بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وششم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۹۹
■ بهمن ۱۳۹۵
■ شمارهٔ ۵
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

حرف اول

۲۲بهمن، نقطهٔ عطف / سردبیر ۲

آموزشی

گوشه‌سنج / قاسم حسین قنبری ۳
مسئلهٔ آپولونیوس / ترجمه و تشریح: عباس قلعه پوراقدم ۶
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۴
آموزش ترجمهٔ متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۲۰
هم‌رسی نیم‌سازها و عمودمنصف‌ها در چهارضلعی / حسین کریمی ۲۲
یک روش جدید برای یک مسئلهٔ قدیمی! / امین کشاورز ۲۵
متفاوت بودن یا یکسان نبودن، مسئله این است! / خدیجه اقدامی‌مقدم ۲۶
نیم‌دایره‌های ارشمیدس را بیشتر بشناسیم / مراد کریمی شهماروندی ۳۰
ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی‌پور ۳۲
دایرهٔ مثلثاتی متحرک / مرتضی بیات ـ زهرا خاتمی ۳۴
یک رابطهٔ طولی زیبا در دایره! / عباس قلعه پوراقدم ۳۸
مسائل برای حل / هوشنگ شرقی ۴۰
راهنمای حل مسائل ۴۲
روش HPJ برای حل دترمینان سه‌درسه / محمدرضا هادی پورجمالی ۴۵

گفت‌وگو

معنای واقعی معلم ! ـ گفت‌وشنودی با پیشکسوت آمار و ریاضی ایران، دکتر جواد بهبودیان / هوشنگ شرقی ۱۶

ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین نخبگان: پرویز شهریاری / احسان یارمحمدی ۱۰

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول‌های عددی ویژه / هوشنگ شرقی ۹
ایستگاه دوم: جاسوس درجزیرهٔ شوالیه‌ها و سربازها! ۱۹
ایستگاه سوم: حکایت‌های خواندنی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر ۲۹

پرسش‌های پیکارجو!

۵ ـ ۱۳ ـ ۲۴ ـ ۲۸ ـ ۴۴

با مخاطبان

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ... ۴۷

پاسخ‌ها

پاسخ پرسش‌های پیکارجو! ۴۶
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن بازرگانی:
۰۲۱ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷ـ۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱ـ۸۸۳۰۵۷۷۲

۲۲ بهمن نقطهٔ عطف

در مبحث رسم منحنی‌ها و بررسی تغییرات نمودارها، برای هر منحنی روی نقاط خاصی که هر کدام از یک ویژگی بارز و مشخص برخوردارند، بحث شده است و این نقاط مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای مثال، نقطه‌های ماکزی‌مم یا مینی‌مم که به دو صورت نسبی و مطلق در نظر گرفته می‌شوند یا نقاطی که در آن‌ها نمودار ناپیوسته است. یکی از این نقاط که اهمیت ویژه‌ای دارد و روی نمودار تابع و جهت تحدب و تقعر آن تأثیر می‌گذارد، «نقطهٔ عطف» نامیده می‌شود.

جالب است که اصطلاح نقطهٔ عطف در زبان روزمره و در اصطلاحات عامیانه نیز گاهی به‌کار می‌رود؛ مانند «نقطهٔ عطف بحث» یا «نقطهٔ عطف زندگی» یا «نقطهٔ عطف تاریخ سیاسی و اجتماعی». و جالب‌تر آنکه «نقطهٔ عطف» در اصطلاح غیرریاضی تقریباً هم‌معنی با «نقطهٔ عطف» در اصطلاح ریاضی است و به معنای تغییر مسیر دادن و تغییر جهت دادن و از این‌رو به آن رو شدن است.

به جرئت می‌توان گفت، ۲۲ بهمن‌ماه سال ۱۳۵۷ نقطهٔ عطفی در تاریخ ایران و حتی تاریخ معاصر جهان است. در این روز و با پیروزی انقلاب اسلامی تحت رهبری **امام خمینی (ره)**، بساط چند هزارسالهٔ سلطنت و پادشاهی در ایران برچیده شد و مردم بر سرنوشت خودشان مسلط شدند. استکبار جهانی و هیبت کشورهای ابرقدرت مانند آمریکا و صهیونیسم بین‌المللی فرو ریخت و راه برای بیداری و مبارزه علیه این جنایتکاران باز شد.

سی‌وهشتمین سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی بر همهٔ شما رهروانِ راهِ شهدا و امام(ره) مبارک باد.

والسلام ــ سردبیر

گوشه‌سنج

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

بی‌شـک تاکنون برای همهٔ ما پیش آمده است که شـاهد ساخت نرده برای پله‌های یک ساختمان باشیم. آنچه در سـاخت نرده به‌چشـم می‌آید، زاویـهٔ نرده یا همان شیب آن است. برای ساخت نرده، آهنگران پله‌ها را انـدازه می‌گیرنـد و سـپس در کارگاه آن را طراحی می‌کنند و می‌سـازند. در آخریـن مرحله هم در محل آن را سرهم می‌کنند. جالب این است که نرده کاملاً بر پله‌ها مماس می‌شود و زاویه‌ها جور درمی‌آیند. آهنگران در طراحی این نرده‌ها چه روشـی به‌کار می‌برند که کار دقیق درمی‌آید؟ این سؤال شاید ذهن شما را هم درگیر کرده باشد.

همـهٔ ما می‌دانیم که بـرای اندازه‌گیری اندازهٔ یک زاویه از نقاله اسـتفاده می‌شـود. اما موضوع این است که نقاله وسـیله‌ای برای اندازه‌گیـری اندازهٔ یک زاویه روی صفحهٔ کاغذ اسـت. حال اگـر بخواهیم اندازهٔ یک زاویه را روی سـطح زمین یا اندازهٔ زاویه‌ای را روی یک پلـه برای طراحـی پله اندازه بگیریم، از چه وسـیله‌ای می‌توانیم استفاده کنیم؟ به‌عبارت دیگر، وقتی زاویه از صفحهٔ کاغذ خارج شـود، برای اندازه‌گیری یا رسم آن چه باید بکنیم؟

داسـتان ما از اینجا شروع می‌شـود که من روزی بـرای کاری به آهنگری رفته بـودم و در آنجا دیدم که آهنگر از وسـیله‌ای در کارهای خود اسـتفاده می‌کند که بسـیار جالب اسـت. جالب‌تر اینکه اسم هم نداشت (شکل ۱).

شکل ۱. گوشه‌سنج

این وسیله به شکل زاویه‌ای است که ضلع کوچک آن ۱۹ سانتی‌متر اسـت؛ به این دلیل که عرض پله‌ها به‌طور اسـتاندارد ۲۰ سانتی‌متر اسـت. این ضلع یک سـانتی‌متر کمتر از عرض پله در نظر گرفته می‌شـود که در اندازه‌گیری مشـکلی پیش نیاید. ضلع بزرگ آن هم تقریباً یک متر اسـت. البته انـدازهٔ این ضلع مهم نیسـت و این ضلع در دسـت آهنگر بـرای انجام کار

قــرار می‌گیرد. همچنین انــدازهٔ زاویه بزرگ و کوچک می‌شــود. فکر می‌کنم «گوشه‌ســـنج» یا «زاویه‌سنج» اسم مناسبی برای آن باشد.

بــرای اندازه‌گیری زاویــهٔ یک پله، اســتاد آهنگر گوشه‌ســـنج را روی اضــلاع زاویــهٔ موردنظــر مماس می‌کند. سپس با متر ضلع سوم مثلث را اندازه می‌گیرد و آن را می‌نویســد. به‌عبارت دیگر، به‌جای اندازهٔ زاویه برحسب درجه، اندازهٔ یک پاره‌خط برحسب سانتی‌متر را جایگزین آن می‌کند (شکل ۲).

شکل ۲. اندازه‌گیری زاویه

ســـپس هنگام ساخت وســـیلهٔ زاویه‌دار، قطعه‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهد که ضلع سوم گوشه‌سنج، پس از قرار گرفتن روی وسیله، به عدد موردنظر برسد. از گوشه‌ســـنج به‌ویژه در طراحی و ساخت پله استفاده می‌شــود، اما می‌توان مشــابه آن را برای ســایر کارها ساخت (شکل ۳).

آیا گوشه‌سنج مبنای علمی دارد؟

همان‌طــور کــه دیده شــد، اســتاد آهنگــر برای اندازه‌گیــری انــدازهٔ هــر زاویه یک مثلــث می‌ســازد کــه دو ضلــع آن همیشــه ثابت‌اند و ضلع سوم تغییر می‌کند. ســپس همیــن مثلث را در جای دیگری رسم می‌کند. یعنی دو مثلث هم‌نهشــت ایجــاد می‌کند که ضلع‌های آن‌ها دوبه‌دو با هم برابرند. بــا توجــه بــه هم‌نهشــتی مثلث‌ها، زاویه‌ها نیز به‌طــور متناظر برابرند و زاویه درســت اندازه‌گیری می‌شــود. همچنیــن می‌تــوان از ایــن قضیــه اســتفاده کرد که با سه عدد a، b و c در صورت امــکان فقط یک مثلث ساخته می‌شود.

شکل ۳. ساخت نرده‌ها

محاسبهٔ زاویه برحسب درجه

در صورتــی کــه بخواهیم اندازهٔ زاویه را برحســب درجه یا رادیان به‌دســت آوریم، پــس از اندازه گرفتن ضلع ســوم، با اســتفاده از قضیــهٔ کســینوس‌ها، ابتدا کسینوس زاویه و سپس خود زاویه را حساب می‌کنیم. برای مثال، در شکل ۳ گوشه‌سنج عدد ۱۰۷ سانتی‌متر را نشــان می‌دهد. یعنی در این مثلــث به‌طور تقریبی داریم:

$a=100$ ، $b=19$ و $c=107$. پــس اندازهٔ زاویهٔ C را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها حساب می‌کنیم:

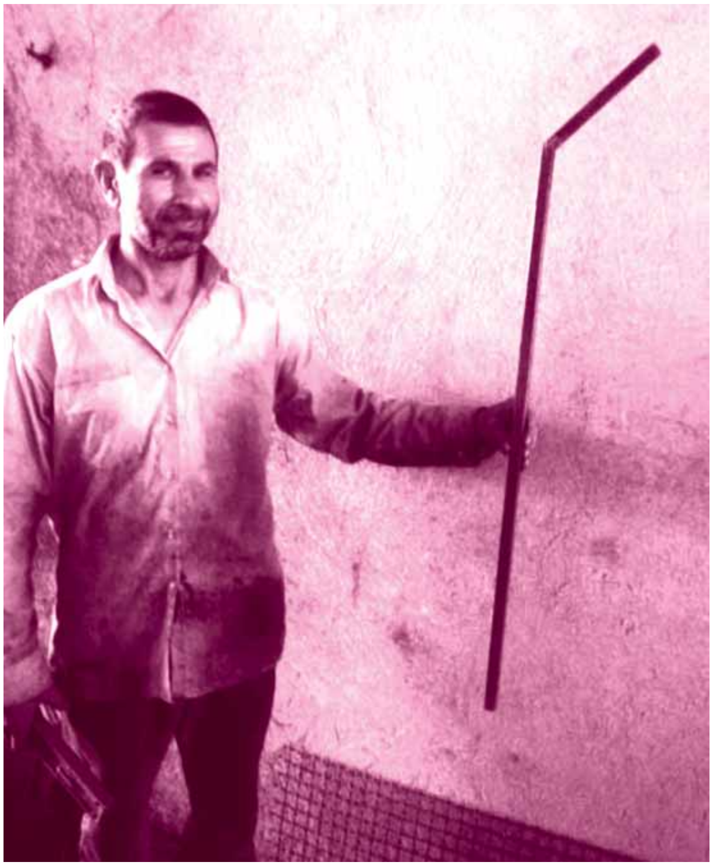
$$\cos(C)=\frac{100^2+19^2-107^2}{2\times19\times100}=\frac{-1088}{3800}\Rightarrow C\approx106/5^{\circ}$$

گونیا کردن و گوشه‌سنج

یکــی از مهارت‌هایی که بناهــا در کار خود دارند، گونیا کردن است که در اجرای نقشه‌ها به‌کار می‌رود. به این معنی که نقشه ترســیم شده است و بنا قصد دارد آن را روی زمیــن اجرا کند. مهم‌ترین قســمت، اجرای زوایای قائمه اســت. به این منظــور ابتدا یکی از اضلاع قائم را روی زمین رســم می‌کند. ســپس رأس زاویه را مشــخص و به کمک نخ بنایی ســعی می‌کند، مثلثی با اندازه‌های ۳، ۴ و ۵ یا مضرب‌های آن روی زمین ایجاد کند. معمولاً مثلث‌های ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر یا ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ ســانتی‌متر مثلث‌های خوبی هســتند. حال اگر زاویه قائم نباشد، گوشه‌سنج می‌تواند مشکل را حل کند. به‌عبارت دیگر، گوشه‌سنج شکل کلی‌تر گونیاست. بــه این منظور می‌توانیم جدولی تهیه کنیم یا باز هم از قضیهٔ کســینوس‌ها با اضلاع گوشه‌سنج استفاده کنیم و با زاویهٔ موردنظر ضلع ســوم را به‌دست آوریم. سپس روی سطح زمین زاویه را رسم کنیم.

اســتاد آهنگر می‌گفت اگر از گوشه‌ســنج استفاده نکنیــم، بایــد کل کار طراحــی و ســاخت نــرده را در ســاختمان انجــام دهیم که بســیار ســخت و هزینه‌بر است. ولی با استفاده از گوشه‌سنج، پس از اندازه‌گیری، نرده‌هــا را در کارگاه طراحــی می‌کنیم و می‌ســازیم و به‌راحتی به ســاختمان انتقــال می‌دهیم و آن را نصب می‌کنیم.

بنابراین گوشه‌ســنج وسیلهٔ علمی ســاده‌ای است که از یک قضیهٔ هندســه برگرفته شده است و خدمت بزرگی به انســان‌ها می‌کنــد. جالب اینکــه در کارگاه



آهنگــری که برای تهیــه گزارش رفته بــودم یک پلهٔ آهنی وجود داشــت که خوب طراحی نشده بود. علت را که جویا شدم اســتاد آهنگر گفت در موقع ساخت، به‌طور حدسی پله‌های آهنی را ساخته‌اند و به‌همین خاطر انسان موقع بالا رفتن از آن کمی دچار مشکل می‌شود.

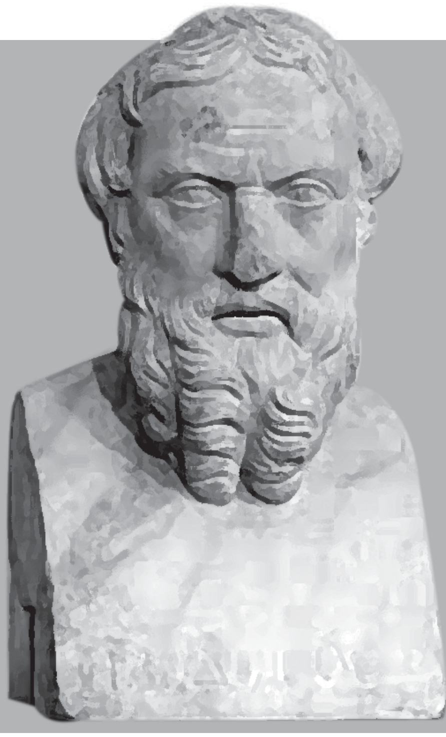
پرسش‌های بیکارجو!

یک عدد طبیعی دارای ۱۳۹۵ مقسوم‌علیه متمایز است. با اطمینان می‌توان گفت که این عدد:

- ☐ الف) زوج است.
- ☐ ب) فرد است.
- ☐ ج) مربع کامل است.
- ☐ د) مضرب ۳ است.
- ☐ هـ) مضرب ۵ است.

نویسنده: **پاول اتا وای**
ترجمه و تشریح: **عباس قلعه پوراقدم**، دبیر ریاضی از ارومیه

مسئلهٔ آپولونیوس



اشاره

شــهرت ریاضی‌دانان یونان باستان بیشتر به واســطهٔ دانش هندسهٔ آنان اســت. یکی از این مشــاهیر، دانشــمند و ریاضی‌دانی به‌نام *آپولونیوس* بود که بیشتر روی مقاطع مخروطی و دانش ستاره‌شناسی مطالعه می‌کرد. او در حدود ۲۲۰۰ سال پیش می‌زیست، لیکن از زندگی‌نامه‌اش اطلاع قابل اعتماد و دقیقی در دست نیست. این دانشمند نابغه پرسش جالبی را درخصوص مبحث دایره‌ها مطرح کرد که از آن زمان «مسئلهٔ آپولونیوس» نام گرفته است.

کلیدواژه‌ها: آپولونیوس، دایره، مماس، سهمی، محاطی، محیطی.

طرح مسئله

نقطه، خط و دایره را به‌عنوان ســه شئ هندسی در نظر می‌گیریم.

پرســش آپولونیوس: چند دایره می‌توان رســم کرد که بر هر سه شئ مماس باشد؟ (در اینجا مقصود از مماس‌بودن بر یک نقطه، گذشتن از آن نقطه است.)

اگر نقطه را بــا P (حرف اول Point)، خط را با L (حرف اول Line) و دایــره را با C (حرف اول Circle) نمایــش دهیــم، پرســش آپولونیــوس پــس از حذف حالت‌های تکراری به ۱۰ زیر مســئله منجر می‌شود که آن‌ها را به همراه علامت اختصاری مطرح می‌کنیم:

۱. چنــد دایــره می‌توان رســم کرد که از ســه نقطهٔ مفروض بگذرند؟ (PPP)

۲. چند دایره می‌توان بنا کرد به‌طوری که بر سه خط مفروض مماس باشند؟ (LLL)

۳. چنــد دایــره می‌توان رســم کرد کــه از دو نقطهٔ مفــروض بگذرد و بر خط مفروضی مماس باشــد؟ (LPP)

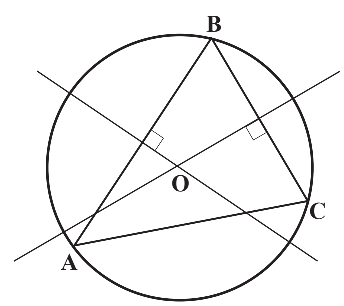
و به‌همین صورت:

۴. LLP؛ **۵.** CPP؛
۶. CLP؛ **۷.** CCP؛
۸. CLL؛ **۹.** CCL؛
۱۰. CCC.

در این مقاله قصد پرداختن به سه مورد اول را داریم که جزو ساده‌ترین آن‌ها هستند.

دایره‌ای که از سه نقطهٔ مفروض می‌گذرد

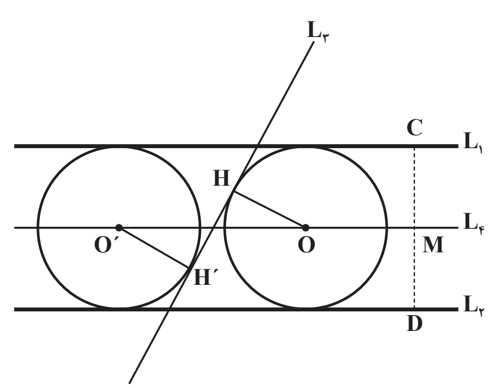
اگر هر سه نقطه روی یک خط مشترک باشند، دایره‌ای که از هر سه نقطه بگذرد، وجود ندارد. در غیر این صورت سه نقطه یک مثلث خواهند ساخت. در واقع جواب مسئله، دایرهٔ محیطی این مثلث است. سه نقطه را A، B و C می‌نامیم و پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. حال عمودمنصف‌های این پاره‌خط‌ها را بنا می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. (از هندسه به یاد آورید که در هر دایره، قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.) چون O روی عمودمنصف AB است، پس O از A و B به یک فاصله است. با همین استدلال در می‌یابیم که O از B و C نیز به یک فاصله است. پس O از هر سه نقطهٔ A، B و C فاصلهٔ یکسانی دارد. این فاصله را R می‌نامیم و به مرکز O و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم. O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دایرهٔ رسم شده را دایرهٔ محیطی مثلث می‌نامیم. این دایره منحصربه‌فرد است؛ یعنی تعداد جواب‌ها فقط یکی است.



دایره‌ای که بر سه خط مفروض مماس است.

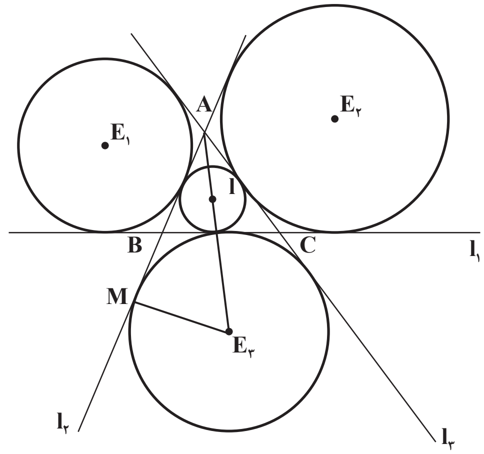
الف) اگر هر سه خط موازی باشند، دایره‌ای نمی‌توان یافت که به هر سه مماس باشد.

ب) اگر دوتا از سه خط موازی باشند، تعداد دایره‌ها دوتا خواهند بود که در شکل مشخص شده‌اند.



$L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ سه خط مفروض هستند که: $L_۱ \| L_۲$ و $L_۳$ آن دو را قطع می‌کند. خط $L_۴$ را که موازی $L_۱$ و $L_۲$ است و از نقطهٔ M (وسط پاره‌خط CD که فاصلهٔ دو خط $L_۱$ و $L_۲$ است) می‌گذرد، رسم می‌کنیم. هر نقطه روی $L_۴$ می‌تواند مرکز دایره‌ای به شعاع CM باشد که بر هر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ مماس است. لیکن برای اینکه دایرهٔ موردنظر بر $L_۳$ هم مماس باشد، مرکز باید نقطه‌ای روی $L_۴$ باشد؛ به‌طوری‌که OH (پاره‌خط عمود بر $L_۳$) برابر CM شود. در سمت چپ $L_۳$ نیز برای دایرهٔ دوم چنین وضعیتی را داریم.

ج) اگر هیچ زوجی از خطوط موازی نباشند، دایره‌ها چهارتا خواهند بود. سه خط مفروض $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ یکدیگر را در سه نقطهٔ A، B و C قطع کرده‌اند و این سه نقطه، مثلث ABC را تشکیل داده‌اند. در این حالت چهار دایره وجود دارند که بر هر سه خط مماس‌اند. این چهار دایره عبارت‌اند از:



۱. دایرهٔ محاطی مثلث ABC:

مرکز آن نقطهٔ I است که محل برخورد نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث است و شعاع آن که با r نشان داده می‌شود، از روابط $r = \frac{S}{P}$ یا $r = ۴R \sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$ قابل محاسبه است. در این دو رابطهٔ S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است که مقدارش از رابطهٔ $۲R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ به‌دست می‌آید.

۲. دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A:

مرکز این دایره نقطهٔ $E_۳$ و شعاع آن که با r_a نشان داده می‌شود، از رابطهٔ $r_a = ۴R\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}$ قابل محاسبه است. برای یافتن موقعیت $E_۳$ کافی است ضلع AB را امتداد دهیم و روی آن AM=P را جدا کنیم. در نقطهٔ M عمودی بر AM رسم می‌کنیم. محل برخورد این عمود و امتداد نیم‌ساز زاویهٔ A، نقطهٔ $E_۳$ خواهد بود.

۳. دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأسB:

مرکز این دایره نقطهٔ $E_۲$ و شعاع آن $r_b = ۴R\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{C}{۲}$ است.

۴. دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس C:

مرکز این دایره نقطهٔ $E_۱$ و شعاع آن $r_c = ۴R\sin\frac{C}{۲}\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}$ است.

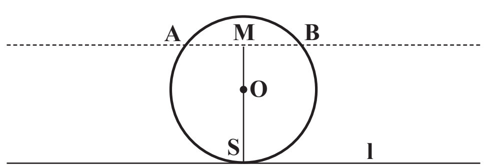
برای آشنایی بیشتر با روابط مطرح شده در این قسمت می‌توانید به کتاب «مثلثات پایه»، فصل سوم، اثر زنده‌یاد **جلیل‌الله قراگوزلو** مراجعه کنید. همچنین زندگی‌نامهٔ این استاد گران‌قدر را در شمارهٔ ۹۰ برهان (دی ۱۳۹۴) می‌توانید ببینید.

دایره‌ای که از دو نقطهٔ مفروض گذشته و بر خط مشخصی مماس باشد

الف) اگر دو نقطهٔ مفروض در دو طرف خط موردنظر باشند، دایره‌ای وجود نخواهد داشت.

ب) اگر نقطه‌ها در یک طرف خط مفروض باشند، دو حالت متصور است:

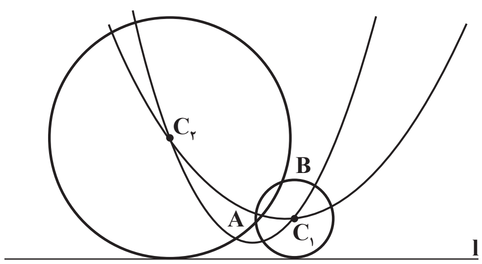
- اگر خط راستی که از دو نقطه می‌گذرد، با خط مفروض موازی باشد، دقیقاً یک جواب خواهیم داشت که در شکل زیر مشخص شده است. مرکز این دایره (O) روی پاره‌خط MS (فاصلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ A و B با خط مفروض l) و $OS = \frac{MS^۲ + MB^۲}{۲MS}$ خواهد بود که M وسط AB است.



- اگر خط ماربر دو نقطه، موازی با l نباشد، دو دایره خواهیم داشت که برای بنا کردن آن‌ها تعریف «سهمی» را یادآور می‌شویم.

«سهمی» مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطهٔ ثابت (کانون سهمی) به یک فاصله هستند.

حال خط مفروض l را به‌عنوان خط هادی و هر یک از دو نقطه را به عنوان کانون یک سهمی در نظر می‌گیریم و حاصل این کار دو سهمی با خط هادی l و کانون‌های A و B خواهد بود. این دو سهمی یکدیگر را در دو نقطهٔ $C_۱$ و $C_۲$ قطع می‌کنند که این دو نقطه طبق تعریف سهمی از خط داده شده و نقاط A و B به یک فاصله هستند. نقاط $C_۱$ و $C_۲$ مرکز دایره‌هایی خواهند بود که شعاع آن‌ها $C_۱B=C_۱A$ و $C_۲B=C_۲A$ است. (توجه به این نکته خالی از لطف نیست که اگر دو نقطهٔ داده شده روی خطی موازی با l باشند، سهمی‌های تعریف شده فقط یک نقطه تقاطع خواهند داشت.)



تمرین

شما می‌توانید در مورد هفت حالت دیگر تلاش کنید. اگر توانستید حل کنید، به خود خواهید بالید که مسئله‌ای از مسائل آپولونیوس را حل کرده‌اید! در غیر این‌صورت مرور دانسته‌های هندسی‌تان ثمرهٔ این تلاش خواهد بود که بسیار با ارزش است.

***منابع**

۱. قراگوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). **مثلثات پایه**. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.

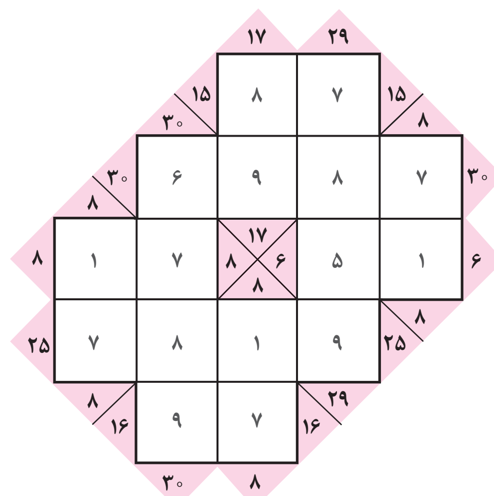
2. ottaway, paul. apollonius problem.crux mathematicorum with mathematical mayhem. vol 29. n7. (2003 November)

هوشنگ شرقی

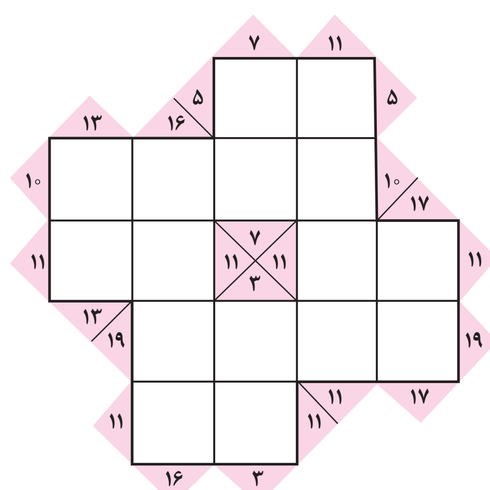
ایستگاه اول

در این قسمت می‌خواهیم شما را با جدول‌های «کاکورو» آشنا کنیم. این جدول‌ها منطق بسیار ساده‌ای دارند. عددهای حاشیه و مرکز جدول، نشان دهندهٔ مجموع عددهای سطر یا ســتون زیرین (بالایی، سمت راست یا چپ) آن خانه هستند. اکنون عددهای طبیعــی را طوری در خانه‌های جدول توزیع کنید که مجموع آن‌ها با عددهای حاشیهٔ جدول‌ها برابر شود. یک نمونه را خودمان حل کرده‌ایم و حل ســه‌تای دیگر را به شما واگذار می‌کنیم.

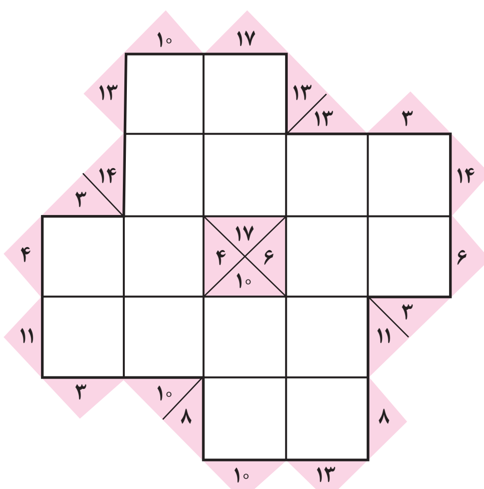
۱



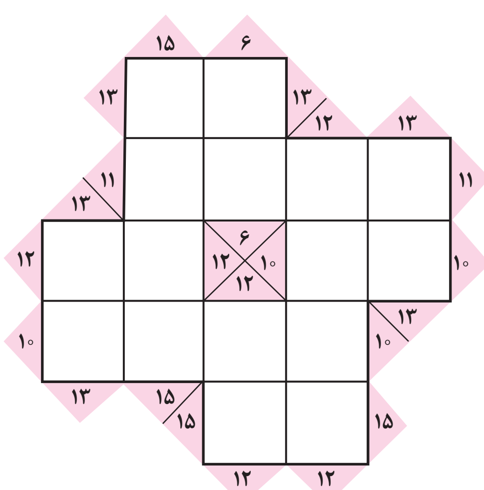
۲



۳



۴



سرزمین نخبگان: پرویز شهریاری

نویسنده و کارگردان:
محمدعلی فارسی

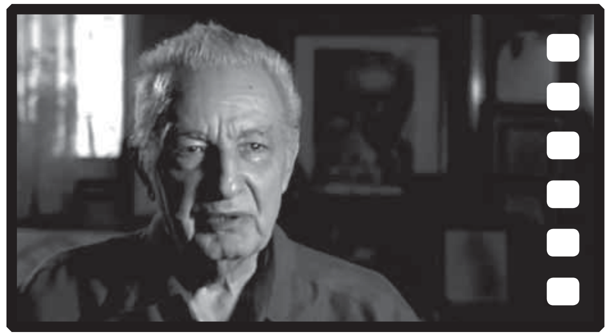
احسان یارمحمدی

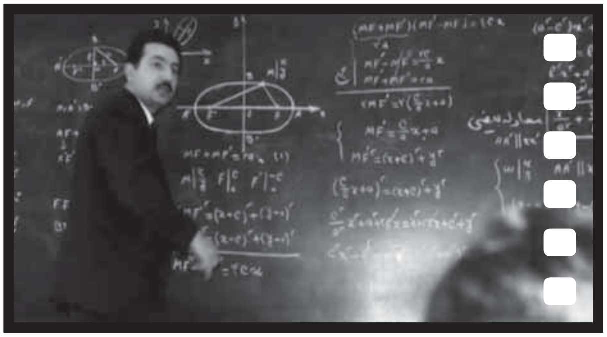
اشاره

اگر بخواهیم فهرستی از برجسته‌ترین آموزشگران ریاضیات در تاریخ ایـران تهیه کنیم، بدون هیچ تردید و ابهامی، نام زنده‌یاد اســتاد پرویز شــهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) در ردهٔ نخســت این فهرست قرار می‌گیرد. او معلم، مؤلف و مترجمی بسیار توانمند در عرصهٔ دانش و به‌ویژه ریاضیات بــود. به‌گونه‌ای کــه وی در دوران زندگانی پرفراز و نشــیب خود خدمات بسیار ارزنده‌ای را شامل تألیف و ترجمهٔ بیش از ۳۰۰ جلد کتاب و بیش از ۱۰۰۰ مقاله به علاقه‌مندان به حوزه‌های دانش و ریاضیات عرضه داشــت. اســتاد پرویز شــهریاری از نخستین شمارهٔ مجلهٔ «رشــد برهان ریاضی» دورهٔ آموزش متوســطهٔ ۲ تا آخرین لحظات عمر پربرکتشــان با این مجله همکاری نزدیک و بی‌نظیری داشــت. در ضمن اثرگذاری اســتاد تا جایی بود که به پیشنهاد ایشان مجلهٔ ریاضی برهان، برهان نامیده شد. به‌همین دلیــل در این مقاله قصد داریم با معرفی فیلم «ســرزمین نخبگان: پرویز شــهریاری» شما دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات را با گوشه‌ای از زندگی این اســتاد فرزانه و بی‌بدیل آشــنا سازیم. امیدواریم که این فیلم زیبــا و پندآمــوز را تهیه کنید و از تماشــای آن لذت ببریــد. در ادامه به ارائه بخش‌هایی از این فیلم مســتند می‌پردازیم تا شــما ریاضی‌آموزان با پیش‌زمینه‌ای بهتر به تماشای فیلم «سرزمین نخبگان: پرویز شهریاری» بپردازید.

مــن بچهٔ کرمان هســتم. در شــهر کرمــان و در محله‌ای که بــه نام «دولت‌خانه» بود، زندگی می‌کردم و در ســال ۱۳۰۵ به‌دنیا آمدم. از ســوی مــادر و پدر دهقان‌زاده هســتم و تــا جایی که کنجــکاوی کردم، پدرهــا و پدربزرگ‌هایم هــم دهقان‌هــای بی‌زمین و روزمزد بودنــد. در آخرین ســال‌های حکومت صفویه عــده‌ای از افغان‌ها به کرمان حملــه می‌کنند و از آنجا که شهر کرمان با حصار و چند دروازه قابل ورود نبود، به زرتشــتیان که در خارج شهر ساکن بودند، حمله و آن‌هــا را غارت می‌کنند. به این مناســب اســت که ما زرتشتیان کرمان نمی‌توانیم ریشهٔ خانوادگی خود را تا بیش از حملهٔ افغان‌ها جست‌وجو و پیدا کنیم.

به‌یاد دارم در ســال‌های کودکی گاهی همراه پدر بــرای تهیهٔ بوته به خارج شــهر می‌رفتم. او مشــغول جمع‌آوری بوته می‌شــد و من بازی می‌کردم. در رفت و برگشــت غالباً از محلهٔ زرتشــتیان، یعنــی از درون





ویرانه‌هایی که باقی‌مانده بود، می‌گذشتیم و پدرم سرگذشت غم‌انگیز آن‌ها را برایم تعریف می‌کرد. باز یادم هست ۹ ساله بودم که به همراه پدر به خانهٔ ارباب رفتیم. وقتی پدرم در اتاق به ارباب گزارش می‌داد، همسر ارباب یک نصفه هندوانهٔ خراب و گندیده جلوی من گذاشت و گفت: بخور. هندوانهٔ خراب خاصیت دارد، همین موقع پدرم سررسید و این وضع را دید. با عصبانیت هندوانه را از جلوی من برداشت و به همسر ارباب گفت: خاصیت آن برای خودتان. بعد دست مرا گرفت و از منزل اربابی بیرون آمدیم. ارباب که از این ماجرا باخبر شده بود، به پدرم پیام فرستاد که دیگر لازم نیست به روستا برود. در واقع پدرم را اخراج کرد.

بعد از چندی پدر توانست در «کارخانهٔ خورشید» استخدام شود و در سالن پشم‌ریسی به‌طور متناوب یک هفته روزها و یک هفته شب‌ها کار می‌کرد. سالنِ کار بسیار ناسالم بود و آلودگی صوتی و غبار بیداد می‌کرد. پدرم روزانه ۹ تا ۱۰ ساعت در این هوای آلوده کار می‌کرد. او که از کودکی در دشت و صحرا کار کرده بود، توان تحمل این فضا را نداشت و هر روز ضعیف‌تر و لاغرتر می‌شد. با این همه وقتی شب کاری داشت، روزها هم با تحمل بی‌خوابی برای دیگران کار می‌کرد، من با اینکه کودک بودم، می‌دیدم پدر چه رنجی را تحمل می‌کند، تا بتواند هزینهٔ زندگی فقیرانهٔ ما را فراهم کند. برای همین غالباً بیمار بود.

من صاحب حدود ۴۰۰ جلد کتاب هستم. بعضی از آن‌ها ترجمه و بعضی از آن‌ها نوشته [تألیف] است. بیشتر نوشته است تا ترجمه. علاوه‌بر این، یک کتابخانه دارم، داخل این اتاق است. داخل اتاق‌های آن‌جا هم هست و می‌خواهم کتابخانه‌ام را به مرکزی به نام بنیاد شهریاری هدیه کنم. حالا اگر بشود؛ اگر عمری باقی باشد. کل کتاب‌های من، کتاب‌هایی که نوشته‌ام در حدود ۴۰۰ عدد است. مقالات زیادی هم در مجلات نوشته‌ام. حساب کردم در مجلات و نشریه‌هایی که چاپ کرده‌ام، خودم ۱۰۰۰ مقاله در آن‌ها نوشته‌ام. بنابراین [حداقل] مجموعاً ۱۰۰۰ مقاله و ۴۰۰ کتاب دارم.

به‌نظرم آدم‌های تک‌بعدی نه خودشان زندگی درونی شایسته‌ای دارند و نه می‌توانند معلم زندگی دیگران باشند. جهان پیرامون ما هم جهان ریاضی است، هم جهان فیزیکی و هم جهان فلسفی و هنری. ریاضی‌دان نه‌تنها باید با هنر و ادبیات آشنا باشد، بلکه باید به این آفریده‌های زیبای روح انسانی عشق بورزد. موسیقی را دوست داشته باشد و از شعر خوب هم لذت ببرد. داشتن ذهن ریاضی و اندیشهٔ ریاضی چیزی جز منطقی بودن و انسجام فکری داشتن نیست.

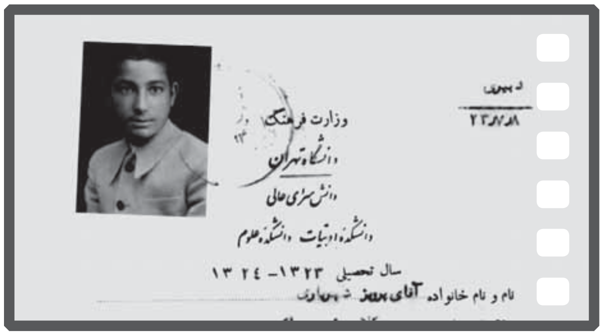
من خودم چندین کتاب ادبی ترجمه کرده‌ام. یک کتاب بزرگ به اسم «**باد و باران**» ترجمه کرده‌ام و بعد کتاب‌های کوچکی منتشر کرده‌ام که آن‌ها هم بیشتر به حال و احوال عمومی مربوط هستند.

بعد از آزادی از زندان در سال ۱۳۳۹، اولین کلاس‌های کنکور را در ایران با نام «**گروه فرهنگی خوارزمی**» راه‌اندازی کردم. مهر همان سال «دبیرستان پسرانهٔ خوارزمی» را تأسیس کردم و یکی دو سال بعد **انتشارات خوارزمی** را با همکاری ۱۷۰ معلم و دبیر نمونه پایه‌ریزی کردم. کسانی چون **منوچهر بزرگ‌مهر**، **نجف دریابندری** و **جهانگیر شمس‌آوری** در این انتشارات از همکاران من بودند. اندک‌اندک به فکر راه‌اندازی مجله و نشریه افتادم.

به‌نظرم آدم‌های تک‌بعدی نه خودشان زندگی درونی شایسته‌ای دارند و نه می‌توانند معلم زندگی دیگران باشند

مجلهٔ «**سـخن علمی و فنی**» ظرف هشـت سـال از سال ۱۳۴۲ تا ۱۳۴۹، نود شماره منتشر شد. در همان دوران بنا به دلایلی از انتشارات خوارزمی فاصله گرفتم و «**گـروه فرهنگی مرجـان**» را راه انداختم. در این گروه فرهنگی بالغ بر ۷۰۰ استاد و دبیر با من همکاری می‌کردند. این تشکیلات وسـیع به انتشاراتی مستقل نیاز داشت که آن را با نام «**توکا**» تأسیس کردم.

در همـان دوران مجلهٔ «**آشـتی با ریاضیات**» را



مدام از من می‌خواهند برای همیشه نزد آن‌ها بروم، ولی نمی‌توانم. کجا بروم؟ ریشه‌های من در اینجاست. سال‌های بسیاری است که می‌توانم به راحتی بروم و هرگز قصد ندارم، مرتکب چنین گناهی بشوم

منتشر کردم که با استقبال خوبی روبه‌رو شد. این مجله بعد از انقلاب نیز منتشر می‌شد، البته با نام «**آشنایی با ریاضیات**». در کنار آن سردبیری «**مجلهٔ چیستا**» را هم برعهده داشتم که این همکاری هنوز ادامه دارد. به‌جز چیسـتا چند سـالی است که سـردبیری مجلهٔ «**دانش و مردم**» را هم عهده‌دار شده‌ام.

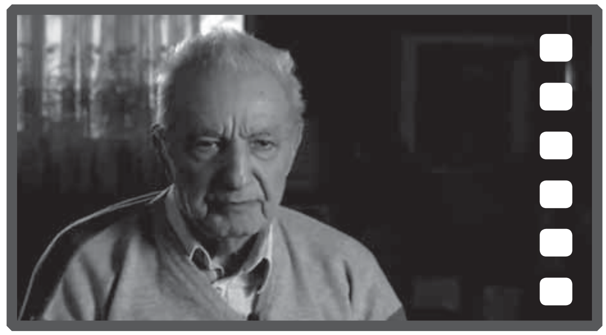
من تقریبـاً به همهٔ آرزوهایم رسـیدم. یعنی آرزو داشـتم که وقتی کتابی به دسـتم رسید، آن کتاب را ترجمـه کنم. همین‌جوری یکی‌یکـی ترجمه کردم. تا این جوری شـد و معتقد هستم که هر آدمی بخواهد، می‌تواند در این راه برود و قدم بردارد.

اکنون از مرز ۸۰ سـالگی عبور کـرده‌ام. بارها به سـراغم آمده‌اند تـا از خود و دربارهٔ خـود بگویم و به نظرم این کاری دشوار است. در این دنیا افراد بسیاری را می‌توان یافت که توانسـته‌اند زندگی پرهیزکارانه‌ای داشته باشند، با روحیهٔ انسانی با دیگران برخورد کنند و در تمـام زندگی خود کسـی را فریـب ندهند. ولی بعید می‌دانم تعداد کسـانی که توانسته‌اند با خودشان روراست باشند و خودشان را فریب ندهند، چندان زیاد باشد. حتماً این نکتهٔ پرطنز را شنیده‌اید که هیچ‌کس از سهم عقلی که به او رسیده است، ناراضی نیست. انسان چه بخواهد و چه نخواهد خودبین اسـت و به سـختی می‌توانـد دربارهٔ خودش بـا عدل و انصاف داوری کنـد. اگر به‌همین معدود کسـانی که می‌شناسـم، اکتفا کنم به انسـان‌های بسـیاری برمی‌خورم که بیـش از من رنج کشـیده‌اند و بیش از من تلاش کرده‌اند و خیلی آرام و ساده همه‌چیز را پذیرفته‌اند و هرگز ادعایی و توقعی نداشته‌اند.

وقتـی درسـت می‌اندیشـم، می‌بینم رنج‌هـای واقعی را دیگران برده‌انـد، ولی محصول این رنج‌ها به‌صورتی ناعادلانه به من رسیده است. وقتی به گذشته می‌نگرم، آنچه همچون باری بر روحم سنگینی می‌کنـد، دشـواری زندگی خـودم نیسـت، چیزهای دیگری است که بسیار ناراحت‌کننده‌تر از کار در مزرعه یا در چاه‌های قنات و کوره‌های آجرپزی است. من همهٔ این‌گونه کارها و بسیاری کارهای دیگر را آزموده‌ام. ولی هرگز از به یادآوردن آن‌ها دچار اندوه نمی‌شـوم. آنچه مثل خوره روحم را سـوهان می‌زنـد از مقولهٔ دیگری اسـت. سرنوشـت پدرم، رنج‌هـا و تلاش‌هـای مادرم، مظلومیـت و تحمل برادرم، دشـواری‌های پایان‌ناپذیر همسـرم. مرگ دختر هشت سـاله‌ام **مرجان** و اینکه من به‌عنوان یک انسان نتوانسته‌ام هیچ مرهمی بر این زخم‌ها بگذارم. تازه همهٔ این‌ها به دایرهٔ تنگ و محدود

خانوادگی مربوط می‌شود.

در صحنهٔ اجتماع انسانی هر ساعت و هر دقیقه هزاران تراژدی از این‌گونه وقایع بسیار خوفناک‌تر رخ می‌دهد و اما اگر دربارهٔ مسیری که طی کرده‌ام بپرسید، می‌گویم: از گذشتهٔ خود راضی‌ام و سعی می‌کنم از خود راضی نباشم، ولی از خودم ناراضی نیستم. هرگز نخواسته‌ام به جای کس دیگری باشم. بسیار پیش آمده است که نگران و حتی وحشت‌زده شده‌ام. ولی این احساس‌ها غالباً زودگذر بوده‌اند و دوباره با همهٔ توانم کارم و هدفم را دنبال کرده‌ام. همیشه در شاهراه نبوده‌ام. گاه و غالباً به بن‌بست رسیده‌ام، برگشته‌ام و کوچه و راه دیگری را امتحان کرده‌ام. زندگی را هم جز همین تلاشم و پیگیری نمی‌دانم. هرکس هرچه از دستش برمی‌آید، می‌کند. پس، از هرکس به اندازهٔ توانش می‌توان توقع داشت و من آنچه در توان داشتم، انجام داده‌ام و به نظرم خوش‌بختی جز این نیست.



در این سال‌های تنهایی و کهولت بیشتر از همه‌چیز دلتنگ فرزندانم هستم. **توکا** در کانادا به‌کار طبابت مشغول است. پسر کوچکم **شروین** نیز کانادا است و مهندسی کامپیوتر خوانده. پسر بزرگم **شهریار**، مثل خودم ریاضی خواند و حالا در آمریکا استاد دانشگاه است. البته طبع شعر هم دارد. همسرم سال‌ها در برزخ اینکه با من بماند یا با بچه‌ها، گرفتار بود و هست و اکنون مدتی است هم‌جواری با بچه‌ها را به من ترجیح داده است.

خانواده‌ام هر دفعه تلفن می‌کنند که بیا اینجا، بیا اینجا باش، ولی من نمی‌توانم بروم. حساب می‌کنم مجله‌ها اینجا می‌مانند و الان کار عمده‌ای که می‌کنم، انتشار این دو مجله است. مقاله‌هایش را می‌بینم. خودم که نمی‌توانم بخوانم. دختر خانمی هست، می‌خواند و من گوش می‌دهم، جاهایی‌اش را می‌گویم اصلاح می‌کند و بعد برای چاپ می‌فرستیم.

همگی مدام از من می‌خواهند برای همیشه نزد آن‌ها بروم، ولی نمی‌توانم. کجا بروم؟ ریشه‌های من در اینجاست. سال‌های بسیاری است که می‌توانم به راحتی بروم و هرگز قصد ندارم، مرتکب چنین گناهی بشوم. اینجا می‌مانم تا روزی که به مادر نازنینم برسم.

؟

پرسش‌های بیکارجو!

۲

دنبالهٔ $a_n=n^2-kn+p$ که در آن $k,p,n\in N$ مفروض است. اگر بدانیم در این دنباله ۱۰ جفت جملهٔ برابر وجود دارد، مینیمم مقدار k کدام است؟

- الف) ۱۹
- ب) ۲۰
- ج) ۲۱
- د) ۲۲
- هـ) ۲۳

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شـماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسـئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل dpi۱۵۰) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۵۱. اگر x و y دو زاویهٔ حاده باشند، به‌طوری که: $(۱-\cot x)(۱-\cot y)=۲$، مطلوب است مقدار $x+y$.

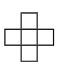
۲۵۲. در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_۱+a_۳+a_۵+a_۷=۵۱۰۲$ و $a_۲+a_۴+a_۶=۲۰۱۵$. مطلوب است مقدار: $S=a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_۷^۲$

۲۵۳. فرض کنید $n+۱$ عددی اول باشد. ثابت کنید kاُمین جمله از سطر nام مثلث خیام ـ پاسکال مضرب k است $(۱\le k\le n)$.

۲۵۴. چند عدد ده رقمی مانند x وجود دارند که چهار رقم سمت راست آن‌ها ۱۳۹۵ باشد و $x^۲$ عددی باشد که چهار رقم سمت چپ آن ۱۳۹۵ باشد؟

۲۵۵. همهٔ جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲-x[x]=۹۵$ را به‌دست آورید.

۲۵۶. با فرض $S=\cos ۷۲^\circ+\cos ۱۴۴^\circ$ و $T=\cos ۷۲^\circ-\cos ۱۴۴^\circ$، ثابت کنید: $۲ST=-T$. سپس مقدار $\cos ۷۲^\circ$ را به‌دست آورید.

۲۵۷. موزاییک‌هایی به شـکل  در اختیار داریم. ثابت کنید در یک زمین ۸×۸، حداکثر ۸تا از این موزاییک‌ها را می‌توانیم قرار دهیم، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم نیفتند.

۲۵۸. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{۲}{۱۰۱}+\frac{۴}{۱۰۰۰۱}+\frac{۸}{۱۰۰۰۰۰۰۰۱}+\dots+\frac{۱۰۲۴}{۱۰۰۰..۰۰۱}$$
$$=\frac{۲}{۹۹}-\frac{۲۰۴۸}{۹۹۹...۹۹}$$

در طرف اول، هر کسـر صورتی برابر ۲^k دارد و تعداد صفرها در مخرج همان کسـر $۲^k-۱$ اسـت. در طرف دوم و در کسر دوم، مخرج ۲۰۴۸ رقم ۹ دارد.

۲۵۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (A قائمه اسـت)، طول میانهٔ AM برابر ۵ و طول میانهٔ CN برابر $۲\sqrt{۱۰}$ اسـت. طول وتر مثلث را به‌دست آورید.

۲۶۰. الان سـن من سه برابر سن پسـرم است. چند سال پیش هم مجموع سن من و پسرم ۴۴ بود. پسرم الان چند سال دارد؟

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۲۱. اگر: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1$، مقدار عبارت $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$ را بیابید.

فرض را یک‌بار در a، یک‌بار در b و یک‌بار در c ضرب می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$(\frac{a^2}{b+c}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{a+b})+(\frac{ab}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{bc}{a+b})$$
$$+(\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{a+c}+\frac{c^2}{a+b})=a+b+c$$
$$\Rightarrow (\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b})+a+b+c=a+b+c$$
$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

۲۲۲. مجموع همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2+5x+5)^{x^2-10x+21}=1$ را بیابید.

برای برقراری این تساوی یا باید داشته باشیم: $x^2-10x+21=0$ یا: $x^2+5x+5=1$ و یا اینکه پایه برابر ۱- و توان زوج باشد. در حالت اول، دو ریشهٔ ۳ و ۷ به‌دست می‌آیند. در حالت دوم، ریشه‌های ۴- و ۱- به‌دست می‌آیند که هر دو قابل قبول هستند و در حالت سوم ریشهٔ ۳- به‌دست می‌آید. مجموع آن‌ها برابر است با ۲.

۲۲۳. چندجمله‌ای f(x) در تساوی زیر صدق می‌کند. ضابطهٔ f را بیابید.

$$f(x)+(x+1)^3=2f(x+1)$$

فرض کنید f از درجهٔ k باشد و: $k\neq3$. در این‌حالت ضریب x^k در دو طرف تساوی برقرار نخواهد بود. پس f از درجهٔ ۳ است. با فرض $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ و جای‌گذاری در تساوی به پاسخ زیر می‌رسیم:

$$f(x)=x^3-3x^2+9x-13$$

۲۲۴. اگر: $|a-b|=2$، $|b-c|=3$ و $|c-d|=4$، مجموع همهٔ مقادیر ممکن برای a-d را بیابید.

چون داریم: $a-d=(a-b)+(b-c)+(c-d)$ و برای a-b، b-c و c-d هر کدام دو مقدار قرینه وجود دارد، در مجموع هشت مقدار مختلف برای a-d حاصل می‌شود که دوتادوتا قرینه هم هستند. پس مجموع مقادیر ممکن برای a-d صفر است.

۲۲۵. مجموع دو عدد طبیعی را بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با: 10^{1395}، اما هیچ‌کدام از آن دو عدد، رقم صفر ندارند.

تنها اعدادی که مقسوم‌علیه 10^{1395} هستند و رقم صفر ندارند، 2^{1395} و 5^{1395} هستند، پس مجموع خواسته شده برابر جمع این دو عدد خواهد بود.

۲۲۶. برای آنکه تساوی زیر صحیح باشد، تعداد جملات زیر رادیکال چندتاست؟

$$\sqrt{17^2+17^2+\dots+17^2}=17^2+17^2+17^2$$

اگر تعداد جملات n باشد، داریم: $\sqrt{n\times17^2}=3\times17^2$.

در نتیجه: $n=\frac{(3\times17^2)^2}{17^2}$. بنابراین: $n=9\times17^2$.

۲۲۷. x را بیابید، اگر $x!=\frac{(7!)!}{7!}$.

چون: $(n-1)!=\frac{n!}{n}$، پس: $x!=(7!-1)!$. در نتیجه: $x=7!-1$.

۲۲۸. دو عدد یکان و دهگان عدد بزرگ $9^{8^{7^{6^5}}}$ را بیابید (۹ به توان ۸ به توان ... به توان ۵)

چون: $9^{10}\overset{100}{\equiv}1$، پس باید $8^{7^{6^5}}$ را به پیمانه ۱۰ حساب کنیم.

داریم: $8^{7^{6^5}}\overset{10}{\equiv}-2^{7^{6^5}}$. توان‌های ۲ به پیمانهٔ ۱۰، متناوب هستند با دورهٔ تناوب ۴. پس باید 7^{6^5} را به پیمانهٔ ۴ حساب کنیم: $7^{6^5}\overset{4}{\equiv}+1$.

پس: $7^{6^5}=4k+1$ و: $2^{7^{6^5}}\overset{10}{\equiv}2$. در نتیجه: $8^{7^{6^5}}=10k'+8$.

بنابراین: $9^{8^{7^{6^5}}}\overset{100}{\equiv}9^{10k'+8}\overset{100}{\equiv}9^8$. دو رقم اول 9^8 عبارت‌اند از ۲۱.

۲۲۹. همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که $\frac{(n+1)^7}{n+7}$ عددی صحیح باشد.

$$(n+1)^7\overset{n+7}{\equiv}(-6)^7\Rightarrow n+7\,|\,6^7\Rightarrow n+7\,|\,2^7\times3^7$$

پس n+7 می‌توانند اعداد ۹، ۱۲، ۱۸ و ۳۶ باشد. در نتیجه n می‌تواند مقادیر ۲، ۵، ۱۱ یا ۲۹ باشد.

۲۳۰. همهٔ اعداد اول p را بیابید، به‌طوری که عدد p رقمی $\overline{111\dots1}$ مضرب p باشد.

عدد p رقمی $\overline{11\dots1}$ فرد است، پس p برابر ۲ نیست. برای p=3 حکم برقرار است. اگر p=5، آن‌گاه: $\overline{110001}\overset{5}{\equiv}1$ که نشان می‌دهد: $p\neq5$. برای هر عدد اول $p>5$ می‌دانیم: $10^p\overset{p}{\equiv}10$. پس: $10^p-1\overset{p}{\equiv}9$ و چون $(p,9)=1$ و: $\frac{10^p-1}{9}\overset{p}{\equiv}1$.

یعنی عدد مذکور بر p بخش‌پذیر نیست. پس تنها جواب ۳ است.

هوشنگ شرقی

گفت‌وشنودی با پیشکسوت آمار و ریاضی ایران، دکتر جواد بهبودیان

معنای واقعی معلم!

اشاره

دکتر جواد بهبودیان از نخستین استادان آمار و از پیشکسوتان صاحب‌نام در این رشته است، تا جایی که به پاس نیم قرن تلاش‌های وی در راه توسعه و اعتلای دانش آمار در ایران، جایزهٔ دوسالانه‌ای توسط «انجمن آمار ایران» و به‌نام وی به برترین نویسندگان مقالات آماری اهدا می‌شود.

دکتر بهبودیان در فروردین ۱۳۱۰ در شیراز متولد شد و تحصیلات مقدماتی خود را در این شهر گذراند. سپس برای ادامهٔ تحصیل به تهران (در دورهٔ کارشناسی) و سپس آمریکا (در دورهٔ کارشناسی ارشد و دکترا) عزیمت کرد و پس از دریافت دکترای آمار ریاضی از «دانشگاه میشیگان» به ایران بازگشت و از سال ۱۳۴۳ به تدریس در دانشگاه شیراز مشغول شد.

کارنامهٔ علمی ایشان چنان پربار است که این مختصر را مجال شرح آن نیست. شرکت در «چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» در شیراز فرصتی به‌دست داد تا در شیراز، شهر راز، به دیدار ایشان برویم و مصاحبه‌ای کوتاه با این استاد فرزانه داشته باشیم. گزارش این مصاحبه که با پرسشگری هوشنگ شرقی، از اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ برهان، و حضور عنایت‌الله راستی‌زاده، از فرهنگیان خوش‌نام شیراز، و همکاران مجلهٔ برهان انجام گرفت، در پی می‌آید.

امروز دوشنبه پانزدهم شهریورماه ۱۳۹۵ است و ما در خدمت استاد، دکتر جواد بهبودیان هستیم. ضمن سپاس از پذیرش درخواست مجلهٔ ریاضی برهان برای گفت‌وگو، اجازه بدهید اولین پرسش را با بازگشت به ۴۶ سال قبل، اردیبهشت سال ۱۳۴۹، نخستین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاه شیراز مطرح کنیم. شما دبیر آن کنفرانس بودید و افراد زیادی از اهالی و بزرگان ریاضیات ایران در آن شرکت داشتند؛ از جمله زنده‌یادان: دکتر منوچهر وصال، پروفسور هشترودی، استاد شهریاری، استاد مصحفی و... اگر از آن کنفرانس خاطراتی دارید (که حتماً دارید)، برای ما بگویید. اگر نکتهٔ شنیدنی دارید که به درد خوانندگان مجلهٔ ما می‌خورد، بیان کنید.

● به‌نام خدا. بله، کنفرانس ریاضی ایران برای نخستین‌بار در فروردین ۱۳۴۹ در شیراز برگزار شد. برگزارکنندگان اصلی آن من بودم، زنده‌یاد دکتر منوچهر وصال بود و استاد جوانی به‌نام دکتر **حریری**. یک استاد کانادایی هم داشتیم. با اینکه ما تا آن موقع تجربهٔ برگزاری کنفرانس را در کشورمان نداشتیم، با این حال این کار به خوبی انجام شد و استادان بزرگی از دانشگاه تهران و بزرگانی چون دکتر **هشترودی**، دکتر **افضلی‌پور**، **پرویز شهریاری** و استاد **ابوالقاسم قربانی** در آن شرکت داشتند. مرحوم قربانی اولین سخنران بود که دربارهٔ «ریاضیات در ایران» سخنرانی بسیار خوبی ایراد کرد. دو استاد مدعو هم یکی از ایتالیا و دیگری از انگلستان داشتیم.

در مجموع کنفرانس به‌خوبی برگزار شد. کار جالبی که ما انجام دادیم این بود که یک ماه قبل با دانشگاه‌های سراسر کشور نامه‌نگاری کردیم تا ببینیم کدام‌یک از آن‌ها آمادگی برگزاری دومین کنفرانس را دارند. در پایان کنفرانس شیراز، دانشگاه صنعتی آریامهر (شریف فعلی) برای برگزاری کنفرانس بعدی اعلام آمادگی کرد. بعد از آن هر سال برگزاری کنفرانس ریاضی بی‌وقفه ادامه پیدا کرد و حتی در زمان جنگ و انقلاب هم کنفرانس ریاضی تعطیل نشد.

شما حتماً در زمان سخنرانی پروفسور هشترودی آنجا حضور داشتید. گفته می‌شود که در جایی از سخنرانی، ایشان توصیه‌هایی به جوانان کرد و در حین این صحبت‌ها، احساساتی شد و با تأثر اشک از چشمانشان جاری شد. علت این موضوع چه بود؟

● بله، این صحنه را خوب به‌یاد دارم. موضوع این بود که بسیاری از جوانان دانشجو در آن زمان به‌خاطر فعالیت‌های سیاسی که بعد

از کودتای ۲۸ مرداد داشـــتند و مخالفت‌هایی که با رژیم گذشـــته می‌کردنـــد، گرفتاری‌هـــای مختلفـــی پیـــدا می‌کردند و پروفســـور هشـــترودی تلاش‌های زیادی برای رهایی این جوانان کردند. آنجا هم ضمن یادکردن از مشـــکلات و گرفتاری‌های آن‌ها متأثر شـــده و اشـــک بر چشـــم آوردند و فضا یک حالت روحانی به خود گرفت. خب دکتر هشترودی سخنوری به تمام معنی بود و وقتی سخنرانی می‌کـــرد، خیلی‌هـــا را تحـــت تأثیر قرار مـــی‌داد. هـــرگاه در تهران ســـخنرانی می‌کرد، تمام معلم‌هـــا و حتی دانش‌آموزان به جلســـهٔ ســـخنرانی می‌رفتند. ایشان به واقع در گسترش ریاضیات مدرن در ایران نقشی مهم داشت.

چـــون صحبـــت معلمـــان شـــد، دو نفـــر از معلمین شـــما در «دبیرســـتان دارالفنون» بودند که شما از آن‌ها به نیکی یاد کرده‌اید: زنده‌یادان موســـی آذرنوش و محسن هنربخش. از آن‌ها بیشتر بگویید.

● آذرنـــوش معلم مـــن نبود، ولی معلمی بســـیار برازنـــده در همان دارالفنون و مؤلف کتاب درسی هم بود. اما محسن هنربخش معلم خود ما و اســـتادی بســـیار توانا بود. او هم کتاب‌های بسیار خوبی تألیف کرده بود که یادم هســـت خیلی به درد ما خورد. کلاس‌های مـــا ۶۰ نفری بود و با اینکه به‌خصوص با توجه به روحیات جوان‌ها در آن زمان، ادارهٔ کلاس‌ها بسیار دشوار بود، ولی ایشان با متانت و توانمندی بالا کلاس را اداره می‌کرد.

خـــب اجازه بدهید ۱۶ ســـال بـــه عقب‌تر برگردیم؛ به ســـال ۱۳۳۳. زمانـــی کـــه فارغ‌التحصیل شـــدید و بـــه تدریس در دبیرستان‌ها پرداختید. کجا تدریس می‌کردید؟

● من و دکتر **قینی** در دانش‌سرای عالی شاگردان برتر بودیم. وزارت فرهنگ از ما دعوت کرد و با توجه به رتبهٔ بالایی که داشتیم، هرجا را که خواستیم برای خدمت انتخاب کنیم. من چون شیرازی بودم، اینجـــا را برای تدریس انتخاب کردم و دکتر قینی هم به یزد رفت.

بله، معلم دکتر بهزاد هم بوده است.

● بله درســـت است. در شـــیراز، ابتدا در دبیرستان نمازی به تدریس مشغول شدم (که برادر دکتر نمازی که بیمارستان معروف نمازی را تأســـیس کرده بود، مؤســـس آن بود). یک ســـال آنجا بودم. بعد آقایی بود به‌نام **ناصر دســـتغیب** که ریاضی درس می‌داد و رئیس دبیرستان هم بود، مرا به «دبیرستان شاپور» برد.

ظاهراً یک دبیرستان بسیار قدیمی و خوب و شناخته شده بود. شـــاگردان خوبی هم داشت، از جمله دانش‌آموزی به‌نام محمدهاشم پسران که به مجلهٔ یکان نامه می‌نوشت و حالا جزء اقتصاددانان بین‌المللی است.

● بله فکر می‌کنم در دبیرســـتان نمازی شـــاگرد من بود. دانش‌آموز خوبی هم به نام **ارســـلان قهرمانی** داشتیم که حالا استاد عمران

دکتر هشترودی سخنوری به تمام معنی بود و وقتی سخنرانی می‌کرد، خیلی‌ها را تحت تأثیر قرار می‌داد. هرگاه در تهران سخنرانی می‌کرد، تمام معلم‌ها و حتی دانش‌آموزان به جلسهٔ سخنرانی می‌رفتند

دانشـــگاه شـــیراز اســـت. فکر می‌کنم «دبیرستان شـــاپور» اولین دبیرستان در شیراز به سبک جدید بود.

تا کی شما در این دبیرستان تدریس کردید؟

● تا ســـال ۱۳۳۷، تا اینکه در این سال مســـابقه‌ای برگزار کردند تا عده‌ای را برای ادامهٔ تحصیل به خارج اعزام کنند. ۶۰۰ نفر شرکت کردند و برای نخســـتین‌بار آزمونی با سؤالات تستی برگزار کردند و ۵۰ نفـــر انتخاب شـــدند که من هم جزو آنان بـــودم و برای ادامهٔ تحصیل به آمریکا اعزام شدم.

چه شد که به سراغ آمار رفتید؟

● وقتی وارد دانشگاه میشیگان شدم، آنجا بخش آمار نداشت و فقط دانشـــکدهٔ ریاضی داشـــت. من هم دکترای ریاضـــی با گرایش آمار گرفتم. علت این انتخاب هم مشـــورت با کسی بود که به من گفت آمار امروزه خیلی کاربرد دارد و مرا تشـــویق به رفتن به این سمت کرد.

وقتـــی وارد ایـــران شـــدید، می‌شـــود گفـــت کـــه از اولیـــن متخصصان آمار ایران بودید. آیا قبل از شـــما هم کسانی در این رشته فعال بودند؟

● بله بودند، مرحوم دکتر **افضلی‌پور** بود، آقای دکتر **خواجه نوری** بود که مرکز آمار را تأسیس کرد و چند نفر دیگر.

احتمال مقدمهٔ آمار است و دانش‌آموزان باید مقدماتی از احتمال را بدانند تا درک درستی از آمار داشته باشند. بنابراین این دو بحث باید با هم مطرح شوند

کی به ایران برگشتید؟

● مرحوم دکتر وصال در اواخر سال ۱۳۴۳ با من مکاتبه کرد و گفت ما می‌خواهیم دانشگاه شیراز را توسعه بدهیم و از من دعوت کردند که به آنجا بروم. مرحوم دکتر وصال قبلاً کارهایی کرده بود، ولی چون معاون دانشگاه شده بود، نمی‌توانست به کارها برسد. در نتیجه من در سال ۱۳۴۷ رئیس بخش ریاضی شدم و بیشتر هم آمار تدریس می‌کردم، تا اینکه به کنفرانس ریاضی رسیدیم.

و انجمن ریاضی را هم همانجا تأسیس کردید...

● بله انجمن ریاضی از درون کنفرانس ریاضی بیرون آمد. پروفسور هشترودی اصرار بسیار به تشکیل انجمن ریاضی داشت، ولی کسی که پیگیری‌های لازم را کرد، دکتر بهزاد بود.

شما در آن دوران با مجلهٔ یکان هم ارتباط داشتید؟

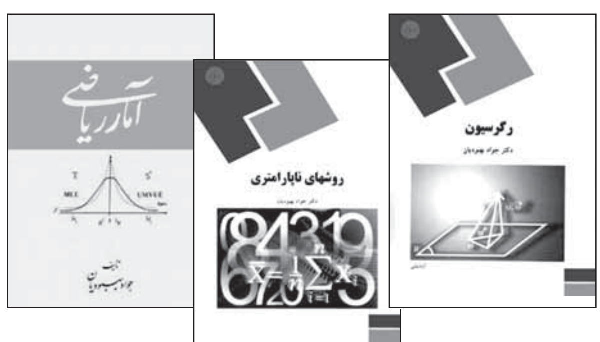
● مرحوم مصحفی با من در دانش‌سرای عالی دانشگاه تهران هم‌کلاس بود. او انسان بسیار وارسته‌ای بود که با مجلهٔ یکان خدمت بزرگی به ریاضیات کشورمان کرد. این مجله گزارش خوبی هم از همان کنفرانس ریاضی همان موقع ارائه داد. من مجلهٔ یکان را مشترک بودم و به دانشجویان و معلمان هم مطالعهٔ آن را همیشه توصیه می‌کردم.

یک مجلهٔ ریاضی خوب باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟

● مطالب مجله اولاً باید به زبان ساده و روان نوشته شوند و ثانیاً تکراری نباشند.

یک سؤال اساسی و تخصصی دربارهٔ آمار بپرسم: آیا آمار بخشی از ریاضیات است و یا دانش مستقلی به‌حساب می‌آید؟

● آمار مثل اقتصاد و مهندسی از ریاضی استفاده می‌کند، اما تفکر آماری روش خاص خودش را دارد و مستقل از ریاضی است.



وضع آمار در ایران حال حاضر را چگونه می‌بینید؟

● الان وضع آمار در کشور ما خوب است. انجمن آمار داریم که فعال است و دوره‌های گوناگون کارشناسی ارشد و دکترای آمار در دانشگاه‌های کشور در جریان هستند. استادان خوبی هم تربیت شده‌اند.

آیا با طرح دو موضوع آمار و احتمال در یک کتاب درسی برای دانش‌آموزان (که در حال حاضر قرار است در پایهٔ یازدهم انجام شود) موافقید؟ بعضی از استادان ریاضی با این موضوع موافق نیستند، زیرا احتمال را بحثی ریاضی و آمار را بحثی کاربردی می‌دانند.

● اگرچه احتمال از زمان **کولموگروف*** به‌صورت یک بحث انتزاعی ریاضی مطرح شد، ولی احتمال مقدمهٔ آمار است و دانش‌آموزان باید مقدماتی از احتمال را بدانند تا درک درستی از آمار داشته باشند. بنابراین این دو بحث باید با هم مطرح شوند.

به‌عنوان سؤال آخر، می‌خواستم بپرسم که در این هفتاد و اندی سال تحصیل و فعالیت علمی، اگر بخواهید از چند نفر نام ببرید که روی شما تأثیرگذار بوده‌اند، از چه کسانی نام می‌برید؟

● در دورهٔ ابتدایی در «دبستان ابن‌سینای» شیراز درس می‌خواندم. در آنجا معلم ریاضی ما، آقای **معاونی**، راه‌حل‌های مرا برای مسائل هندسه خیلی دوست داشت و تشویقم می‌کرد. گاهی اوقات می‌گفت بیا خودت در دفتر من یک نمرهٔ بیست برای خودت بگذار!

در دورهٔ دبیرستان، آقای **محسن هنربخش** خیلی تأثیرگذار بود که در موردش صحبت کردیم. در دانشگاه سخنرانی‌ها و صحبت‌های پروفسور هشترودی و پروفسور **فاطمی** (که واقعاً معلم به معنای واقعی بود)، خیلی اثرگذار بود.

ممنون از وقتی که در اختیار ما گذاشتید.

پی‌نوشت‌ها

* آندری نیکولاویچ کولموگروف (۱۹۸۷-۱۹۰۳)، ریاضی‌دان اهل اتحاد جماهیر شوروی، دانش‌آموختهٔ دانشگاه دولتی مسکو و از سرآمدان نظریهٔ احتمال بود. وی در سال ۱۹۳۳ برای اولین‌بار نظریهٔ اصل موضوعی احتمال را مطرح کرد.

جاسوس در جزیرهٔ شوالیه‌ها و سربازها!

در شمارهٔ قبل دربارهٔ جزیرهٔ شوالیه‌ها و سربازها گفتیم و مسائلی هم در این‌باره مطرح کردیم. دیدید که شوالیه‌ها همیشه راست و سربازها همیشه دروغ می‌گویند. اما ناگهان شایعه‌ای دربارهٔ ورود یک جاسوس به جزیره در همه‌جا پخش شد. مشکل اینجا بود که جاسوس همیشه راست یا دروغ نمی‌گفت و با توجه به منفعت خودش ممکن بود راست یا دروغ بگوید. طبق اخبار رسیده، جاسوس‌هایی وارد جزیره می‌شدند. اکنون به معماهایی در این‌باره توجه کنید.

ایستگاه دوم

۱. خبر رسید که یک جاسوس در خانه‌ای پنهان شده که در آن یک شوالیه و یک سرباز زندگی می‌کنند. مأموران هر سه نفرشان را که آن‌ها را A، B و C می‌نامیم، دستگیر کردند و برای بازجویی در اختیار دادگاه قرار دادند. در دادگاه آن‌ها این سخنان را گفتند:

A: C سرباز است.

B: A شوالیه است.

C: من جاسوس هستم!

هر یک از آن‌ها چه بودند؟

۲. بار دیگر خبر رسیدن جاسوس دیگری آمد و او هم با دو نفر دیگر که باز یکی شوالیه و دیگری سرباز بود، دستگیر شد که آن‌ها را نیز A، B و C می‌نامیم.

آن‌ها در دادگاه جملات زیر را گفتند:

A: من جاسوس نیستم.

B: من جاسوس هستم.

سپس از C که واقعاً جاسوس بود پرسیدند: آیا B واقعاً جاسوس است؟ و C پاسخی داد که خودش را نتوانستند محکوم کنند. این چه پاسخی بود؟

۳. بار دیگر جاسوسی وارد این جزیره شد که نامش **پیتر** بود. مأموران سه نفر را که پیتر هم جزو آن‌ها بود، دستگیر کردند. مأموران می‌دانستند که یکی از این سه نفر پیتر جاسوس است و دو نفر دیگر، یکی سرباز و دیگری شوالیه است. این سه نفر را A، B و C می‌نامیم. آن‌ها این جملات را در دادگاه گفتند:

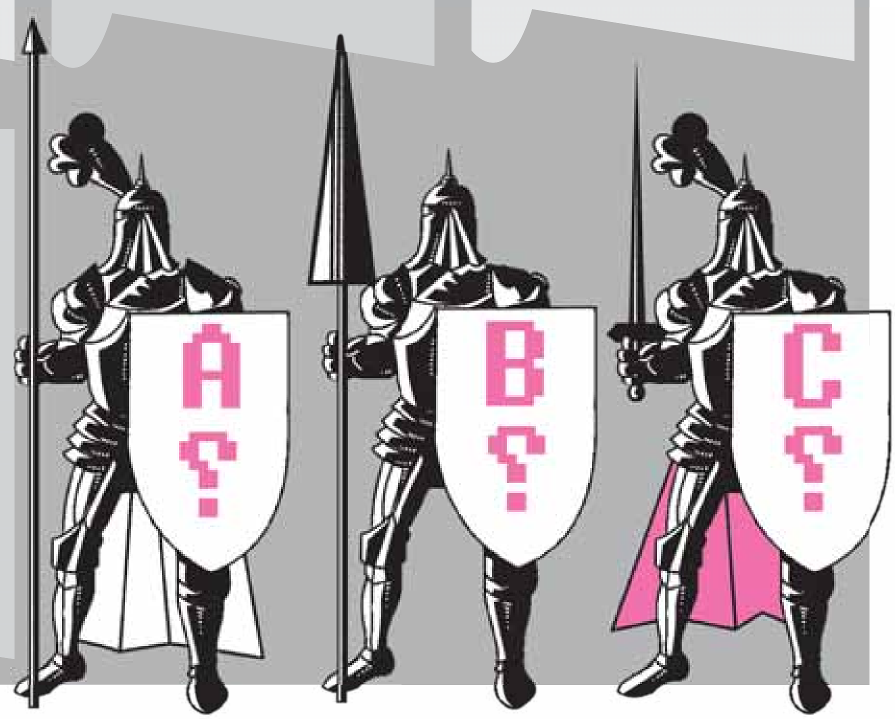
A: نام من پیتر است.

B: او راست می‌گوید.

C: من پیتر هستم.

کدام‌یک از آن‌ها جاسوس است؟

۴. بار دیگر جاسوسی وارد جزیره شد و همراه با دو نفر دیگر که یکی سرباز و دیگری شوالیه بود، دستگیر شد. در دادگاه، نخست B، A را به جاسوسی متهم کرد. آن‌گاه B، C را به جاسوسی متهم کرد و سپس C رو به یکی از دو نفر دیگر کرد و گفت: او واقعاً جاسوس است! سپس قاضی جاسوس را محکوم کرد. چه کسی محکوم شد؟



حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

تعریف

مجموعه‌های A و B داده شده‌اند، ضرب دکارتی A در B، که با A×B نشان داده می‌شود و آن را «A ضرب در B» می‌خوانیم، مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب (a,b) است که a در A و b در B قرار دارد. به‌طور نمادین:

$A\times B=\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$

مثال: حاصل‌ضرب‌های دکارتی

فرض کنیم: A={۱,۲,۳} و B={u,v}.

الف) A×B را بیابید.

ب) B×A را بیابید.

ج) B×B را بیابید.

د) چند عضو در A×B، B×A و B×B وجود دارد؟

هـ) فرض کنیم R مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی باشد. R×R را توصیف کنید.

حل:

الف) A×B={(۱,u),(۱,v),(۲,u),(۲,v),(۳,u),(۳,v)}

ب) B×A={(u,۱),(v,۱),(u,۲),(v,۲),(u,۳),(v,۳)}

ج) B×B={(u,u),(u,v),(v,u),(v,v)}

د) A×B شش عضو دارد که این همان تعداد اعضای A ضرب در تعداد اعضای B است. B×A هم شش عضو دارد که از تعداد اعضای B ضرب در تعداد اعضای A به‌دست می‌آید. B×B چهار عضو دارد که همان تعداد اعضای B ضرب در تعداد اعضای B است.

هـ) R×R مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب (x,y) است که هر دو x و y اعداد حقیقی‌اند. اگر محورهای افقی و قائم در یک صفحه رسم شده باشند و یک طول واحد روی آن‌ها نشانه‌گذاری شده باشند، در این صورت هر زوج مرتب در R×R با یک نقطهٔ منحصربه‌فرد در صفحه متناظر خواهد بود؛ که مختص اول و دومِ این زوج به‌ترتیب مشخص کنندهٔ جایگاه افقی و عمودیِ آن نقطه است.

ترجمه برای دانش‌آموزان

Notation

Given elements a and b, the symbol *(a,b)* denotes the **ordered pair** consisting of *a* and *b* together with the specification that *a* is the first element of the pair and *b* is the second element. Two ordered pairs *(a,b)* and *(c,d)* are equal if, and only if, *a*=*c* and *b*=*d*. Symbolically:

$(a,b)=(c,d)$ means that $a=c$ and $b=d$.

Example 1.2.5 Ordered Pairs

a. Is (1,2)= (2,1)?

b. Is $(3,\frac{5}{10})=(\sqrt{9},\frac{1}{2})$?

c. What is the first element of (1,1)?

Solution

a. No. By definition of equality of ordered pairs,

(1,2)=(2,1) if, and only if, 1=2 and 2=1.

But 1≠2, and so the ordered pairs are not equal.

b. Yes. By definition of equality of ordered pairs,

$(3,\frac{5}{10})=(\sqrt{9},\frac{1}{2})$ if, and only if, $3=\sqrt{9}$ and $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

Because these equations are both true, the ordered pairs are equal.

c. In the ordered pair (1,1), the first and the second elements are both 1.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. cartesian product .... حاصل‌ضرب دکارتی	2. A cross B .... A ضرب در B
3. symbolically .... نمادین	4. element .... عضو
5. describe .... توصیف کردن	6. ordered pairs .... زوج‌های مرتب
7. horizontal .... افقی	8. vertical .... قائم
9. axes .... محورها	10. respectively .... به‌ترتیب

Definition

Given sets *A* and *B*, the **Cartesian product of *A* and *B***, denoted A×B and read "*A* cross *B*," is the set of all ordered pairs *(a,b)*, where *a* is in *A* and *b* is in *B*. Symbolically: $A\times B=\{(a,b)|a\in A \text{ and } b\in B\}$.

Example 1.2.6 Cartesian Products

Let A={1,2,3} and B={u,v}.

a. Find A×B

b. Find B×A

c. Find B×B

d. How many elements are in A×B, B×A, and B×B?

e. Let **R** denote the set of all real numbers. Describe **R×R**.

Solution

a. $A\times B=\{(1,u),(1,v),(2,u),(2,v),(3,u),(3,v)\}$

b. $B\times A=\{(u,1),(v,1),(u,2),(v,2),(u,3),(v,3)\}$

c. $B\times B=\{(u,u),(u,v),(v,u),(v,v)\}$

d. $A\times B$ has six elements. Note that this is the number of elements in *A* times the number of elements in *B*. $B\times A$ has six elements, the number of elements in *B* times the number of elements in *A*. $B\times B$ has four elements, the number of elements in *B* times the number of elements in *B*.

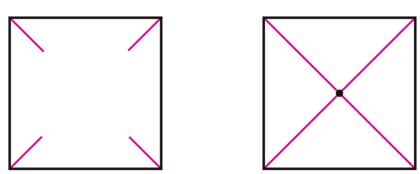
e. **R×R** is the set of all ordered pairs *(x,y)* where both *x* and *y* are real numbers, If horizontal and vertical axes are drawn on a plane and a unit length is marked off, then each ordered pair in **R×R** corresponds to a unique point in the plane, with the first and second elements of the pair indicating, respectively, the horizontal and vertical positions of the point.

هم‌رسی نیم‌سازها و عمودمنصف‌ها در چهارضلعی

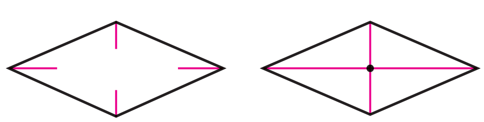
حسین کریمی

در فصل اول هندسهٔ دهم، با اثبات هم‌رسی سه نیم‌ساز زاویه‌های داخلی مثلث آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: آیا در چهارضلعی‌ها نیز چنین است؟ یعنی آیا در تمام چهارضلعی‌ها نیز به‌مانند مثلث‌ها، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم می‌رسند؟ یا شرایط خاصی لازم است؟

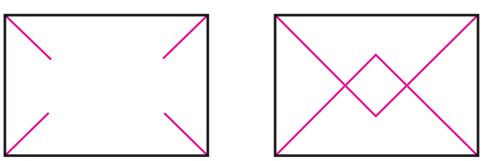
نمونهٔ اول: مربع



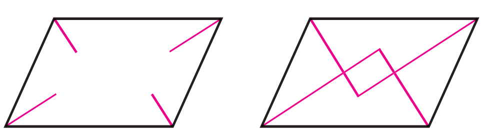
نمونهٔ دوم: لوزی



نمونهٔ سوم: مستطیل



نمونهٔ چهارم: متوازی‌الاضلاع

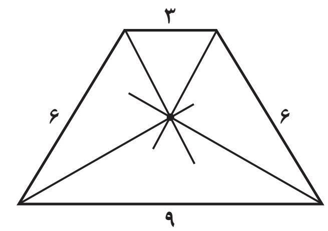


با بررسی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع متوجه می‌شویم که نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه به هم نمی‌رسند و این کافی است که بگوییم: «در همهٔ چهارضلعی‌ها، نیم‌سازهای داخلی، الزاماً هم‌رس نیستند.»

با بررسی مربع و لوزی و هم‌رسی نیم‌ساز زوایای

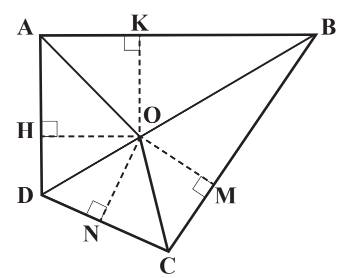
داخلی، چنین به‌نظر می‌رسد که اگر چهارضلع برابر باشند، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم خواهند رسید.

نمونهٔ پنجم: ذوزنقه



در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های ۳ و ۹ و ساق‌های ۶ واحدی، نیم‌سازهای زوایای داخلی رئوس را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که همگی در یک نقطه به هم می‌رسند. همین مورد یک مثال نقض برای لزوم برابری چهارضلع است. یعنی نیازی به برابری اضلاع در یک چهارضلعی، جهت هم‌رسی نیم‌سازهای داخلی نیست. پس چه شرطی لازم است؟ آیا شرطی وجود دارد؟

فرض کنید در چهارضلعی دلخواه زیر، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم رسیده باشند. حال به دنبال شرایط خاص در آن چهارضلعی می‌گردیم.



$$\overset{\Delta}{OBK} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{OMB} \Rightarrow BK = BM$$

$$\overset{\Delta}{OMC} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{OCN} \Rightarrow CN = MC$$

$$\overset{\Delta}{OND} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{ODH} \Rightarrow ND = DH$$

$$\overset{\Delta}{OAH} \overset{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}{\cong} \overset{\Delta}{OAK} \Rightarrow AK = AH$$

با جمع طرفین، چهار تساوی اخیر داریم:

$$AK+BK+CN+ND=BM+MC+DH+HA$$

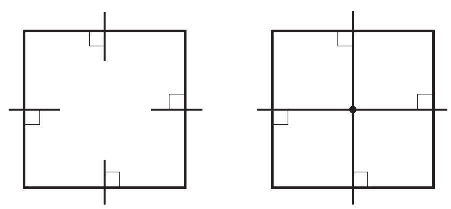
و یا به عبارت دیگر:

$$AB+CD=BC+AD$$

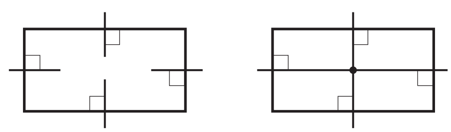
عکس مطلب فوق هم درست است. یعنی هرگاه در یک چهارضلعی، مجموع دو ضلع روبه‌رو با مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر برابر باشد، در آن چهارضلعی، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم می‌رسند (هم‌رسند) که فعلاً از اثبات عکس مطلب صرف‌نظر می‌کنیم.

همچنین، در فصل اول هندسهٔ دهم، با اثبات هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: آیا در چهارضلعی‌ها نیز چنین است؟ یعنی آیا در تمام چهارضلعی‌ها نیز به‌مانند مثلث‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم می‌رسند؟ یا شرایط خاصی لازم است؟

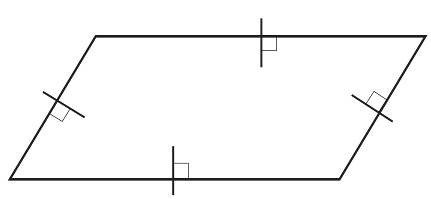
نمونهٔ اول: مربع



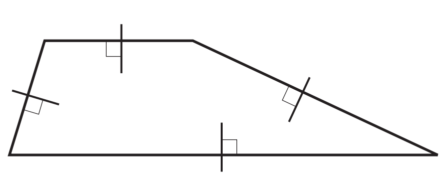
نمونهٔ دوم: مستطیل



نمونهٔ سوم: متوازی‌الاضلاع

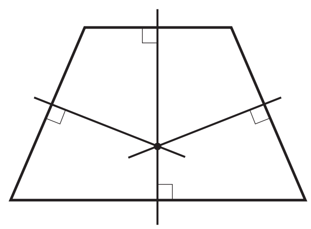


نمونهٔ چهارم: ذوزنقه

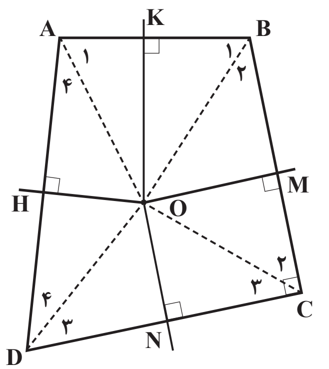


با بررسی متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه متوجه می‌شویم که عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم نمی‌رسند و ایـن کافی اسـت که بگوییم در همـهٔ چهارضلعی‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع، الزاماً هم‌رس نیستند. با بررسی مربع و مسـتطیل و هم‌رسـی عمودمنصف‌های اضلاع، چنیـن به‌نظر می‌رسـد که اگر اندازهٔ چهـار زاویه برابر باشند (قائمه)، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم خواهند رسید.

نمونهٔ پنجم: ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین



در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، عمودمنصف‌های اضلاع را رسـم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که همگی در یک نقطه به هم می‌رسند. همین مورد یک مثال نقض برای لزوم برابری چهار زاویه اسـت. یعنی نیـازی به برابری زوایا در یک چهارضلعی، برای هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع نیسـت. پس چه شـرطی لازم است؟ آیا شرطی وجـود دارد؟ فـرض کنید در چهارضلعـی دلخواه زیر، عمودمنصف‌هـای اضـلاع در یک نقطه به هم رسـیده باشند. حال به دنبال شـرایط خاص در آن چهارضلعی می‌گردیم.



$$\overset{\Delta}{OAK} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{OBK} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\overset{\Delta}{OBM} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{OMC} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{B}_2$$

$$\overset{\Delta}{OCN} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{ODN} \Rightarrow \hat{C}_3 = \hat{D}_3$$

$$\overset{\Delta}{ODH} \overset{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}{\cong} \overset{\Delta}{OAH} \Rightarrow \hat{A}_4 = \hat{D}_4$$

با جمع طرفین چهار تساوی اخیر داریم:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_4 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{D}_3 + \hat{D}_4$$

و یا به عبارت دیگر: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$ و در نتیجه:

$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ (چرا؟)

عکس مطلب فوق هم درسـت اسـت. یعنی هرگاه در یک چهارضلعی، مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو ۱۸۰ درجه باشد، در آن چهارضلعی عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم می‌رسند (هم‌رسند) که فعلاً از اثبات عکس مطلب صرف‌نظر می‌کنیم.

نتیجهٔ پایانی

۱. در یک چهارضلعی، نیم‌سـازهای زاویه‌های داخلی هم‌رسـند، اگر و تنها اگر مجموع هر دو ضلـع مقابل، با مجمـوع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد.

۲. در یـک چهارضلعـی، عمودمنصف‌هـای اضلاع در یـک نقطه هم‌رسـند، اگر و تنها اگـر زاویه‌های روبه‌رو دوبه‌دو مکمل یکدیگر باشند.

در مثلث متساوی‌السـاقین ABC بـه رأس A، $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطـهٔ O را داخـل مثلث طوری در نظـر گرفته‌ایم که AB=OB و $O\hat{B}C = 10^\circ$. در این صورت اندازهٔ $O\hat{C}A$ چند درجه است؟

- الف) 30°
- ب) 20°
- ج) 15°
- د) 40°
- هـ) 10°

یک روش جدید برای یک مسئلهٔ قدیمی!

امین کشاورز ــ شیراز

اشاره

یک مسئلهٔ معروف در هندسه آن است که در مربعی، دو زاویهٔ °۱۵ در درون مربع روی یک ضلع بنا می‌کنیم و از نقطهٔ برخورد اضلاع دوم زاویه‌ها، به دو رأس دیگر مربع وصل می‌کنیم. مسئله آن است که ثابت کنیم، مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع است.

این مسئله سال‌ها پیش در سال‌های ابتدایی قرن گذشته، در مجلات ریاضی کشورهای اروپایی (از جمله مجارستان، رومانی و شوروی سابق) به چاپ رسید و مطرح شد. سپس در منابعی از هندسه در کشور فرانسه به چاپ رسید و از آن منابع ترجمه و برای نخستین‌بار در «مجلهٔ ریاضی یکان»، در سال‌های دهۀ ۱۳۴۰ به زبان فارسی به چاپ رسید. بعدها زنده‌یاد عبدالحسین مصحفی (سردبیر یکان) این مسئله را در ترجمهٔ خود با عنوان «بازآموزی و بازشناخت هندسه» که توسط «انتشارات مدرسه» در سال‌های دهۀ ۱۳۶۰ به چاپ رسید نیز با چند راه‌حل آورد.

یکی از همکاران و خوانندگان مجلهٔ برهان، آقای کریم نائل نیز از شهر آبادان، مقاله‌ای را با عنوان «حل یک مسئلهٔ هندسی با چند راه‌حل» برای ما ارسال و شش روش گوناگون برای حل این مسئله مطرح کرد که در شمارهٔ ۸۴ (زمستان ۱۳۸۴) به چاپ رسید. اکنون همکار دیگری از شهر شیراز یک راه‌حل دیگر برای این مسئلهٔ معروف ارسال کرده است که در پی ملاحظه می‌کنید.

مسئله: در مربع ABCD، دو زاویهٔ ۱۵ درجه روی ضلع AD به داخل مربع رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کنند. سپس از نقطهٔ E به دو رأس دیگر مربع، یعنی B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

راه‌حل: با توجه به فرضیات مسئله به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌زض» هم‌نهشت هستند. در نتیجه، مثلث EBC متساوی‌الساقین است. ارتفاع‌های دو مثلث ADE و BCE را رسم می‌کنیم. چون هر دو متساوی‌الساقین هستند و از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overset{\Delta}{ADE}: EH = \frac{AD}{۲}\times \tan ۱۵^\circ = \frac{AD}{۲}(۲-\sqrt{۳})$$

$$\overset{\Delta}{BCE}: EH' = AD - \frac{AD}{۲}(۲-\sqrt{۳})$$

$$= AD(۱-\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AD$$

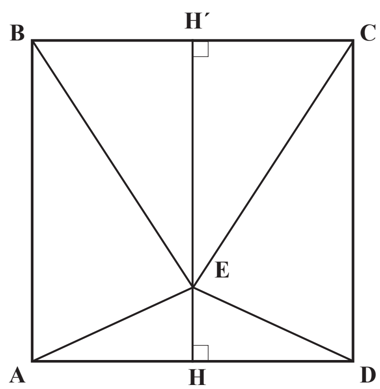
و

$$EC = \sqrt{EH'^{۲} + (\frac{AD}{۲})^{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۴}AD^{۲} + \frac{۱}{۴}AD^{۲}}$$

$$= \sqrt{AD^{۲}} = AD$$

و برهان تمام شد.

جزئیات: با توجه به شکل داریم:



۱. چهارضلعی ´HDCH مستطیل است. پس:

$$HE + EH' = HH' = AD$$

۲. در مثلث‌های متساوی‌الساقین، ارتفاع، عمودمنصف نیز هست.

۳. از اینکه $\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\tan ۳۰^\circ = \frac{۲\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan^{۲} ۱۵^\circ}$ و از تشکیل و حل معادله‌ای درجهٔ دوم، مقدار $\tan ۱۵^\circ$ را به‌دست می‌آوریم.

۴. اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث، متساوی‌الساقین است.

متفاوت بودن یا یکسان نبودن مسئله این است!

خدیجه اقدامی‌مقدم
دبیر ریاضی بندر انزلی

گاهی برداشــتی که از یک عبارت می‌شــود، معانیِ متفاوتی را در ذهن افراد مختلف متبادر می‌سـازد. مثلاً ممکن اسـت از جملهٔ «مـن خوبم»، یـک نفر چنین برداشـت کند که حـال و روز نویسـنده خیلی روبه‌راه اسـت و دیگری چنین دریابد که حال نویسنده چندان بد نیست. عالی هم نیست، ولی قابل تحمل است. این دو تعبیر با هم فرق می‌کنند. در عمل، وجود برداشت‌های متفاوت از یک جمله، اجتناب‌ناپذیر است و ممکن است رخ دهــد. چنین حالتی برای مسـائل مطرح در مبحث احتمالات بیشــتر رخ می‌نماید. زیرا حل درست مسئله منوط به برداشت درست و منظورِ نظر سؤال طرح شده است. به این مثال دقت کنید:

- «در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ زرد وجود دارد. از کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمــال آن را بیابید که مهره‌ها با هم متفاوت باشند.»

دانش‌آموزان کلاســی به این ســؤال بــه دو صورت پاسخ داده‌اند. این دو پاسخ را با هم ببینیم:

پاسخ اول:

مهره‌ها متفاوت باشند، یعنی یکسان نباشند. بنابراین از متمم پیشامد استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$$ **اندازهٔ فضای نمونه‌ای**

A **پیشامد مهره‌ها متفاوت** $\longrightarrow$ A' **پیشامد مهره‌های یکسان**

$$n(A')=\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}=۵$$ **سه قرمز یا سه آبی**

$$\rightarrow P(A')=\frac{۵}{۸۴}\rightarrow P(A)=۱-\frac{۵}{۸۴}=\frac{۷۹}{۸۴}\rightarrow P(A)=\frac{۷۹}{۸۴}$$

پاسخ دوم:

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$$ **اندازهٔ فضای نمونه‌ای**

A **پیشامد مهره‌ها متفاوت** $\longrightarrow$ از هر رنگ یکی

$$n(A)=\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}=۲\times۳\times۴=۲۴,$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۸۴}$$

چرا جواب‌ها متفاوت‌اند؟ به نظر شما کدام جواب درست است؟ و اگر یکی از آن‌ها درست نیست، دلیل چه می‌تواند باشد؟ آیا متفاوت بودن همیشه دلیل بر یکسان نبودن است؟ آیا می‌شود از سه مهره، دو مهره مثل هم باشند و مهرهٔ دیگر فرق کند و در این حالت بگوییم مهره‌ها متفاوت‌اند؟ یا بهتر است صورت سؤال اصلاح شود و به تفاوت دوبه‌دو اشارهٔ مستقیم کند؟

آیا در حل چنین سؤالی مجاز به حل از طریق پیشامد متمم هستیم؟ و اگر بله، متمم آن دقیقاً کدام پیشامد است؟

اگر صورت سؤال تغییر می‌کرد و جملهٔ انتهایی، احتمال یکسان نبودن مهره‌ها را طلب می‌کرد، کدام پاسخ درست بود؟

بیایید یک‌بار دیگر مسئله را مرور کنیم. قرار است ۳ مهره از بین ۹ مهرهٔ رنگی (۴ قرمز، ۳ آبی و ۲ زرد) به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از قضا این مهره‌ها با هم متفاوت باشند. حال می‌خواهیم ببینیم چقدر احتمال دارد این اتفاق بیفتد.

فضای نمونه‌ای و کل حالت‌هایی که ممکن است برای انتخاب تصادفی ۳ مهره از بین ۹ مهره رخ دهد، برابر است با:

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!۶!}=۸۴$$

حال اگر قرار باشد این سه مهره متفاوت باشند، یعنی هیچ شباهتی به‌هم نداشته باشند، باید از سه رنگ متفاوت موجود باشند؛ یعنی یکی قرمز، یکی آبی و یکی زرد.

$$n(A)=\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}=۲۴\rightarrow P(A)=\frac{۲۴}{۸۴}$$

منطقی به‌نظر می‌رسد که تفاوت مهره‌ها دوبه‌دو فرض شود. یعنی هیچ دو مهره‌ای یکسان نباشند. اما اگر بگوییم «احتمال آن‌را بیابید که مهره‌ها یکسان نباشند»، در این وضعیت، می‌توان آن حالت شک‌برانگیز شباهت دو مهره و فرق با مهرهٔ دیگر را نیز به حالت سه رنگ دوبه‌دو متفاوت اضافه کرد. یعنی اگر مطلوب سؤال یکسان نبودن سه مهره و هم‌رنگ نبودن سه مهره باشد، می‌توانیم این حالت‌ها را در نظر بگیریم:

A = یکسان نبودن ۳ مهره = هم‌رنگ نبودن سه مهره = «دو مهرهٔ هم‌رنگ و یک مهرهٔ ناهم‌رنگ»، یا «۳ مهره هر کدام از یک رنگ باشند».

$$P(A)=\frac{\left(\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\right)+\left(\binom{۲}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۶}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}\right)}{\binom{۹}{۳}}$$

$$=\frac{۲۴+۵۵}{۸۴}=\frac{۷۹}{۸۴}$$

اگر سؤال مربوط به یکسان نبودن سه مهره را از راه پیشامد متمم حل کنیم، خواهیم داشت:

A = یکسان نبودن ۳ مهره

$\rightarrow A'$= یکسان بودن هر۳ مهره= هر ۳ آبی یا هر ۳ قرمز

می‌دانیم هر ۳ زرد (امکان ندارد)

$$P(A')=\frac{\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۵}{۸۴},$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۸۴}=\frac{۷۹}{۸۴}$$

مشاهده می‌شود که احتمال یکسان (هم‌رنگ) نبودن ۳ مهره از بین حداقل سه رنگ متفاوت، برابر است با احتمال متفاوت بودن ۳ مهره به‌صورت دوبه‌دو یا شباهت دو مهره و متفاوت بودن مهرهٔ دیگر.

به‌عبارت دیگر، یکسان نبودن ۳ مهره می‌تواند دو منظور را شامل شود که هر دو منظور، مفهوم یکسان‌نبودن ۳ مهره را تأیید می‌کند.

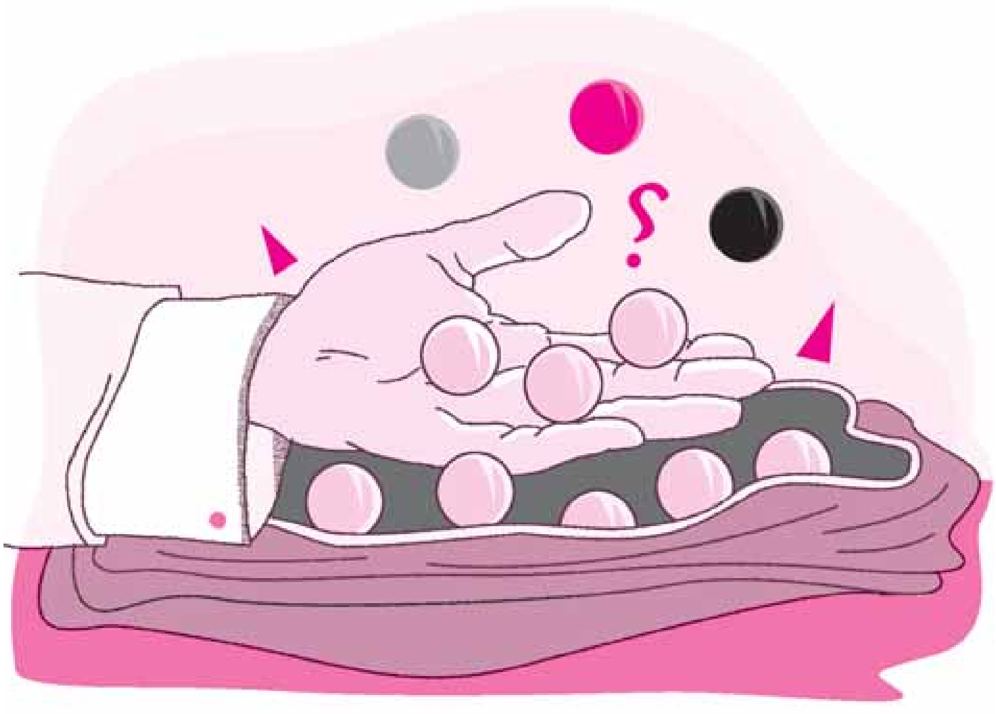
شاید برای دانش‌آموز، درک این تفاوت‌ها کار ساده‌ای نباشد و شاید بهتر بود صورت سؤال اولیه به‌صورت‌های زیر درمی‌آمد:

- احتمال آن را بیابید که ۳ مهره دوبه‌دو متفاوت باشند.

یا:

- احتمال آن را بیابید که سه مهره متفاوت از هر نظر داشته باشیم.

اکنون می‌خواهیم جواب سؤال اولیه را از طریق



پیشامد متمم به‌دست آوریم.

A = پیشـــامد متفاوت بودن ســـه مهره با هم (بدون شباهت بین سه مهره)

A´ = وجود شباهت بین سه مهره

(دو مهره یکســـان و یک مهره متفاوت، یا یکســـان بودن سه مهره) =

$$P(A')=\frac{\left(\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}\right)+\left(\binom{۲}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۶}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}\right)}{\binom{۹}{۳}}$$

$$=\frac{۵+۵۵}{۸۴}=\frac{۶۰}{۸۴}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۶۰}{۸۴}=\frac{۲۴}{۸۴}$$

امـــا در یک حالـــت متفاوت بـــودن دقیقـــاً معادل یکسان‌نبودن است و آن زمانی است که دو رنگ انتخابی داشته باشیم و دو مهره انتخاب کنیم.

به این مثال دقت کنید:

- ۴ مهـــره قرمـــز و ۳ مهره آبی داریـــم. ۲ مهره به تصادف از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم.

الـــف) احتمال آنکه ۲ مهره متفاوت باشـــند، چقدر است؟

ب) احتمال آنکه مهره‌ها یکســـان نباشـــند، چقدر است؟

الف) $$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

ب) $A\rightarrow$ پیشامد یکسان نبودن مهره‌ها

هر دو قرمز یا هر دو آبی = A´ یکسان بودن مهره‌ها

$$P(A')=\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۶+۳}{۲۱}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۷}=\frac{۴}{۷}$$

مشاهده می‌شود که هر دو جواب مثل هم هستند.

در این نوشـــتار سعی کردیم اهمیت واژه‌ها در طرح و حل ســـؤالات ریاضی و به‌خصـــوص مبحث احتمال را پررنگ‌تر نشان دهیم.

پرسش‌های بیکارجو!

؟

۴

معادلهٔ $\sqrt[۴]{۴۱+x}+\sqrt[۴]{۴۱-x}=۴$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

- الف) صفر
- ب) ۱
- ج) ۲
- د) ۳
- هـ) ۴

حکایت‌های خواندنی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر

ایستگاه سوم

حکایت اول

دربارهٔ نوربرت وینر، ریاضی‌دان آمریکایی معاصر (۱۹۶۴-۱۸۹۴)، در شمارهٔ قبل گفتیم. حال حکایتی دیگر و در واقع گفتاری از او را در پی می‌آوریم. از او نقل شده است که گفت: «یک فیزیک‌دان مدرن در روزهای دوشنبه، سه‌شنبه و جمعه یک نظریه‌پرداز کوانتم است و در روزهای چهارشنبه، پنج‌شنبه و شنبه یک دانش‌پژوه تئوری نسبیت گرانشی است. اما در روزهای یکشنبه او هیچ‌یک از این‌ها نیست و فقط دعا می‌کند و از خدای خودش می‌خواهد که کسی و ترجیحاً خودش بتواند بین این دو جریان متناقض آشتی برقرار کند!»

حکایت دوم

باز دربارهٔ وینر گفته شده است که روزی از کافه تریای دانشگاه خارج شد و در حال قدم زدن بود که یکی از دانشجویانش به طرف او رفت و با او مشغول صحبت شد. کمی بعد وینر به دانشجو گفت: «تو یادت می‌آید که من وقتی با تو روبه‌رو شدم، از کدام مسیر می‌آمدم؟»

و دانشجو گفت: «از روبه‌رو می‌آمدید!»

وینر گفت: «آها، پس من ناهارم را خورده‌ام!»

حکایت سوم

این حکایت را خود وینر نقل کرده است: «یکی از مربیان جوان رشتهٔ ریاضی در «ام‌آی‌تی» برای ادامهٔ تحصیل به مونیخ رفت. در آنجا بر سر موضوعی با یکی از افسران نازی درگیری لفظی پیدا کرد و ناچار به شرکت در یک دوئل با او شد. اما به کمک خلاقیت خود توانست از این مخمصه رهایی پیدا کند. او چند روز قبل از انجام دوئل شیوهٔ انجام دوئل را خودش تعیین کرد و از آن افسر خواست که دوئل با تیر و کمان انجام شود. افسر هم که به خودش مطمئن بود و تصورش از طرف مقابل، فقط یک دانشجوی ریاضی بی‌دست و پا بود، پذیرفت.

بعد دانشجو از دوستانش خواست که در آنجا شایع کنند که او در آمریکا قهرمان باشگاه تیراندازی با کمان بوده است. سپس تلگرافی به دوستانش در آمریکا زد و از آن‌ها خواست که در روزنامهٔ «نیویورک تایمز» که آن موقع به‌طور هم‌زمان در سراسر اروپا هم منتشر می‌شد، آگهی چاپ کنند و از او دعوت کنند تا برای دریافت مدال بهترین تیرانداز با کمان عضو باشگاه تیراندازی هرچه سریع‌تر به آمریکا برگردد! فردای آن روز افسر نازی از دانشجوی ریاضی عذر خواست و تقاضای لغو دوئل را کرد!

نیم‌دایره‌های ارشمیدس را بیشتر بشناسیم

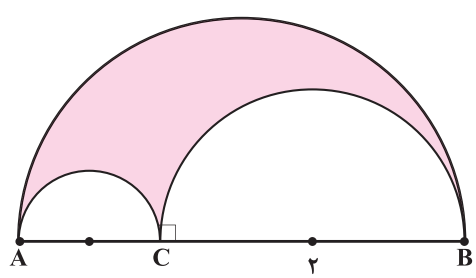
مراد کریمی شهمارووندی
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شهرکرد

اشاره

در کتاب «لم‌ها» منسوب به ارشمیدس که از طریق ترجمهٔ عربی محفوظ مانده است، دو مسئلهٔ باستانی به نام «گزن» (کارد کفاشی) و «سالینون» (انبار نمک) آمده است. به منظور تعمیق دانسته‌های دانش‌آموزان و به‌خاطر زیبایی و کاربردی بودن شکل‌های مربوط به این دو مسئلهٔ تاریخی، به معرفی و بیان برخی از خواص آن‌ها اشاره می‌کنیم.

الف) گزن

در اصطلاح فارسی گزن به ابزار آهنی دُم تیزی که با آن چرم و تیماج را می‌تراشند، اطلاق می‌شود. از نظر هندسی، اگر سه نقطهٔ A، B و C واقع بر یک خط راست باشند، به‌طوری‌که C بین A و B باشد، اگر نیم‌دایره‌هایی در یک طرف خط و به قطرهای AC، CB و AB رسم شوند، در این صورت به شکلی که بین این سه نیم‌دایره محصور است، گزن می‌گویند.

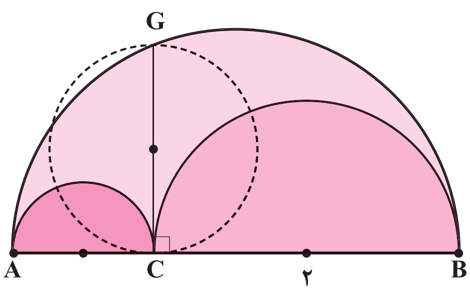


شکل ۱

محاسبهٔ مساحت: اگر در شکل ۱ از نقطهٔ C عمودی بر قطر AB اخراج کنیم تا بزرگ‌ترین دایره را در نقطهٔ G قطع کند، با توجه به اینکه CG واسطهٔ هندسی بین دو قطر AC و CB است، داریم:

$CG^2=AC.CB$

حال: با توجه به شکل ۲ داریم:



شکل ۲

(مساحت نیم‌دایره به قطر CB + نیم‌دایرهٔ قطر AC) – مساحت نیم‌دایره به قطر AB = مساحت گزن

$$S_{(\text{گزن})}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{CB}{2}\right)^2\right]$$

$$S_{(\text{گزن})}=\frac{\pi}{2}.\frac{AB^2}{4}-\frac{\pi}{2}.\frac{AC^2}{4}-\frac{\pi}{2}.\frac{CB^2}{4}$$

$$S_{(\text{گزن})}=\frac{\pi}{8}(AB^2-AC^2-CB^2)$$

$$S_{(\text{گزن})}=\frac{\pi}{8}[(AC+CB)^2-AC^2-CB^2]$$

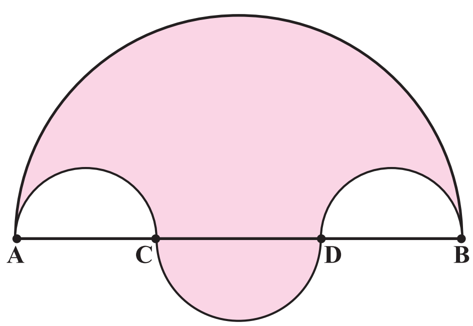
$$S_{(\text{گزن})}=\frac{\pi}{8}(2AC.CB)=\frac{\pi}{4}CG^2$$

$$S_{(\text{گزن})}=\pi\left(\frac{CG}{2}\right)^2$$

یعنی مساحت گزن برابر است با مساحت دایره‌ای به قطر CG (واسطه هندسی).

ب) سالینون

در اصطلاح فارسی سالینون به معنی انبار نمک است.
از نظر هندسی، اگر روی خط راست چهار نقطه A، C، D و B را طوری اختیار کنیم که AC=DB باشد و در یک طرف این خط راست، سه نیم‌دایره به قطرهای AC، AB و DB و در طرف دیگر، نیم‌دایره‌ای به قطر CD رسم کنیم، در این صورت سطح محصور بین چهار نیم‌دایره را سالینون گویند (شکل ۳).

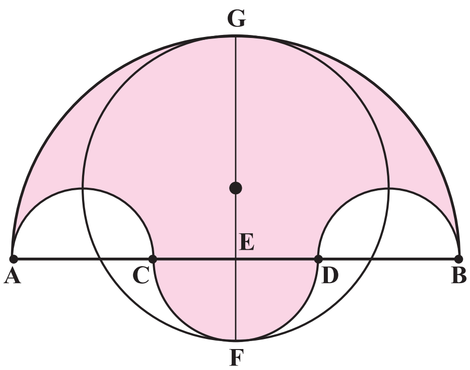


شکل ۳

محاسبهٔ مساحت: ثابت می‌شود مساحت کل سالینون (که به‌طور کامل با کمان‌های نیم‌دایره شکل محصور است)، برابر مساحت دایره‌ای است که قطر آن خط تقارن شکل (FEG) است.

اثبات: با توجه به شکل ۴ برابری‌های زیر برقرارند:

۱) AC=DB
۲) AB=AD+DB
۳) AD=AC+CD
۴) CD+DB=CE+EB
۵) CE+EB=CE+ED+DB
۶) CE=EF
۷) EB=EG



شکل ۴

= مساحت سالینون
+ مساحت نیم‌دایره به قطر AB
− مساحت نیم‌دایره به قطر CD
(مجموع مساحت نیم‌دایره‌های به قطر AC و DB)

$$S_{(\text{سالینون})} = \frac{۱}{۲}\pi.(\frac{AB}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲}\pi.(\frac{CD}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲}\pi.(\frac{AC}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲}\pi.(\frac{DB}{۲})^۲$$

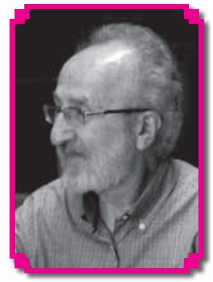
$$S_{(\text{سالینون})} = \frac{\pi}{۲}.\frac{AB^۲}{۴} + \frac{\pi}{۲}.\frac{CD^۲}{۴} - \frac{\pi}{۲}.\frac{AC^۲}{۴} - \frac{\pi}{۲}.\frac{DB^۲}{۴} = \frac{\pi}{۸}(AB^۲ + CD^۲ - AC^۲ - DB^۲)$$

$$S_{(\text{سالینون})} = \frac{\pi}{۸}[(AD+DB)^۲ + CD^۲ - AC^۲ - DB^۲] = \frac{\pi}{۸}[۲CD^۲ + ۴CD.DB + ۲DB^۲]$$

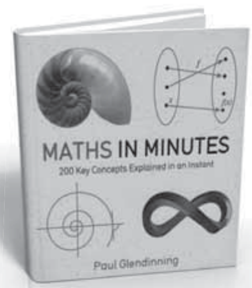
$$S_{(\text{سالینون})} = \frac{\pi}{۴}(CD+DB)^۲ = \frac{\pi}{۴}(FE+EG)^۲ = \frac{\pi}{۴}.(FG)^۲ = \pi.(\frac{FG}{۲})^۲$$

یعنی مساحت سالینون برابر است با مساحت دایره‌ای به قطر FG (خط تقارن شکل).

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاَ یاسی‌پور



ریاضیات در چند دقیقه



معرفی سری‌ها

یک سری ریاضی عبارتی برای مجموع جملات یک دنباله است. سری، که معمولاً با حرف یونانی $\sum$ (سیگما) نمایش داده می‌شود، می‌تواند مجموع جملاتی به تعداد نامتناهی، با دامنه‌ای محدود باشد. در هر یک از این دو حالت، حدود پایین و بالای آن در پایین و بالای علامت $\sum$ ضمیمه می‌شود.

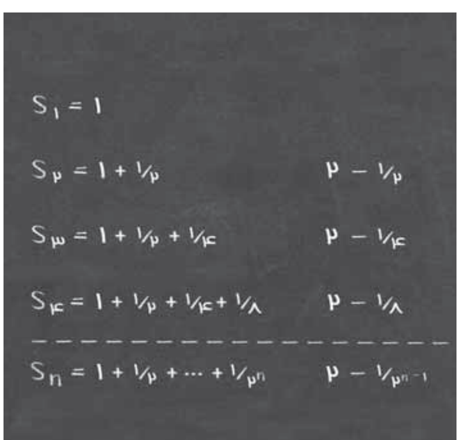
با معلوم بودن هر دنبالهٔ اعداد (a_n)، سری، مجموع نامتناهی زیر است:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

در بسیاری از حالات، این مجموع به بی‌نهایت میل می‌کند، یا روی مقدار خاصی متمرکز نمی‌شود. اما سری‌هایی هستند که در آن‌ها مجموع به عددی منفرد، مشهور به حد، میل می‌کند. برای ملاحظهٔ اینکه یک سری، حدی معنی‌دار دارد، «مجموع جزئی متناهی» (finite partial sum) S_n آن را به‌عنوان مجموع $n+1$ جملهٔ اول آن تعریف می‌کنیم؛ یعنی:

$a_0+a_1+\ldots+a_n$

سری به حد Lی هم‌گرا می‌شود، اگر دنبالهٔ وابستهٔ مجموع‌های جزئی آن، به ازای هر n، به L میل کند.



حدود

- حد یک دنباله یا سری نامتناهی ـ در صورت وجود ـ مقدار منفردی است که به آن، هنگامی که تعداد جملات واقع در آن فهرست (یا مجموع) به بی‌نهایت میل می‌کند، نزدیک می‌شود.

فرایند حد گرفتن امکان می‌دهد که فرایند نامتناهی را با در نظر گرفتن یک سری از تقریبات و سپس تعیین اینکه آیا دنبالهٔ پاسخ‌ها به پاسخی منفرد نزدیک می‌شود یا نه، درک کنیم.

- حد گرفتن طریقی مهم برای پرداختن به فرایندهای بی‌انتها یا نامتناهی است و مطلقاً برای ریاضیات اساسی است. گرچه این روش توسط یونانیان برای محاسبهٔ تقریبات π در میان موارد دیگر، و توسط **ایزاک نیوتن** (Issac Newton) به‌کار رفته بود، تا اواخر قرن نوزدهم فرمول‌بندی نشده است.

امروزه حدها، به‌عنوان ســتون اصلی بســیاری از حوزه‌های ریاضیات، در حوزهٔ آنالیز، هنگام بررســی توابع ریاضی، روابط بین متغیرها در حوزهٔ حسابان به‌طور اصولی به‌کار می‌روند.

پارادوکس زنون

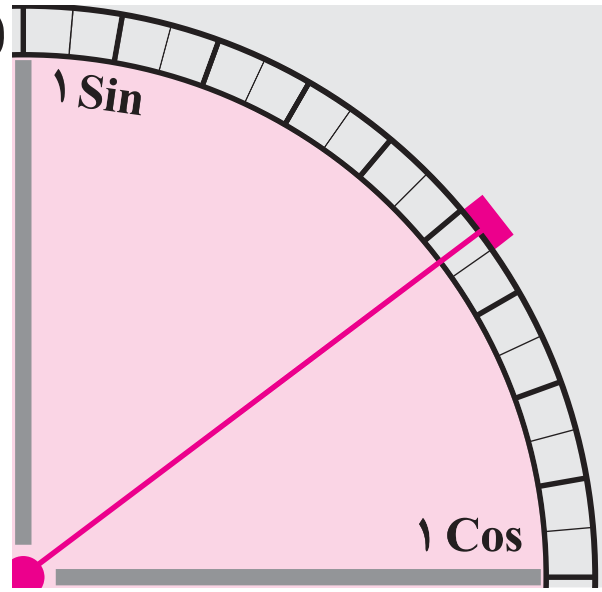
پارادوکس زنون یکی از چند پارادوکسی است که توسط **زنون ایلیایی** (Zeno of Elea)، ریاضی‌دان یونانی، در قرن پنجم ق.م مطرح شد.

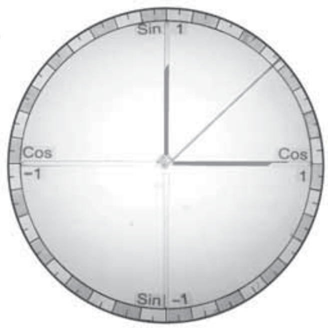
لاک‌پشــت و خرگوش در حال انجام مســابقهٔ دویی در مســیری دو مایلی‌اند. خرگوش با ســرعتی یکنواخت شروع به دویدن می‌کند. اما لاک‌پشت که موجودی فلسفه‌پیشه است، با درک این موضوع که خرگوش هیچ‌گاه به پایان مسیر نمی‌رسد، آرام سرجای خود می‌نشیند.

وی می‌اندیشد که خرگوش باید ابتدا یک مایل، سپس نصف مایل دوم، سپس نصف مایل نهایی و غیره را طی کند. مطمئناً برای خرگوش غیرممکن است که این تعداد نامتناهی از فاصله‌ها را بپیماید.

پارادوکس زنون بحث‌هایی، چه فلسفی چه ریاضی، را مطرح می‌کند. از نقطه‌نظر ریاضی، موضوع کلیدی این است که در پاره‌ای حالات، دنباله‌های نامتناهی اعداد، «سری مجموعی» را تولید می‌کنند که به مقداری متناهی هم‌گرا می‌شــود. بنابراین اگر این موضوع در مورد فاصلهٔ پیموده شــده و زمان صرف شــده برای طی کردن فاصلهٔ متناهی، درست باشد، در این صورت خرگوش بدون هیچ مشکلی به پایان خط خواهد رسید.

دایرهٔ مثلثاتی متحرک





زهرا خاتمی
دبیر ریاضی زنجان

دکتر مرتضی بیات
عضو هیئت علمی
دانشگاه آزاد واحد زنجان

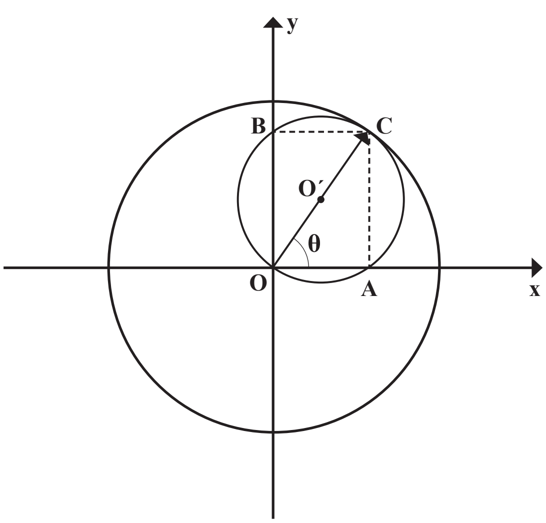
اشاره

درس مثلثات ماهیت دوگانهٔ هندسی و جبری دارد. بدین‌سبب یادگیری این درس ابتدا برای دانش‌آموزان مشکل است. در این مقاله قصد داریم مبانی ریاضی و روش ساخت یک وسیلهٔ کمک‌آموزشی به‌نام «دایرهٔ مثلثاتی متحرک» را معرفی کنیم که به کمک آن به راحتی می‌توان مفاهیم مثلثاتی را آموخت. ایدهٔ ریاضی این وسیله به مسئله‌های سادهٔ هندسی زیر برمی‌گردد:

مسئلهٔ ۱. در دستگاه مختصات xoy، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم شده است. شعاع OC را رسم کرده و وسط آن را O´ می‌نامیم. حال به مرکز O´ دایره‌ای به شعاع $r=\frac{R}{۲}$ رسم می‌کنیم تا محور x و y را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع کند. مطلوبست تعیین طول OA و OB برحسب زاویه θ.

حل: نقطهٔ C را به نقاط A و B وصل می‌کنیم. زاویه‌های OAC و OBC برابر نصف کمان روبه‌رو و برابر ۹۰ درجه هستند (شکل ۱).

بنابراین: $OA=r\cos(\theta)$ و $OB=r\sin(\theta)$.

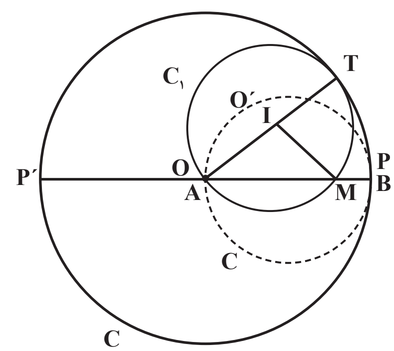


شکل۱

مسئلهٔ ۲. اگر دایره‌ای به شعاع r روی محیط دایره‌ای به شعاع R=۲r بدون لغزش بچرخد، هر نقطه از دایرهٔ کوچک، قطری از دایرهٔ بزرگ را به‌طور نوسانی طی می‌کند.

حل: دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R و قطر ثابت PP´ از آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم دایرهٔ c به شعاع $r=\frac{R}{۲}$ روی محیط داخلی این دایره بدون لغزش بچرخد (شکل ۲).

روی دایرهٔ C دو نقطهٔ ثابت A و B را که دو انتهای یک قطر هستند، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم در ابتدای چرخیدن دایرهٔ c روی محیط داخلی دایرهٔ C دو نقطهٔ A و B به‌ترتیب در O و P باشند. دایرهٔ c را در ابتدای حرکت به‌طور خط‌چین نشان داده‌ایم، اکنون دایرهٔ c را روی محیط دایرهٔ C در جهت f می‌چرخانیم و فرض می‌کنیم که پس از مدت t دایرهٔ c در وضع $c_۱$ که در شکل نشان داده شده است، قرار گیرد. نقطهٔ تماس دو دایرهٔ C و $c_۱$ را با T و نقطهٔ برخورد دایرهٔ c با خط PP´ را با M نشان می‌دهیم. در این وضع I و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی MIT را برحسب رادیان α می‌نامیم.



شکل۲

مثلث IOM متساوی‌الساقین است (IM=IO، دو شعاع دایرهٔ c). زاویهٔ MIT زاویهٔ خارجی این مثلث است. یک قضیهٔ هندسه می‌گوید که زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن زاویه است. بنابراین داریم:

$$\widehat{MIT}=\widehat{IOM}+\widehat{OMI}$$

و چون: $\widehat{MOI}=\widehat{OMI}$، پس زاویهٔ MIT دو برابر زاویهٔ MOT است:

(اندازهٔ زاویهٔ MOT) = $\frac{\alpha}{۲}$ (۱)

در دایرهٔ C زاویهٔ POT یک زاویهٔ مرکزی است و کمان مقابل آن در این دایره PT است. از طرف دیگر، می‌دانیم که طول یک کمان دایره برابر است با حاصل‌ضرب شعاع دایره و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان، در صورتی‌که اندازهٔ کمان برحسب رادیان بیان شود. پس:

(طول کمان PT) = $\frac{R}{۲}\alpha$ (۲)

در دایرهٔ c زاویهٔ MIT زاویهٔ مرکزی است و MT کمان مقابل به آن است. پس:

(طول کمان MT) = rα (۳)

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۲) و (۳) با توجه به اینکه R=۲π نتیجه می‌شود:

طول کمان PT = طول کمان MT

بنابراین وقتی دایرهٔ c روی محیط داخلی دایرهٔ C در جهت بردار f بدون لغزش می‌چرخد، نقطهٔ B از دایرهٔ c که در ابتدای حرکت در نقطهٔ P بود، قطر PP´ را از نقطهٔ P به‌سوی نقطهٔ P´ می‌پیماید و سپس همین قطر را از نقطه P´ به‌سوی نقطهٔ P طی می‌کند (حرکت رفت و برگشت).

یک کاربرد این مسئله در تبدیل حرکت دورانی به حرکت مستقیم است که در کارکرد سیلندر و پیستون و اره‌های برقی که به‌صورت رفت و برگشت کار می‌کنند، دیده می‌شود.

ساخت دایرهٔ مثلثاتی متحرک

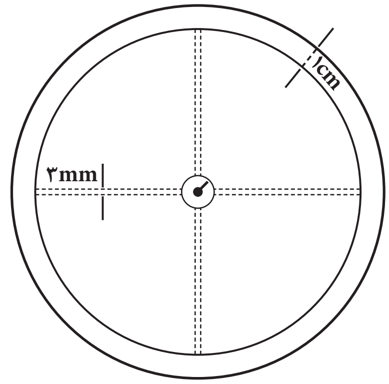
در اینجا به کمک دو مسئلهٔ هندسی بالا روش ساخت وسیله‌ای را برای تدریس درس مثلثات ارائه می‌دهیم. به تجربه در کلاس درس دریافته‌ایم که استفاده از این وسیله موجب آموزش سریع و تعمیق مفاهیم مربوط به درس مثلثات می‌شود.

نام وسیله: دایرهٔ مثلثاتی متحرک
مخاطبان: دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، دانشجویان فنی، دانشجو معلمان و دبیران.
هدف: ساخت وسیله‌ای متحرک و پویا برای آموزش نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و تعدادی از روابط مثلثاتی.

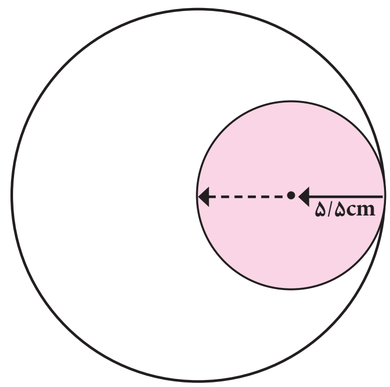
روش ساخت

ابتدا دایره‌ای مقوایی به شعاع ۱۲ سانتی‌متر تهیه می‌کنیم. سپس دو دایره به شعاع‌های ۷ میلی‌متر و ۱۱ سانتی‌متر به مرکز دایرهٔ ۱۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. مطابق شکل ۴، شیارهایی به ضخامت ۳ میلی‌متر به‌صورت علامت جمع با استفاده از تیغ و در امتداد خط‌چین می‌بریم. (باید مواظب باشیم که دایرهٔ به شعاع ۷ میلی‌متر بریده نشود.)

برای استحکام بیشتر شکل به‌دست آمده، طلقی شفاف (بی‌رنگ) به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از چسب مایع به‌دقت پشت این دایره می‌چسبانیم. برای نشان دادن اندازهٔ زاویه، نوار بین دایره‌های



شکل ۳

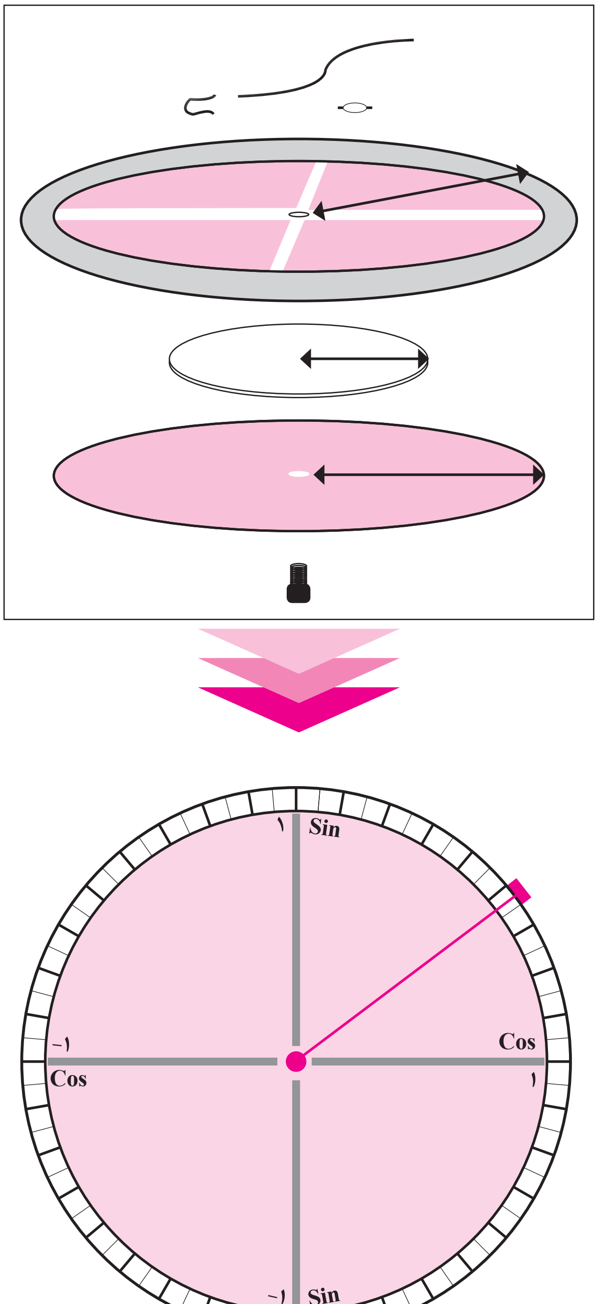


شکل ۴

به شعاع ۱۱ و ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از نقاله به ۳۶ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشانگر ۱۰ درجه است (شکل ۵).

اینک نوبت به دایرهٔ به شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌رسد. دایرهٔ شبرنگی به شعاع ۵/۵ سانتی‌متر را روی دایرهٔ دیگری که قبلاً به شعاع ۱۱ سانتی‌متر داشتیم، مطابق شکل ۴ می‌چسبانیم.

اینک شکل ۴ را زیر شکل ۳ قرار می‌دهیم و با استفاده از واشر کوچک و پرچ ماده، آن‌ها را به هم محکم می‌کنیم. این دو باید طوری روی هم پرچ شوند که دایرهٔ زیری به‌صورت روان حول محل پرچ، دور خود بچرخد. هنگام چرخیدن متوجه می‌شوید که دایرهٔ قرمز زیری محورهای افقی (محور کسینوس) و محور عمودی (محور سینوس) را قطع می‌کند. حال برای مشخص شدن زاویهٔ این نسبت‌ها، طلق ۱ در ۳ را با اندکی حرارت به‌صورت شکل U خم می‌کنیم به‌طوری که یک ساق آن یک سانتی‌متر و ساق دیگر آن ۱/۵ سانتی‌متر باشد. سپس قسمت بلندتر را با استفاده از چسب مایع به پشت دایره با شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌چسبانیم، طوری که محیط دو دایره داخل شکل U قرار گیرد و دو دایره به‌صورت آزادانه روی هم حرکت کنند. اینک یک سر کشِ نازک را از داخل پرچ ماده عبور می‌دهیم و در آنجا با گرهی ثابت می‌کنیم. سپس سر دیگر را روی ساق کوتاه طلق U شکل که در قسمت جلوی وسیله قرار گرفته است، با استفاده از چسب مایع محکم می‌کنیم. حال با چرخاندن دایرهٔ پشتی که طلق به آن متصل است، کش نیز به حرکت درمی‌آید و زاویهٔ مربوطه را با محور افقی مشخص می‌کند (شکل ۵).



شکل ۵

روش استفاده

با این وسیله ابتدا می‌توانید دایرهٔ مثلثاتی با شعاع ۱، محورهای سینوس و کسینوس و همچنین زاویه‌های ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد بـا هر اندازه را به دانش‌آموزان معرفی کنید. در ضمن می‌توان چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی و علامت نسبت‌های سینوس و کسینوس را در هر ربع مشـخص کرد و تغییرات مقدار سینوس و کسینوس را هم‌زمان بین ۱ و ۱- به‌صورت شهودی و قابل لمس نشان داد. با اندکی دقت اتحاد فیثاغورس برای زاویهٔ دلخواه θ به راحتی به‌دست می‌آید:

$$\cos^{۲}(\theta)+\sin^{۲}(\theta)=۱$$

حـال زاویه را برابر صفر در نظـر می‌گیریم (در این حالت کش روی محور کسـینوس منطبق است). مشاهده می‌شود که کل شیار محور کسـینوس، قرمزرنگ و کل شـیار محور سینوس، سفیدرنگ است: یعنی: $\sin(۰)=۰$ و $\cos(۰)=۱$.

بـا چرخاندن دایرهٔ پشـتی، زاویـه افزایش می‌یابـد و از طول نوار قرمز در شـیار کسینوس کاسـته و رفته‌رفته به طور نوار قرمز متحرک در شـیار سـینوس افزوده می‌شـود. یعنی سینوس زیاد و کسـینوس کم می‌شـود (در ربع اول). در حالت زاویهٔ ۴۵ درجه، با رسم عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس مشاهده می‌شود که مقدار سینوس و کسـینوس برابر است (شکل ۶). البته می‌توان مقادیر سـینوس و کسـینوس برای زاویه‌های خاص را روی شـکل مشـخص کرد، اما بهتر است این کار به جلسات بعدی موکول شود تا وسـیلهٔ کمک‌آموزشی در جلسهٔ اول تاحدامکان ساده و قابل فهم باشـد. در حالت زاویهٔ ۹۰ درجه مشـاهده می‌شود که $\sin(۹۰)=۱$ و $\sin(۹۰)=۰$ اسـت. همچنین، مقادیر سینوس و کسینوس ۱۸۰، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه نیز به وضوح قابل مشاهده است.

یکـی دیگـر از کاربردهای این وسـیله در آمـوزش روابط بین نسـبت‌های مثلثاتی اسـت که دانش‌آموزان به کمک آن می‌توانند به درک شـهودی این موضوع برسـند. مثلاً روابط زیر را می‌توانیم نشان دهیم:

$\sin(۳۰)=-\sin(-۳۰)$ و $\cos(۳۰)=\cos(-۳۰)$

یعنی مقدار طولی سـینوس ۳۰ درجه و سـینوس ۳۰- درجه برابر اسـت، ولی این دو قرینهٔ هم‌اند. همچنین کسینوس ۳۰ درجه و کسینوس ۳۰- درجه هم از نظر مقدار طولی و هم از نظر علامت یکسان هستند.

در ضمـن علامت تانژانـت و کتانژانت را نیز می‌توان با توجه به تعریف آن‌ها به کمک علامت‌های سـینوس و کسـینوس به‌دسـت آورد.

در ادامه با مشاهدهٔ چند مثال دیگر برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه به این روابط می‌رسیم:

$\sin(-x)=-\sin(x)$

$\cos(x)=\cos(-x)$

و با همین روش روابط زیر نیز قابل بررسـی اسـت (بهتر است $x=۲۰$ در نظر گرفته شود):

$\sin(۱۸۰-x)=\sin(x)$

$\cos(۱۸۰-x)=-\cos(x)$

همچنین:

$\sin(۱۸۰+x)=-\sin(x)$

$\cos(۱۸۰+x)=-\cos(x)$

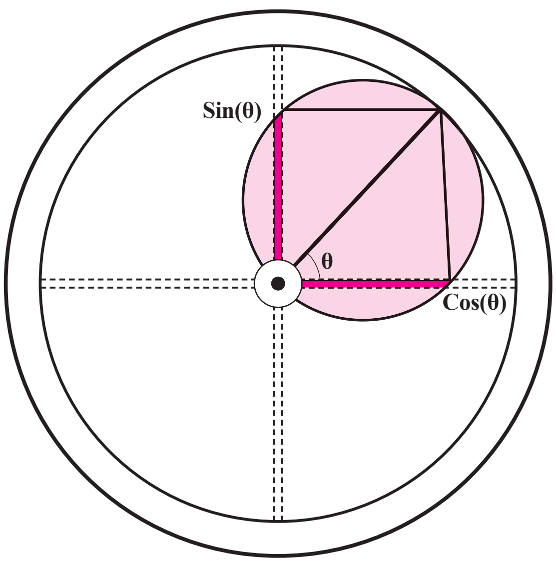
و نیز داریم:

$\sin(۹۰-x)=\cos(x)$

$\cos(۹۰-x)=\sin(x)$

$\sin(۹۰+x)=\cos(x)$

$\cos(۹۰+x)=-\sin(x)$



شکل ۶

در پایان متذکر می‌شـویم که معلم و شاگرد، خود نیز می‌توانند از روی این دایره روابط جدید دیگر را نیز مورد بررسی قرار دهند.

منابع

۱. شرف‌الدین، احمد (۱۳۷۷). **هندسه دلپذیر**. انتشارات مدرسه. تهران.

۲. تیموری، قاسم (۱۳۷۹). **ساخت دست‌سازه‌های ریاضی با طلق و مقوا** (متحرک‌سازی خطوط نمودارها). انتشارات مؤسسهٔ منادی تربیت. تهران.

عباس قلعه پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

یک رابطهٔ طـــولی زیبا در دایره!

اشاره

دایرهٔ محیطی n ضلعی منتظم $A_۱A_۲...A_n$ و نقطهٔ M واقع بر محیط این دایره را در نظر می‌گیریم. هدف از این مقاله اثبات این مطلب است که مجموع مجذورهای فاصله‌های نقطهٔ M از رأس‌های n ضلعی، بستگی به موقعیت نقطهٔ M ندارد و اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، این مجموع برابر است با: $۲nR^۲$. در آغاز، دو حکم را که برای رسیدن به این هدف مورد نیاز هستند، بیان و اثبات می‌کنیم.

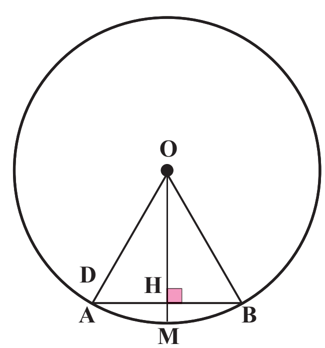
۱. طول وتر AB از دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $۲R\sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.

اثبات: نیم‌ساز زاویهٔ مرکزی AOB را رسم می‌کنیم تا وتر و کمان AB را به‌ترتیب در نقاط H و M قطع کند. چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است، پس OH بر AB عمود است و چون شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند، پس:

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB},\ AH=BH=\frac{AB}{۲}$$

در نتیجه:

$$\angle AOH=\angle BOH=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH داریم:

$$\sin\angle BOH=\frac{BH}{OB}\Rightarrow\sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\frac{AB}{۲}}{R}$$

$$\Rightarrow AB=۲R\sin\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۲. حکم دیگر اثبات درستی تساوی زیر برای هر عدد طبیعی n است:

$$\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+۲\alpha)+...+\cos(\theta+n\alpha)=\frac{\sin\frac{(n+۱)\alpha}{۲}\cos(\theta+\frac{n\alpha}{۲})}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

اثبات: عبارت سمت چپ تساوی حکم را در $۲\sin\frac{\alpha}{۲}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\text{سمت چپ}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\theta+۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos(\theta+\alpha)+۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos(\theta+۲\alpha)+...+۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos(\theta+n\alpha)}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

حال به‌کمک دستور $\sin a\cos b=\frac{۱}{۲}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ داریم:

$$\text{صورت کسر}=[\sin(\frac{\alpha}{۲}+\theta)+\sin(\frac{\alpha}{۲}-\theta)]+[\sin(\frac{۳\alpha}{۲}+\theta)+\sin(-\frac{\alpha}{۲}-\theta)]+[\sin(\frac{۵\alpha}{۲}+\theta)+\sin(-\frac{۳\alpha}{۲}-\theta)]+...+[\sin(\frac{۲n+۱}{۲}\alpha+\theta)+\sin(\frac{۱-۲n}{۲}\alpha-\theta)]$$

و با توجه به اینکه sin(−x)=−sinx، با حذف جملات قرینه در صورت کسر خواهیم داشت:

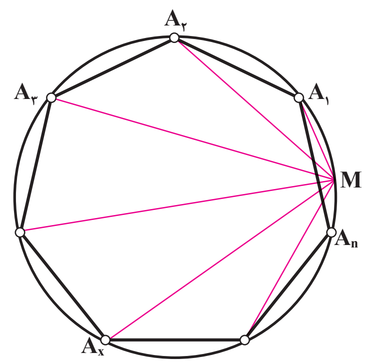
$$=\frac{\sin(\frac{\alpha}{۲}-\theta)+\sin(\frac{۲n+۱}{۲}\alpha+\theta)}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

و بـه کمک دسـتور $\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$=\frac{۲\sin(\frac{n+۱}{۲})\alpha\cos(\theta+\frac{n\alpha}{۲})}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

پس حکم دوم نیز به اثبات رسـید. حال به سـراغ مسئلهٔ اصلی می‌رویم. در شـکل ۲، $A_۱A_۲...A_n$ nضلعی منتظم و دایرهٔ محیط بر آن مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی پیرامون دایره، نقطه‌ای از کمان $A_۱A_n$ می‌گیریم. M را به رأس‌های nضلعی وصل می‌کنیم. خواستهٔ مسئله در واقع محاسبهٔ مجموع زیر است:

$$MA_۱^۲+MA_۲^۲+...+MA_n^۲$$



کـه $MA_۱$، $MA_۲$، ... و MA_n وترهایـی از دایـره هسـتند. حـال فرض کنیم اندازهٔ کمـان $MA_۱$ برابر α باشـد. آن وقت چون: $\widehat{A_۱A_۲}=\widehat{A_۲A_۳}=...=\widehat{A_{n-۱}A_n}=\frac{۲\pi}{n}$، پـس کمان‌های $MA_۲$، $MA_۳$، ... و MA_n به ترتیب برابرند با:

$$\alpha+\frac{۲\pi}{n},\alpha+\frac{۴\pi}{n},...,\alpha+\frac{۲(n-۱)\pi}{n}$$

با توجه به حکم شـمارهٔ یک، اندازهٔ وترهـای $MA_۱$، $MA_۲$، ... و MA_n به‌صورت زیر خواهد بود:

$$MA_۱=۲R\sin\frac{\alpha}{۲}$$

$$MA_۲=۲R\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{\pi}{n})$$

$$MA_۳=۲R\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{۲\pi}{n})$$

$$\vdots$$

$$MA_n=۲R\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{(n-۱)\pi}{n})$$

پس خواهیم داشت:

$$MA_۱^۲+MA_۲^۲+MA_۳^۲+...+MA_n^۲$$
$$=۴R^۲[\sin^۲\frac{\alpha}{۲}+\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}+\frac{\pi}{n})+\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}+\frac{۲\pi}{n})$$
$$+...+\sin^۲(\frac{\alpha}{۲}+\frac{(n-۱)\pi}{n})]$$

اکنون به محاسـبهٔ مجمـوع داخل کروشـه می‌پردازیم. اگر این مجموع را S بگیریم و از دستور $\sin^۲(x)=\frac{۱-\cos۲x}{۲}$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱-\cos\alpha}{۲}+\frac{۱-\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{n})}{۲}+\frac{۱-\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{n})}{۲}$$
$$+...+\frac{۱-\cos(\alpha+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})}{۲}$$
$$=\frac{n}{۲}-[\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{n})+\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{n})+...+\cos(\alpha+\frac{۲(n-۱)\pi}{n})]$$

حال اگر در حکم شمارهٔ دو فرض کنیم: θ=α و $\alpha=\frac{۲\pi}{n}$، مقدار داخل کروشه در عبارت اخیر برابر خواهد بود با:

$$\frac{\sin\frac{n(۲\pi)}{۲n}\cos(\alpha+\frac{(n-۱)۲\pi}{۲n})}{\sin\frac{۲\pi}{۲n}}$$

و چون: $\sin\pi=۰$، پس برابر صفر است. لذا: $S=\frac{n}{۲}$ و داریم:

$$MA_۱^۲+MA_۲^۲+...+MA_n^۲=۴R^۲(\frac{n}{۲})=۲nR^۲$$

که مستقل از موقعیت M روی دایره است.

تمرین

۱. درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta+۲\alpha)+...+\sin(\theta+n\alpha)$$
$$=\frac{\sin\frac{(n+۱)\alpha}{۲}+\sin(\theta+\frac{n\alpha}{۲})}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

۲. شـعاع دایـرهٔ محیطی nضلعـی منتظـم $A_۱A_۲...A_n$ را R می‌گیریـم. ثابت کنیـد مجموع مجذورهـای همهٔ ضلع‌ها و مجمـوع مجذورهای همهٔ قطرهای این nضلعی منتظم برابر است با: $n^۲R^۲$.

راهنمایی: با توجه به متن مقاله، نقطهٔ M را روی رأس $A_۱$ فرض کنید.

***منبع**

رکسی، شکلیا و یاگلوم، ایساک موسو ویچ (۱۳۶۶). **گزیده‌ای از مهم‌ترین مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی**. ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار. تهران. چاپ اول.

هوشنگ شرقی

هندسه۱
پایهٔ دهم

۱. روی امتداد ضلع ´CC از طرف C، از لوزی ´BCC´B، نقطهٔ A را طوری اختیار می‌کنیم که AB=BC باشد. ثابت کنید ´AB روی نیم‌ساز زاویهٔ BAC است.

۲. ثابت کنید در هر مثلث وسط‌های سه ضلع و پای یک ارتفاع رئوس یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند.

۳. در مربع ABCD، از رأس A خطی دلخواه رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در M (بین C و D) قطع کند. نیم‌ساز زاویهٔ BAM ضلع BC را در K قطع می‌کند. ثابت کنید: AM=BK+DM.

هندسهٔ ۲
پایهٔ سوم متوسطهٔ ۲

۱. چهار دایره دوبه‌دو در چهار نقطهٔ A، B، C و D بر یکدیگر مماس خارجی‌اند. ثابت کنید ABCD چهارضلعی محاطی است.

۲. نقطهٔ M درون دایرهٔ C(O,R) مفروض است. اگر طول‌های بلندترین و کوتاه‌ترین وترهای گذرنده از M به ترتیب ۸ و ۶ واحد باشند، فاصلهٔ M از O چقدر است؟

۳. در مثلث ABC، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی متناظر با رأس A، دارای شعاع‌های ۲ و ۷ واحد هستند. اگر $\hat{A}=۶۰^\circ$ باشد، نقاط تماس این دو دایره با BC از یکدیگر چه فاصله‌ای دارند؟

ریاضی ۱
پایهٔ دهم

۱. a و b را طوری به‌دست آورید که رابطهٔ f زیر یک تابع باشد:

$$f=\{(۱,a-b),(۲,۴),(-۱,a+b),(۱,۵),(a-b-۶,۷)\}$$

۲. ضابطهٔ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دومی را به‌دست آورید که نمودار آن محورهای طول و عرض را در نقاطی به طول ۱ و عرض ۱- و خط به معادلهٔ y=x+۴ را نیز در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند.

۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x \ge 2 \\ 2x-3 & 0<x<2 \\ x-1 & x \le 0 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $f(-f(f(1)))$ را به‌دست آورید.

جبر و احتمال
سوم ریاضی

۱. درون مستطیل ABCD که در آن داریم: $BC=2AB=4a$، نقطه‌ای به تصادف اختیار کرده‌ایم. احتمال آنکه مجموع مربعات فواصل این نقطه از A و B کمتر از $4a^{2}$ باشد، چقدر است؟

۲. تاسی به گونه‌ای ساخته شده که احتمال آمدن هر عدد در پرتاب آن متناسب با عدد روی آن است. در پرتاب این تاس، احتمال آمدن ۶ چقدر است؟

۳. اگر a و b دو عدد حقیقی در بازهٔ $[0,5]$ باشند، احتمال آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2}-(a+b)x+4=0$ دارای ریشه حقیقی باشد، چقدر است؟

حسابان

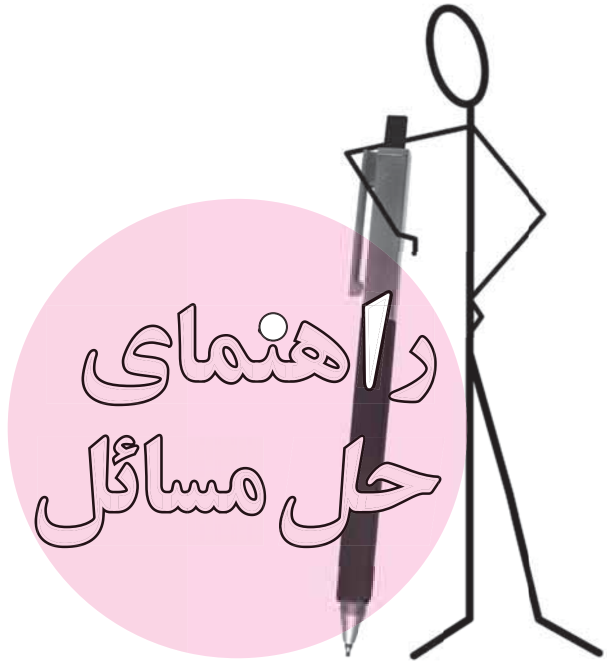
۱. تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x[x]]$ مفروض است. اولاً با محاسبهٔ حد راست و چپ تابع در نقطهٔ a به طول ۱، وجود یا عدم وجود حد تابع را در این نقطه بررسی کنید. ثانیاً با رسم نمودار این تابع در بازهٔ $(-1,2]$، نقاطی را مشخص کنید که تابع در این بازه در آن نقاط دارای حد نباشد.

۲. k را طوری به‌دست آورید که تابع با ضابطهٔ

$f(x)=\begin{cases} k[x]+[-x] & x \ge 2 \\ -kx^{2}+1 & x<2 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول ۲ دارای حد باشد.

۳. مقدار حد زیر را به‌دست آورید:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{[\sin x]+\sin(\pi[x])+\cos(\pi[x])}{x \tan \frac{x}{2}}$$

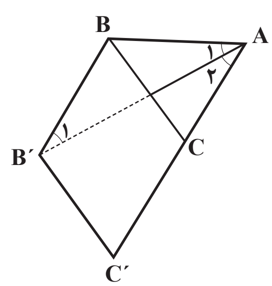


هندسهٔ ۱. پایهٔ دهم

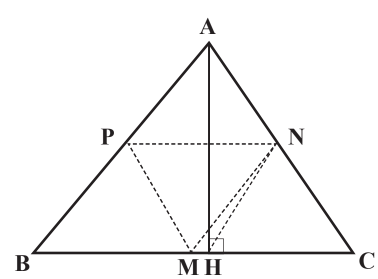
۱. مطابق شکل و با توجه به ویژگی لوزی داریم:

$$AB = BC, BC = BB' \Rightarrow AB = BB' \Rightarrow \hat{A}_{۱} = \hat{B}'_{۱}$$

$$AC' \parallel BB', \text{مورب } AB' \Rightarrow \hat{A}_{۲} = \hat{B}'_{۱} \Rightarrow \hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}$$



۲. اگر M، N و P وسط‌های اضلاع BC، AC و AB و H پای ارتفاع رأس A باشد، طبق ویژگی‌های میان خط در مثلث داریم:

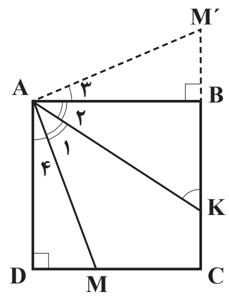


$$PN \parallel BC \Rightarrow PN \parallel MH \Rightarrow \text{ذوزنقه است } PNHM$$

$$PM \parallel AC, PM = \frac{AC}{۲}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه ACH، HN میانهٔ وارد بر وتر و در نتیجه نصف وتر است: $HN = \frac{AC}{۲}$. بنابراین: PM=HN و در نتیجه PNHM ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۳. BC را از طـرف B و بـه اندازهٔ DM تا نقطهٔ M´ امتداد می‌دهیم. حال کافی است نشـان دهیم: KM´=AM (چرا؟) به این منظور می‌نویسیم:

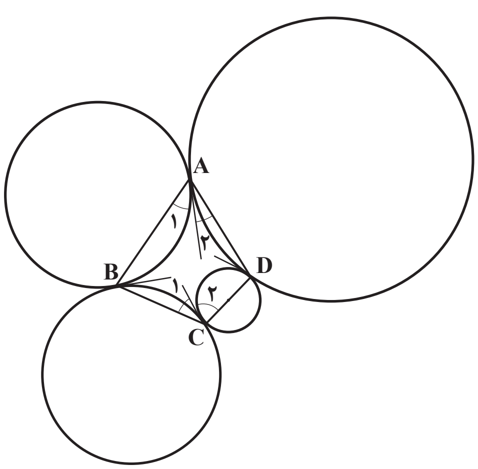


$$BM' = DM, AB = AD, \hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\text{(ض‌زض)}}{} \Delta ABM' \cong \Delta ADM$$
$$\Rightarrow AM' = AM, \hat{A}_{۳} = \hat{A}_{۴}$$
$$BK \parallel AD, \text{ مورب } AK$$

$$\Rightarrow \hat{K} = \hat{A}_{۱} + \hat{A}_{۴} = \hat{A}_{۲} + \hat{A}_{۳} (\hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}, \hat{A}_{۳} = \hat{A}_{۴})$$
$$\hat{K} = \hat{A}_{۲} + \hat{A}_{۳} \Rightarrow AM' = KM', AM' = AM$$
$$\Rightarrow AM = KM' \Rightarrow AM = BK + BM' = BK + DM$$

هندسهٔ ۲. پایهٔ سوم متوسطهٔ ۲

۱. اگر مماس مشـتـرک هر دو دایره را مطابق شکل رسم کنیم، طبق ویژگی زاویه‌های ظلی داریم:



$$\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

و به‌همین ترتیب: $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}$ و $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$ و $\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$ و چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = ۳۶۰^\circ$، بنابراین:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{۲} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD} = ۳۶۰^\circ$$

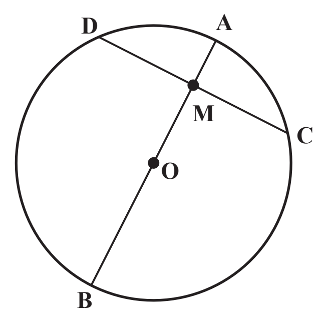
در نتیجه:

$$\hat{A}+\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

$$= \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow$$ ABCD محاطی است

۲. می‌دانیم بلندترین وتر در هر دایره، قطر آن است و کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه هم وتری است که در این نقطه بر قطر عمود می‌شود. بنابراین:

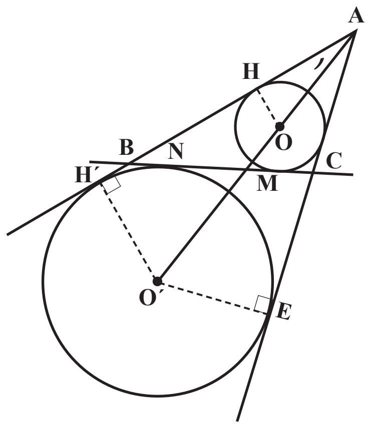
$$AB = ۲R = ۸, CD = ۶ \Rightarrow MD = MC = ۳$$
$$MC.MD = MA.MB = ۹ \Rightarrow (R-OM)(R+OM) = ۹$$
$$\Rightarrow R^۲ - OM^۲ = ۹ \Rightarrow ۱۶ - OM^۲ = ۹, OM = \sqrt{۷}$$



۳. می‌دانیم O و ´O مرکز دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ABC، هر دو روی نیم‌ساز A واقع‌اند. بنابراین در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOH و ´AO´H، $\hat{A}_۱ = ۳۰^\circ$. می‌دانیم که ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° در هر مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است.

پس داریم:

$$OH = \frac{۱}{۲}OA = ۲ \Rightarrow OA = ۴, O'H' = \frac{۱}{۲}O'A = ۷$$
$$\Rightarrow O'A = ۱۴ \Rightarrow OO' = O'A - OA = ۱۴ - ۴ = ۱۰$$
$$MN = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۱۰۰ - (۲+۷)^۲} = \sqrt{۱۹}$$



ریاضی ۱ (پایهٔ دهم)

۱.

$$(۱, a-b) \in f, (۱,۵) \in f \Rightarrow a-b = ۵$$
$$\Rightarrow a-b-۶ = -۱ \Rightarrow (a-b-۶, ۷) \in f : (-۱,۷) \in f,$$
$$(-۱, a+b) \in f \Rightarrow a+b = ۷$$
$$\begin{cases} a-b = ۵ \\ a+b = ۷ \end{cases} \Rightarrow a = ۶, b = ۱$$

۲.

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \quad (۱,۰) \in f, (۰,-۱) \in f$$
$$y = x+۴, y = ۱ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow (-۳,۱) \in f$$
$$\Rightarrow f(۱) = ۰, f(۰) = -۱, f(-۳) = ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = ۰ \\ c = -۱ \\ ۹a-۳b+c = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = ۱ \\ ۹a-۳b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۵}{۱۲}, b = \frac{۷}{۱۲}$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{۵}{۱۲}x^۲ + \frac{۷}{۱۲}x - ۱$$

۳.

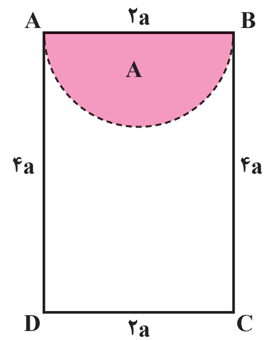
$$۰ < ۱ < ۲ \Rightarrow f(x) = ۲x - ۳,$$
$$f(۱) = ۲ - ۳ = -۱ \Rightarrow f(f(۱)) = f(-۱), -۱ < ۰$$
$$\Rightarrow f(x) = x - ۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱ - ۱ = -۲$$
$$\Rightarrow f(-f(f(۱))) = f(-(-۲)) = f(۲) = ۲^۲ = ۴$$

جبر و احتمال (سوم ریاضی)

۱. اگر نقطهٔ M چنان باشد که $MA^۲+MB^۲=۴a^۲$، آن‌گاه مثلث AMB در رأس M قائم‌الزاویه است. (چرا؟) پس M روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB واقع است. برای همهٔ نقاط بیرون این نیم‌دایره داریم:

$MA^2+MB^2>AB^2=4a^2$. برای نقـــاط درون نیم‌دایره هم داریم: $MA^2+MB^2<AB^2=4a^2$. پس نقطهٔ M باید درون نیم‌دایره‌ای به قطر AB باشد و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{S_A}{S_S}=\frac{\frac{1}{2}\pi a^2}{2a\times 4a}=\frac{\pi}{16}$$



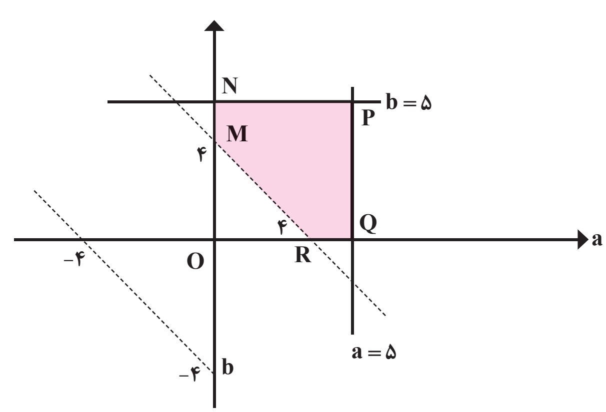
۲. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$P(1)=k, P(2)=2k, \dots, P(6)=6k$$
$$P(1)+P(2)+\dots+P(6)=1 \Rightarrow k+2k+\dots+6k=1$$
$$\Rightarrow 21k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{21} \Rightarrow P(6)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

۳.

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2-16 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 16$$
$$\Rightarrow a+b \geq 4 \ \text{یا}\ a+b \leq -4$$
$$\Rightarrow S=\{(a,b) \mid 0 \leq a,b \leq 5\},$$
$$A=\{(a,b) \mid (a,b)\in S, a+b \geq 4 \ \text{یا}\ a+b \leq -4\}$$

$$P(A)=\frac{S_A}{S_S}=\frac{S_{MNPQR}}{S_{ONPQ}}=\frac{5\times 5-\frac{4\times 4}{2}}{5\times 5}=\frac{17}{25}$$



حسابان

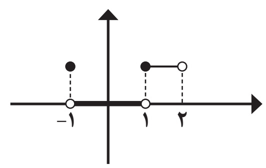
۱.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}[x\times 1]=\lim_{x\to 1^+}[x]=1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}[x\times 0]=\lim_{x\to 1^-} 0=0$$

پس f در این نقطه فاقد حد است.

$$f(x)=\begin{cases}[-x] & -1\leq x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ [x] & 1\leq x<2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x=-1\\ 0 & -1<x<1\\ 1 & 1\leq x<2\end{cases}$$

پس f فقط در نقطهٔ x=۱ دارای حد نیست.



۲.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} k[x]+[-x]=2k-3$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-kx^2+1)=-4k+1$$
$$\Rightarrow 2k-3=-4k+1 \Rightarrow 6k=4, k=\frac{2}{3}$$

۳. چون در همسایگی راســت و چپ $x=\frac{\pi}{2}$، همواره: $0<\sin x<1$. پس: $[\sin x]=0$. همچنین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}=\tan\frac{\pi}{4}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}[x]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[x]=[\frac{\pi}{2}]=1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\frac{0+\sin\pi+\cos\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

یک عدد ۴۵ رقمی شامل یک رقم ۱، دو رقم ۲، ســه رقــم ۳ و... و نه رقم ۹ است. این عدد همواره:

☐ الف) مضرب ۷ است.

☐ ب) مضرب ۱۱ است.

☐ ج) مربع کامل است.

☐ د) مکعب کامل است.

☐ هـ) مربع کامل نیست.

روش HPJ برای حل دترمینان سه‌درسه

محمدرضا هادی پورجمالی
دانشجوی رشتهٔ مهندسی پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

در این روش جدید، برای حل دترمینان سه‌درســه مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. دترمینان سه‌درسه را به چهار دترمینان دودردو تبدیل می‌کنیم:

$$|H|_{3\times 3}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix}=|A| & \begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}=|C|\\ \begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}=|B| & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}=|D|\end{matrix}$$

۲. با حاصل چهار دترمینان دودردو یک دترمینان دودردو می‌سازیم:

$$\begin{vmatrix} |A| & |C|\\ |B| & |D|\end{vmatrix}=G$$

۳. حاصل دترمینان دودردو فوق را بر عدد مرکزی دترمینان سه‌درسه اول (e) تقسیم کنیم و به حاصل دترمینان سه‌درسه اول می‌رسیم:

$$\frac{G}{e}=|H|_{3\times 3}$$

اگر نام این روش جدید را «HPJ» بنامیم، اثبات روش HPJ برای حل دترمینان سه‌درسه به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix}=|A| & \begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}=|C|\\ \begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}=|B| & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}=|D|\end{matrix}$$

$$|A|_{2\times 2}=ae-db \qquad |C|_{2\times 2}=bf-ce$$

$$|B|_{2\times 2}=dh-ge \qquad |D|_{2\times 2}=ei-hf$$

$$\begin{vmatrix} ae-db & bf-ce\\ dh-ge & ei-hf\end{vmatrix}=|G|_{2\times 2}$$

$$|G|_{2\times 2}=(ae-db)(ei-hf)-(bf-ce)(dh-ge)$$

$$(ae^2i-aehf-dbei+dbhf)-(bfdh-bfge-cedh+ce^2g)$$

$$=ae^2i-aehf-dbei+\cancel{dbhf}-\cancel{bfdh}+bfge+cedh-ce^2g$$

$$|G|_{2\times 2}=ae^2i+bfge+cedh-ce^2g-aehf-dbei \quad (1)$$

$$=e(aei+bfg+cdh-ceg-ahf-dbi)$$

و به کمک «روش ساروس» داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\begin{matrix} a & b\\ d & e\\ g & h\end{matrix}=|H|_{3\times 3}$$

$$|H|_{3\times 3}=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$=aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi \quad (2)$$

$$\overset{\text{از مقایسهٔ (۱) و (۲)}}{\Rightarrow}\frac{|G|_{2\times 2}}{e}=|H|_{3\times 3}$$

توضیح هیئت تحریریه

ضمن تشکر از این خوانندهٔ محترم مجله که با ابداع این روش، علاقه‌مندی خود را به ریاضیات نشان داده‌اند، برای آگاهی ایشان و خوانندگان مجله، به اطلاع می‌رساند که روشی مشابه این روش با عنوان «روش تحویل» برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های n×n وجود دارد که در کتاب‌های متعددی به آن اشاره شده است. این دستور به‌صورت زیر است:

$$|A|=\left(\frac{1}{a_{11}}\right)^{n-2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2n}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{31} & a_{3n}\end{vmatrix}\\ \vdots & & \vdots\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{n1} & a_{n2}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{n1} & a_{nn}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

و ایـن دسـتور بـرای ماتریـس سه‌درسـه $A=\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ به‌صورت ذیل است:

$$|A|=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c\\ d & f\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a & b\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c\\ g & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

با استفاده از این دستور، می‌توان دستور HPJ را با کمی تبدیل‌های ماتریسی استخراج کرد. می‌دانیم کـه با جابه‌جاکردن دو سـطر (یا سـتون) در یک ماتریس علامت آن عوض می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|A|=-\begin{vmatrix} b & a & c\\ e & d & f\\ h & g & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e & d & f\\ b & a & c\\ h & g & i\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} e & d\\ b & a\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ b & c\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} e & d\\ h & g\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{e}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\\ d & e\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c\\ e & f\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. می‌دانیم که اگر عددی به‌صورت $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شده باشد ($p_1,p_2,...,p_k$ عوامل اول عدد و $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ توان‌های این عوامل هستند)، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت متمایز آن برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$. بنابراین اگر این حاصل‌ضرب عددی فرد باشد، نتیجه می‌شود که همهٔ پرانتزها فرد هستند و در نتیجه همهٔ α_iها زوج هستند و لذا n مربع کامل است. پس وقتی این عدد، ۱۳۹۵ (که عددی فرد است) مقسوم‌علیه دارد، پس خود یک عدد مربع کامل است (گزینهٔ ج).

۲. فرض کنیم در دنبالهٔ فوق دو عضو متمایز a_m و a_n برابر باشند، آن‌گاه داریم:

$$n^2-kn+p=m^2-km+p \Rightarrow m^2-n^2-k(m-n)=0$$
$$\Rightarrow (m-n)(m+n-k)=0,\ m\neq n \Rightarrow m+n-k=0$$
$$\Rightarrow m+n=k$$

بنابراین مجموع شماره‌های دو جمله باید مقدار ثابت k باشد.

حال می‌دانیم که ۱۰ جفت جملهٔ برابر داریم. اگر آن‌ها را جمله‌هایی به ردیف i_1 و i_2، i_3 و i_4، ... و i_{19} و i_{20} بنامیم، نتیجه می‌شود که:

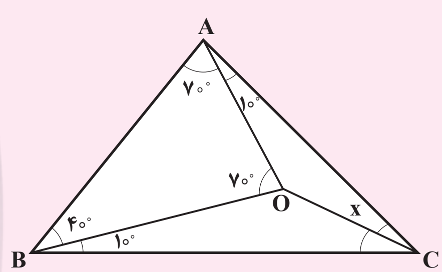
$$i_1+i_2=i_3+i_4=...=i_{19}+i_{20}=k$$

یعنی k عددی طبیعی است که می‌توان آن را به ۱۰ صورت مختلف و به‌صورت مجموع دو عدد طبیعی دیگر نوشت. پس مینی‌مم k، ۲۱ است:

$$21=1+20=2+19=...=10+11$$ (گزینهٔ ج)

۳. واضح است که داریم:

$$A\hat{B}C=A\hat{C}B=\frac{180-80}{2}=50^\circ, O\hat{B}A=40^\circ$$
$$\xRightarrow{OB=AB} O\hat{A}B=A\hat{O}B=\frac{180-40}{2}=70^\circ$$
$$\Rightarrow O\hat{A}C=80-70=10^\circ$$



حال به کمک قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\Delta OCA: \frac{OC}{\sin 10^\circ}=\frac{OA}{\sin x}, \Delta OBC: \frac{OC}{\sin 10^\circ}=\frac{OB}{\sin(50-x)}$$
$$\Rightarrow \frac{OA}{\sin x}=\frac{OB}{\sin(50-x)} \Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{\sin x}{\sin(50-x)}$$
$$\Delta OAB: \frac{OA}{OB}=\frac{\sin 40}{\sin 70} \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin(50-x)}=\frac{\sin 40}{\sin 70}$$
$$=\frac{2\sin 20\cos 20}{\cos 20}=2\sin 20 \Rightarrow \sin x = 2\sin 20 \sin(50-x)$$

و به سادگی روشن است که: $x=20^\circ$ (گزینهٔ ب).

۴. با فرض $\sqrt[4]{41+x}=a$ و $\sqrt[4]{41-x}=b$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a^4+b^4=82 \end{cases}$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2$$
$$ab=c \Rightarrow (16-2c)^2-2c^2=82$$
$$\Rightarrow 2c^2-64c+256=82 \Rightarrow c^2-32c+87=0$$
$$\Rightarrow (c-29)(c-3)=0 \Rightarrow c=29 \text{ یا } c=3$$
$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=4 \\ ab=29 \end{cases}$$

دستگاه دوم با توجه به اینکه $a,b>0$ جواب ندارد و از دستگاه اول نتیجه می‌شود: $a=3$ و $b=1$ یا $a=1$ و $b=3$ و از آنجا: $x=40$ یا $x=-40$ (گزینهٔ ج).

۵. مجموع ارقام این عدد را با توجه به دستور $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ به‌دست می‌آوریم:

$$S=1\times1+2\times2+...+9\times9=\frac{9\times10\times19}{6}=285$$

S مضرب ۳ است، ولی مضرب ۹ نیست. پس این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد (گزینهٔ هـ).

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

سلامی دوباره به یاران و همراهان ثابت‌قدم مجلهٔ ریاضی برهان! در این شماره هم با شما عزیزان هستیم و گزارشی مختصر از نامه‌ها و ایمیل‌هایتان ارائه می‌دهیم.

● همکار گرامی، سرکار خانم **آسیهٔ رضائی گرجی**، از شهرستان کرج

مقاله‌تان با عنوان «کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی» بالاخره (!) به‌دست ما رسید. نوآوری‌هایی در ارائهٔ آن به چشم می‌خورد و ان‌شاءالله مورد استفاده قرار می‌گیرد. باز هم با ما در تماس باشید و ما را از مطالب خوبتان محروم نکنید.

● همکار گرامی، جناب آقای **امین کشاورز**، از شیراز

دوست عزیز مطالب پراکنده‌ای (با فصل مشترک هندسه!) برای ما فرستاده‌اید که البته نشان از لطف شما به همکارانتان دارد. اما دوست بزرگوار برای آنکه از مطالبتان بتوانیم به شکل بهینه‌ای استفاده کنیم، لازم است آن‌ها را به شکل منسجم‌تری ارائه کنید. یعنی هر مطلب در قالب یک مقالهٔ مدون (شامل مقدمه، بیان هدف، بیان مخاطبان و ارائه به‌صورت هدفمند همراه با نتیجه‌گیری نهایی) ارائه شود تا بتوانیم آن را در مجله به‌نام خودتان به چاپ برسانیم. در ضمن توصیه می‌شود که در ارائهٔ مقاله حتماً مخاطبان خود را دانش‌آموزان قرار دهید و به نیازهای آن‌ها توجه داشته باشید. با سپاس از شما، منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

● همکار گرامی، جناب آقای **سعدالله قصابی**، از استان کردستان شهرستان بانه

با سپاس از لطفتان به مجلهٔ برهان، مطلب ارسالی‌تان به دستمان رسید. با احترام باید یادآور شویم که مطلبتان شکل یک مقالهٔ مدون را ندارد و حل چند مسئله است. در صورتی که بتوانید آن را به‌صورت یک مقاله دربیاورید (یعنی با توجه به نیازی که نسبت به حل این‌گونه مسائل احساس کرده‌اید، بتوانید روش‌های کلی برای حل این‌گونه مسائل را بررسی کنید)، امکان چاپ آن در مجله به‌وجود می‌آید. باز هم با ما در ارتباط باشید.

● دوست گرامی، آقای **مهدی قربانی**

با سپاس از مقالهٔ ارسالی‌تان با عنوان «مساحت ذوزنقه برحسب ۴ ضلع آن» به‌نظر می‌رسد که کار جدیدی است که تا به‌حال عرضه نشده است و ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده می‌شود. اما، اولاً بارها گفته‌ایم که مقاله‌هایتان باید دارای مقدمه و ورود به مطلب باشد و هدف از نگارش آن توضیح داده شود. ثانیاً مشخصات کاملتان همراه با شمارهٔ تماس در مقاله بیاید. ثالثاً تلاش کنید به نیازهای دانش‌آموزان که مخاطبان اصلی مجلهٔ ما هستند بیشتر توجه شود. منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

● همکار گرامی، خانم مهناز برقعی، از استان گیلان شهرستان رشت

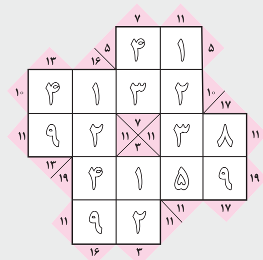
ایمیلتان بدون ضمیمه (attachment)! به‌دست ما رسید.

منتظر مقاله‌تان هستیم!

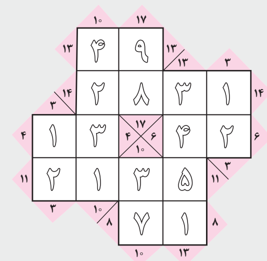
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول:
جدول‌های عددی ویژه!

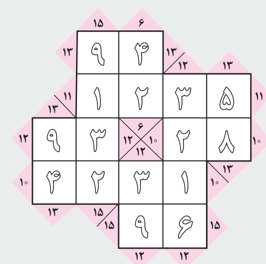
۲



۳



۴



ایستگاه دوم: جاسوس در جزیرهٔ شوالیه‌ها و سربازها!

۱. اگر C راست بگوید و جاسوس باشد، آن‌گاه A دروغ گفته است. در نتیجه A سرباز است و B هم دروغ گفته است و کسی شوالیه نیست (!) و این تناقض است. پس C دروغ می‌گوید و در نتیجه سرباز است (و جاسوس نیست) و لذا A راست می‌گوید (و شوالیه است) و B جاسوس است.

۲. اگر C می‌گفت: «B جاسوس است»، در این صورت قاضی می‌توانست نتیجه بگیرد که C جاسوس است. اما چگونه؟ به این صورت:

«فرض کنیم B جاسوس باشد، در این صورت B و C هر دو راست گفته‌اند. در نتیجه A دروغ گفته و سرباز است. در حالی‌که اگر جملهٔ او دروغ باشد، او باید جاسوس باشد! و این ایجاد تناقض می‌کند. پس B واقعاً جاسوس نیست. لذا B دروغ می‌گوید و سرباز است؛ C هم دروغ می‌گوید و جاسوس است، و A راست می‌گوید و شوالیه است.»

پس C گفت: «B جاسوس نیست» و دادگاه نتوانست او را شناسایی و محکوم کند. (چرا؟)

۳. اگر A دروغ بگوید، در این صورت نام او پیتر نیست و او جاسوس نیست، پس سرباز است. ولی در این صورت B هم دروغ می‌گوید. پس B باید جاسوس باشد. ولی در این صورت C باید شوالیه باشد که با توجه به حرف او ممکن نیست. پس A راست می‌گوید و جاسوس است و B هم راست می‌گوید و شوالیه است و C سرباز است.

۴. فرض کنید C، A را متهم کرده باشد. در این صورت قاضی نمی‌تواند تشخیص دهد چه کسی جاسوس است. زیرا ممکن است A جاسوس، B سرباز و C شوالیه باشد، یا اینکه B جاسوس، A شوالیه و C سرباز باشد و یا C جاسوس، A سرباز و B شوالیه باشد. اما اگر C، B را متهم کرده باشد، در این صورت A و C هر دو B را متهم کرده‌اند. پس اتهام‌های آن‌ها هر دو راست یا هر دو دروغ است. اگر آن‌ها هر دو راست گفته باشند، B واقعاً جاسوس است و چون هر دو اتهام درست بوده، پس A و C هر دو باید شوالیه باشند (نمی‌توانند جاسوس باشند، چون B جاسوس است) و این غیرممکن است. پس اتهام‌های آن‌ها هر دو نادرست‌اند. یعنی B جاسوس نیست. آیا ممکن است A جاسوس باشد؟ خیر، برای اینکه اگر او جاسوس باشد، آن‌گاه B و C هر دو دروغ گفته‌اند، یعنی هر دو سرباز هستند و این هم غیرممکن است. پس تنها امکان این است که C جاسوس، B شوالیه و A سرباز باشد.