش در عمل» و «اقدام پژوهی» و نظایر آن نیز معادل سازی شده است) بیش تر آشنا شویم. در نخستین بخش از این مجموعه مقالات، به بررسی ماهیت و ویژگی‌های پژوهش‌های کلاسیک و انتقادهای وارد بر روش‌های علمی پژوهش در حوزه‌های علوم تربیتی و آموزش و علوم اجتماعی می‌پردازیم تا دلایل و ضرورت‌های روی آوردن به شکل‌های جدید پژوهش (به ویژه گرایش به «تحقیق عمل» در تحقیقات آموزشی و آموزش ریاضی) در این حوزه‌ها برایمان آشکار گردد و با مرور اجمالی تاریخچه‌ی پیدایش تحقیق عمل و نیز بررسی شباهت‌ها و تفاوت‌های این نوع تحقیق با سایر شکل‌های پژوهش، جایگاه «تحقیق عمل» در بدنه‌ی پژوهش‌های علمی و مشروعیت آن براساس دیدگاه‌های نهفته در پس آن را بشناسیم.

در بخش دوم این مقاله - که در شماره‌های بعدی این مجله به چاپ می‌رسند - با تفصیل بیشتری، «تحقیق عمل» را معرفی کرده و اهداف و نتایج حاصل از آن، پیش‌فرض‌های این نوع تحقیق و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. مراحل انجام تحقیق عمل، شیوه‌های جمع‌آوری داده‌ها در آن، چگونگی کیفیت بخشی و بالاخره روایی نتایج حاصل از آن، موضوع بخش سوم از این مجموعه مقالات خواهد بود. آخرین بخش از این مقاله‌ها، به بررسی چند نمونه از تحقیق‌های انجام شده در حوزه‌ی آموزش ریاضی اختصاص دارد.

کلیدواژه‌ها: پژوهش (تحقیق)، تحقیق عمل (پژوهش ضمن عمل، پژوهش در عمل، اقدام پژوهشی)، معلم محقق (معلم پژوهنده، اقدام پژوه).

مقدمه

چندین سال است که واژه‌های «اقدام پژوهی» و «معلم پژوهنده» در واژگان آموزشی ما وارد شده است و آن‌ها را در بخش‌نامه‌های مختلف می‌خوانیم. جشنواره‌ی معلمان پژوهنده، یکی از مراسمی است که در هفته‌ی پژوهش یا مناسبت‌های مرتبط، به منظور شناسایی و تشویق معلمان فعال و اهل پژوهش، برگزار می‌شود. پژوهشکده‌های وابسته به وزارت آموزش و پرورش، زمان و انرژی فراوانی را روی بررسی اثر «پژوهنده» بودن معلمان بر روش‌های تدریس آن‌ها صرف کرده‌اند. اما معلمان ما تا چه حد با معنای واقعی این واژه‌ها و فلسفه‌ی وجودی و اهداف این نوع تحقیق آشنا

علمی به صورت مترادف به کار برده می شوند... تحقیق، روندی رسمی تر و منظم تر و قوی تر از روش علمی است. تحقیق با ساختار منظم تری از کنکاش توأم است که معمولاً منجر به نوعی ثبت مراحل و گزارش نتایج و دست آوردها می شود. ... تحقیق، مرحله ی تخصصی تری از روش شناسی علمی است. « (ص ۴۶)

در نهایت، دلاور تحقیق را چنین تعریف می کند:

«تحقیق، مجموعه ی فعالیت های منظمی است که هدف آن کشف حقیقت یا رسیدن از علم اندک به علم بیش تراست، خواه با روش آزمایشی صرف و خواه با روش های دیگر. « (ص ۴۷)*

گال، مردیت و گال (۱۳۸۴)، چهار نوع دانشی را که تحقیق برای حوزه ی تعلیم و تربیت فراهم می آورد، چنین برمی شمارند:

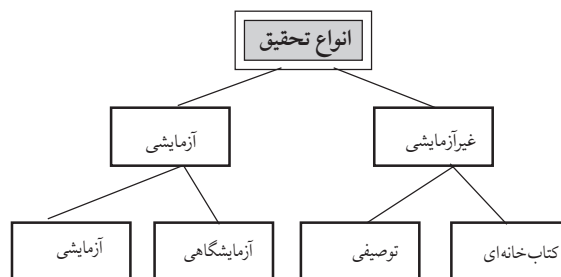
«(۱) توصیف^۲، (۲) پیش بینی^۳، (۳) بهبود^۴، (۴) تبیین^۵» [۲]، (ص ۱۹).

به این ترتیب می بینیم که در حوزه ی علوم تربیتی و آموزش، بهبود عمل یکی از نتایج مهم تحقیقات و پژوهش های این حوزه است که در حوزه ی علوم تجربی معنایی ندارد.

انواع تحقیق

از نظر ارزش ها و مقاصد و منابع مختلف، تحقیقات را به دو دسته ی بنیادی^۶ و کاربردی^۷ می توان تقسیم کرد [۱]. (صص ۴۸ تا ۵۰). این دو دسته از تحقیقات، از لحاظ هدف، زمان و مکان و شکل بیان مسئله، با یکدیگر متفاوت هستند و توجه به این تفاوت ها، ضروری است: از نظر هدف، تحقیق کاربردی در جست و جوی دست یابی به یک هدف عملی بوده و تأکید بر آن تأمین سعادت و رفاه توده ی مردم و مطلوب بودن فعالیت ها است. دانشی که از این طریق کسب می شود، راهنما و دستورالعملی برای فعالیت های عملی خواهد بود. از سوی دیگر، تحقیق بنیادی گرچه ممکن است کاربرد عملی نیز داشته باشد، ولی هدف عمده و اساسی آن، افزایش حیطه ی دانش و آگاهی است. هدف این نوع تحقیقات، کسب دانش و آگاهی نو بدون در نظر گرفتن ارزش آن ها در ایجاد تغییرات اجتماعی است. در چنین تحقیقی، تأکید بر مطالعه ی ارتباط درونی متغیرها است، نه بررسی قابلیت بشر در تأثیر گذاشتن بر ارتباط متقابل متغیرها. از نظر زمان و مکان، یافته های تحقیق کاربردی به میزان زیادی وابسته به زمان و مکان هستند در صورتی که تحقیقات بنیادی چنین نیستند. از نظر شکل بیان مسئله، تحقیق کاربردی، معطوف به عمل مؤثر است در حالی که تحقیق بنیادی، برای افزایش فهم و به طور کلی دانش بشری تلاش می کند. «با در نظر گرفتن ارتباط درونی بین علم و کاربرد، می توان نتیجه گرفت که تحقیق بنیادی و کاربردی نه تنها متضاد نیستند، بلکه مکمل یکدیگرند و توسط یکدیگر تغذیه می شوند» (دلاور، ۱۳۸۰، ص ۵۰)

یکی دیگر از انواع دسته بندی تحقیقات، دسته بندی آن ها از نظر روش تحقیق است. نمودار زیر این دسته بندی را نشان می دهد:



از منظر نوع داده های جمع آوری شده و شیوه های تحلیل آن داده ها نیز می توان تحقیقات را به دو رده ی کمی^۸ و کیفی^۹، دسته بندی کرد. پژوهش های علمی و اغلب پژوهش های کلاسیک، پژوهش های کمی هستند. این پژوهش ها، بر فلسفه ی اثبات گرایی^{۱۰} (یا تحصیل گرایی) استوار هستند. فرض اصلی اثبات گرایی این است که هر مسئله، راه حل خاص خود را دارد. آن ها هم چنین معتقدند که جلوه های محیط اجتماعی، واقعیت های مستقل را تشکیل می دهند و طی زمان و موقعیت ها، نسبتاً ثابت هستند.^{۱۱} پژوهشگران اثبات گرا، دانش را از طریق گردآوری داده های عددی و رفتارهای قابل مشاهده ی نمونه ها و سپر عرضه ی این داده ها به تحلیل عددی، فراهم می آورند (گال، بورگ؛ گال، ۱۳۸۴، ص ۶۰).

از سوی دیگر، به اعتقاد دنزین و لینکلن، «تحقیق کیفی، تحقیقی ماهیتاً چند روشی است و متضمن رویکرد تفسیری^{۱۲} و طبیعت گرایانه^{۱۳} به موضوع مورد مطالعه می باشد. این بدان معناست که پژوهشگران کیفی، اشیاء را در موقعیت های طبیعی آن ها مطالعه می کنند و می کوشند پدیده ها را برحسب معنایی که مردم به آن ها می دهند، مفهوم سازی یا تفسیر کنند» (نقل شده در گال؛ بورگ؛ گال، ۱۳۸۴، ص ۶۰). پژوهش های کیفی ریشه در فلسفه ی مابعد اثبات گرایی^{۱۴} مانند فلسفه ی تفسیری و فلسفه ی انتقادی^{۱۵} دارند. این پژوهشگران معتقدند که جلوه های محیط اجتماعی به عنوان تفسیرهایی به وسیله ی افراد ساخته می شوند و این تفسیرها، شکل گذرا و وابسته به موقعیت دارند. آن ها دانش را در درجه ی اول از طریق گردآوری داده های کلامی با مطالعه ی جدی و عمقی موارد و عرضه ی این داده ها به استقراء تحلیلی، فراهم می آورند (همان، ص ۶۰).

از انواع تحقیق های کیفی می توان به پژوهش تفسیری^{۱۶}، پژوهش مطالعه ی موردی^{۱۷} و پژوهش قوم شناسانه^{۱۸} و... اشاره کرد.

نقدهای وارد بر پژوهش های کلاسیک و دلایل ظهور پژوهش مابعد اثبات گراییان

به طور کلی نقدهایی را که به پژوهش های کلاسیک در حوزه های علوم تربیتی و اجتماعی وارد شده است، می توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- محقق، فردی خارج از موضوع است که درگیر عمل واقعی آن موضوع نیست؛
- نگاه محقق بیرونی، نهایتاً سودار است؛
- نظریه ها، بر عمل منطبق نیستند؛
- نتایج تحقیقات اغلب غیر کاربردی هستند؛
- لازم است کارورزان نیز در تحقیق درگیر شوند و در آن مشارکت کنند؛
- پیچیدگی های انسان در انقیاد قانون مندی های عام و فراگیر قرار نمی گیرد!

مهرمحمدی (۱۳۷۹) (نقل شده در رضایی، ۱۳۸۳ [۴]) با این باور که شناخت انسان و موقعیت های انسانی را نمی توان تحت انقیاد قانون مندی های عام و فراگیر به اصطلاح علمی درآورد، بر این عقیده است که ادعای شناخت، کنترل، پیش گویی و تبیین موقعیت های انسانی به پشتوانه ی قوانین عام و برخوردار از تعمیم پذیری عام با واقعیت وجودی آدمی، سازگار نیست. وی در مقابل اظهار می دارد: «اقدام پژوهی می تواند معرف رویکرد مطالعاتی سازگار با این اندیشه باشد. بدین معنا که با استفاده از این رویکرد می توان به دانش منطبق با شرایط و ویژگی های یک موقعیت خاص نائل آمد و لازم نیست دلالت های یافته های پژوهش های علمی و آکادمیک را به تصور برخوردار از تعمیم پذیری مطلق به کار گرفت» [۴]، (ص ۸۲).

کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶) نیز درباره ی حوزه ی تحقیقات آموزش

ریاضی ابراز می‌دارند:

«به خوبی معلوم است که یافته‌های تحقیقات آموزش ریاضی تأثیر کمی بر روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی در مدارس داشته است... در حقیقت رویکردهایی که توسط وزارت خانه‌های آموزش و پرورش پیشنهاد می‌شوند... صرف نظر از این که دارای مبنای تحقیقاتی اصیلی باشند یا نه... تأثیرات بیشتری بر ریاضیات مدرسه‌ای دارند تا رویکردهایی که بر مبنای یافته‌های حاصل از مطالعات تحقیقاتی دانشگاهی هستند» ([۵]، ص ۱۱۱).

به اعتقاد ایشان، در واقع در اغلب ایالت‌های کشور آمریکا و در اغلب کشورهای آسیای جنوب شرقی و اقیانوسیه (و احتمالاً در بسیاری از کشورهای دیگر)، معلمان ریاضی در هیچ یک از تصمیم‌گیری‌هایی که برای بهبود و ارتقای وضع آموزش ریاضی می‌شود، دخالتی ندارند و تنها به آن‌ها گفته می‌شود که چه کار کنند و چگونه آن کارها را انجام دهند و دائم با ارزیابی بیرونی، عملکردشان مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. آن‌ها معتقدند برنامه‌هایی مانند توسعه‌ی معلمان، مشارکت معلمان و توانمندسازی معلمان، تنها حرف‌هایی است که زده می‌شود و عواملی چون تمرکز، استانداردسازی و منطق‌گرایی صرف، مانع از تحقق آن‌ها می‌باشد.

منتقدینی مانند کلمنتس و الرتون که به انواع برنامه‌های یکسان‌سازی و نیز به برنامه‌های یونسکو و کمک‌های بانک جهانی و سایر نهادهای مشابه به پیشرفت آموزشی کشورهای در حال توسعه، انتقادهای جدی دارند، معتقدند بسیاری از پروژه‌هایی که از سوی این نهادها هزینه می‌شود تا برای آموزش در کشورهای در حال توسعه صورت گیرد، اغلب برای این کشورها بی‌فایده است؛ زیرا برنامه‌های تجویزی است که در آن‌ها، نیازهای واقعی کلاس‌های درس این کشورها و مشکلات واقعی معلمان و دانش‌آموزان آن کشورها در نظر گرفته نشده است. ایشان معتقدند باید برای پروژه‌هایی هزینه شود که اجازه دهد صدای معلمان و دیگر آموزگاران که در این حوزه‌ها به‌ویژه حوزه‌ی آموزش ریاضی - کار می‌کنند، شنیده شود (نقل به مضمون از [۵]، صص ۱۱۱ تا ۱۱۳).

رابطه‌ی معلمان با پژوهش

مهرمحمدی (۱۳۸۳) در [۴] اظهار می‌دارد:

«به طور کلی معلمان با اِعمال وظایف معلمی در مسیرهای چندگانه‌ی زیر، ایفای نقش پژوهشی می‌نمایند:

۱. به کارگیرنده‌ی یافته‌های پژوهشی (مصرف‌کننده‌ی دانش)؛
۲. معلم به عنوان مدرس پژوهش به دانش‌آموزان؛
۳. معلم به عنوان پژوهشگر (محقق در مورد عمل تدریس خویش)» ([۴]، صص ۲۵-۴۰).

در اولین زمینه، همان‌گونه که دیدیم، به دلایل بسیار متعددی، من جمله عدم کاربردی بودن نتایج بسیاری از تحقیقات دانشگاهی، جدایی نظریه‌های علمی از عمل واقعی، عدم آشنایی معلمان با زبان این نوع پژوهش‌ها، مقاومت معلمان در مقابل تغییرات، عدم پذیرش نتایج حاصل از تحقیقات توسط معلمان به دلیل عدم آشنایی ایشان با مبانی فلسفی و نظری تحقیقات و... بسیاری از تحقیقات آموزشی در حوزه‌ی عمل، مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

در زمینه‌ی دوم، که در واقع به آموزش مسئله - محور بازمی‌گردد. آشنایی کامل معلمان با شیوه‌های حل مسئله و روش‌های پژوهش علمی و باور آن‌ها به این نوع آموزش و ایجاد فرهنگ پرسش‌گری و پژوهش در کلاس درس، ضروری است.

و بالاخره زمینه‌ی سوم، همان چیزی است که کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶) نیز برای رفع مشکلات معلمان ریاضی پیشنهاد کرده‌اند: «تحقیق عمل در مدرسه، تحقیقی است که توسط معلمان انجام می‌شود، نه تحقیقی که برای معلمان یا در مورد معلمان و کلاس درس ایشان و توسط محققان بیرونی (خارج از کلاس درس) باشد» ([۵]، ص ۱۱۳).

«تحقیق عمل» آموزشی

گال و بورک و گال (ترجمه شده در ۱۳۸۶)، تحقیق عمل را به طور کلی چنین معرفی می‌کنند: «شکلی از پژوهش‌های کاربردی است که هدف اصلی آن، بهبود عملکرد حرفه‌ای محقق می‌باشد» ([۳]، ص ۱۲۷۰).

گویا (۱۳۸۳) نیز در [۴] نقل می‌کند که «تحقیق عمل آموزشی، نوعی روش تحقیق است که موضوع اصلی آن نفس عمل تدریس و محقق آن، معمولاً معلم شاغل به تدریس می‌باشد. معلمانی که در این نوع تحقیق شرکت می‌کنند، اغلب بر تغییرات عمل خود نظارت دارند و با بازتاب در عمل، هم عمل تدریس را به نظریه می‌کشند و هم نظریه‌های عمل یا دانش کاربردی خود را غنی‌تر می‌سازند» ([۴]، ص ۴۷).

در این تعریف، بر اهمیت نقش بازتاب^{۱۹} در تحقیق عمل اشاره شده است که کمی بعد به این موضوع، بیش‌تر خواهیم پرداخت.

در [۴] رضایی (۱۳۸۳) بر این باور است که سابقه‌ی مفهوم تحقیق عمل، به آثار جان دیویی در دهه‌ی ۲۰ میلادی و کرت لوین در دهه‌ی ۴۰ میلادی بازمی‌گردد. این واژه (Action Research) اولین بار توسط لوین در سال ۱۹۴۴ معرفی شد و در سال ۱۹۴۹، توسط استفن کُری، برای اولین بار در جامعه‌ی آموزشی مطرح شد ([۴]، ص ۶۸).

وی، بر تعاریف ارائه شده از تحقیق عمل، مروی دارد که برای آشنایی بیش‌تر با این روش تحقیق، به بررسی آن می‌پردازیم ([۴]، صص ۶۸ تا ۷۲):

بورلی (۱۹۹۳) در [۴]، اقدام‌پژوهی را پژوهشی آگاهانه، سنجیده و معطوف به راه‌حل تعریف می‌کند که به صورت فردی یا گروهی انجام می‌شود. بورلی (۱۹۹۳)، نظر جان البوت را درباره‌ی اقدام‌پژوهی به این شرح بیان می‌کند: «اقدام‌پژوهی معلمان به مسائل عملی روزانه‌ای که ایشان تجربه کرده‌اند مربوط می‌شود، به جای این که به مسائل نظری تعیین شده از سوی پژوهشگران حرفه‌ای در یک رشته‌ی علمی ارتباط یابد.» کُری هم در همان منبع اقدام‌پژوهی را به عنوان فرآیندی تعریف کرد که از طریق آن، کارورزان آموزشی، اقدامات خود را مورد بررسی و پژوهش قرار می‌دهند تا مسائل عملی خویش را حل کنند. اقدام‌پژوهی، فعالیتی مبتنی بر تشریک مساعی و همکاری است که در آن کارورزان آموزشی با هم همکاری می‌کنند تا یکدیگر را در طراحی و انجام پژوهش در کلاس درس یاری رسانند.

کارسون و همکاران (۱۹۸۹) نیز در [۴] اقدام‌پژوهی را ترکیبی از عمل و پژوهش و تلاش برای شناخت اقدامات تربیتی به منظور اصلاح و بهبود محیط آموزشی تعریف می‌کنند و بر این نکته تأکید دارند که بیشتر کسانی که در یک پروژه‌ی اقدام‌پژوهی مشارکت داشته‌اند، از نقش و جایگاه تجربه سخن می‌گویند.

مسترز (۲۰۰۰)، اقدام‌پژوهی را پژوهشی نظام‌دار، گروهی، مبتنی بر همکاری، خوداندیشیده و انتقادی می‌داند که توسط شرکت‌کنندگان در این پژوهش انجام می‌شود [۴].

برایان (۱۹۹۶، [۴])، اقدام‌پژوهی را صورتی از تحقیقات آموزشی می‌داند که

در آن محقق، کسی است که عمل آموزشی را انجام می دهد یا جریان تغییر را هدایت می کند.

گلانز (۱۹۹۹) در [۴] اقدام پژوهی را شکلی از پژوهش نظام یافته معرفی می کند که به عنوان روشی برای درگیر کردن کارگزاران، معلمان و مدیران در شناخت بهتر اقداماتشان شکل گرفته و پدید آمده است.

مک نیف و همکاران (ترجمه ی آهنچیان ۱۳۸۲، [۴]) می گویند: «اقدام پژوهی نوعی پژوهش کارور است که می تواند به شما کمک کند تا در هر جایی که مشغول به کار هستید، وظایف شغلی خود را به نحو بهتری انجام دهید. به زبان ساده، پژوهش کارور بدین معناست که پژوهش توسط خود افراد و ضمن کارشان صورت می گیرد.» کلمنتس والرتون (۱۹۹۶)، تحقیق عمل را رویکردی «جدید» معرفی می کنند که بر این فرض استوار است که اگر خود معلمان کاملاً به عنوان مشارکت کنندگان داوطلب در پروژه های تحقیقی آموزشی در نظر گرفته شوند، آن گاه یافته های تحقیقاتی به احتمال بسیار زیاد به عمل [تدریس] پیوند می خورند [۵]، صص ۱۱۳-۱۱۴.

ضرورت تحقیق عمل در فرآیند یاددهی-یادگیری

مهم ترین ضرورت مطرح شدن تحقیق عمل در تحقیقات آموزشی، همان گونه که اشاره شد، انتقادهای وارد بر تحقیقات کلاسیک و در واقع ضرورت تاریخی وجود آن بود. ** از سوی دیگر به نظر می رسد «اقدام پژوهی، ابزاری مؤثر در رشد حرفه ای معلمان است» (رضایی، ۱۳۸۳، [۴]، صص ۸۶ تا ۸۹). لذا وجود آن برای توسعه ی حرفه ای معلمان، ضرورت پیدا می کند.

در [۴]، کارسون و همکاران (۱۹۸۹) نیز دلایل چندی را برای توجه درگیر شدن در پروژه ی تحقیق عمل برمی شمارند. این دلایل عبارتند از:

● تحقیق عمل با سؤالات و مسائل ما سروکار دارد نه مسائل و سؤالات شخص دیگر؛

● تحقیق عمل در لحظه ی حال و اکنون شروع می شود. به عبارت دیگر می توان اجرای اقدام پژوهی را به سرعت آغاز کرد؛

● تحقیق عمل، بارها و بارها از این آزمون که از طریق آن مربیان می توانند شناخت بهتری از اقدامات آموزشی به دست آورده و آن ها را بهبود بخشند، موفق بیرون آمده است؛

● تحقیق عمل می تواند به تدریس بهتر و یادگیری مؤثرتر منجر شود؛

● تحقیق عمل می تواند به برقراری ارتباط های مفیدتر با همکاران کمک کند؛

● تحقیق عمل می تواند برخی از مرزهای سلسله مراتبی موجود را که بین مدیران و معلمان مدرسه جدایی ایجاد می کند از بین ببرد؛

● تحقیق عمل، مربیان و معلمان را با شیوه های دیگر بررسی و رویکرد نسبت به مسائل آموزشی و نیز با روش های جدید تأمل و توجه به اقدامات آموزشی آشنا و مجهز می سازد؛

● تحقیق عمل به مدیران و معلمان کمک می کند تا عاداتی را که کسب کرده اند، مورد بررسی و تجدیدنظر قرار دهند؛

● روی هم رفته می توان نتیجه گرفت که تحقیق عمل ابزاری در دست کارگزاران و دیگر افراد ذی نفع است که به آن ها کمک می کند تا نیازها را بشناسند، فرآیندهای رشد را ارزیابی کنند و نتایج تغییراتی را که تعریف، طراحی و اجرا کرده اند، ارزشیابی نمایند. (صص ۷۷، ۷۸).

شباهت و تفاوت تحقیق عمل با سایر اشکال پژوهش

تحقیق عمل در مهم ترین خصیصه، یعنی استفاده از روش علمی، با سایر روش های تحقیق، وجه اشتراک دارد ([۴]، ص ۷۸). هم چنین، در تحقیق عمل، از داده های کمی یا داده های کیفی یا از هر دو نوع داده استفاده می شود ([۳]، ص ۱۲۷۶).

رضایی (۱۳۸۳) به نقل از مک نیف و همکاران، وجود اشتراک تحقیق عمل با سایر تحقیقات را در ویژگی های زیر بیان می کند:

- به دانش جدید منجر و منتهی می شود؛

- شواهدی را برای پشتیبانی از این دانش تدارک می بیند؛

- فرآیند شکل گیری دانش جدید را آشکار می سازد؛

- دانش جدید را به دانش موجود پیوند می زند.

در خصوص تفاوت های تحقیق عمل با دیگر اشکال تحقیق، باید به این نکته توجه کرد که تحقیق عمل، ذاتاً یک پژوهش چند روشی است ([۳]، ص ۱۲۷۶). هم چنین، محقق در تحقیق عمل، در جست و جوی راه حل برای یک مسئله ی خاص در یک موقعیت خاص است و این، مهم ترین تفاوت تحقیق عمل با سایر پژوهش های علمی است.

«به عبارت دیگر، اقدام پژوهی کاملاً وابسته به موقعیت^{۱۱} است یعنی محقق، پس از تشخیص مشکلی در یک موقعیت خاص، تلاش می کند تا آن مشکل را در همان موقعیت حل کند. این یکی از وجوه تفاوت اقدام پژوهی با پژوهش کاربردی است» (رضایی، [۴]، ص ۸۱). بنابراین نتایج حاصل از تحقیق عمل، تعمیم پذیر نیست و نیز خواننده در استفاده از آن، نقش دارد (گال، مردیت، گال، [۳]، ص ۱۲۷۸). در واقع محقق در تحقیق عمل، برخلاف سایر پژوهش های کاربردی، در پی یافتن نتایج و یافته هایی نیست که به موقعیت های مشابه، تعمیم پذیر باشند؛ بلکه روی یک مسئله ی ویژه در یک موقعیت خاص متمرکز می شود تا در ارتباط با آن موقعیت یا مقصود خاص، دانش دقیقی کسب کند (نقل به مضمون از رضایی، [۴]، صص ۸۱ و ۸۲).

برای مقایسه ی تحقیق عمل با دیگر پژوهش های علمی، به جدول پیوست (۳) این مقاله که از گال، بورگ و گال، ۱۳۸۶، ج ۲، ص ۱۲۷۲ گرفته شده است، مراجعه کنید.

بد نیست بدانیم که ساکی (۱۳۸۳)، به نقل از برین (۱۹۹۸)، ابراز می دارد که اقدام پژوهی با انواع نام ها شهرت دارد. پژوهش مشارکتی^{۱۲}، بررسی گروهی^{۱۳}، پژوهش رهایی بخش^{۱۴}، یادگیری همراه با عمل^{۱۵} و پژوهش در موقعیت^{۱۶} از عناوین متعددی است که برای معرفی فعالیت اقدام پژوهی استفاده می شوند، اما همه ی آن ها مضمون مشترکی را در برمی گیرند ([۴]، ص ۹۵).

واژه ی کارورز^{۱۷} که در برخی متون با کارگزار یا کارور نیز معادل سازی شده است، به معنی کلیه ی افراد درگیر در تحقیق عمل است که با عمل مورد بررسی، ارتباط واقعی و عملی دارند.

هم چنین نویدی (۱۳۸۳)، ابراز می دارد که آشکالی از تحقیق با عناوین «تحقیق مشارکتی^{۱۸}»، «تحقیق تجربی و عمل گرا^{۱۹}» که در طول تاریخ توسعه ی علمی، توسعه یافته اند، همگی رویکردهای مختلفی هستند که به خانواده ی تحقیق عمل تعلق دارند ([۴]، ص ۱۷۶).

کارورزان در تحقیق عمل، پژوهش را خود طراحی و اجرا می کنند. برخلاف پژوهش های مرسوم دانشگاهی که هدفشان یافتن روابط بین پدیده ها یا متغیرهاست، این نوع تحقیق با هدف بررسی موضوع هایی است که فرد یا افراد در محیط کار خود

در خصوص شغلشان با آن درگیر هستند و می خواهند از راه پژوهش، آن را حل کرده یا کاهش دهند؛ یعنی وضعیت موجود را تغییر دهند.

در شماری آینده ی این مجله و قسمت بعدی مقاله، با تحقیق عمل بیشتر آشنا خواهیم شد.

پیوست (۱)، مراحل تحقیق علمی

- بیان مسئله؛
- بیان فرضیه؛
- تعیین هدف پژوهش؛
- تعیین اهمیت پژوهش؛
- تعریف عملیاتی واژه ها؛
- بررسی پیشینه ی پژوهش؛
- روش اجرای پژوهش (نمونه گیری، طرح پژوهش، شیوه های سنجش)؛
- تجزیه و تحلیل داده های پژوهش؛
- نتیجه گیری؛
- بیان محدودیت ها و پیشنهادهایی در رابطه با پژوهش.

پیوست ۳. جدول مقایسه ی تحقیق عمل با سایر پژوهش های علمی

عنوان	پژوهش رسمی	تحقیق عمل
آموزش مورد نیاز	آموزش مفصل	به تنهایی یا با کمک مشاور
اهداف مسئله	تولید دانش تعمیم پذیر	تولید دانش کاربردی در موقعیت خاص
شیوه ی بیان مسئله	مرور پژوهش های پیشین	مسائل یا اهدافی که اخیراً پیش آمده است
شیوه ی بررسی پیشینه	مفصل، با استفاده از منابع دست اول	موجز، با استفاده از منابع دست دوم
رویکرد نمونه گیری	نمونه گیری تصادفی یا خوشه ای	دانش آموزان یا مراجعانی که با آن ها کار می کنند
طرح پژوهش	کنترل شدید، چهارچوب زمانی طولانی	رویه های انعطاف پذیر، تغییر در خلال مطالعه، چهارچوب زمانی کوتاه و کنترل از طریق مثلث سازی
شیوه های سنجش	ابزارهای پیش آزمود و ارزشیابی	ابزارهای متداول یا آزمون های میزان شده
تجزیه و تحلیل داده ها	آزمون های آماری، تکنیک های کیفی	تأکید بر معنی داری عملی نه آماری، ارائه داده های خام و نمودارها
کاربرد نتایج	تأکید بر معناداری نظری، افزایش دانش درباره ی تدریس و یادگیری به طور عام	تأکید بر معناداری عملی، بهبود تدریس و یادگیری در یک کلاس خاص
گزارش نتایج	چاپ گزارش تحقیق، ارائه به مجلات علمی یا همایش ها	ارائه ی غیررسمی به همکاران، ارائه ی خلاصه به گزارش

پیوست (۲)، تاریخچه ی مختصری از تحقیق عمل

در سال ۱۹۴۴، لوین برای مسائل اجتماعی و جنگ، این روش تحقیق را وضع کرد. هدف وی، بهبود اوضاع و شرایط از طریق بررسی اعمال انجام شده و به دنبال آن تصمیم گیری های مناسب بود. واضع واژه ی Action Research نیز خود لوین است.

در دهه ی ۵۰ تا ۷۰ میلادی، این نوع تحقیق عملاً کنار گذاشته شد و روش های علمی در انواع پژوهش ها در حوزه های مختلف علوم، مطرح شدند. پس از موفقیت شوروی سابق در پرتاب ماهواره ی اسپوتنیک به فضا در سال ۱۹۵۷ میلادی، و سایر موفقیت های فضایی این کشور، و نیز پس از شکست های آموزشی آمریکا در دهه ی ۷۰ میلادی، عدم کفایت تحقیقات کمی صرف در تحقیقات آموزشی محرز شد و تحقیق عمل مجدداً اهمیت یافت. هم چنین جدایی بین نظریه و عمل، نیاز به تحقیقات متکی بر توسعه ی حرفه ای و علاقه به برنامه ی درسی کاربردی، از دیگر علل ظهور و پیدایش مجدد روش های تحقیق کیفی، به ویژه تحقیق عمل در آموزش می باشد (گویا [۴]، ص ۹).

در سال ۱۹۸۱ میلادی، در کنفرانسی در کشور استرالیا، تحقیق عمل رسماً معرفی شد و در حال حاضر استرالیا، پیش تاز این نوع تحقیق در دنیا می باشد. مطالعه ی ادبیات مربوط به تحقیق عمل این استنباط را به ما می دهد که این رویکرد، نوعی پاسخ خردمندانه به نیازهای علمی و اجتماعی انسان است که در بستر زمان به تدریج شکل گرفته و در عصر حاضر پدیدار شده است. علاوه بر عوامل فوق که برشمردیم، فلسفه ی عمل گرا (Pragmatism)، نظریه ی انتقادی (Critical Theory)، نظریه ی ساخت و سازگرایی (Constructivism)، روان شناسی انسان گرا (Humanistic) و روان شناسی سلامت (Health)، تفکر سیستم ها و معرفت شناسی ارسطویی و نیز نهضت فمینیسم و بعضی گروه های اقلیت، شرایط مناسب را برای ظهور و توسعه ی اقدام پژوهی فراهم ساختند.

پی نوشت

- * مراحل تحقیق را در پیوست (۱) این مقاله مطالعه کنید.
- ** تاریخچه ی مختصری از تحقیق عمل را در پیوست (۲) این مقاله مطالعه کنید.

- | | |
|--|------------------|
| 1. Action Research | 6. Basic |
| 2. Description | 7. Applied |
| 3. Prediction | 8. Quantitative |
| 4. Improvement | 9. Qualitative |
| 5. Explanation | 10. Positivism |
| 11. افلاطون گرایان در فلسفه ی ریاضی، مانند اثبات گرایان در علم می اندیشند. | |
| 12. Hermeneutic | 17. Case Study |
| 13. Naturalistic | 18. Ethnographic |
| 14. Post Positivism | 19. Reflection |
| 15. Critical Theory | 20. Situational |
| 16. Interpretive | |

منابع

- [۱] دلاور، علی. (۱۳۸۰). مبانی نظری و عملی پژوهش در علوم انسانی و اجتماعی، انتشارات رشد.
- [۲] گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۳۸۴). روش های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان شناسی (جلد اول)، ترجمه ی گروه مترجمان (به اهتمام دکتر احمد رضا نصر)، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه ها (سمت)
- [۳] گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۳۸۶). روش های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روان شناسی (جلد دوم)، ترجمه ی گروه مترجمان (به اهتمام دکتر احمد رضا نصر)، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه ها (سمت)
- [۴] گروه نویسندگان (۱۳۸۳) (برنامه ریزی، تدوین و تولید رضا ساکی). اقدام پژوهی: راهبردی برای بهبود آموزش و تدریس (اصول، نظریه ها و چارچوب عملی)، چاپ سوم، انتشارات پژوهشکده ی تعلیم و تربیت، وزارت آموزش و پرورش.
- [5] Clements, K; Elerton, N. (1996). *Mathematics Education, Past, Present, Future*, UNESCO.

میزگرد

اعضای هیئت تحریریه ی مجله ی رشد آموزش ریاضی
به مناسبت انتشار صدمین شماره ی مجله



ویژه نامه ی صدمین شماره ی مجله ی رشد آموزش ریاضی - میزگرد و سخنرانی

اشاره

میزگرد حل مسئله مشخص نکردیم. ولی مسئله این بود که به هر حال، این مجله به این دلیل تأسیس شده بود که در خدمت آموزش ریاضی باشد و در این مسیر، فراز و فرودهای زیادی از سال ۶۳ تا به الان داشته است. اما مهم این است که خوشبختانه، با تمام این فراز و فرودها، هیچ شماره اش از دست نرفته است. یعنی حتی یادم هست که گاهی وقت ها، از همان شماره های اول اگر اوضاع از نظر تولید و اجرا، بحرانی می شد، حتی گاهی دو شماره ی مجله در یک شماره درمی آمد اما منظم منتشر می شد. به هر حال، صدمین شماره را تقسیم بر چهار بکنید، نشانه ی تعداد سال هایی است که این مجله در خدمت آموزش ریاضی ایران بوده است. مشابه این مجله قبل از انقلاب، مجله های پیک های دانش آموزی،

با نزدیک شدن به انتشار صدمین شماره ی مجله ی رشد آموزش ریاضی، بر آن شدیم تا به این مناسبت، نشستی با همه ی اعضای تحریریه ی مجله داشته باشیم و نظرات آن ها را بشنویم. آن چه می خوانید، صحبت های ایشان در میزگردی است که در تاریخ ۲۷ آبان ۱۳۸۸ برگزار شد.

خانم دکتر زهرا گویا: خانم چمن آرا پیشنهاد دادند که برای صدمین شماره ی مجله که تابستان ۸۹ منتشر می شود، یک میزگرد دوستانه با اعضای هیئت تحریریه داشته باشیم. با پذیرش این پیشنهاد، موضوع خاصی برای این میزگرد - مانند میزگرد اثبات یا

می‌رفتیم و قاعده‌ها و شرایط این ارتقا را رعایت می‌کردیم، مانند ترکیب مقالات، درصد مقاله‌های پژوهشی و نسبت آن با مقالات ترجمه‌ای و نظایر آن، آقای دکتر رجبعلی پور در آن شماره که مخصوص بیستمین سال انتشار مجله درآوردیم گفتند که اگر این کار را بکنیم عملاً مجله، مجله‌ی دانشگاهی می‌شود و چون امتیاز دارد، دانشگاهی‌ها علاقه‌مندی بیشتری نشان می‌دهند. در کل عرض کردم و خطر بالقوه‌اش این است که تمام یا بخش عمده‌ای

پیک معلمان و ماهنامه‌ی آموزش و پرورش بود که به شکل‌های مختلف به معلمان خدمات ارائه داده‌اند. ولی بعد از این، توقیفی داشتیم تا سال ۶۳ که اولین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی منتشر شد. همه فکر کردیم که برای این صدمین شماره‌ی مجله، به هر حال باید کاری بکنیم و جشن سده‌اش را بگیریم. آقای رضائی گفتند که صددرصد! بعد فکر کردم دیدم تفسیر قشنگی است! صد در صد! واقعاً صد در صد چی؟ چی کار کردیم که استحقاق طرح

صددرصد را داشته باشیم! فکر کردم که با توجه به پیشنهادی هم که خانم چمن‌آرا دادند، لطف کنید تا با هم، مروری داشته باشیم بر صد شماره‌ی مجله. به اصطلاح بلند فکر کنیم راجع به اتفاقاتی که در این مدت رخ داده و این که مجله چه تأثیری در آموزش قبل و ضمن خدمت معلمان داشته، هم چنان که در ایجاد هویت برای رشته‌ای به نام آموزش ریاضی و کمک به تربیت نسل جدیدی از معلمانی که در ضمن، آموزشگر ریاضی هم هستند ایفای نقش کرده است. به هر حال، اگر صد شماره‌ی مجله را مروری بکنیم - مانند کاری که برای بیستمین سال تأسیس مجله، از شماره‌ی ۱ تا شماره‌ی ۷۶ را مرور کردیم - به نکته‌ی جالبی برمی‌خوریم که در ۷۶ شماره‌ی اول این مجله ندیده بودیم و آن نکته این بود که

تعمیم و تخصیص، از اولین شرط‌های یک کار علمی است یعنی اگر در یک مجله، بخواهیم راجع به عالم و آدم صحبت کنیم و تمام مسائل آموزشی را حل کنیم، امکان‌پذیر نیست. این مجله قرار بوده که در خدمت آموزش ریاضی باشد، پس باید رسالتش، ترویج و توسعه‌ی آموزش ریاضی در ایران باشد



از مخاطب معلم را از دست بدهیم و ما فکر کردیم که واقعاً این یک هشدار جدی است و این هشدار را جدی گرفتیم و اصلاً بی‌خیال آن شدیم که مجله هر رتبه‌ای می‌خواهد داشته باشد. مهم این است که بخشی از تاریخ آموزش ریاضی ایران شده. هم چنان که مثلاً فرض کنید ماهنامه‌های آموزش و پرورش همیشه بخشی از آموزش و پرورش نوین ایران هستند، حالا رتبه‌اش هرچه می‌خواسته باشد یا امتیازاتش هرچه که می‌خواسته باشد. عذرخواهی می‌کنم از این مقدمه‌ی شاید بی‌نظمی که خدمتتان گفتم، ولی چیزی بود که دلم می‌خواست مطرح کنم و امیدوارم کمک کنید تا یک هم‌اندیشی با هم داشته باشیم و نتیجه‌ی آن را در قالب این میزگرد، در اختیار مخاطبان خود قرار دهیم.

آقای میرزا جلیلی: عرض کنم من در این زمینه مقاله‌ای نوشتم و جمع‌بندی کردم. در آن مقاله، ممکن است مطالبی از قلم افتاده باشد یا چیزی که لازم نیست، گفته شده باشد. از این جهت با دقت این مقاله را مرور کردم که اگر صلاح بدانید با عنوان انتخابی «از میلاد تا میلاد» یعنی از «بهار ۶۳ تا تابستان ۸۹» به چاپ برسانید. اما لازم می‌دانم بگویم که مشابه مجلات رشد، از سال

مخاطبان ما خیلی متنوع‌تر شده‌اند - اگرچه متأسفانه تهران هم چنان بی‌مخاطب است، زیرا به دلایلی که موضوع بحث الان ما نیست، در تهران توجه چندانی به مجله نشده است. با این وجود، از شهرستان‌هایی نامه گرفته‌ایم که واقعاً نام آن را صرفاً از روی همین مکاتبات شناختیم. هم چنین، از تمام نقاط کشور، معلمان زیادی با ما همکاری کرده‌اند که برایمان قابل احترام‌اند و واقعاً ممنون همه‌ی آن‌ها هستیم. شمارگان مجله از سه هزار تا به بیست هزار تا رسیده که این، نشان‌دهنده‌ی افزایش چشم‌گیر مخاطبان آن است. به هر حال من فکر می‌کنم احساس مسئولیت کردن در مقابل بیست هزار نفر - اگر هر خریدار مجله فقط خودش مجله را مطالعه کند - حداقل بیست هزار نفر از نوشته‌های ما تأثیر می‌پذیرند. من خواهم این است که وقتی بگذاریم و ببانداشیم که چه کار بکنیم تا این بیست هزار نفر مخاطب ما، از مجله استفاده‌های بهینه کنند و به تدریج، جزو همکارانمان درآیند یعنی تعداد همکاران را بیشتر بکنیم. یادم هست که وقتی می‌خواستیم درخواست ارتقای رتبه‌ی مجله را به علمی ترویجی و حتی علمی-پژوهشی بکنیم (چون قابلیت علمی پژوهشی شدن را داشت) تا آستانه‌ی آن هم پیش

۱۳۴۵ در سازمان کتاب‌های درسی، مجلات غیرتخصصی تحت عنوان پیک دانش آموز، پیک معلم و بعد پیک راهنمایی منتشر می‌شد و مستقیماً، هم‌چون کتب درسی ابتدایی، در مدارس توزیع می‌شد. بعد از انقلاب این مجلات با عنوان‌های جدید رشد دانش آموز و رشد معلم، با آرایش و گام‌های نو، کار خود را آغاز کردند که مورد استقبال مدارس قرار گرفت و هنوز هم توزیع این مجلات در مدارس انجام می‌گیرد. لازم به یادآوری است که تنها مجله‌ی اختصاصی ریاضی قبل از انقلاب مجله‌ی «یکان» بود که با هزینه‌ی شخصی و مسئولیت آقای دکتر عبدالحسین مصحفی و مدیریت داخلی همسر ایشان که رئیس مرکز تربیت معلم دختران بود، منتشر می‌شد. در آن مجله، مسائل و مطالب مختلف مورد

بحث و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت، از جمله مسائل کنکور؛ و مخاطبان مجله دبیران و دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی بودند. متأسفانه این مجله در سال ۵۶ با مشکلات مالی مواجه شد و در آستانه‌ی تعطیلی قرار گرفت.

بعد از انقلاب، برای بررسی مسئله‌ی افت تعداد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی، شورای افت مرکب از استادان و دبیران ریاضی، رؤسای مدارس و اعضای گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف در این دفتر تشکیل شد. این شورا بعد از یک سال یا بیشتر جلسات هفتگی خود، به این جمع‌بندی رسید که لازم است یک مجله‌ی ریاضی از طریق گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی انتشار یابد.

شروع انتشار مجله هم‌زمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود و این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا موارد حذف شده یا جابه‌جا شده، از طریق مجله به اطلاع معلمان و دانش‌آموزان رسانده شود.

خانم دکتر سهیلا غلام‌آزاد: من البته از آقای جلیلی که با حضور ذهن کامل و به تمام نکات ریز اشاره کردند، تشکر می‌کنم. ولی نکته‌ای که خیلی به چشم می‌آید این است که در این چند سال اخیر، افراد زیادی با مجله همکاری داشتند و مقاله‌ها، جنبه‌ی آموزشی زیادی داشته است. مقالاتی که در دوازده سال اخیر در مجله چاپ شده سعی کرده جهت‌گیری آموزشی مجله را برجسته‌تر کند. الان که به عنوان یک معلم در دانشگاه‌ها درس رشته‌ی آموزش ریاضی را تدریس می‌کنم می‌بینم که چه قدر مقالات مجله‌ی رشد می‌تواند به عنوان مواد آموزشی مورد استفاده‌ی دانشجوین قرار گیرد. هم چنین در کنفرانس‌های آموزش ریاضی

می‌بینم اغلب ارجاع‌های مقالات به مقالات مجلات رشد آموزش ریاضی هست و همین‌طور مثلاً در پایان‌نامه‌های این رشته، کمتر پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی هست که جایی به یکی از مقالات این مجله ارجاع نداده باشد. به همین خاطر، من می‌خواستم اگر موافق باشید، پیشنهادی بکنم خدمت شما. با توجه به این که به هر حال ما منابع آموزشی که خصوصاً در رشته‌ی آموزش ریاضی به زبان فارسی به صورت کتاب یا مجموعه مقالات باشد نداریم، اگر موافق باشید تعدادی از مقالات مجله را که مخاطب بیشتری را داشته یا بیشتر مورد ارجاع بوده را دست‌چین کنیم و بعد از ویرایش جدید، به صورت یک یا چند کتاب چاپ کنیم. به هر حال، مقالات ترجمه‌ای مجله، عمدتاً مقالات کلاسیکی بودند که ترجمه شده‌اند یا به این شکل گردآوری شده‌اند. اگر موافق باشید که چنین کاری انجام شود، فکر می‌کنم که خدمت بزرگی خواهد بود به رشته‌ی آموزش ریاضی که منبع خوبی در اختیار دانشجویها قرار بگیرد. من ایده‌ی این پیشنهاد را از کتاب کلاسیکس گرفتم. این کتاب مجموعه‌ای از مقالات کلاسیک در آموزش ریاضی است که توسط شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) در سال ۲۰۰۴ به چاپ رسیده است.

گویا: چگونه این اطلاعات جمع‌آوری شد؟
غلام‌آزاد: فکر می‌کنم این شورا، با ۵۰ نفر از کسانی که در واقع آموزشگران سرشناس ریاضی بودند مکاتبه کردند و از آن‌ها خواستند که مقالاتی را که به نظرشان، مقالات کلاسیک در رشته‌ی آموزش ریاضی است و چاپ شده‌اند را معرفی کنند. چه در مجلات چه در کتاب‌ها یا بخشی از کتاب‌ها، یعنی به هر شکلی که مقاله در جایی چاپ شده است. این افراد، مقالات را معرفی کردند و هر کسی با توجه به تجربه‌ای که داشت، مقاله‌ای را که احساس می‌کرده در این رشته مقاله‌ی کلاسیک است، معرفی کرد. بعد عده‌ای هم آمدند و این‌ها را داوری کردند. در نتیجه، مقالاتی که بیشترین آراء را به دست آوردند، انتخاب شدند و به صورت یک مجلد، چاپ شدند. این مقاله‌ها را که آدم مرور می‌کند، واقعاً احساس می‌کند که یک منبع درسی قوی است که در آن، هم زمینه‌های مختلف تحقیقاتی مطرح شده هم سیر تحولی زمینه‌ها و روش‌های تحقیق بیان شده است. مثلاً از سال ۱۹۶۰ در رشته‌ی ریاضی چه تحقیقاتی مطرح بوده و تا الان، به چه شکلی تغییر و تحول پیدا کرده است. کلاسیکس مجموعه‌ی قوی و خوبی

شروع انتشار مجله هم‌زمان با تألیف جدید کتب ابتدایی و راهنمایی بود و این فرصت مناسبی بود که تغییرات کتاب‌ها یا موارد حذف شده یا جابه‌جا شده، از طریق مجله به اطلاع معلمان و دانش‌آموزان رسانده شود

است. من فکر می‌کنم با توجه به شرایطی که الان رشته‌ی آموزش ریاضی در ایران دارد، اغلب دانشجویهای این رشته مشکلی که دارند این است که نمی‌توانند مقاله‌ها را خودشان شخصاً پیدا کنند. اگر ما چنین کاری را انجام بدهیم و تعدادی از مقاله‌های چاپ شده در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی را با توجه به محتوای آن‌ها برحسب ترجمه یا تألیف انتخاب کنیم - می‌شود روی چگونگی این انتخاب فکر کرد که با چه سازوکاری این کار انجام شود - بعد هم عده‌ای مسئولیت ویرایش مجدد آن‌ها را عهده‌دار بشوند، فکر می‌کنم کتاب خیلی مناسبی تهیه شود. تأکید می‌کنم ویرایش مجدد زیرا شاید مقاله‌ای که خودم ۱۵ سال پیش ترجمه کردم را بخواهم الان دوباره انجام‌اش بدهم، با گذشته فرق کند و روان‌تر شود. لازم است

واژه‌ها و معادل‌ها را هم‌سان کنیم و واژه‌هایی را که به هر حال در مقالات از آن‌ها استفاده می‌شود به صورت واژه‌نامه درآوریم. چنین کتابی می‌تواند خدمت با ارزشی حداقل به رشته‌ی آموزش ریاضی و آموزش معلمان ریاضی بکند. آقای دکتر محمدرضا فدایی: ضمن تشکر از این که این جلسه را ترتیب دادید فرمودند که این مجله در خدمت آموزش ریاضی بوده، باشد و باید باشد که در واقع، هدف اصلی ایجاد این مجله همین بوده است. من این را در ذهن خودم چنین تعبیر می‌کنم که مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، باید محور وحدت و

یگانگی در آموزش ریاضی در جهت ارتقاء و ترویج آموزش ریاضی به عنوان یک دانش مورد نیاز ملی قرار بگیرد. حالا این محور قرار گرفتن از چند جهت می‌تواند برای جایگاه علمی کشور یک یاری‌رسان باشد. در رابطه با دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، همان‌طور که خانم دکتر هم اشاره کردند، از دو جهت کلی می‌توانیم به این مجله نگاه بکنیم و خدمات آن را ارزیابی کنیم؛ یکی به عنوان منبع بسیار خوبی برای رشته‌ی آموزش ریاضی که به آن اشاره کردیم و دیگری این که جایگاه خوبی برای ایجاد ارتباط بین دانشجویان دوره‌ی کارشناسی ارشد است؛ جایگاهی که در واقع، آن‌ها می‌توانند نقطه نظرات خودشان را ارائه کنند و تحقیقاتی را که انجام داده‌اند، در جامعه مطرح کنند تا سایر آموزشگران ریاضی از آن‌ها استفاده کنند و اصل روابط، از این طریق شکل می‌گیرد. هم‌چنین، از این که گفتم مجله محور وحدت قرار بگیرد، این است که در خدمت توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان ریاضی است. این هم از دو جهت قابل بررسی است؛ یکی این که اگر مطالعات فردی معلمان

ریاضی را در نظر بگیریم، دو نکته‌ی حائز اهمیت در آن‌ها می‌بینیم که یکی افزایش دانش حرفه‌ای معلمان از طریق مطالعه‌ی مقالات این مجله است و دیگر این که به معلمان کمک می‌کند تا بتوانند مسیر تدریسی خود را انتخاب کنند و برای این کار، منبع بسیار خوبی است. با این وجود نمی‌دانم که آیا مجله، مورد استفاده‌ی کارشناسان و برنامه‌ریزان آموزش ریاضی هست؟ چقدر این مجله توانسته است که نقاط قوت و نقاط ضعف را در حوزه‌ی آموزش ریاضی مطرح بکند و هشدارها و راهکارهای مناسب ارائه دهد؟

امیدوارم برای انتشار یک مجله زحماتی که کشیده می‌شود، بیشتر مورد توجه نظام برنامه‌ریزی آموزشی کشور قرار بگیرد.

خانم سپیده چمن‌آرا: می‌خواستم در واقع، مروری کنم بر تجربه‌ی خودم در زمینه‌ی آشنایی با این مجله و بعد آن‌چه که فکر می‌کنم تأثیرات این مجله در جامعه‌ی آموزشی ما باشد. من از زمستان سال ۸۰ افتخار همکاری با این نشریه را پیدا کردم. این سال، مصادف با زمانی شد که من دانشجوی اولین دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آموزش ریاضی شدم.

از همان ترم اول که وارد دانشگاه شدم، مقاله‌ها و مطالب مجله را از یک سو به عنوان مدیر داخلی می‌خواندم که غلط نگارشی نداشته باشد و تصویر مناسب برای هر متن انتخاب کنم

تا مجله آماده‌ی چاپ شود. از طرف دیگر به عنوان یک دانشجوی مجله را می‌خواندم تا از آن‌ها، مطلب جدید یاد بگیرم و با این حوزه بیشتر آشنا بشوم و بیاموزم. همان‌طور که خانم دکتر غلام آزاد گفتند، واقعاً خیلی از مقاله‌های مجله که طی این سال‌ها چاپ شده، منابع خیلی خوبی برای بسیاری از پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد یا مقاله‌های توصیفی دیگری بوده که درخصوص آموزش ریاضی نوشته شده‌اند. این یک جنبه از اثرگذاری این مجله بر جامعه‌ی آموزشی بوده که به عنوان تأمین منابع، سعی کرده مطالب مناسب را جمع‌آوری کند و در اختیار معلمان ریاضی قرار دهد. اما به نظر من، بُعد دیگرش این است که مجله، محلی است برای این که معلمان ریاضی، تجربه‌های آموزشی خود را به ثبت برسانند. حالا این تجربه‌ها ممکن است تجربه‌ی آموزشی به معنی تجربه‌ی تدریس‌شان باشد؛ یعنی مجله یک وسیله‌ی ارتباطی برای تبادل تجربه بین معلمان ریاضی مختلف شده که در غالب روایت معلمان یا مقاله‌های توصیفی آموزشی، چاپ شده‌اند.

یک جنبه دیگر هم تجربه‌های آموزشی معلمان از جهت یاد

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، باید محور وحدت و یگانگی در آموزش ریاضی در جهت ارتقاء و ترویج آموزش ریاضی به عنوان یک دانش مورد نیاز ملی قرار بگیرد

گرفتن و نوشتن هست؛ یعنی من از این جنبه هم به مجله توجه می‌کنم؛ برای این که می‌بینم در جلسات هیأت تحریریه، مقاله‌ها با دقت بررسی می‌شوند و توصیه‌هایی به نویسندگان یا مترجمان مقاله‌ها می‌شود که چه نکاتی را رعایت کنند تا مقاله‌های بهتری بنویسند. اگر مقاله‌ای برای مجله مناسب نبوده، همیشه سعی کرده‌ایم که با توصیه‌های مناسب و آن‌چه که فکر می‌کنیم مقاله را بهتر می‌کند و برای مخاطبش مفیدتر می‌شود، مقاله را به نویسنده برگردانیم که این کار، به افرادی که مایلند بنویسند کمک می‌کند. نوشتن کار سختی است، پس کسانی که علاقه‌مند هستند و وارد این حوزه شده‌اند و این جسارت را داشته‌اند، حداقل از این طریق به نوعی دارند آموزش می‌بینند و به تدریج، وارد جرگه‌ی افرادی می‌شوند که می‌نویسند و از این طریق، با دیگران ارتباط برقرار

می‌کنند. من فکر می‌کنم همین جنبه هم یکی از جنبه‌های مهم مجله است که در زمینه‌ی آموزشی تأثیرگذار بوده است.

آقای دکتر مهدی رجبعلی پور: من از طرح خانم غلام آزاد استقبال می‌کنم و امیدوارم لطف کنند خودشان زحماتش را به عهده بگیرند. واقعاً تهیه‌ی چنین مجموعه‌ای یک مدیر می‌خواهد.

برای این کار، می‌توانیم مقالات پراچاج مجله را در نظر بگیریم. هم چنین، پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد و احیاناً دکتری آموزش ریاضی را هم بگردیم ببینیم چقدر و به کدام مقالات مجله ارجاع داده می‌شود. این کار هم می‌تواند خیلی مفید باشد برای این که مستندات خوبی به دست می‌دهد.

آقای دکتر بیژن ظهوری زنگنه: جمع‌آوری مقالات به صورت کتاب واقعاً ایده‌ی خیلی خوبی است و چندین بار هم به شکل‌های مختلفی اقدام به این کار شده و مطالب مجله به صورت موضوعی تقسیم‌بندی شد، ولی به دلایلی به نتیجه نرسید. از جمله این که یک سؤال اساسی این بود که ناشر چنین مجموعه‌ای چه کسی خواهد بود؟

نکته‌ای که در مورد یکان بود و من فکر می‌کنم خیلی جالب است این بود که من وقتی که دانش‌آموز بودم، خیلی علاقه‌مند به یکان بود. یاد می‌آید روزی که یکان می‌آمد، یکی دو ساعت کنار روزنامه‌فروشی می‌ایستادیم تا یکان بیاید. ولی فکر می‌کنم دلیلی که از سال ۵۶، دیگر یکان درنیامد این بود که یکان، محور مسائلی براساس مسائل کنکورهای تشریحی پیچیده بود. یعنی

فکر می‌کنم چیزی که برای دانش‌آموزان جذبه داشت، به تدریج از بین رفت.

تا قبل از سال ۵۶، مسائلی که در یکان می‌آمد، مسائل سختی بود که فراتر از کتاب‌های درسی بود و فقط بعضی وقت‌ها با مطالب کتاب‌های درسی حل می‌شد و بعضی مواقع هم مسائل یکان از منابع روسی ترجمه می‌شد. فکر می‌کنم سال ۴۷ اولین سالی بود که کنکور تستی جایگزین کنکور تشریحی شد و کم‌کم تبدیل به کنکور سراسری شد. تست زدن فرهنگ دیگری می‌خواست و در واقع، دانش‌آموزان و افرادی که می‌خواستند در کنکور موفق شوند، انگیزه‌ی خود را نسبت به یکان از دست دادند و پایان یافتن دوره‌ی یکان را رقم زدند.

گویا: عذر می‌خواهم، فکر می‌کنم بهترین کار این است که

یک مصاحبه با خود آقای مصحفی بشود تا ببینیم خودشان در این مورد چه می‌گویند.

زنگنه: بله خیلی خوب است. به هر حال، من خودم جزو مشتاقان این مجله بودم و تمام شماره‌هایش را هم تا وقتی که در سال ۵۲ برای ادامه تحصیل به خارج از کشور رفتم، داشتم.

فدایی: دلیل این که الان مجله‌ی یکان با آموزش ریاضی مقایسه می‌شود این است که تصور می‌شد مخاطبانش یکی بودند. احتمالاً در جلسه‌ای که در مورد آموزش برهان ریاضی صحبت می‌شود بحث یکان خیلی پررنگ باشد. زیرا مخاطبانشان یکی هستند. اما اینجا که اصلاً به نظر نمی‌رسد وجه مشترک خیلی مشخص داشته باشند. زیرا رشد آموزش ریاضی برای معلم‌های ریاضی و دانشجویان کارشناسی ارشد

آموزش ریاضی و برنامه‌ریزی‌های درسی ریاضی است و برهان برای دانش‌آموزان است.

زنگنه: وقتی که رشد شروع شد، در ذهن بسیاری این بود که این مجله، در ادامه‌ی یکان باشد. کم‌کم با گسترش رشته‌ی آموزش ریاضی، مجله بیشتر به سمت آموزش ریاضی که جایگاه طبیعی‌اش بود کشیده شد و برهان به نوعی، جانشین یکان شد. من اینجا توضیحی بدهم که یکان قبل از انقلاب، تنها مجله‌ای بود که برچسب ریاضی داشت. مثلاً وقتی که به گذشته نگاه می‌کنم، تنها چیزی که از مجله‌ی ریاضی در ذهنم می‌آمد یکان بود.

آقای دکتر اسماعیل بابلیان: آقای دکتر زنگنه مقداری از علت‌ها را گفتند. قبلاً، مجله‌های ریاضی خیلی کم بود و

**در این چند سال
اخیر، افراد زیادی با
مجله همکاری داشتند و
مقاله‌ها، جنبه‌ی
آموزشی زیادی داشته
است. مقالاتی که در
دوازده سال اخیر در
مجله چاپ شده سعی
کرده جهت‌گیری
آموزشی مجله را
برجسته‌تر کند**

کتاب و ترجمه هم اصلاً نبود. خود من آن موقع که دانش آموز بودم، واقعاً دنبال مسائل جدید بودیم که پیدا کنیم و حل کنیم. یکی از شگردهایی که یکان داشت این بود که این مسائل را از طریق دانش آموزان می گرفت و به اسم خودشان چاپ می کرد. یادم است خود من وقتی که دبیر بودم، یک مسئله فرستاده بودم که در مجله به اسم من چاپ شد. یعنی چند دسته بودند که این مجله را می خریدند؛ یک عده می خریدند که مسائل آن را حل کنند، معلم ها می خریدند که مسائل آن را زودتر از دانش آموزان حل کنند و فردا سر کلاس دست بسته نمانند. یک عده هم می خریدند ببینند مسئله ای که فرستاده اند چاپ شده یا نشده است و به این ترتیب، یکان رقابتی بین افراد ایجاد کرده بود.

دکتر مصحفی چون چندین سال را بدون حمایت دیگران گذرانده بود، فکر می کرد باز هم می تواند بدون کمک مالی ادامه دهد. شاید هم یکی از دلایل افول یکان همین آمدن کنکور تستی بود که باعث شد مجله، رونق خود را از دست دهد. اما در مورد مجله ی رشد آموزش ریاضی و این صددرصدی که آقای رضایی گفتند، من فکر می کنم مجله صددرصد در کنفرانس های آموزش ریاضی، دوره های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی و حتی در نقد کتاب های درسی، تأثیر داشته است. ولی به گفته ی بسیاری از معلمان، ارتباط مجله با دانش آموزان صددرصد قطع شد. ما دیگر خود را به عنوان مخاطب دانش آموزان نمی بینیم و چندین سال بعد که خانم دکتر گویا آمدند و مجله مسیر خودش را پیدا کرد، باعث شد که مجله ی برهان به وجود بیاید تا خلاء یکان به نوعی پر شود. همان طور که اشاره شد،

مجله ی آموزش ریاضی که از سال ۶۳ شروع شد، در ابتدا سعی کرد همان مسیر یکان را ادامه دهد؛ یعنی آقایان غیور و دارابی و نصیری همه معلمان ریاضی بودند که مسائل دبیرستانی را مرتب توی مجله ی رشد مطرح و حل می کردند.

گاهی از خوانندگان خواسته می شد که حل مسائل را بفرستند و دو سه شماره بعد هم حل آن ها نوشته می شد. گاهی اوقات هم اشاره می شد که این شخص، بهترین حل را فرستاده است. به هر جهت، فکر می کنم رسالت مجله ی ما این است که به آموزش ریاضی بپردازیم. من فکر می کنم چهار شماره ی مجله ی رشد در

هر سال، در ارتقای نحوه ی نگارش مقالات توسط افرادی که در کنفرانس های آموزش ریاضی شرکت می کنند و مقاله می دهند، بسیار تأثیر داشته و امیدواریم که این تأثیر همین طور ادامه پیدا کند. این را هم اضافه کنم که بعضی جاها که دوره ی کارشناسی ارشد گذاشتند، به پشتیبانی وجود همین مجله گذاشتند و مرتب اگر دانشجو از استادها سؤال کنند، می گویند مراجعه کن به مجله ی شماره فلان یا برو این مجله را زیر و رو کن که حتماً یک مطلب پیدا می کنی.

خانم دکتر شیوا زمانی: برای من که خیلی هم با آموزش ریاضی و دانش آموزان تماس ندارم، همین حضور در میان تحریریه ی رشد واقعاً فرصتی بود که از مطالبی که می شنوم استفاده کنم. نظرات بقیه برای من تجربه ی خوبی است. امیدوارم برای شروع صد شماره ی دوم بهتر از این بتوانیم کار کنیم.

گویا: دقت خانم دکتر زمانی در داوری و اصلاح مقالات موضوعی و ترجمه ای بسیار بار ارزش و برای مجله حیاتی است.

آقای مانی رضائی: یک نکته ی مهم این است که سطح انتظاری که رشد آموزش ریاضی داریم، بیش از یک مجله است! واقعاً وقتی به یک مجله نگاه می کنیم، آن را مجموعه ای از مقالات و موضوع های مختلف علمی می بینیم. ولی الان، ما داریم هدایت دوره ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را به عهده ی این مجله می گذاریم. حتی فرض کنید از دل این مجله، می خواهیم مجموعه کتاب هایی به عنوان مرجع در بیاوریم. حتی از دل این مجله، انتظار داریم چیزهایی به عنوان پوشش دادن به نیازهای جامعه ی آموزشی و خیلی چیزهای دیگر بیرون آید، یعنی مجله دارد با صددرصد توانش کار می کند.

دکتر زنگنه نکته ای را در مورد کنکور و تأثیری که احتمالاً بر سرنوشت یکان گذاشته گفتند. در حال حاضر، مجله ی برهان نیازهای ریاضی جامعه ی مدرسه ای را تا حدی پوشش می دهد. مجله ی رشد آموزش ریاضی هم واقعاً این تغییر موضع را داده است که در خدمت آموزش ریاضی باشد. من فکر می کنم الان کمی از این زاویه به مجله نگاه کنیم که حالا، خیلی از معلم های ما دست به قلم هستند، می نویسند و کار می کنند اما نیازمند نوعی فرهنگ سازی هستیم تا معلمان توانمند ما، بیشتر بنویسند. حالا چه جوری نمی دانم شاید مثلاً کمی سخت گیرانه تر مقاله

نوشتن کار سختی است، پس کسانی که علاقه مند هستند و وارد این حوزه شده اند و این جسارت را داشته اند، حداقل از این طریق به نوعی دارند آموزش می بینند و به تدریج، وارد جرگه افرادی می شوند که می نویسند و از این طریق، با دیگران ارتباط برقرار می کنند. من فکر می کنم همین جنبه هم یکی از جنبه های مهم مجله است که در زمینه ی آموزشی تأثیرگذار بوده است

بپذیریم. بارها و بارها شاهد این موضوع بودیم که مطلبی فرستاده شده که از نسخه‌ی اولیه تا نسخه‌ای که چاپ شده، شاید نزدیک به ۱۸۰ درجه چرخیده است. این کار بدین صورت انجام شده که داور محترم مقاله، به دقت کار ویرایش علمی و تصحیح و توصیه را انجام داده است. سپس در تماس مکرر با نویسنده، گاهی مثل یک کلاس درس، چند بار مطلب ویرایش و بازنویسی شده، باز برگشته، باز رفته و دوباره برگشته است و در این رفت و برگشت‌ها، نوشته ارتقاء پیدا کرده است. امیدواریم که به تدریج، این فرهنگ ایجاد شود که نویسندگان محترم، تلاش کنند که مطالب ارسالی خود را به گونه‌ای ارتقا دهند که از داوری‌های جدی عبور کند و میزان رفت و برگشت و اصلاح و ویرایش، کاهش یابد. مهم این است که تلاشی که تا به حال شده، تأثیر خوبی بر جامعه‌ی آموزشی گذاشته و توانسته در جمع وسیعی از معلمان ریاضی، جسارت دست به قلم بردن و نوشتن مقاله‌های علمی را ایجاد کند. حتی می‌توان مجموعه‌ای در مورد چگونگی نوشتن و نگارش مقالات تهیه کرد و از طریق آن، آموزش منسجم‌تری برای چگونگی تحقیق و تألیف مقاله ایجاد شود.

زنگنه: من این نکته را بگویم که می‌توان سرمقاله‌های مجله را به صورت یک کتاب جداگانه منتشر کرد.

چاپ این سرمقاله‌ها می‌تواند خیلی مفید باشند زیرا شما می‌توانید سیر زمان را در آن‌ها ببینید و تغییر و تحولات اجتماعی-آموزشی را دنبال کنید.

جلیلی: ما الان شیوه‌ی برنامه‌ریزی کتاب‌هایمان طوری است که اگر سؤال کنید، ۵ درصد دبیران هم به حرف‌هایی که می‌زنیم توجه ندارند به علت این که در چارچوب خاصی باید حرکت کنند و امتحان‌های مکرر برگزار کنند. وقتی پای صحبت معلمان می‌نشینیم می‌گویند که ما تمام فشارمان روی برنامه و کتاب است که تمام شود. اگر بخواهم این نکاتی که در رشد آموزش ریاضی مطرح می‌شود در کلاس مطرح کنیم، شاید در طول سال $\frac{1}{2}$ کتاب را هم نتوانیم تدریس کنیم.

معلم چیزی می‌خواهد که کاربرد داشته باشد و در کلاس به دردش بخورد.

بابلیان: عرض کنم من در یک جمله جواب آقای جلیلی را بدهم. اگر معلم واقعاً بداند که دردش چیست، دوايش در این

مجله هست، منتها چه دردهایی؟ اگر درد معلم این باشد که دنبال پاسخ سؤال‌هایی از این قبیل باشد که «چه کار کنم که دانش‌آموز انگیزه‌اش بیشتر شود» یا «چگونه درس بدهم که بازده کارم بالاتر برود و دانش‌آموزان بتوانند بهتر به سؤال‌ها پاسخ بدهند و نتیجه‌های بهتر بگیرند» و اگر دغدغه‌اش از این نوع باشد، جوابشان در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی هست. ولی این که فلان حد را چگونه حساب بکنید، الان تا

بخواهید، کتاب‌های موضوعی هست که این نوع مسائل را حل کرده‌اند و معلمان می‌توانند پاسخ سؤال‌ها موضوعی خود را آن‌جا پیدا کنند.

رجبعلی پور: من حرفی را که چند سال پیش زدم عوض می‌کنم! ببینید اگر واقعاً برهان و مجالات موضوعی ریاضی مشابه مانند فرنون و غیره هم هستند، آن وقت اشکال ندارد که حتی صدبار هم که لازم است تکرار بکنند که مثلاً پوشایی تابع یعنی چه؟ اینجکتیو یعنی چه؟ سوبجکتیو یعنی چه؟ زیرا معلم‌ها پیوسته در تدریس خود، به آن‌ها احتیاج دارند. در چنین حالتی، می‌توانیم کمک کنیم که این مجله به سمت یک مجله علمی-پژوهشی برود و اگر در این مسیر، تعدادی از مخاطبان قبلی خود

وقتی که رشد شروع شد، در ذهن بسیاری این بود که این مجله، در ادامه‌ی یک‌کان باشد. کم‌کم با گسترش رشته‌ی آموزش ریاضی، مجله بیشتر به سمت آموزش ریاضی که جایگاه طبیعی‌اش بود کشیده شد و برهان به نوعی، جانشین یک‌کان شد.

را از دست بدهیم، بگذاریم بدهیم. این مشکل نیست زیرا در عوض، مخاطبان جدید پیدا می‌کنیم. من نگران دوستان یکانی بودم که برای جای خالی آن، چیزی نداشته باشند، اما حالا اگر مأوی دارند که به آن تکیه کنند و خواسته‌های موضوعی آن‌ها برآورده شوند، خوب بگذارید ما مجله‌ی خودمان را به سمت مباحث علمی-پژوهشی آموزش ریاضی ببریم.

گویا: اگر اجازه بدهید، از حضور فعال همه‌ی اعضای محترم هیأت تحریریه که کمک کردند و میزگردی که خیلی به آن فکر کرده بودیم و برایش هیچ ساختاری نداشتیم را به پیش ببرند، تشکر کنم. به نظر من، این میزگرد خود به خود ساختار پیدا کرد و جلو رفت و پیشنهادهای جالبی شد که به جمع‌بندی آن می‌پردازم: پیشنهاداتی که مطرح شد و اغلب مورد توافق جمع قرار گرفت، به قرار زیرند:

۱. انتشار مجموعه یا مجموعه‌هایی از مقالات پراجاع
۲. انتشار مجموعه‌ای از سرمقاله‌ها؛ ۳. تلاش در جهت ارتقای توانایی‌های مخاطبان و معلمان ریاضی در ایران؛
۴. بازتاب نقاط قوت و ضعف آموزش ریاضی در ایران؛
۵. تشویق و ترغیب به انتشار مجله‌ها مناسب برای مخاطب‌های

گوناگون؛ ۶. تلاش برای ارتقای رتبه‌ی علمی- پژوهشی مجله. یعنی فکر می‌کنم به جای این که همیشه، انتظار همه چیز را از یک مجله داشته باشیم، می‌توانیم مشوق و ترغیب‌کننده‌ی کسانی باشیم که بالقوه می‌توانند مجلات مختلف برای نیازهای گوناگون موضوعی و حرفه‌ای معلمان ریاضی منتشر کنند. مثلاً، ما می‌توانیم ماهنامه‌ی دانش‌آموزی دریاوریم، ماهنامه‌ی تجربه‌های معلمان دریاوریم، می‌توانیم

مجله‌ای مربوط به روش‌های تدریس ریاضی دریاوریم و می‌توانیم...! یعنی افراد توانمند را تشویق کنیم و منابع در اختیارشان بگذاریم تا مجله‌های متنوع دریاورند.

من فکر کردم که کار دیگری که می‌توانیم انجام دهیم این است که اگر بتوانیم، صد نامی که با ما مکاتبه کرده‌اند و از دورترین نقاط ایران برای مجله مقاله فرستاده‌اند را از شماره‌های مختلف مجله استخراج کنیم. تلاش داریم که این کار را بکنیم و به نظرم کار قشنگی است. اما اگر بتوانیم! زیرا وقت زیادی می‌طلبد. نکته‌ی دیگری که می‌خواستم عرض کنم این است که تعمیم و تخصیص، از اولین شرط‌های یک کار علمی است یعنی اگر در یک مجله، بخواهم راجع به عالم و آدم صحبت کنیم و تمام مسائل

آموزشی را حل کنیم، امکان‌پذیر نیست. این مجله قرار بوده که در خدمت آموزش ریاضی باشد، پس باید رسالتش، ترویج و توسعه‌ی آموزش ریاضی در ایران باشد. طبیعی است وقتی که دوره‌های تحصیلات تکمیلی در این رشته راه افتاده‌اند، از این طریق هم می‌شود به توسعه‌ی آموزش ریاضی کمک کرد و همان‌طور که دکتر رجبعلی پور فرمودند و بقیه همکاران نیز بر آن تأکید کردند، آموزش معلمان ریاضی از

جمله هدف‌های اصلی مجله است. اتفاق مهمی که افتاده این است که معلمانی که معمولاً دست به قلم نبودند و نمی‌نوشتند. الان سالانه بین ۵۰۰ تا ۶۰۰ مقاله برای کنفرانس‌های آموزش ریاضی ارسال می‌کنند و این شهامت و جسارت را پیدا کرده‌اند که خودشان را در عرصه‌ی نقد و داوری قرار بدهند. من فکر می‌کنم این خود، گام بلندی در جهت آموزش معلمان ریاضی بوده است. ما برای معلمان عزیز ریاضی جایگاه والایی قائلیم و امیدواریم که از تجربیاتشان استفاده کنیم.

باز هم از همکاری اعضای محترم هیئت تحریریه در برگزاری این میزگرد و از پیشنهادهای ارزنده‌ای که دادند تشکر می‌کنم و امیدوارم که این توصیه‌ها، راهنمای عمل ما از شماره‌ی ۱۰۰ به بعد باشد.

یک نکته‌ی مهم این است که سطح انتظاری که رشد آموزش ریاضی داریم، بیش از یک مجله است! واقعاً وقتی به یک مجله نگاه می‌کنیم، آن را مجموعه‌ای از مقالات و موضوع‌های مختلف علمی می‌بینیم. ولی الان، ما داریم هدایت دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را به عهده‌ی این مجله می‌گذاریم



چه می دانیم و چگونه می دانیم؟*

میشل آرتیگ، دانشگاه پاریس دیدرو- پاریس - ۷

جرمی کیل پاتریک، دانشگاه جورجیا

ترجمه ی فاطمه اصل مرز (با همکاری علی رجالی)
خانه ی ریاضیات اصفهان



سمت راست: جرمی کیل پاتریک
سمت چپ: میشل آرتیگ

کمیته ی بین المللی برنامه ریزی یازدهمین کنگره ی بین المللی آموزش ریاضی (ICME-11) پیشنهاد کرده بود که ما فعالیت های علمی این کنگره را با گفت و گو درباره ی مباحث مهم آموزش ریاضی، مانند مباحث زیر آغاز کنیم:

- در زمینه ی آموزش ریاضی، اکنون چه می دانیم که ۱۰ سال پیش نمی دانستیم و چگونه به آن دست یافته ایم؟
- چه نوع شواهد و مستنداتی قابل دست رسی است و در آموزش ریاضی بایستی در جست و جوی چه بود؟
- انتظارات اجتماعی از رشته ی ریاضی که زمینه ی کاری ماست چیست و ما خود را با این انتظارات چگونه تطبیق می دهیم؟
- دیدگاه های یاددهی - یادگیری ریاضیات و شواهد مربوط به آن تا چه حد می تواند از چندگونگی^{۱۲} فرهنگی و محتوای آموزشی فراتر رود؟
- امروزه آموزش ریاضی با چه چالش های اساسی روبه روست؟

ما، در این سخن رانی مشترک، با ارائه ی نظرات خود نسبت به تحولات رشته ی ریاضی بررسی عوامل و نیروهای مؤثر در این زمینه و نتایج حاصل در طول ۱۰ الی ۱۵ سال اخیر، سعی کرده ایم چنین گفت و گویی را آغاز کنیم و نظرات خود را در رابطه با چالش های اساسی که امروزه با آن روبه رو هستیم و

درباره ی نویسندگان این مقاله: خانم پرفسور میشل آرتیگ^۱، استاد بخش ریاضی «دانشگاه پاریس - ۷»^۲ و سرپرست مشترک برنامه ی فوق لیسانس آموزشی در آن دانشگاه و رئیس کمیسیون بین المللی آموزش ریاضی^۳ است. بعد از دریافت درجه ی دکترا در منطق، او به تحقیقات در زمینه ی آموزش ریاضی در سطوح ابتدایی تا دانشگاه پرداخت. یاددهی و یادگیری ریاضیات با استفاده از فناوری های الکترونیکی، موضوع اصلی تحقیق ایشان در ۱۰ ساله ی اخیر است.

آقای پروفیسور جرمی کیل پاتریک^۴ نیز استاد آموزش ریاضی دانشگاه جورجیا^۵ در آمریکاست که قبلاً در کالج معلمان دانشگاه کلمبیا^۶ و قبل از آن در دبیرستانی در برکلی کالیفرنیا تدریس کرده است. جرمی لیسانس و فوق لیسانس خود را از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی^۷، و دکترای خود را از دانشگاه استنفورد^۸ اخذ کرده و یک دکترای افتخاری نیز از دانشگاه گوتنبرگ^۹ سوئد دریافت نموده است.

او درس های زیادی را در دانشگاه های اروپا و آمریکای لاتین تدریس کرده و به دریافت جوایز فولبرایت^{۱۰} برای کارهایش در نیوزیلند، اسپانیا، کلمبیا و سوئد نایل شده است. به علاوه عضو کمیسیون آموزش علوم و ریاضی آمریکا و دو دوره هم معاون کمیسیون بین المللی آموزش ریاضی بوده است. دیگر فعالیت های او عبارت است از سردبیر سری مطالعات مسکو در زمینه ی روان شناسی یادگیری - یاددهی ریاضی، سردبیری مجله ی تحقیقات در آموزش ریاضی و سردبیر و عضو هیئت تحریریه ی مطالعات متعددی در زمینه های آموزش ریاضی. وی در یازدهمین کنگره ی بین المللی آموزش ریاضی (۲۰۰۷) نیز به دریافت مدال فلیکس کلاین^{۱۱} کمیسیون بین المللی آموزش ریاضی نایل آمد.

متن زیر که با دریافت اجازه ی خاص برای ترجمه و انتشار در مجله ی فروند آماده شده است، در اصل سخن رانی عمومی نخستین روز کنگره ی بین المللی آموزش ریاضی یازدهم، است که توسط این دو استاد ایراد شد. این متن توسط خانم اصل مرز با همکاری این جانب ترجمه و توسط خانم دکتر غلام آزاد ویرایش شد.

علی رجالی

ویژه نامه ی صدمین شماره ی مجله ی رشد آموزش ریاضی - میزگرد سخنرانی

چگونگی رویارویی و برخورد با آن‌ها مورد بحث قرار دهیم. مقاله‌ی حاضر برای گزارش در این کنگره نوشته شده است و بحث را از دو جنبه‌ی محتوایی و شکل ظاهری آن منعکس می‌کند.

توضیحات مقدماتی: ما چه می‌دانیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟

سخنان میشل آرتیگ

همان گونه که هرکسی می‌تواند تصور کند، پاسخ دادن به این سؤال بسیار دشوار است. مشکلاتی که هنگام تلاش برای پاسخ گویی به این سؤال با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، خود سرچشمه‌ی نگرشی نو برای درک رشته‌ی آموزش ریاضی و پویایی آن است و این که دانش در این زمینه چگونه پیشرفت می‌کند.

این سؤال می‌تواند بر اساس مفهومی که برای آموزش ریاضی منظور می‌شود و بر اساس موقعیت و تجربه‌ی شخصی فرد در این زمینه، از جنبه‌ها و موقعیت‌های متفاوتی مورد بررسی قرار گیرد. من شخصاً یک عضو هیئت علمی وابسته به بخش ریاضی هستم و به تدریس ریاضیات مشغولم. اولین زمینه‌ی پژوهشی من منطقی بود، اما در حال حاضر زمینه‌ی پژوهش در تعلیم و تربیت ریاضیات را دنبال می‌کنم. تجربه‌ی پژوهشی من به طرز چشم‌گیری تحت تأثیر فرهنگ تعلیم و تربیت کشوری که در آن زندگی می‌کنم، یعنی فرانسه شکل گرفته است. شکی نیست که دیدگاه من در آموزش ریاضیات در دهه‌ی اخیر، به دلیل شرکت در جلسات تحت نظارت کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی (ICMI)، به طرز قابل توجه تحت تأثیر قرار گرفته است. هنگام آماده‌سازی این سخن‌رانی، اولین سؤال مطرح شده را برای دوستان و همکاران خود در کشورهای گوناگون مطرح کردم که مایلم در این جا از آن‌ها به خاطر پاسخ‌های الهام بخششان تشکر کنم. همان گونه که انتظار می‌رفت، پاسخ‌هایی که دریافت کردم، بسیار گوناگون بودند. با این حال، این گوناگونی‌ها، روندهای مشترکی را دنبال می‌کردند. پاسخ‌های دیگران، در درک بهتر آن چه که سعی در بیان کردن آن داشتم به من کمک کرد و حالا، حتی اگر سؤال به تفصیل بیان شده باشد و از کلمه‌ی «ما» به مفهوم گروهی استفاده کنم، پاسخ من الزاماً پاسخی فردی خواهد بود.

سخنان جرمی کیل پاتریک

پاسخ‌های من نیز، بسیار مشروط و محدود به موقعیت و تجربه است. من به مدت ۵۰ سال، آموزشگر ریاضی بوده‌ام و در حال حاضر، در یک دانش‌سرای تربیت معلم در بخش آموزش ریاضیات و علوم مشغول تدریس هستم. من از میان دانشجویان کارشناسی، که دوره‌های آمادگی دبیری را طی می‌کنند و دانشجویان دوره‌ی دکترای آموزش ریاضی، بیشتر به دانشجویان دوره‌ی دکترای آموزش می‌دهم؛ ضمن این که از گذشته تا امروز، در هر نوع فعالیت تحقیقاتی، از حل مسئله گرفته تا کارهای اخیر در ارزش‌یابی، تدوین برنامه‌ی درسی و تاریخ آموزش ریاضی نیز شرکت داشته‌ام.

علاقه‌ی من به تاریخ رشته‌مان به نوعی مرا مظنون ساخته بود. اغلب می‌شنیدم که آموزشگران ریاضی می‌گویند: «اکنون می‌دانیم که...»، و بعد آن چه را اکنون می‌دانیم، می‌گویند. برخی از ما که کمی بیشتر از دو یا سه سال در صحنه بوده‌ایم، می‌گوییم: «خب در واقع قبلاً کسانی بوده‌اند که این را

می‌دانستند». بنابراین، داشتن دیدگاهی تاریخی در زمینه‌ی کاری خودمان مفید خواهد بود. پاسخ من نیز همانند میشل، فردی خواهد بود و احتمالاً وابسته به ویژگی‌های شخصی‌ام. من قطعاً خود را نماینده‌ی ایالات متحده که مکانی با فرهنگ‌های گوناگون است، نمی‌دانم.

ما در آموزش ریاضیات چه می‌دانیم که ۱۰ سال قبل نمی‌دانستیم و چگونه به آن دست یافته‌ایم؟

میشل:

در پاسخ به این سؤال که ما در زمینه‌ی آموزش ریاضی چه می‌دانیم که ۱۰ یا حتی ۱۵ سال پیش نمی‌دانستیم، قطعاً برخی پاسخ خواهند داد: «هیچ». همان گونه که شما تصور می‌کنید، این نظر من نیست. با نگاهی به ۱۵ سال گذشته (من زمان را اندکی طولانی‌تر گرفته‌ام)، من شخصاً زمینه‌ای از دانش را می‌بینم که در آن پیشرفت آشکاری صورت گرفته است. این پیشرفت دارای ابعاد گوناگونی بوده است: نه تنها با مباحث ریاضی که به طور گسترده‌ای مورد نظر پژوهش‌های علمی‌اند، مانند اعداد، جبر و یا هندسه مرتبط بوده است، بلکه در مباحثی نیز که بیش از پیش اهمیت خود را در ریاضیات و آموزش نشان داده‌اند، مانند احتمالات و آمار، پیوند خود را نشان داده است. این که کمیته‌ی اجرایی ICMI چند سال پیش اعلام کرد، زمان آن رسیده است که این کمیسیون در آموزش آمار مطالعه‌ای را آغاز کند، به هیچ وجه تصادفی نبوده است. همایش مربوط به این مطالعه اخیراً در مونتری برگزار شد.

حتی زمانی که تمرکز روی مباحث ریاضی است - مانند آن چه که اشاره کردم - پیشرفت زمینه‌ی مورد نظر، کاملاً به تکامل جهانی آن، به ساخت‌ها و دیدگاه‌هایی که تدریجاً معرفی و اصلاح شده‌اند و به تلاش‌های انجام شده در دهه‌ی اخیر وابسته‌اند که به منظور درک این که چرا پژوهش‌های آموزشی ظاهراً این قدر غیر مؤثر بوده، و این که چرا در عمل تأثیر چندانی نداشته، صورت پذیرفته‌اند. از نقطه نظر جهانی مایل هستم سه عامل اصلی این پیشرفت را در این جا یادآور شوم:

اولین آن‌ها همبستگی روش‌های فرهنگی - اجتماعی و ماهیت طبیعت انسانی در آموزش ریاضیات است. من فکر می‌کنم این موضوع به ما کمک کرده است تا درک و دیدگاه بهتری از بعد آسلوب‌پذیر واقعیت آموزشی که آن را مطالعه می‌کنیم، داشته باشیم. این موضوع به ما کمک کرده است تا محدودیت‌هایی را که آموزش در سطوح متفاوت قطعیت^{۱۳} (این اصطلاح اولین بار توسط ایوز شوالارد^{۱۴} سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۷ معرفی شده است) شکل می‌دهد، درک کنیم؛ از آن‌هایی که در سطح مباحث ریاضی هستند گرفته تا آن‌هایی که در اوج تمدن قرار گرفته‌اند. درست در زمانی که محدودیت‌های دیدگاه «ساخت و سازگرایی»^{۱۵} آشکار می‌شد، نگرشی نو در طبیعت روندهای آموزشی به ما ارائه داد. این مسئله تصاویر جدیدی برای رسیدن به این که چگونه معلمان می‌توانند در فرایند یادگیری هدایت و راهنمایی کنند ارائه داد؛ آن هم در زمانی که عده‌ای قصد داشتند فراموش کنند معلمان نمی‌توانند برای ایجاد ارتباط دانش‌آموزانشان با دانش ریاضی، فقط نقش تشکیلاتی داشته باشند. آن‌ها باید آموزش دهند. همان طور که همکاران ژاپنی ما می‌گویند، آن‌ها باید «راه را نشان دهند».

نکته‌ی دوم رشد پژوهش پیرامون باورها، بازنمایی‌ها^{۱۶}، شیوه‌ها، دانش،

تجربه‌ی آماده‌سازی و پیشرفت حرفه‌ای معلمان بوده است. برای مثال، انتشار مجله‌ی آموزشی معلمان ریاضی^{۱۷} و اخیراً یک کتاب مرجع ویژه^{۱۸} مؤید آن است. می‌توانم بگویم در ۱۵ سال اخیر، معلم به عنوان یک بازیگر مشکل‌ساز در روابط تعلیم و تربیتی، همانند دانش‌آموزان دو دهه قبل مطرح بوده است. این موضوع به جست‌وجو در مورد نیازهای ریاضی لازم برای حرفه‌ی معلمی و تفاوت‌های آن با نیازهای ریاضی دانان حرفه‌ای منجر شد. و هم‌چنین به شناسایی طبیعت کار حرفه‌ای معلمان و دلایلی که بیانگر علت انتخاب روش‌های تعلیم و تربیتی خاص خودشان برای درک معقول بودن شیوه‌های تجارب معلمی آنان شد. من فکر می‌کنم در نتیجه‌ی این پژوهش، ما امروز درک بهتری از تأثیرات محدود طرح‌های تحقیقاتی بر شیوه‌های مؤثر آموزشی داریم. ما شاهد محدودیت‌های آشکار بسیاری از برنامه‌های آماده‌سازی معلمان هستیم و نیز دارای درک بهتری از این‌که چگونه می‌توان این برنامه‌ها را بهبود بخشید. خواننده می‌تواند در کتاب منتشر شده توسط «مطالعه‌ی پانزدهم‌کنگره»

(Even & Ball, 2008)، اطلاعات بیشتری در زمینه‌ی

آخرین پیشرفت‌های انجام شده در این موضوع را بیابد.

نکته‌ی سوم، توجه روزافزونی است که به ابعاد نمادگذاری و استدلالی روش‌های ریاضی داده می‌شود (Saenz-Ludlow & Presmeg, 2006). این کاملاً با اولین نکته‌ی مطرح شده در بالا مرتبط است. این توجه روزافزون، ارتباط منطقی موجود بین بازنمایی نمادین و ادراک دانش ریاضی را آشکار می‌سازد. هم‌چنین، ما را نسبت به اهمیت نقش واسطه‌ای نمادگذاری در پیشرفت دانش ریاضی حساس کرده و نیز ما را به سمت توسعه‌ی دستگاه نمادگذاری خارج از دستگاه‌های شناخته شده‌ی پیشین، راهبری نموده است که در آن‌ها، مثلاً حرکت نشانه‌ای^{۱۹} (ژست) نیز مورد توجه لازم قرار گیرد. پژوهش در فناوری از کارهای اولیه‌ی جیم کاپوت (۱۹۹۲) تا جدیدترین پیشرفت‌ها اثر آمیخته شده در مطالعه‌ی هفدهم

ICMI (Hoyles & Lagrange)، در حال انتشار، در این تکامل نقش به‌سزایی داشته است و بالعکس از این تکامل بهره‌مند بوده است. البته بسیاری از ریشه‌های این تکامل جهانی در ۱۵ سال پیش آشکار بودند و بدون شک غیرممکن است نظریه‌ای که امروز مهم تلقی می‌شود، معین کنیم و ادعا کنیم در آن زمان در جایی وجود نداشته است. اما این ریشه‌ها پیشرفت کرده و منتشر شده‌اند و دارای نقش مرکزی‌تر و رضایت‌بخش‌تری شده‌اند. بررسی علمی آن‌ها با تعداد فزاینده‌ای از مطالعات تجربی تغذیه شده است. این احساس در من به وجود می‌آید که امروزه بسیاری از ما به آموزش ریاضی به عنوان یک زمینه‌ی پژوهشی و یک زمینه‌ی اسلوبی نمی‌توانیم چنان بنگریم که ۱۵ سال پیش از این، آن را مشاهده می‌کردیم.

جرمی: همان‌طور که خواهید دید، من با تحلیل میشل بسیار موافقم. اگر پایه‌گذاران این گفت‌وگو انتظار نظرات اساساً متفاوتی را دارند، متأسفانه آن‌ها مایوس خواهند شد. همان‌طور که میشل بیان کرد، پاسخ هر کسی به این سؤال که ما در حال حاضر چه می‌دانیم، بستگی به مفهوم آموزش ریاضی دارد و این

یک رشته‌ی پژوهشی و در عین حال یک رشته‌ی عملی است. هم پژوهش و هم عمل و شیوه‌ی کار می‌توانند یا به تعلیم ریاضیات یا به تعلیم آموزش ریاضیات مربوط شوند. این رشته در مورد آماده‌سازی کسانی که معلمان را برای آموزش مهیا می‌کنند، دارای یک صفت بازگشتی است.

این سؤال که ما اکنون چه می‌دانیم که قبلاً نمی‌دانستیم، در کنگره‌های بین‌المللی آموزش ریاضی یک سؤال جالب توجه و دائمی است. من این سؤال را بارها شنیده بودم. این سؤال اغلب توسط کسانی مطرح می‌شود که همایش‌های بین‌المللی ریاضیات را دنبال می‌کنند و می‌خواهند بدانند یافته‌های جدید در آن‌جا چگونه اعلام شده است. و یا می‌توان گفت آن‌ها در مورد دارو و روش‌هایی از معالجات جدید و مؤثر که هر از گاهی توسط پژوهشگران بهداشتی اعلام می‌شود، فکر می‌کنند.

آموزش ریاضی همواره با خود ریاضی و هم‌چنین شاید حتی اغلب اوقات با علم طب مقایسه می‌شود. در این رشته‌ها، پیشرفت دانش بدیهی به نظر می‌رسد؛ البته اگر از خیلی نزدیک به آن نگاه نکنید. اما این پیشرفت بسیار متفاوت از حالتی است که در آموزش ریاضی اتفاق می‌افتد، چرا که در این رشته همان سؤالات همیشگی مرتباً تکرار می‌شوند و به نظر می‌رسد هرگز پاسخ رضایت‌بخش یا نهایی دریافت نمی‌کنند. به نظر من چنین می‌رسد که سؤالات در زمینه‌ی آموزش ریاضی در متتهای مراتب به‌طور موقت پاسخ داده می‌شوند و با هر نسل نو بایستی دوباره مطرح شوند. همان‌طور که در جایی دیگر نیز گفته‌ام، این مسائل همانند هیولایی است که مرتب شایگان‌ها از خواب برمی‌خیزد و ما هیچ‌وقت موفق نمی‌شویم قلب آن را کاملاً، آن‌طور که در سایر رشته‌ها می‌توان، مورد هدف قرار دهیم.

آموزش ریاضی همانند سایر رشته‌های علمی نیست. بهتر است بگویم که نوعی از علوم اجتماعی است. فلیکس کلاین، در سخن‌رانی افتتاحیه‌ی خود در «ارلانگن» در سال

۱۸۷۲، به یک تفاوت مهم بین ریاضیات و سایر زمینه‌های علمی اشاره کرده است که می‌باید ما را از تلاش در جهت این مقایسه باز دارد. او اظهار داشت: «هر نسل ریاضیات، براساس دستاوردهای نسل‌های ماقبل خود بنیان‌گذاری می‌شود، در حالی که در رشته‌های دیگر غالباً، پیش از آن‌که ساختارهای نو پایه‌ریزی شوند، ساختمان‌های ماقبل آن متلاشی می‌شوند» (ترجمه‌ی انگلیسی از راو، ۱۹۸۵، ص ۱۳۶). قطعاً چنین به نظر می‌رسد که در آموزش ریاضی نیز، ما ساختارهای قبلی را در صورتی که برای اهداف، ارزش‌ها و فعالیت‌هایمان مفید نباشند، از بین می‌بریم. ما همیشه کاملاً از حذف کامل شروع نمی‌کنیم، بلکه به‌طور هم‌زمان، هم تخریب و هم ساختمان‌سازی انجام می‌دهیم.

در هر صورت، من می‌خواهم با افزودن چند نکته و مثال از خودم، عوامل پیشرفتی را که میشل معرفی کرده است تصدیق کنم. در مورد مسئله‌ی رویکردهای مردم‌شناسی و رویکردهای فرهنگی - اجتماعی در رشته‌ی خودمان، من به هیچ‌وجه نمی‌توانم برای همکاری‌های میشل و دیگران که ساختار پیدایش ابزاری را توسعه داده‌اند، شرح بیشتری داشته باشم. روشی که توسط آن، کاربران به



در پاسخ به این سؤال که ما در زمینه‌ی آموزش ریاضی چه می‌دانیم که ۱۰ و یا حتی ۱۵ سال پیش نمی‌دانستیم، قطعاً برخی پاسخ خواهند داد: «هیچ»

مصنوعاتی که استفاده می کنند شکل می دهند و مصنوعات به کاربران شکل می دهند و ابزار این گونه حاصل می شود. بلکه من می خواهم اذعان کنم که این ساختار به عنوان نمونه ای از پیشرفت که براساس درک ما از تعامل بین اشخاص یادگیرنده و ابزارهایشان ساخته شده است، بسیار مفید بوده است. من خواندن گزارشات جدید در آثار ابتکاری که با این اندیشه ها صورت می گیرند را دنبال می کنم و انتظار دارم تأثیر و نفوذ آن ها ادامه یابد.

من می خواهم این نظر میشل را که در رشته ی ما توجه بسیار و احتمالاً بیشترین توجه پژوهشگران، طی ۱۰ تا ۱۵ سال گذشته از اشخاص یادگیرنده به اشخاص یاددهنده تغییر جهت داده است، تأیید کنم. در حال حاضر پژوهش های قابل ملاحظه ای در زمینه ی دانش، طرز نگارش و طرز عمل معلمان انجام می شود. من فرصت پرداختن به دو مورد آخر را ندارم، ولی می خواهم خاطرنشان کنم که امروزه تعداد بسیار اندکی از آموزشگران ریاضی در جست وجوی ساختار «دانش پداگوژی محتوا»^{۲۰} که چند سال پیش توسط لی شولمان (۱۹۸۶) و

(۱۹۸۷) معرفی شد، هستند و سعی در فهم آن دارند. برخی سعی دارند چگونگی به کار بردن آن را در آموزش ریاضی به تصویر بکشند. برخی دیگر در جست وجوی ساختار آن چه که دانش ریاضی برای آموزش^{۲۱} (MKT) نامیده می شود هستند و سعی در فهمیدن آن دارند. این که چگونه به دانش های دیگر مربوط می شود؟ با دانش پداگوژی محتوا چه ارتباطی دارد؟ با تمامی انواع دانش های دیگری که آموزش ریاضی نیازمند آن هاست، چه ارتباطی دارد؟ به خصوص، من مایل هستم آثار دیورا بال و هایمن باس (بال و باس، ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳) را یادآوری کنم که سعی داشتند به ما در درک این که MKT معمولاً به عنوان یک نوع خاص از ریاضیات کاربردی انگاشته می شود، کمک کنند و من فکر می کنم بهتر است در مورد آن این گونه فکر کرد.

رشته ی ما در دهه ی اخیر به شیوه های آموزشی توجه زیادی مبذول داشته است. در این روند، مطالعه ی

ویدیویی کلاس های آموزش، که امکان مطالعه ی دقیق و جزء به جزء کلاس های متداولی که در آن ها ریاضیات تدریس و آموخته می شود را فراهم می کند، بسیار سودمند بوده است. ما در سطح ملی و بین المللی مطالعات ویدیویی گوناگونی داشته ایم - نه تنها مطالعات ویدیویی TIMSS^{۲۲} بلکه مطالعه ی LPS^{۲۳} و دیگر مطالعاتی که آموزش در کشورهای مختلف را مقایسه کرده اند. این مطالعات منجر به نظریاتی شده است مبنی بر این که هر کشوری روش آموزشی خاص خود را دارد؛ نظراتی که من فکر می کنم در چند سال اخیر به شدت مورد بحث قرار گرفته است. هر دو سوی این سؤال قابل بحث است. این که آموزش ویژگی های مشترکی و رای مرزهای جغرافیایی دارد و یا محدود به آن است، به نظر من شبیه این سؤال است که پیرسیم: آیا مثلاً یک برنامه ی درسی معیار^{۲۴} برای ریاضیات مدرسه ای در سطح بین المللی، مانند آنچه TIMSS و PISA فرض کرده اند، یا حتی در سطح ملی وجود دارد؟

مطالعه ی شیوه های آموزشی در کشورهای متفاوت کار بسیار مشکلی است، چرا که ما واژگان لازم برای گفت وگو در مورد آموزش را آن گونه که برای برنامه ی

درسی داریم، در اختیار نداریم. هنگامی که ما در مورد برنامه ی درسی صحبت می کنیم، واژه های شناخته شده و پذیرفته شده ی ریاضی وجود دارند که از آن ها استفاده می کنیم. وقتی در مورد آموزش صحبت می کنیم، به اجبار وارد دسته ای از اصطلاحات خاص می شویم که ممکن است در کشورهای دیگر همان مفهوم را نداشته باشد. به عنوان یک مثال، عبارت «آموزش متمرکز بر یادگیرنده» را در نظر بگیرید، که به روش های گوناگونی تعبیر شده است و می تواند معانی بسیار متفاوتی داشته باشد. نهایتاً، مایل هستم سخن خود را متوجه کاربران فناوری، مزایای آن و برخی مشکلاتی که برای معلمان می آفریند، نمایم. مزایای آن به کار گرفته می شوند و ما در مورد آن ها بیشتر می دانیم. ولی ای میشل می خواهم این موضوع را مورد بحث قرار دهم.

میشل: بسیار خوب، تاکنون سخن من نسبتاً کلی بوده است. اکنون مایل هستم با بررسی دو مثال شخصی آن را ملموس تر کنم و توسط این مثال ها می خواهم بیان کنم که همبستگی های حاصل از رویکردهای فرهنگی - اجتماعی و مردم شناسی، دیدگاه شخصی مرا تحت تأثیر قرار داده است. اولین مثال را «غلبه بر دوئیت های کاذب»^{۲۵} نام گذاری کرده ام. شکی نیست که دوگانگی ها هنگام سخن گفتن از آموزش ریاضی بیشتر ظاهر می شوند. در حالت کلی، آن ها ساده و خطرناک هستند.

یکی از آن ها، دوگانگی در مقابل مفاهیم و روش هاست. تصور می شود عمل آموزش روی اولین دومین آن ها متمرکز باشد. در حین پژوهش های خود، با کمک همکاران فرانسوی ژان باپتیست لاکرانژ، لوک تروش، و بسیاری دیگر، در زمینه ی فناوری دیجیتال، به خصوص سیستم های جبری رایانه (Artigue, 2002; CAS; e.g.)، من نسبت به آن واقعاً حساس شدم. در اوایل دهه ی ۱۹۹۰، پژوهش در آن زمینه، با وانمودکردن این که استفاده از CAS، توسط آزادکردن دانش آموزان از بار فنی، به آن ها اجازه می دهد روی مفاهیم و درک آن ها تفکر کنند، بر دوگانگی تأکید داشت. ولی مشاهدات کلاسی که من در آن زمان انجام می دادم به هیچ وجه بر این مطلب گواهی نمی داد. این ما را به فکر فرو داشت و سعی کردیم آن را در چارچوب رویکرد ابزاری که خود ایجاد کرده بودیم، درک کنیم.

برای درک بهتر این دوگانگی، بر آن شدیم به تکنیک ها دو ارزش، یکی شناخت گرایانه و دیگری عمل گرایانه منسوب کنیم. یک ارزش عمل گرایانه، چرا که آن ها عملی هستند و از آن ها نتایج حاصل می شود و یک ارزش معرفت شناسانه^{۲۶} چرا که به درک ما از موضوعات مربوط به آنان کمک می کنند. یک نکته ی مهم در این دیدگاه این است که اگر تکنیک های ریاضی آموزش داده می شوند، فقط به علت قدرت عمل گرایانه ی آن ها نیست، به دلیل قدرت معرفت شناسانه ی آن ها نیز هست. برای یک لحظه به تکنیک یک تقسیم طولانی، که امروزه بین آموزشگران ریاضی و ریاضی دانان یک موضوع مورد بحث برنامه ی درسی در آموزش ریاضی است فکر کنید.

این حرکت برای من یک نتیجه ی روشن گرایانه داشت. برای من دیگر مانند قبل



در رشته ی ما در بسیاری از موضوعات به قدر کافی مدارک معتبر وجود ندارد. ما در واقع در زمینه ی تعداد اندکی از موضوعات، مجموعه ای از تحقیقات انجام شده داریم که می توان گفت اجازه ی ادعاهای محکمی به ما می دهد

سؤال در مورد استفاده‌ی آموزشی از فناوری دیجیتال مطرح نبود. مقاومت در برابر فناوری دیجیتال - به خصوص، بازگشت باور نکردنی مذاکرات در مورد استفاده از ماشین حساب در مقاطع ابتدایی - می‌توانست به عنوان یک توازن شکسته شده بین ارزش‌های عمل‌گرایانه و معرفت‌شناسانه در تکنیک‌های معمول تعبیر شود. استفاده‌ی معمول از فناوری دیجیتال نقش قدرت عمل‌گرایانه‌ی فناوری را نمایش می‌دهد؛ انجام کار بیشتر با سرعت بیشتر زیر سایه‌ی قدرت معرفت‌شناسانه‌ی آن. ولی آن‌چه که استفاده از یک تکنیک را در مدرسه مجاز می‌کند، نمی‌تواند تنها قدرت عمل‌گرایانه‌ی آن باشد که یک تفاوت اساسی بین مدرسه و دنیای بیرون است. مجاز کردن فناوری و مفید کردن آن از جنبه‌ی ریاضی، مستلزم وجوه به هم پیوسته‌ی عناصر آن است که یک توازن منطقی بین قدرت عمل‌گرایانه و معرفت‌شناسانه‌ی تکنیک‌های ابزاری شده را فراهم می‌آورد. این توازن، که تحقیقات با شواهد آن را اثبات کرده است، نیازمند وظایف و شرایطی است که نمی‌توان آن را به استفاده‌ی ساده از قلم و کاغذ تقلیل داد. و این وظایف، که تحقیقات آن را نیز اثبات کرده است، هنگامی که مانند بسیاری از معلمان، شما با فرهنگ قلم و کاغذ وارد دنیای فناوری شوید، چندان ساده برنامه‌ریزی نمی‌شوند (لابورد، ۲۰۰۱).

این فقط یک مثال خاص است که خیلی خلاصه بیان شده است. اما با یکی از لحظات نادر در زندگی من، هنگامی که احساس می‌کردم به عنوان یک پژوهشگر یک چیز مهم آموخته‌ام، مربوط است. چیزی که مرا وادار می‌کرد به مقاومت‌های آموزشی، به معلمان به گونه‌ای متفاوت بنگرم و این هم چنین مرا وادار کرد که منابعی را که ما به عنوان پژوهشگر، برای آموزگاران و مؤسسات فراهم می‌کنیم، زیر سؤال ببرم. به علاوه، من احساس می‌کردم می‌توانم این دانش را به زبان نسبتاً ساده‌تری بیان کرده و آن را برای جامعه‌ی خارج از جامعه‌ی محققین قابل درک کنم.

مثال دوم مربوط می‌شود به تغییرات سازمانی

(شغلی). من نسبت به این واقعیت، زمانی که پایان‌نامه‌ی دکتری خانم بریژیت ژروگن (۱۹۹۵) را نظارت می‌کردم، حساس شدم. او مایل بود علت ناتوانی عمومی دانش‌آموزان در درس جبر هنگام ورود به دبیرستان پس از اتمام موفقیت‌آمیز یک برنامه‌ی شغلی را پیدا کند. او می‌خواست تعابیر متداول از این ناتوانی را که براساس این ایده شکل می‌گرفت - که این ناتوانی‌ها برای این دسته از دانش‌آموزان نسبتاً عادی است چرا که همه می‌دانند دانش‌آموزان شاغل از استعداد کمتری در ریاضیات بهره‌مند هستند - زیر سؤال ببرد. او نشان داد که دانش‌آموزان شاغل و دانش‌آموزان دبیرستان، اگرچه موضوع واحدی را دنبال کرده و از زبان یکسانی استفاده می‌کنند، اما در واقع، دو نوع متفاوت از فرهنگ جبری را انتقال می‌دهند. این تفاوت، دانش‌آموزان را در فهمیدن این‌که در سازمان جدید از آن‌ها چه انتظاراتی می‌رود، و معلمان را در تشخیص دانش جبری دانش‌آموزانشان و بنا کردن بر آن، دچار مشکل می‌کرد. به محض این‌که ناپوستگی‌های نامرئی بین دو سازمان - دو فرهنگ - شناخته شد، تدابیر آموزشی جدید دست‌یافتنی شدند و موفقیت‌آمیز بودن خود را در موقعیت‌های آموزشی و

هنگام به کار بردن، اثبات نمودند.

سپس من همین روش را با همکاری فردریک راسلون (۲۰۰۰)، در تحقیق در مورد درس آنالیز در گذر از دوره‌ی دبیرستان به دانشگاه، به کار بردم. برای مدتی طولانی، مشکلات دانش‌آموزان در این گذر به تحقیق در مورد ویژگی‌های تفکر ریاضی در سطح پیشرفته، شناسایی موانع معرفت‌شناسانه و مشکلات شناختی در این گذر منجر شده بود (برای نظرات ترکیبی تال را ببینید، ۱۹۹۱ و ۱۹۹۶). پیشرفت دیدگاه‌های مردم‌شناسی و سازمانی (شغلی) این نظریه را مردود نکرد، بلکه ما را وادار نمود که آن را در دامنه‌ی گسترده‌تری قرار دهیم؛ یعنی گذر بین دو سازمان. بنابراین، نقطه‌ی توجه از دانش‌آموز به سازمان انتقال پیدا کرد، بر مبنای این اصل که آگاهی دانش‌آموزان آن چیزی خواهد بود که سازمان‌هایی که تابع آن‌ها هستند به آن‌ها اجازه‌ی یادگرفتن آن را می‌دهند و برای درک مشکلات دانش‌آموز در هر دو سازمان، پیوستگی‌ها و ناپوستگی‌های آن‌ها و نحوه‌ی برخورد با آن‌ها، در معرض چه نوع تکنیک‌های ریاضی قرار

خواهد گرفت. به علاوه، این انتقال بسیار پربار بود و دیدگاه‌های جدیدی را برای بررسی ناپوستگی‌های این گذر شغلی نه تنها برای ما بلکه برای پژوهشگران دیگر که از آن زمان در همین راستا فعالیت می‌کردند، عرضه داشت. من فکر می‌کنم به عنوان مثال، می‌توان از پایان‌نامه‌ی آنالیز برژه (۲۰۰۸) از آرژانتین و هم چنین کارهای همکاران اسپانیایی مان (بوش، فونسکا و گاسکن، ۲۰۰۵) نام برد.

چه شواهد و مدارکی قابل دست‌رسی است و در آموزش ریاضی بایستی به دنبال چه بود؟

جرمی: من سخن خود را با بیان این‌که در رشته‌ی ما در بسیاری از موضوعات به قدر کافی مدارک معتبر وجود ندارد، آغاز می‌کنم. ما در واقع در زمینه‌ی تعداد اندکی از موضوعات، مجموعه‌ای از تحقیقات انجام شده داریم که می‌توان گفت اجازه‌ی ادعاهای محکمی به ما می‌دهد. هر مدرکی باید از معیارهای زیر تبعیت کند: (۱) باید به

حتی زمانی که تمرکز روی مباحث ریاضی است - مانند آن‌چه که اشاره کردم - پیشرفت زمینه‌ی مورد نظر، کاملاً به تکامل جهانی آن، به ساخت‌ها و دیدگاه‌هایی که تدریجاً معرفی و اصلاح شده‌اند و به تلاش‌های انجام شده در دهه‌ی اخیر وابسته‌اند که به منظور درک این‌که چرا پژوهش‌های آموزشی ظاهراً این قدر غیر مؤثر بوده، و این‌که چرا در عمل تأثیر چندانی نداشته، صورت پذیرفته‌اند

سؤالاتی که مطرح می‌کنیم، مربوط باشد؛ (۲) باید صحیح، یعنی معتبر باشد؛ (۳) باید تا اندازه‌ای عمومی باشد، یعنی قابل تعمیم به یک زمینه‌ی وسیع‌تر.

اگر مطالعات چندگانه‌ای در موضوع داده شده‌ای داریم، باید به نوعی «هم‌گرا» باشند. آن‌ها باید در نهایت به سمت موقعیت‌ها، شرایط، پژوهشگران، گروه‌ها و روش‌ها هم‌گرا شوند و حتی مهم‌تر از هر چیز، من فکر می‌کنم آن‌ها باید در یک محدوده‌ی شبکه‌مانند که مفهومی هم‌نظری و هم‌عام داشته باشند، قرار گیرند. این‌ها معیارهایی بودند که ما در تحقیق در یادگیری ریاضیات که کتاب «جمع آموخته‌ها»^{۲۷} حاصل آن است (کیل پاتریک، سوفورت، و فیندل، ۲۰۰۱: ۲۴-۲۱)، مورد استفاده قرار دادیم.

اگر معیارها را محدودتر کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ کوشش‌هایی در دست انجام است که پژوهش پیرامون آموزش ریاضی با معیارهای بسیار محدودی را جهت مطالعه قرار دهد. مثلاً، وقتی که شما اصطلاحاً استاندارد طلایی را در آزمایش‌های کنترل شده‌ی تصادفی به کار می‌برید، وارد مسائل می‌شوید. شما در می‌یابید که ما تقریباً هیچ تحقیقی نداریم که با این استاندارد مطابقت کند و

در نتیجه شما تقریباً هیچ مدرکی برای کار کردن ندارید. سوالات پژوهشی بسیاری وجود دارد که در مورد آن‌ها، با آزمایش‌های کنترل شده تصادفی غیرممکن خواهد بود و یا یک مطالعه‌ی مناسب لازم است که در این کنترل‌ها، مداخلات را، هرچه که هستند، غیر واقعی کند. آزمایش‌های کنترل شده تصادفی، یا چیزی که آن‌ها را تقریب می‌زند، صراحتاً بگوئیم در صورت استفاده از استنتاج‌های اتفاقی مورد نیاز هستند^{۲۸}. در هر صورت، ما در زمینه‌ی خودمان موضوعات بسیاری داریم که به چنین شواهدی نیاز ندارد. هنگامی که معیارهای محدودی به کار برده می‌شوند، چیزی که اتفاق می‌افتد در مواردی که من دیده‌ام این است که نظرات آزمایش نشده و تجارب فردی بسیاری باقی مانده است. از داوری جامعه‌ی متخصصین و تجارب آن‌ها به اندازه‌ی کافی استفاده نشده است. ما به مدارکی بیش از آن چه داریم نیازمندیم. به نظر من، باید ثابت شود، تنها مداخله کارایی ندارد. ما در بیان این که چه زمانی و به چه دلیل این مداخله به ثمر می‌رسد و این که منظور از کارایی چیست، به کمک نیازمندیم. ما هم چنین به شواهد توصیفی و تحلیلی در مورد روش‌های آموزشی ریاضی حتی اگر این روش‌ها «مداخله» نباشند، اما به طور طبیعی در یک محیط ظاهر شوند، نیازمندیم. تشبیه نمودن با علم پزشکی برای ما الزاماً مناسب نیست، اما حتی علم طب آزمایش‌های کنترل شده تصادفی را که با تعداد زیادی عملکردهای کاوش گرایانه قبل از آن آزمایش نشده باشد، بر عهده نمی‌گیرد؛ از جمله مطالعه‌ی حالت‌ها، مطالعات انجام شده توسط همکاران، و آزمایشات بالینی.

میشل: من در مجموع با شما موافق هستم و برای حضار متأسفم. شما در ابتدا به علاقه‌ی خود در زمینه‌ی تاریخ آموزش ریاضی اشاره نمودید. من فکر می‌کنم، در رابطه با این نکته، جالب است اگر یک نگاه بازتابی به تاریخ این موضوع بیندازیم. از دهه‌ی ۱۹۶۰، آموزش ریاضی سعی داشته است خود را به عنوان یک موضوع علمی پایه‌گذاری کند و این البته به همان سند مورد جست‌وجو شکل داده است. در بسیاری از کشورها کوشیدند به این موضوع در مراحل اولیه‌ی خود، توسط استفاده از روش‌های الهام گرفته از علوم تجربی، مثلاً روان‌شناسی تجربی در آن زمان، وضعیت علمی بدهند. تشکیل گروه‌های کنترل و تجربی و گرفتن پیش‌آزمون‌ها و پس‌آزمون‌ها متداول بود. ما نمی‌توانیم محدودیت‌های این روش‌ها را که در مورد پدیده‌های آموزشی مشاهده می‌شدند، فراموش کنیم. از سویی، متغیرهای مربوطه چندان ساده‌شناسی و کنترل نمی‌شدند و از سوی دیگر، حتی اگر این روش‌ها قادر بودند تفاوت‌ها را نشان دهند، آن‌ها دست‌رسی به سازوکار زیربنایی را فراهم نمی‌آوردند. این پدیده‌ها به توسعه‌ی روش‌هایی که امروزه حکمفرماست، هنگامی که مدرک اساساً توسط «مثلث‌سازی»^{۲۹} منابع چندگانه‌ای از اطلاعات و تجزیه و تحلیل جست‌وجو می‌شود، منجر شد.

این روش‌ها کارایی خود را برای شناسایی پدیده‌های تعلیم و تربیتی و درک آن‌ها، برای آشکار کردن منطق نهفته در رفتارهای دانش‌آموزان و معلمان و قابل فهم کردن پویایی کلاس درس و مسیرهای یادگیری، به اثبات رساندند. مثلاً در کشور فرانسه، تحقیقات کلاسی همیشه یک نقش اساسی را در این زمینه ایفا کرده است. قطعاً این به علت دیدگاه موقعیتی و نظام‌دار موجود در نظریه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی ابداع شده توسط گای پروسو (۱۹۹۷) است که در این زمینه بسیار مؤثر بوده و هست. این نظریه از اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ به توسعه‌ی یک روش خاص برای تحقیق کلاسی موسوم به مهندسی تعلیم و تربیتی منجر شد که شدیداً الگوی

گروهی کنترل بر مبنای تجربه را رد می‌کرد و به دنبال مدرک کمی و کیفیتی توسط مقایسه‌ی بین آن‌چه ما در موقعیت‌های تعلیم و تربیتی، «آنالیز بر مبنای قیاس یا استقرا» می‌نامیم، بوده است (آرتیگ، ۱۹۹۲). شکی نیست که مهم‌ترین پیشرفت‌ها در نظریه‌ی موقعیت‌های تعلیم و تربیتی از مورد استفاده قرار دادن این روش حاصل شده است. در دهه‌ی ۱۹۹۰، توسعه‌ی پژوهش در زمینه‌ی عملکرد معلمان، به توسعه‌ی روش‌های کمتر تهاجمی نیاز داشت و به استفاده‌ی روز افزون در مشاهدات طبیعی هدایت می‌کرد. البته این‌ها منابع دیگری از شواهد را مورد استفاده قرار می‌دهند، ولی همواره از همان فلسفه‌ی کلی تبعیت می‌کنند. این پژوهش‌ها در أسلوب شناسی، به دلیل توضیحات روشن‌گر و گاهی نیروی پیش‌گویی کننده‌ی دانشی که تولید می‌کنند، پربار بوده و هستند. آن‌ها ابزاری اساسی برای پژوهش‌های بنیادی در آموزش ریاضی محسوب می‌شوند، ولی در ارتباط با نوع شواهدی که فراهم می‌کنند، محدودیت‌هایی نیز دارند. یک مسئله‌ی اساسی در رشته‌ای که به فرهنگ و دیرینه وابستگی زیادی دارد، مسئله‌ی عمومیت است. اغلب اوقات، مستندات در آموزش ریاضی از مطالعات موشکافانه و دقیقاً موضعی نتیجه می‌شود. آن‌چه که این مطالعات به طور صریح فراهم می‌آورند، نوعی از قضایای وجودی هستند. می‌توان حدس زد که پدیده‌ی شناسایی شده و نتایج به دست آمده، از ارزش عام‌تری برخوردار هستند، اما این ارزش عام‌تر به هیچ وجه توسط خود تحقیق تضمین نمی‌شود. همان‌طور که شونفیلد (۲۰۰۷) خاطرنشان کرده است، «به طور نمونه نویسندگان به عمومیت یک پدیده به صورت ضمنی یا صریح، با بیان خاص بودن شرایط مورد بحث در مطالعه اشاره می‌کنند. اما اشاره کردن به عمومیت یک چیز، و فراهم نمودن مدرک محکم برای آن، چیز دیگری است» (ص ۹۳). این واقعیت باعث شد که او بین عمومیت‌های ادعا شده، ضمنی، بالقوه و تضمین شده، به عنوان مسیرهایی برای تفکر در حیطه‌ی عمومیت یک مطالعه، تمایز قائل شود. من با او در این نظریه کاملاً موافق هستم. آیا ما می‌توانیم از پژوهش‌های آموزشی انتظار بیشتری داشته باشیم؟ من امیدوارم چنین باشد، چرا که شکی نیست که حتی اگر پژوهش در نتیجه روش‌هایی که تاکنون ارائه کرده است و نوع مستنداتی که فراهم می‌آورد، به پیشرفت ادامه دهد، این برای تأمین انتظارات اجتماعی و نیز برای توسعه‌ی پیوندهای سودبخش بین پژوهش و عملکرد، برای بالا بردن میزان پیامدهای مثبت در شرایط واقعی در سطح محلی، کافی نیست و این مرا به سؤال بعدی رهنمون می‌کند.

انتظارات اجتماعی از رشته و زمینه‌ی کاری ما چیست و ما با آن‌ها چگونه برخورد می‌کنیم؟

میشل: شکی نیست که امروزه در بسیاری از کشورها آموزش ریاضی از اهمیتی حساس برخوردار است. آموزش ریاضی به کیفیت مناسب، به عنوان یک شرط برای پیشرفت علمی و اقتصادی و همچنین برای پیوستن و عضویت در جوامع مدرن و دمکراتیک محسوب می‌شود. جدای از انتقال میراث فرهنگی که از بزرگ‌ترین دستاوردهای جامعه‌ی انسانی است. آن‌چه که جامعه از آموزش ریاضی انتظار دارد، از یک طرف اطمینان از فراهم آوردن یک سطح منطقی از سواد ریاضی برای کلیه‌ی دانش‌آموزان است به طوری که آن‌ها را قادر سازد در زمان مقتضی به دانش ریاضی و در صورت نیاز، به تفکر در دنیای واقعی مجهز شوند و از طرف دیگر نیروی کار مورد نیاز و از لحاظ ریاضی واجد شرایط را برای

پاسخ هر کسی به این سؤال که مادر حال حاضر چه می دانیم، بستگی به مفهوم آموزش ریاضی دارد و این یک رشته ی پژوهشی و در عین حال یک رشته ی عملی است. هم پژوهش و هم عمل و شیوه ی کار می توانند یا به تعلیم ریاضیات یا به تعلیم آموزش ریاضیات مربوط شوند. این رشته در مورد آماده سازی کسانی که معلمان را برای آموزش مهیا می کنند، دارای یک صفت بازگشتی است

جوامع ما فراهم آورد. در دنیای پیچیده و در حال تغییری که ما در آن زندگی می کنیم، آن چه که از آموزش ریاضی انتظار می رود تغییر می کند، اما به هیچ وجه کاهش پیدا نمی کند. به طور کلی تأیید شده است که اغلب نظام های آموزشی در تحقق بخشیدن این انتظارات، همانند ۵۰ سال گذشته، هنگامی که دوره ی جدید اصلاحات ریاضی شروع شد، ناکام مانده اند.

حتی اگر به همان دلیل، پژوهش در آموزش ریاضی توسعه یافته باشد، با سعی در ساختن دانش مورد نیاز برای بهبود بخشیدن شرایط، ما باید تصدیق کنیم که پیشرفت های آن هرچه باشد، در جهان تغییری به وجود نیاورده است. پژوهش در آموزش ریاضی، نقش محدودی در حمایت از تصمیمات اتخاذ شده در رابطه با محتوای برنامه ی درسی و سازمان دهی دیدگاه های تدریس، روش های ارزش یابی و آماده سازی معلمان ایفا کرده است و اغلب آن را کم فایده و دارای پشتوانه ی علمی محدود تلقی می کنند. امروزه از پژوهش در زمینه ی آموزش انتظار می رود که نوع شواهد و مستندات که در پزشکی و داروشناسی با آزمایش های تصادفی میزان تأثیرات عینی و تجربیات وسیع متداول است، فراهم آورد. به خصوص در ایالات متحده وضع چنین است، ولی تنها خاص آن کشور نیست.

تصویر عینیت^{۳۰} و اعتبار که توسط مقایسات بین المللی مانند PISA (سازمان توسعه و همکاری اقتصادی، ۲۰۰۳) داده می شود و صفحه ی اول رسانه ها را به خود اختصاص داده است، میل دارد تأثیر عظیمی روی جوامع ما اعمال کند. قطعاً ما به عنوان یک انجمن، و با همکاری ICMI، باید یک وضعیت انتقادی در مورد عقاید و ارزش هایی که جامعه مایل است به ما تحمیل کند، توسعه بدهیم. ما بهتر از دیگران قادر هستیم دعای عینیت را زیر سؤال ببریم. در مقابل نیز، به نقطه نظراتی که در آموزش ریاضی فاقد معنی است واکنش نشان دهیم و ابزارهای اندازه گیری مورد استفاده را در تعیین این که چه چیز دانش محسوب می شود و چه چیز نه، مورد سؤال قرار دهیم. هم چنین ما باید تأکید کنیم که دانش ریاضی با چندگونگی صوری که داراست، نمی تواند به سادگی در یک ساختار تک بعدی تصرف شود. اما با تمام این ها، ما نمی توانیم خواسته های اجتماعی و سؤالات آن ها را در مورد این که چگونه اقدامات پژوهشی را انجام داده ایم و این که چگونه نتایج آن را خارج از جامعه ی محققین این موضوع، پخش و توزیع نموده ایم، نادیده بگیریم. من دو چالش اساسی را که نسبتاً به یکدیگر وابسته هستند، برای آینده ی نزدیک پیش بینی می کنم:

● جدی گرفتن مسائل مقیاس گذاری یا سنجش و در نظر گرفتن آن ها به عنوان سؤالات پژوهشی واقعی که راه حل آن ها نیازمند دانش به خصوصی است، توسعه ی ساختارها و اسلوب شناسی های ویژه، مشارکت متخصصین موجود در این رشته و معرفی همکاران جدید و انواع جدید طرح های تعلیم و تربیتی، قوی تر از محصولات تصنعی که معمولاً توسط محققین ساخته می شود.

● یافتن روش هایی برای قابل درک نمودن نتایج تحقیقات انجام شده در آموزش

ریاضی و مفید نمودن آن ها برای به کار بردن. به عنوان مثال، ICMI سعی دارد توسط مجموعه مطالعات ICMI برای تحقق بخشیدن به این تلاش همکاری کند. این مطالعات که به صورت کتاب در دست رس است، به زودی پس از گذشت سه سال از انتشار آن ها، از طریق اینترنت برای همگان قابل دست رس خواهد بود. اما هنوز کارهای بیشتری پیش روی داریم.

جرمی: در مورد سؤال انتظارات اجتماعی در هر جامعه، مردم انتظار دارند که فرزندان شان ریاضیات را در سطح بالایی، در وهله ی اول برای استفاده ی شخصی خودشان یعنی این که هر کودکی لازم است برای عملکرد در جامعه ی ریاضی بداند - فرا گیرند. اما یک نیاز اجتماعی نیز ایجاب می کند که مردم از دانش ریاضی برخوردار باشند. این مجموعه از انتظارات دوگانه، برای ما مسائل زیادی مطرح می کند. یکی از مهم ترین مسائلی که در تلاش برای تغییر ریاضیات در جامعه با آن روبه رو می شویم، این است که عامه ی مردم مایل اند ریاضیات را آن گونه که خود در مدرسه آموخته اند، تعریف کنند و این اغلب مانعی برای تغییر است. و تجربه به ما می گوید، تغییر این که ریاضیات چگونه آموخته شود، احتمالاً مشکل تر از تغییر موضوعاتی است که تدریس می شوند؛ هر چند که هر دو این ها اقداماتی دشوار هستند.

جامعه هم چنین انتظار دارد که تحقیق در آموزش ریاضی بتواند پاسخ هایی قطعی در مورد یادگیری و یاددهی ریاضیات فراهم آورد. تلاش برای آمیختن تحقیقات روی یک موضوع مفروض، تقریباً همواره مایوس کننده بوده است. سیاست گذاران مایل اند بتوانند ادعاهایی در مورد علت مؤثر بودن اقدامات آموزشی متفاوت، ابراز کنند، اما دلایل ضعفی وجود دارد که باور کنیم یک اقدام یگانه می تواند به طور یکسان در همه ی مباحث، همه ی معلمان و همه ی دانش آموزان مؤثر باشد. پژوهشگران و سیاست گذاران باید از مقایسه ی میانگین میزان عملکرد گروه هایی که اقدامات تعلیمی ابتکاری و جایگزین دریافت می کنند، دوری کنند. آن ها باید به واریانس و نه به میانگین، توجه کنند. این که در چه موضوعاتی تفاوت وجود دارد؟ برای کدام معلمان؟ برای کدام گروه از دانش آموزان؟

راه های متفاوت بسیاری برای دست یابی به مسئله ی آخته به جریان انداختن تحقیق هنگام اعمال پیشنهادات مورد نظر وجود دارد. همان طور که قبلاً در بحث شواهد اشاره کردم، انجمنی که کتاب «جمع آموخته ها» را منتشر کرد و (کیل پاتریک، و همکاران، ۲۰۰۱)، نظر سخاوتمندانه و معقولی به آن چه که تحقیقات می تواند به ما بگوید، انداخته و توانسته است طیف وسیعی از شواهد را بررسی کند. فرهنگستان تعلیم و تربیت ایالات متحده در سال جاری، اصطلاحاً ابتکار برگه های سفید را به کار گرفته است تا برای سیاست گذاران در دولت آینده و مجلس بهترین مدارک و شواهد قابل دست رس در مورد مسائل مربوط به خط مشی های آموزشی انتخاب شده را فراهم آورد. گروهی که روی سیاست آموزش ریاضی و علوم کار می کند، مانند کمیته ی مطالعه ی یادگیری ریاضیات، شبکه ی نسبتاً گسترده ای برای جمع آوری اطلاعات که سیاست گذاران را آگاه سازد، دایر کرده است.

در مقابل، یکی از مسائل مطرح شده توسط هیئت ملی مشاوره ی ریاضیات (۲۰۰۸) در گزارش اخیر خود، استفاده از معیار بسیار دقیق، برای بررسی کیفیت مدارک بررسی شده بود. این رویکرد خارج از نظریه بر مبنای تجربه ی شخصی، هیئت را با دستاورد اندکی در مورد این که فرهنگ در موضوعات مختلف چه

می گوید، رها کرد. پاسخ های قطعی برای اغلب پرسش هایی که جامعه انتظار جواب آن را دارد ممکن نیست، اما در هر صورت محققین بر آن اند که راه های بهتری برای بررسی این پرسش ها بیابند. هرگز مدرک کافی وجود ندارد و من با میشل در مورد مقیاس گذاری و سنجش تحقیقاتمان و پیدا کردن راه هایی برای انتشار آن به صورتی روشن و مفید، موافقم.

دیدگاه های آموزش و یادگیری ریاضیات و شواهد مربوط به آن تا چه حدی می تواند از چندگونگی فرهنگی و مفاهیم آموزشی فراتر رود؟

جرمی: چندگونگی، آن چه را که ما می توانیم به عنوان اعضای آن چه که ما یک جامعه ی یکسان می پنداریم، به یکدیگر بگویم مشروط می کند. هنگامی که ما می گویم «جبر» و یا «برنامه ی درسی» و یا همان طور که قبلاً گفته ام «یادگیرنده محور»، بین فرهنگ ها و حتی داخل فرهنگ ها، منظورمان چیست؟ به علاوه تلاش برای موضعی کردن ریاضیات همواره موفقیت آمیز نبوده است.

مثلاً کار با ارزش اوبی دامبروسو در ریاضیات قومی، در برنامه ی درسی ریاضیات بسیاری از کشورها به طرز گسترده ای نفوذ کرده است، ولی در جاهای دیگر اثر چندانی نداشته است. مردم می خواهند به آن چه که فکر می کنند، عمومیت دهند و در عین حال ما باید به نوعی برای ریاضیات مدرسه راه هایی پیدا کنیم که به طور جدی به شرایط قومی توجه کند.

برمی گردیم به مسئله ی مطالعات تطبیقی بین المللی مانند TIMSS و PISA. باید توجه کرد که این گونه مطالعات به نوعی به برنامه ی درسی ریاضیات مدرسه که در آن جا متعارف است، وابسته است و می تواند به عنوان الگویی برای سنجش و ارزیابی برنامه ی درسی کشورهای مختلف، مورد استفاده قرار گیرد. این برنامه درسی متعارف یا ایده آل برنامه ای نیست که بتوان آن را در کشور خاصی یافت. بلکه، یک ساختار فرضی است که برای ممکن نمودن استفاده از مجموعه ای مشترک از پرسش های ارزیابی در سراسر مرزهای ملی، طراحی شده است (کایتل و کیل پاتریک، ۱۹۹۹). در نتیجه، بنیان گذاران مطالعات تطبیقی بین المللی، مسئله ی چندگونگی فرهنگ ها و متون آموزشی را با کنار زدن سوالات توصیفی و تنها شرایط موضعی بررسی کردن این پرسش که آیا دانش آموزان «فرصت برای یادگیری» محتویات احتمالاً ارزیابی شده توسط پرسش های ارزیابی را داشته اند، تقلیل می دهند.

ما هنوز با این مشکل که مدت ها پیش توسط هانس فرودنتال (۱۹۷۵) معرفی شده است، یعنی ساختن ابزارهای ارزش یابی که از لحاظ بین المللی هم ارز باشد و در عین حال شرایط محلی را نیز در نظر گرفته باشند، روبه رو هستیم. آموزشگران ریاضی مدت ها است که اعتراف کرده اند، آن چه به عنوان برنامه ی درسی ارائه می شود، شباهت اندکی به برنامه ی درسی رسمی مصوب وزارت آموزش و پرورش دارد و قطعاً در کلاس درس می تواند مانع سهمگینی برای تغییر باشد. هم چنین جالب است بدانیم که نظام های متمرکز غالباً آن چنان که ما فکر می کنیم، متمرکز نیستند و نظام های غیرمتمرکز آن طور که عموماً تصور می شود، غیرمتمرکز نیستند (هاوسون، کایتل، و کیل پاتریک، ۲۰۰۸/۱۹۸۱). مدت ها قبل، پیش از آن که انگلیسی ها یک برنامه ی درسی ملی داشته باشند، یک بازرس آموزشی فرانسوی یک بار عقیده ی زیر را ابراز کرد که من فکر می کنم فقط در مورد فرانسه و انگلستان صدق نمی کند:

در فرانسه، فرض بر این است که تمام معلمان در زمان یکسان کار یکسانی

انجام دهند، اما هیچ کس چنین نیست و در انگلستان، که فرض بر این است که هر کسی به روش خود عمل کند، هیچ کس این طور نیست.

میشل: من با شما موافق هستم. مدت ها پیش چنین بود و امروزه هیچ بازرس فرانسوی جرئت گفتن این را ندارد.

من مایل هستم به چندگونگی از زاویه دیگری نگاه کنم. همان طور که در مراسم افتتاحیه گفتم، به گوناگونی می توان از دید منفی، به عنوان مانعی در راه نوع شواهد کلی که رشته ی آموزش ریاضی، اگر یک زمینه ی علمی واقعی بود می بایست تهیه کند، نگاه کرد. به نظر من، این یک دیدگاه کاملاً نادرست است. من می خواهم روی جنبه ی مثبت گوناگونی در آموزش ریاضی تأکید کنم. در ۱۵ سال گذشته، زمینه ی کاری ما از چندگونگی، واقعیت های بسیار زیادی را فرا گرفته است.

یک مثال جالب به طور غیر مستقیم از مقایسات بین المللی که چند لحظه پیش مورد انتقاد قرار دادم، نتیجه می شود. TIMSS توجه خود را به سمت برخی مناطق ناحیه ای مانند آسیا، که در آن جا چندین کشور نتایج درخشان تری نسبت به بیشتر کشورهای غربی در آزمون های پیشرفت TIMSS به دست آورده بودند معطوف کرده است. با بررسی های تکمیلی، محققین تلاش کرده اند دلایل ممکن برای تفاوت های مشاهده شده را شناسایی کنند. در این بررسی ها ICMI با یک جلد کتاب زیبا (لونگ، گراف و لویز-ریسل، ۲۰۰۶)، همراه با مطالعه ی سیزدهم ICMI، همکاری کرده است. این کتاب در سال ۲۰۰۶ منتشر شد و آموزش ریاضی رادر سنت های فرهنگی متفاوت، مقایسه کرده است. به طور دقیق تر بگویم، این کتاب آموزش ریاضی در کشورهای آسیای شرقی وابسته به سنت کنفوسیوس را با آموزش ریاضی در برخی از کشورهای غربی مقایسه کرده است. آن چه که ما از این بررسی ها آموختیم واقعاً جالب است، چرا که نشان می دهد تفاوت اساساً نه از شکل برنامه ی درسی نتیجه می شود و نه از تعداد ساعاتی که در مدرسه وقف ریاضیات می شود و نه از علاقه ی دانش آموزان به ریاضیات. بلکه تفاوت عمیقاً از آن چه که تحصیل کرده ی ریاضی در یک فرهنگ کنفوسیوسی معنی می دهد، ارتباطی که با دانش و مدرسه ایجاد می کند و راه هایی که ارتباط دانش آموز-معلم و موقعیت های آموزشی آنان را شکل می دهد، ناشی می شود. دانشی که این بررسی ها عرضه می کنند، هر نوع تلاشی را برای بهبود بخشیدن به وضعیت آموزش ریاضی در هر کشوری، با صرفاً پرداختن به سطح و ویژگی های اداری، هرچند هم مهم باشند، فاقد صلاحیت می داند و مسیر را به سوی بازتابی پربارتر، با تلاش در درک نقاط قوت و محدودیت های انتخاب آموزشی نسبی خود، با قرار دادن آن ها در یک ساختار کلی تر با مؤلفه های فرهنگی قومی و استفاده از این درک برای تفکر در مورد جایگزینی و تغییر، هموار می کند. هم چنین وظیفه ی ماست که سیاست گذاران را از این امر آگاه کنیم. چرا که آن ها غالباً به خودی خود آگاه نیستند و در انتظار یک معجزه و یا ارزان ترین راه حل برای مسئله هستند.

آن چه که در این پدیدار جالب توجه نیز هست، این واقعیت است که چشم پیگانگان، شناسایی طرح های اصیل با ظرفیت تعلیم و تربیتی مهم را که به عنوان واقعیت های طبیعی در این فرهنگ ها موجود بوده، مجاز کرده است. به عنوان مثال، نظام بررسی دروس را (که در ژاپن برای پیشرفت تخصصی و حرفه ای استفاده می شد، توسط این مطالعات تطبیقی آشکار شد و از آن زمان خود یک موضوع تحقیق شده است) می توان نام برد.

می توانم مثال های بسیار دیگری در مورد آن چه که از چندگونگی یاد گرفته ام نام ببرم. تنها مثال دیگری که بیشتر شخصی است را به طور خلاصه ذکر می کنم. با مطالعات مقایسه ای پیرامون یادگیری و یاددهی جبر که توسط بررسی های ICMI روی این موضوع (ستسی، چیک، و کندال، ۲۰۰۴) انجام شده بود، من نسبت به گوناگونی راهبردهای آموزشی که در سطح جهانی برای آشنا کردن دانش آموزان با دنیای جبر به کار می رود، آگاه شدم. در نتیجه ی این بررسی، من الزامات نسبی این راهبردهای متفاوت را در مورد مشکلات حاصل از گذر بین دروس حساب و جبر، بهتر درک می کردم. شکی نیست که پایان نامه ی خانم بریژیت گروژن (۱۹۹۵) که در بالا به آن اشاره کردم، مرا نسبت به این الزامات حساس کرده بود. اما بدون این بررسی های مقایسه ای، من فاقد نوع شواهدی که توسط تجزیه و تحلیل استفاده از راهبردهای آموزشی متفاوت در مقیاس وسیع تهیه می شود، بودم.

امروز آموزش ریاضی با چه چالش های اساسی روبه روست؟

میشل: در فرصت باقی مانده، دادن یک پاسخ منطقی به این سؤال مشکل است، اما ما سه چالش اساسی را انتخاب کرده ایم:

● چالش فناوری

من به مدت بیش از ۲۰ سال در فعالیت های پژوهشی و آموزشی در ارتباط با فناوری سروکار داشته ام، لذا نسبت به آن خیلی حساس هستم. واضح است که نظام های آموزشی هنوز با دستورهایی که هنگام استفاده از محصولات فناوری با آن ها برخورد می کنند، در ستیزند. این مشکلات نه تنها به تازه ترین فناوری ها مربوط می شود، بلکه حتی آن هایی که بیش از دو دهه قبل توسعه یافته اند، مانند ماشین حساب های گرافیکی و نرم افزار هندسه ی دینامیک را نیز در برمی گیرد. اما امروزه تکامل فناوری ما را وارد دوره ی جدیدی کرده است که در آن فناوری نه تنها اشیای ریاضی، بازنمایی آن ها و روش هایی که توسط آن ها می توانیم این بازنمایی ها را اداره و به یکدیگر مرتبط کنیم را تحت تأثیر قرار داده است، بلکه تعاملات تعلیم و تربیتی، و کلی تر بگوییم، راه های دسترسی به اطلاعات را نیز تحت تأثیر قرار داده است. امروزه فناوری دیجیتال می تواند از کارهای مشترک - چه از راه دور و چه نزدیک - بین دانش آموزان، بین معلم و دانش آموزان، بین معلمان، و بین معلمان و پژوهشگران، پشتیبانی کرده و آن ها را پرورش دهد. نتایجی که این کار می تواند بر فرایند یادگیری دانش آموزان و تکامل عملکرد معلمان و پیشرفت حرفه ای آنان داشته باشد، قطعاً یکی از ابعاد اساسی است که تحقیقات آموزشی باید در آینده، به طور نظام مند آن را کشف کند. مطالعه ی هفدهم ICM در فناوری دیجیتال (هوئیس، لاگرانژ، سان و سینکлер، ۲۰۰۶) که به صورت کتاب (هوئیس و لاگرانژ، در حال چاپ) در سال آینده ظاهر خواهد شد، در بررسی این چالش همکاری خواهد داشت.

جرمی:

● چالش انسجام^{۳۱}

انسجام چالشی است که ما هر دو آن را مهم تلقی می کنیم. هرگونه چالشی که در آموزش ریاضیات در برابر ما قرار می گیرد، دارای دو جنبه ی داخلی و خارجی است و این در مورد چالش انسجام نیز صادق است. از جنبه ی داخلی، حوزه ی آموزش ریاضی لازم است بهتر از قبل، با گسترش روزافزون نظریه ها و ساختارهایی که راهنمای کار ما هستند، روبه رو شود. برخی از این نظریات،

مانند نظریه ی بروسو (۱۹۹۷) در زمینه ی موقعیت های تعلیم و تربیتی یا نظریه ی وان هیلی (۱۹۸۴) در مدل تفکر ریاضی، در درون این حوزه گسترش یافته اند. نظریه های دیگر، مانند آن هایی که به کارهای پیازه و ویگوتسکی مربوط می شوند، از خارج وارد شده و در حوزه ی ما اقتباس شده اند. ما انسجام بیشتری بین نظریه های مورد استفاده ی خود نیازمندیم.

ما دارای گسترش ساختارها نیز هستیم. من برخی از آن ها، مانند دانش پداگوژی محتوا را در بالا معرفی کرده ام، ولی می توانستم تعداد بیشتری، مانند «شناخت موقعیت مدار»^{۳۲} یا «نرم های ریاضی - اجتماعی»^{۳۳} را نام ببرم. این ساختارها امروزه توسط آموزشگران ریاضی با چندین معنی متفاوت مورد استفاده قرار می گیرند و این معانی به تحلیل، انتقاد و توضیح نیاز دارند. از نقطه نظر بین المللی، ما به عنوان یک جامعه در برقراری ارتباط بین زبان های بومی خود هنوز مشکل داریم. هنگامی که ما از یک واژه با معانی متفاوت استفاده می کنیم، این مشکل بزرگ تر می شود.

در بسیاری موارد، نوع دیگر چالش داخلی، از شکاف بین پژوهشگران و معلمان ناشی می شود. هر چند من بر این باورم که حرکت به سمت این که به معلمان بیش از پژوهشگران بها داده شود، در کاهش دادن این شکاف مؤثر بوده است. با وجود این، هنوز تلاش های زیادی هست که همه - و به خصوص پژوهشگران - بایستی برای توسعه ی یک رویکرد منسجم در پژوهش، توسط استماع دقیق و همکاری نزدیک تر با یکدیگر انجام دهند.

از نقطه نظر خارجی، آن هایی که خارج از رشته ما هستند آن را تکه تکه می پندارند. آموزشگران ریاضی به ندرت با صدای واحدی از اهمیت دستاورد در آموزش سخن می گویند. تحقیقات بنیادی در رشته ی ما برخی اوقات به عنوان هدایتگر به نتایج متضاد و حمایت کننده از عملکردهای کاملاً متفاوت تعبیر می شود. غالباً عامه ی مردم، ریاضی دان و آموزشگران ریاضی را برای حل مسائل آموزش ریاضی در حال ارائه ی پیشنهادات متعارض می بینند. در واقع، ممکن است این پیشنهادات با هم ناسازگار باشند، ولی من فکر می کنم اگر قبل از آن که مردم متوجه این تفاوت ها شوند و رأی صادر کنند، این تضادها با مصالحه حل شوند، به نفع رشته خواهد بود.

اگر قرار باشد آموزش ریاضی به طور جدی به عنوان یک رشته ی علمی و عملی محسوب شود، باید در مباحثاتی که خود توسعه می دهد، از هر دو جنبه ی درونی و بیرونی منسجم تر باشد. میشل خبر می دهد که در اروپا آموزشگران ریاضی در سال های اخیر در این مسیرها تلاش هایی را شروع کرده اند.^{۳۴} پروژه های گوناگونی در دست انجام است که از دیدگاه های منسجم و ائتلافی حمایت می کنند و روشن کننده ی وجوه مشترک و تفاوت ها هستند. این نوع پژوهش ها نمی تواند کار فردی باشد و نیازمند هم یاری بین المللی و ساختارهای مناسب است. این ها مسائلی هستند که سازمانی مانند ICMI می تواند در بررسی آن همکاری و کمک کند.

میشل: تجاربی که من در پنج سال اخیر روی برقراری یک نوع ائتلاف نظری یا لاقال شبکه سازی بین چارچوب های نظری در محدوده ی فعالیت های گروهی CERME که در بالا به آن اشاره شد یا در پروژه های مربوط به جامعه ی اروپا با تمرکز بر آموزش بر مبنای استفاده از فناوری در ریاضیات داشته ام، نشان دهنده ی آن است که این تلاش ها قابل ستایش است. اما من با جرمی در این مورد که این

تلاش‌ها برای توسعه و پیشرفت، به سازمان‌دهی و ساختار بین‌المللی نیازمند است موافقم. برای من، اولین گواه که از این تلاش نتیجه می‌شود این واقعیت است که تنها با خواندن نوشته‌های محققان که در یک بافت دیگر و یک فرهنگ دیگر زندگی می‌کنند و رویکردهای دیگری دارند، نمی‌توان دریافت که رویکردهای آنان چگونه عملاً روی کار پژوهشی و ادعاهای آنان در مورد شیوهی عمل تأثیر می‌گذارد. برای این کار باید نوعی شیوهی مشترک را توسعه داد که اجازه می‌دهد بین رویکرد نظری و شیوهی عمل وارد فرایند عملکرد شویم. در چارچوب دو پروژه در اروپا به نام‌های TELMA^{۳۵} و ReMath^{۳۶}، من این فرصت را یافتم که در چنین شیوهی توسط یک روش‌شناسی مبنی بر آزمایش‌های متقابل^{۳۷} که از دستورات سختی پیروی می‌کرد همکاری کنم (Artigue et al., 2007).

اکنون، پس از گذشت پنج سال احساس می‌کنم بهتر می‌توانم برخی مقایسات را انجام دهم، این که شبکه‌سازی در کجا مفید و در کجا غیرمفید است، چه چیز مکمل است و چه چیز سازگار نیست. این تلاش‌ها دیدگاه دیگری نسبت به موضوع به شما می‌دهد، اما این که چگونه می‌توانیم دانشی را که به صورت جمعی در این پروژه‌های مربوط به اروپا با مخاطبین بیشتر به دست آورده‌ایم با هم سهیم شویم، برای من هنوز یک مسئله‌ی باز است.

● چالش مساوات

در این جا قطعاً همه‌ی ما عقیده داریم که دست‌رسی به آموزش ریاضیات با کیفیت، یک حق انسانی است و آموزش ریاضی بایستی در خدمت داعی تساوی باشد. اما همه‌ی ما می‌دانیم که امروزه وضع غیر از این است. حتی ایده‌ی ریاضیات برای همه و پرورش استعدادهای ریاضی‌دو آرزوی مخالف هم هستند و این به هیچ وجه یک موضع‌گیری حاشیه‌ای نیست. آموزش ریاضی در بسیاری از نقاط جهان به تفاوت اجتماعی کمک می‌کند و حتی خود، سرچشمه‌ی تبعیض است. تحقیقات شواهد بسیاری را در این مورد فراهم آورده است، به ویژه از زمان پژوهش ابداعی کاراهر، کاراهر و شیلدمن (۱۹۸۵ و ۱۹۸۷) با فروشندگان خیابانی برزیلی، که نشان می‌داد مدرسه نتوانسته است از دانش و تجاری که این شاگردان از فعالیت‌های خارج از مدرسه به دست آورده بودند، استفاده کند. تجارب و مطالعات انجام شده در دهه‌ی اخیر - مثلاً پژوهش توسعه یافته توسط جوبولر (۲۰۰۰ و ۲۰۰۸) در انگلستان و سپس در ایالات متحده. البته مثال‌های بسیار دیگری هم وجود دارد که نشان می‌دهد که وضعیت جاری وخیم نیست. نتایج حاصل از کار آن‌ها، امروز قضایای وجودی را برای ما به ارمغان آورده است. من واقعاً امیدوارم که مطالعه‌ی جدید ICMI روی یاد دادن و یاد گرفتن ریاضیات در بافت‌های چندزبانه، اساساً به تفکر و اندیشه در این دامنه کمک کند.

من سخن خود را با جمله‌ای از سرمقاله‌ی خانم جیل آدلر، نایب‌رییس ICMI در خبرنامه‌ی ICMI ژوئن (۲۰۰۸) به پایان می‌رسانم. او سؤالی که در ماه مارس در نشست روم به مناسبت سده ICMI مطرح شده بود را تکرار کرده است: «کارهایی که ما انجام می‌دهیم، چگونه به هدف (پروژه) میلینوم در مورد جهانی کردن آموزش ابتدایی تا سال ۲۰۱۵، کمک می‌کند؟» در این سرمقاله، او اظهار امیدواری کرده است که ICME-11 با فعالیت‌های گوناگون خود و مورد توجه خاص قرار دادن این چالش، به ما کمک خواهد کرد گام‌هایی محکم در این راستا برداریم، به طوری که در سال ۲۰۱۲، در کنفرانس بعدی ICME

که در سئول برگزار خواهد شد، بتوانیم شواهدی از پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در این راستا را با خود به ارمغان ببریم. من در این امید با او همراهی می‌کنم و مطمئن هستم جرمی نیز همین احساس را دارد.

پی‌نوشت

* مطلب حاضر، با کسب اجازه از آقای دکتر علی رجایی (مترجم مقاله) و آقای محمود تلگینی (مدیرمسئول نشریه‌ی فرزند) و اندکی ویرایش مجدد، در ویژه‌نامه‌ی شماره‌ی ۱۰۰ چاپ شده است.

1. Michele Artigue
2. University Paris-Diderot-Paris7.
3. ICMI
4. Jeremy Kilpatrick
5. University of Georgia
6. Teacher College, Columbia University
7. University of California at Berkeley
8. Stanford University
9. Gothenburg University
10. Fulbright Awards
11. 2007 Felix Klein Medal
12. Diversity
13. Didactics
14. Determination
15. Yves Chevallard
16. Constructivism
17. Representation
18. The Journal of Mathematics Teacher Education

۱۹. رساله آموزشی معلمان ریاضی که در سال ۲۰۰۸ توسط انتشارات سنن چاپ شده است و حاوی چهار جلد است که به ترتیب توسط پیترو سولیوان و تری وود (ج ۱)، دینا تیروش و تری وود (ج ۲)، کنراد کرینو و تری وود (ج ۳)، باربارا جاورسکی و تری وود (ج ۴) نگارش شده است.

20. Gesture
21. Pedagogical Content Knowledge
22. Mathematical Knowledge for Teaching
23. (Trends in International Mathematics and Science Study), (Hiebert et al., 2003; Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999)
24. Learner's Perspective Study (Clarke, Emanuelsson, Jablonka, & Mok, 2006; Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006)
25. Canonical Curriculum
26. (Programme for International Student Assessment)
27. Overcoming False Dichotomies
28. Epistemic
29. Adding it Up
۳۰. برای یک نظریه‌ی توسعه یافته در مورد استنتاج‌های اتفاقی، به ماکسول مراجعه کنید (۲۰۰۴).
31. Triangulation
32. Objectivity
33. Coherence
34. Situated Cognition
35. Sociomathematical Norms

۳۶. به عنوان مثال، این تلاش‌ها توسط یک گروه که به طور خاص خود را وقف پاسخ‌گویی به این سؤالات کرده است، در کنفرانس‌های اخیر انجمن اروپایی پژوهش در آموزش ریاضی اثبات شده است (CRME4, CERME5, CERME6). برای اطلاعات بیشتر به مجموعه مقالات ERME که به صورت آنلاین در سایت <http://eremeweb.free.fr> موجود است، مراجعه کنید.

۳۷. TELMA یک تیم پژوهشی در اروپاست که وابسته به یک شبکه‌ی اروپایی کلادوسکوپ است. فعالیت‌های آن روی آموزش توسعه‌ی فناوری در ریاضیات متمرکز است. انتشارات TELMA از طریق سایت اینترنتی آن قابل دست‌رس است:

<http://telma.noe-kaleidoscope.org>

38. ReMath (Representing Mathematics with Digital Media)

(نماینده‌ی ریاضیات با دستگاه‌های تبلیغاتی دیجیتال) یک پروژه در کشور اروپا از طرف (Information Society Technologies, Programme IST 4-26751) است. اطلاعات در مورد پروژه ReMath را می‌توان از طریق سایت <http://www.remath.cti> به دست آورد.

39. Cross-experiments

جای چه خالی است!

امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی

تفسیر شکل با مربع های غیر هم رنگ (مثل شکل کتاب):
مربع زرد، a و مربع سبز $3a$ است.

تفسیر شکل با مربع های هم رنگ (مثل شکل روی تخته):
مربع یک «مکان نگه دار» است، بعضی وقت ها a را نگه می دارد، بعضی وقت ها، $3a$ را.

هر دو تفسیر از $3 \times \square$ دورند؛ اما به هر حال تفسیر اول کمی بهتر از تفسیر دوم است. بالاخره رنگ به کار آمد! ولی آیا در میان این همه جای خالی رنگی رنگی، رنگ این یکی اهمیت دارد؟

خُب اگر ما مجبوریم به هر دلیلی از این «ترفندهای آموزشی» استفاده کنیم چه بهتر است یک پند جبری را به خاطر بسپاریم:

جای a را با احتیاط خالی کنید!
چون ممکن است دانش آموز شما بعداً در جایی بخواند:
«در ریاضی معمولاً به جای استفاده از علامت \square از نمادهای حروف انگلیسی، مانند a ، b ، c ، ... استفاده می شود.» (ریاضیات ۱، سال اول دبیرستان)

و ممکن است شما مایل نباشید که او $\square + \square = 2\square$ را به شکل $a + b = 2c$ یا $2\square + 2\square = 4\square$ تعبیر کند. اما اگر چنین کرد بر او خُرده نگیرید چرا که او به مدت هشت سال همه گونه تعبیر جای خالی را تجربه کرده است.

این یادداشت با چند «تجربه ی جبری» شروع و با یک «پند جبری» خاتمه می یابد. از آن جایی که به دل (ذهن) نشستن یک پند جبری، مانند هر پند دیگری، نیازمند تجربه ای آشناست، لطفاً بعد از پر کردن «جای خالی» در هر یک از مسائل زیر، کمی مکث کنید و به نقشی که شکل جای خالی و رنگ آن در مسأله ایفاء می کند (یا نمی کند) فکر کنید.

ریاضی اول دبستان: $\square + \square = 3$
(هر دو جای خالی زرد است.)

ریاضی چهارم دبستان: $\square \times \square = 7 \times 4$
(هر دو جای خالی صورتی است.)

ریاضی دوم راهنمایی: $\square + \triangle = -12$
(مثلث بنفش و مربع زرد است.)

اگر هنوز دلیل سازگاری برای انتخاب شکل و رنگ جاهای خالی پیدا نکرده اید ناامید نشوید؟ مثال بعدی نشان می دهد که شاید اصولاً چنین دلیلی وجود ندارد.

ریاضی دوم راهنمایی:



(مربع بالایی، زرد و مربع پایینی سبز است.)