رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وششم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۹۸
■ دی ۱۳۹۵
■ شمارهٔ ۴
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
محمدعلی قربانی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول

آموزشی

نقد و بررسی کتاب

ریاضیات در سینمای جهان

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

پرسش‌های پیکارجو!

با مخاطبان

پاسخ‌ها

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷ـ۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱ـ۸۸۳۰۵۷۷۲

حمیدرضا امیری

روز بصیرت

فانما البصیر من یسمع فتفکر و نظر فابصر و انتفع بالعبرة

(امام علی(ع)، نهج‌البلاغه، خطبهٔ ۱۵۳)

«بصیر[1] کسی است که شنید، اندیشید، نظر کرد و بصیر شد و از عبرت‌ها پند گرفت.» در بخش ضرورت و کارکرد از بیانهٔ حوزهٔ تربیت و یادگیری ریاضیات مربوط به «سند برنامهٔ درسی ملی» آمده است: «ریاضیات و کاربردهای آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های مختلف به‌شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند به‌طور منطقی استدلال کنند، قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و دربارهٔ پدیده‌های پیرامونی تئوری‌های جامع بسازند. وجه مهم ریاضی توانمندسازیِ انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی ـ طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است.»

یادگیری ریاضیات آن هم با رویکرد «یادگیری از طریق حل مسئله» و به نوعی درگیر شدن و در نهایت ساختن مفاهیم ریاضی توسط یادگیرنده، یعنی شما دانش‌آموزانِ کوشا و بصیر، از ماندگاری بهتر و مؤثرتری برخوردار است.

این‌گونه درگیر شدن با مفاهیم و مسائل، تفکر ریاضی موردنظر در سند برنامهٔ درسی ملی (که گوشه‌هایی از آن نقل شد) را بهتر و مؤثرتر می‌تواند ایجاد کند و این تفکر ریاضی و یا ریاضی‌وار اندیشیدن می‌تواند از عوامل تأثیرگذار در رشد و ارتقای بصیرتِ موردنظر در کلام امیرمؤمنان **علی(ع)** باشد.

رهبر فرزانهٔ انقلاب، در بخشی از بیاناتشان که در جمع دانشجویان استان قم در سال ۱۳۸۹ ایراد فرمودند، به این نکته متذکر شدند که: «این بصیرتی که در حوادث لازم است و در روایات و در کلام امیرالمؤمنین هم روی آن تکیه و تأکید شده، به معنای این است که انسان در حوادثی که پیرامون او می‌گذرد و در حوادثی که پیش‌روی اوست و به او ارتباط پیدا می‌کند، تدبر کند. سعی کند از حوادث به شکل عامیانه و سطحی عبور نکند. ... حوادث را درست نگاه کردن، درست سنجیدن، در آن‌ها تدبر کردن، در انسان بصیرت ایجاد می‌کند. یعنی بینایی ایجاد می‌کند و انسان چشمش به حقیقت باز می‌شود.»

نهم دی‌ماه روز بصیرت و میثاق امت با ولایت بر همهٔ شما تلاشگران عرصهٔ علم و دانش مبارک باد.

*پی‌نوشت

۱. بصیرت در لغت عرب به معنای عقیدهٔ قلبی، شناخت، یقین، زیرکی و عبرت آمده است (لسان‌لعرف، ج ۲، ص ۸۱۴). در فرهنگ معین نیز دانایی، بینایی، بینایی دل، هوشیاری، زیرکی و یقین معنی شده است (فرهنگ معین، ج ۱، ص ۵۳۴).

ارتباط قوس‌های چندگوشهٔ متقارن با واسطهٔ توافقی

اشاره

از آنجا که هر دنباله ماهیتاً یک تابع است و تابع از مفاهیم بنیادی در دانش ریاضی محسوب می‌شود، لذا مطالعهٔ دنباله‌ها جایگاه ویژه‌ای دارد. در این میان دنباله‌های خاص مانند دنباله‌های حسابی، هندسی و توافقی و به دنبال آن واسطه‌ها مطرح می‌شوند. می‌دانیم یادگیری یک مفهوم ریاضی وقتی که بتوان برای آن تعبیری هندسی فراهم آورد، بسیار عمیق‌تر و ملموس‌تر خواهد بود (برای مثال، می‌توان تعبیر هندسی حد و مشتق را بیان کرد). لذا در این مقاله سعی شده است، از واسطهٔ توافقی بین دو عدد به کمک یک مجموعه شکل‌های هندسی که قوس‌های چندگوشهٔ متقارن نام گرفته‌اند، تعبیری هندسی فراهم آید.

در کتاب درسی «ریاضی ۲» با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم و دیدیم که اعداد x و y را به‌ترتیب واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b می‌نامند هرگاه داشته باشیم: $x=\frac{a+b}{2}$ و $y=\sqrt{ab}$. لیکن دنبالهٔ توافقی (هم‌ساز) و به تبع آن واسطهٔ توافقی مورد بحث قرار نگرفته است. لذا چون موضوع مقاله تعبیری هندسی از واسطهٔ توافقی است، پیش از پرداختن به متن اصلی به دو تعریف می‌پردازیم:

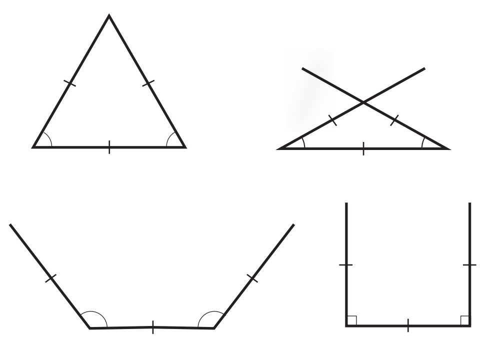
دنبالهٔ توافقی: دنباله‌ای است که معکوس جملات آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند؛ مانند: $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{11}$، ... .

واسطهٔ توافقی: فرض کنیم x واسطهٔ توافقی بین دو عدد a و b باشد، پس b، x و a یک دنبالهٔ توافقی و در نتیجه $\frac{1}{a},\frac{1}{x},\frac{1}{b}$ یک دنبالهٔ حسابی است که در این صورت خواهیم داشت: $x=\frac{2ab}{a+b}$. (چرا؟)

ارتباط قوس‌های چندگوشهٔ متقارن با واسطهٔ توافقی

تعریف: یک «قوس چندگوشهٔ متقارن» شکلی است متشکل از سه خط راست هم طول که زاویهٔ بین هر دو خط مجاور در آن هم‌اندازه هستند.

چند نمونه



شکل ۱

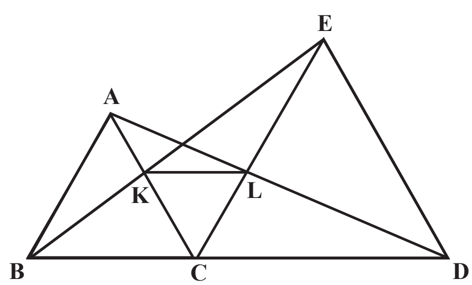
یک قوس چند گوشهٔ متقارن می‌تواند بخشی از یک چندضلعی منتظم یا یک مثلث متساوی‌الاضلاع کامل باشد و این به اندازهٔ زاویه‌اش بستگی دارد.

در این مقاله قصد داریم به کمک قوس‌های چند گوشهٔ متقارن تعبیری هندسی از مفهوم واسطهٔ توافقی بیان کنیم. به‌عبارت دیگر، واسطهٔ توافقی بین دو عدد فرضی a و b را به کمک این قوس‌ها پیدا خواهیم کرد. نویسندهٔ مقاله انگیزهٔ خود را در پرداختن به این موضوع، مسئله‌ای هندسی به شمارهٔ ۲۱۴ از مجموعه مسائل «Mayhem Problem»[۱] بیان می‌کند. این مسئله را به همراه راهنمای حل

نویسنده: **بروس شاویر**
مترجم: **عباس قلعه‌پور اقدم**
دبیر ریاضی از ارومیه

ارائـه می‌کنیـم. اثبات را کامل کنیـد و در صورت نیاز با مراجعه به تارنمای «cms.math.ca/crux/» پاسخ را در دورهٔ سـی‌ودوم، شمارهٔ ششم (نوامبر ۲۰۰۶) بخش «Mayhem Solution» ببینید.

مسئله: دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و CDE روی BCD هم خط هستند. (همانند شکل ۲) اگر BE، AC را در K قطـع کند و DA، CE را در L قطع کند، ثابت کنید KL با BD موازی است.

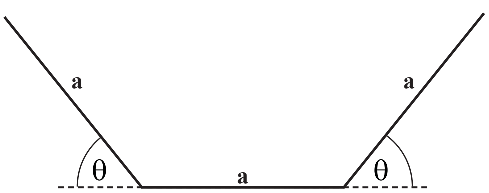


شکل ۲

راهنمای حل

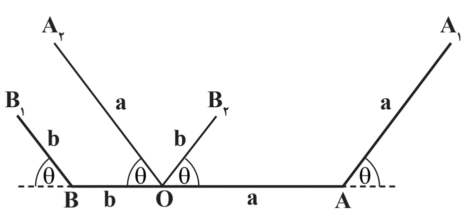
از هم‌نهشـتی مثلث‌هـای ACD و BCE برابـری زاویه‌هـای CAD و CBE، و همچنیـن از هم‌نهشـتی مثلث‌های ACL و BCK برابـری CK=CL را نتیجه بگیرید. با اثبات متسـاوی‌الاضلاع بودن مثلث CKL به جواب خواهید رسید.

برای بررسی قوس‌های سه گوشهٔ متقارن دو متغیر (پارامتر) مناسب انتخاب می‌کنیم. یکی از این دو پارامتر، زاویهٔ خارجی است که آن را θ می‌نامیم و دیگری طول سه خط سـازندهٔ قوس است که آن را a می‌نامیم. خط راسـت وسطی را پایهٔ قوس چند گوشهٔ متقارن خواهیم نامید. به شکل ۳ توجه کنید.



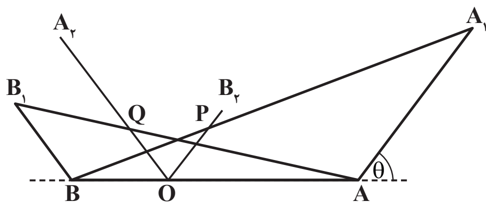
شکل ۳

حـالا فـرض کنیم بخواهیـم واسـطهٔ توافقی بین دو عـدد a و b را پیدا کنیم. مشـابه مسـئلهٔ دو مثلث متسـاوی‌الاضلاع، این بار دو قوس چند گوشـهٔ متقارن را با پارامترهای طولی متفـاوت a و b، با زاویهٔ خارجی یکسـان θ، و بـا پایه‌هایی که در یک امتداد هسـتند و پایان یکی آغاز دیگری اسـت، همانند آنچه در شکل ۴ می‌بینید، کنار هم قرار می‌دهیم.



شکل ۴

حال BA_1 را به AB_1 وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد BA_1 با OB_2 را P و نقطهٔ تقاطع AB_1 و OA_2 را Q می‌نامیم.



شکل ۵

می‌توان ثابت کرد که: $OP = OQ = \frac{ab}{a+b}$. طول‌های مساوی OP و OQ در واقع نصف واسطهٔ توافقی بین دو عدد a و b هستند که به اندازهٔ θ هم بستگی ندارند. این مطلب را از دو روش متفاوت اثبات می‌کنیم، ولی برخی جزئیات اثبات را به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم.

برهان ۱

مثلث‌های A_1AB و POB متشابه‌اند. (چرا؟) بنابراین: $\frac{OP}{OB}=\frac{AA_1}{AB}$. از طرف دیگر داریم: $A_1A=AO=a$ و $OB=b$. پس: $\frac{OP}{b}=\frac{a}{a+b}$ و در نتیجه: $OP=\frac{ab}{a+b}$.

به طریق مشابه می‌توان از تشابه مثلث‌های B_1BA و QOA برابری $OQ=\frac{ab}{a+b}$ را به‌دست آورد.

برهان ۲

این‌بار از مختصات استفاده می‌کنیم. نقطهٔ O را مبدأ یک دستگاه مختصات فرضی می‌گیریم؛ یعنی: $O=(۰,۰)$. در این صورت مختصات نقاط A و B به ترتیب $(a,۰)$ و $(-b,۰)$ خواهند بود. از طرف دیگر، چون: $AA_1=OA=a$، پس مختصات نقاط A_1 و A_2 و B_1 و B_2 به‌صورت زیر خواهند بود:

$A_1=(a(۱+\cos\theta),\ a\sin\theta)$

$A_2=(-a\cos\theta,\ a\sin\theta)$

$B_1=(-b(۱+\cos\theta),\ b\sin\theta)$

$B_2=(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$

برای یافتن مختصات P معادلات خطوط BA_1 و OB_2 را پیدا می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی مختصات نقطهٔ تقاطع این دو خط (P) را به‌دست می‌آوریم.

$$P=\left(\frac{ab\cos\theta}{a+b},\frac{ab\sin\theta}{a+b}\right)$$

به طریق مشابه از معادلات خطوط AB_1 و OA_2 مختصات نقطهٔ Q به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Q=\left(-\frac{ab\cos\theta}{a+b},\frac{ab\sin\theta}{a+b}\right)$$

طول خطوط OP و OQ را محاسبه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم: $OP=OQ=\frac{ab}{a+b}$.

تمرین:

برای واسطهٔ توافقی بین دو عدد ۳ و ۷ از رابطهٔ $x=\frac{۲ab}{a+b}$ مقدار ۴/۲ به‌دست می‌آید. حال دو قوس چند گوشهٔ متقارن را با یک زاویهٔ اختیاری و با طول‌های ۳ و ۷ سانتی‌متر کنار هم قرار دهید و طول پاره‌خط‌های OP و QO را اندازه بگیرید.

پی‌نوشت

۱. نشریه‌ای کانادایی شامل مجموعه مسائل که از سال ۱۹۸۸ کار خود را آغاز کرد و بعدا به‌صورت بخشی از مجله Crux Mathematicorum به‌کار خود ادامه داد.

منابع

۱. یارمحمدی، احسان (۱۳۹۴). «معرفی مجلات ریاضی جهان». مجلهٔ رشد برهان ریاضی متوسطهٔ دوم. شمارهٔ ۹۰. دورهٔ ۲۵.

۲. کریمی، حسین (۱۳۹۴). «کاربردی از تشابه در واسطه‌های هندسی و توافقی». مجلهٔ رشد برهان ریاضی متوسطهٔ دوم. شمارهٔ ۹۱. دورهٔ ۲۵.

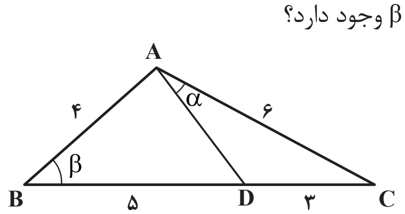
3. Shawyer, Bruce. SPAs and the Harmonic Mean. crux Mathematicorum with mathematical mayhen. V33, n1 (feb 2007)

4. mayhem problem. crux mathematicorum with mathematical mayhem. v 31. n7 (nov 2005)

5. mayhem solution. crux mathematicorum with mathematical mayhem. v 32, n 6 (nov 2006)

پرسش‌های بیکارجو!

در شکل مقابل، چه رابطه‌ای بین اندازه‌های α و β وجود دارد؟



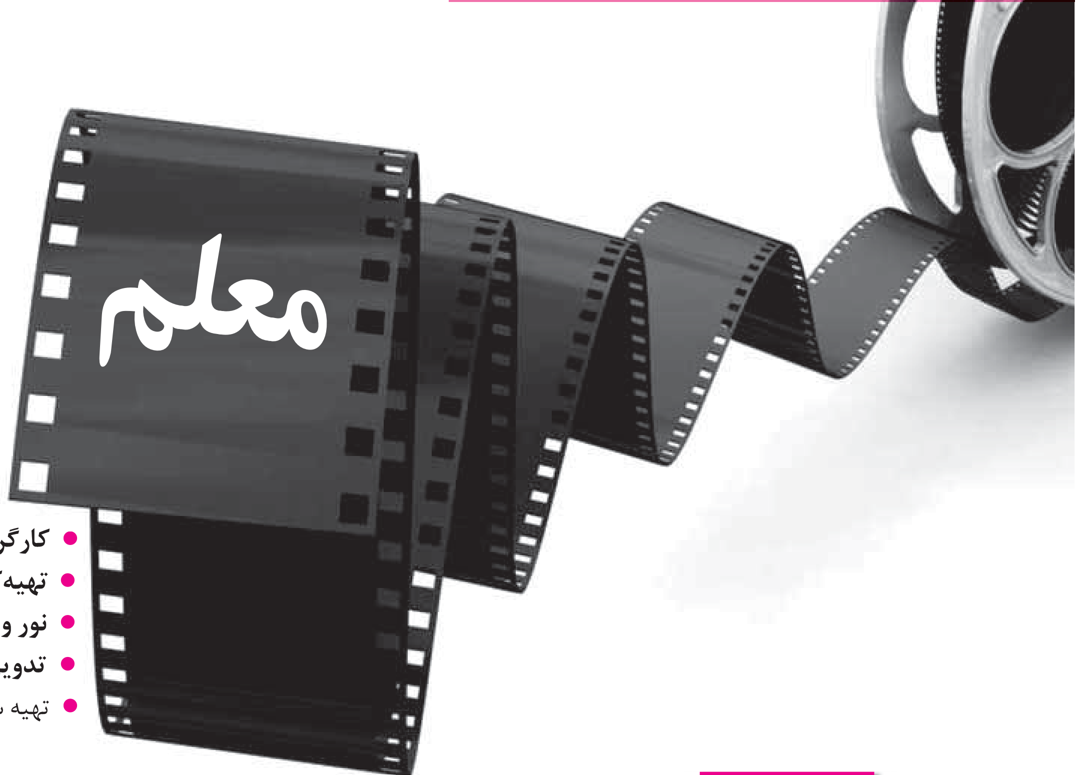
الف) $\alpha+\beta=۹۰^\circ$

ب) $\beta-\alpha=۳۰^\circ$

ج) $\beta=۲\alpha$

د) $\beta=۳\alpha$

هـ) $\beta-\alpha=۴۵^\circ$



معلم

- **کارگردان:** علی‌اکبر اصلانی
- **تهیه‌کننده:** سیدمحسن طباطبائی‌پور
- **نور و تصویر:** علی حشمت‌نژاد
- **تدوین و صداگذاری:** ساناز شیرانی
- تهیه شده در شبکهٔ سیمای استان اصفهان

احسان یارمحمدی

اشاره

***علی‌اکبر جعفری*، از معلمان ریاضی پیشکسوت و عاشقان پیشهٔ معلمی است که تقریباً تمام طول عمر خود را به تدریس و تألیف پرداخته است. در این مقاله قصد داریم با معرفی فیلم مستند «معلم» که حاصل ارائهٔ توضیحات و مطالبی از جانب این عزیز ارجمند در مقابل قاب دوربین است، شما دانش‌آموزان را با تجربه‌های ارزشمند وی آشنا سازیم و نیز زمینه‌ای را برای ریاضی‌آموزانی که علاقه‌مند هستند، در دوران تحصیلات دانشگاهی رشتهٔ دبیری ریاضی را انتخاب کنند، فراهم سازیم. در ادامه به ارائهٔ مونولوگ‌های بیان شده از جانب این معلم فرهیخته در مستند مزبور می‌پردازیم و شما را به تهیهٔ این فیلم و تماشای آن تشویق می‌کنیم.**

من، علی‌اکبر جعفری، فرزند **عباس**، متولد دهم دی‌ماه ۱۳۲۱ در شهرستان گلپایگان هستم و پنجاه‌ویکمین سال تدریس ریاضیات خود را در دبیرستان‌ها سپری می‌کنم. فرزند اول خانواده بودم، بنابراین الگویی می‌شدم برای سایر فرزندان. دوران دبستان را با رفتن به «دبستان فروغی» و بعد به «دبستان ادب» سپری کردم. در دوران دبستان معلمان علاقه‌مند، دلسوز و آگاهی داشتم. از همهٔ آن‌ها سپاس‌گزارم؛ چه آنان که رخت از این جهان بربستند و چه کسانی که به حمدالله هنوز هم زندگی می‌کنند. برای آن‌ها طلب آمرزش و برای این عزیزان عمری طولانی و با سعادت آرزو دارم.

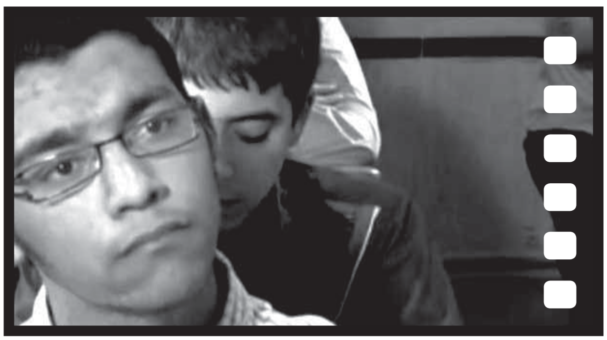
آقای **محمدرضا جلالی**، معلم ریاضیات پنجم و ششم دبستان بود. ایشان در تشویق من به درس ریاضی سهم بسزایی دارند و من واقعاً خود را تا همیشه مدیون لطف و محبتی می‌دانم که این عزیز نسبت به شاگردانش روا می‌داشت. در سال ۱۳۳۴ در «دبیرستان فردوسی» که نام کنونی‌اش **امام خمینی(ره)** است، ادامهٔ تحصیل دادم. دبیرستان فردوسی یک پایگاه دانش و معرفت در گلپایگان است. این دبیرستان ۸۰ سال قدمت تاریخی دارد و یکی از بناهای فرهنگی به‌یاد ماندنی این شهرستان است. امیدوارم مسئولان محترم همواره این دبیرستان را به‌عنوان پایگاه دانش و معرفت نگهداری کنند و این ساختمان را به همان شکل اولیهٔ خودش که یادگار بزرگی برای گلپایگان است، نگهداری کنند.

در سال اول دبیرستان و سال‌های دوم و سوم با عزیز دیگری به نام آقای **محمد نوروزی** در درس

ریاضی آشنا شدم. همهٔ عزیزانی که در دبیرستان سمت استادی بر من دارند، برای من عزیزند. منتها چون در درس ریاضی دارم کار را ادامه می‌دهم، از این بزرگوار نام می‌برم. ایشان به قدری مشوق من بودند که راه دبیری ریاضی و تدریس در دبیرستان را برایم هموار کردند.

در سال ۱۳۳۶ وارد دانش‌سرای مقدماتی گلپایگان شدم. مرکز علم و دانشی که به همت بزرگ‌مردان در این

بود. برای اینکه پدر و مادر و خواهر و برادرم بتوانند استراحت کنند، در یک طرف کرسی دمر خوابیدم، یک چراغ نفتی جلویم گذاشتم و توی دفترچهٔ ۴۰ برگی که با ۲ ریال خریده بودم شروع کردم به نوشتن کتاب تاریخ. نوشتن را از اول شب شروع کردم. خسته شدم و خوابم برد. یک‌وقت بیدار شدم و بوی سوختگی احساس کردم. دیدم که روی دفترچه‌ام نفت چراغ ریخته و به‌طور اُریب تمام صفحاتش سوخته است.



شهر بنیان‌گذاری شده بود. معلمانی که از دانش‌سرای مقدماتی فارغ‌التحصیل شدند، در سراسر این کشور همه الگو بودند. من از مسئولان بزرگوار مملکت و مسئولان محترم آموزش‌وپرورش انتظار دارم، مراکز تربیت‌معلم، دانشگاه‌های تربیت‌معلم را که یادگار دانش‌سراها و دانش‌سرای عالی است همچنان زنده نگه دارند. چون معلم باید در دانش‌سرای عالی و دارالمعلمین یاد بگیرد که چگونه نسبت به شاگردانش عشق بورزد، چگونه تدریس کند، چه‌جور مسئولیت‌پذیر باشد و چگونه به گل‌هایی که پرورش می‌دهد، رسیدگی کند.

در دوران دبیرستان در عنفوان جوانی، چنان که افتد و دانی، من علاقه‌مند بودم که نه‌تنها در درس ریاضی، بلکه در همهٔ درس‌ها ممتاز باشم، چون وضع خانوادگی و زندگی ما خوب نبود. پدرم یک کاسب جزء بود و من کتاب تاریخ نداشتم و کتاب‌نویسی می‌کردم. یادم هست قیمت کتاب تاریخ ۲۵ ریال بود، یعنی با یک سکه ۲۵ تومانی می‌شد ۱۰ تا کتاب تاریخ خرید. من رفتم در مغازهٔ پدرم دخل پول را باز کردم، ۲ ریال فقط آن روز فروش پدرم بود. از ۲ ریال تا ۲۵ ریال فاصله زیاد بود. گفتم کتاب یکی از دوستانم را به امانت می‌گیرم و کتاب‌نویسی می‌کنم؛ این کار مرسوم بود آن زمان. کتاب یکی از دوستانم را گرفتم. زمستان

یعنی همهٔ نوشته‌های من از اول شب تا سحرگاه همه سوخته بودند؛ نصفه و نیمه. اشک از چشم‌هایم جاری شد.

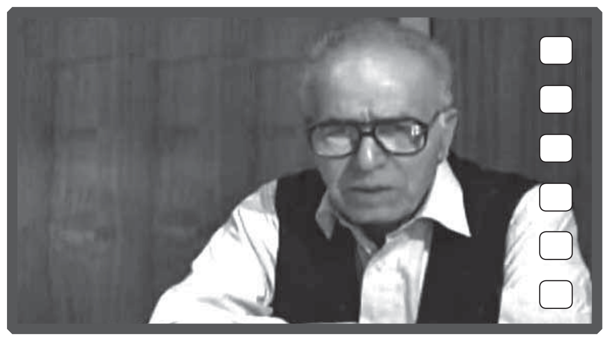
به‌همین دلیل، به جوانانی که امروز دارند تحصیل می‌کنند، با اطمینان می‌گویم، نگران مسائلی نباشند که ممکن است راه تحصیل آن‌ها را سد کند. در اثر اراده و پشت‌کار، هر در بسته‌ای باز می‌شود. چون شاگرد اول دانش‌سرا بودم، در همان سن ۱۸ سالگی، دبیری دبیرستان‌های «گوگد» و «گلپایگان» را به من دادند و این است که الان می‌گویم، ۵۱ سال است دبیر ریاضی هستم. دوران معلمی من از اول مهرماه ۱۳۴۰ رسماً شروع شد، هر چند من از ششم دبستان معلم دوستانم بودم.

در خرداد ۱۳۴۰ دانش‌سرای مقدماتی را با رتبهٔ اول به پایان رساندم. در دوران دانش‌سرا هم‌شاگردی‌های ما همه ممتاز بودند. از سراسر کشور، حتی نیشابور، به گلپایگان آماده بودند. ۱۴ نفر گلپایگانی بودیم، در حدود ۲۰ نفر از استان اصفهان، چند نفر از استان مرکزی از اراک، خمین و محلات، یک نفر از قم و چند نفر هم از نیشابور. همه نخبه و شاگردان ممتاز. بنابراین کلاسی بود بسیار رقابتی. یعنی با هم واقعاً رقابت داشتیم، به‌طوری که شاگرد

به جوانانی که امروز دارند تحصیل می‌کنند، با اطمینان می‌گویم، نگران مسائلی نباشند که ممکن است راه تحصیل آن‌ها را سد کند. در اثر اراده و پشت‌کار، هر در بسته‌ای باز می‌شود

بعدی و در واقع دوســت عزیز من، آقای دکتر **جابری،** با من اختلاف معدل بسیار ناچیزی داشت که در واقع اصــلاً نمی‌توانم بگویــم اول و دوم. هــر دو اول بودیم و ما هــر دو می‌توانســتیم ادامهٔ تحصیــل بدهیم. اما من به‌خاطر مشــکلاتی که در زندگی داشــتم و فرزند اول خانــواده بودم و پدرم مقروض بود، ناچار شــدم با اینکــه در دارالفنون ما دو نفر را با اســتقبال پذیرفتند و از همــه که ۲۰۰ تومان شــهریه می‌گرفتند از من و

درس می‌دادم، یکی از شاگردان ممتاز کلاس ته کلاس نشســته بود و ســرش به کوره غم بود. ناراحتی را من در قیافه‌اش دیدم. مــن وقتی ببینم در کلاس یکی از شاگردانم ناراحت هســت، منقلب می‌شوم و نمی‌توانم درس بدهــم. می‌گویــم این چه چیزش هســت؟ چه ناراحتی دارد؟ به هر حال آن ساعت را طی کردم. وقتی زنــگ را زدند، در راهرو گفتم بیا ببینم. آمد. گفتم: چه خبره؟ چی شده؟ گفت آقا هیچی، چه درس خواندنی.



دوســت عزیزم فقط ۱۰ تومان گرفتند، ولی نتوانستیم ادامه بدهیم. ناچار من در دبیرســتان گوگد گلپایگان معلمــی را با ریاضیات و ادبیات شــروع کردم. معلمی در دبیرســتان گوگد به مدت پنج ســال شــروع شد و ما مســیر گلپایگان تا گوگد را از راه مال‌رو و کوره راه طــی می‌کردیم و می‌رفتیم و برمی‌گشــتیم. خاطره‌ای دارم، در یکی از روزهای ســرد زمســتان که بعدازظهر دبیرســتان تعطیل شده بود و ما داشتیم به طرف شهر برمی‌گشــتیم، در وسط راه در قنات‌های گوگد چند تا گــرگ در جاده جلوی ما را گرفتنــد و ما مانده بودیم که چــه کار کنیم. نور چــراغ دوچرخه‌هایمان را زیاد کردیم، بلکه [گرگ‌ها را] فراری بدهیم و این‌ور و آن‌ور نگاه می‌کردیم تا این‌که یک جیپ و نور آن جیپ ما را از دســت آن‌ها نجات داد و ما در چنین شرایطی پنج ســال با عشق و علاقه این مســیر را طی کردیم و بعد من به دبیرستان‌های گلپایگان منتقل شدم و درس را در دبیرســتان‌های گلپایگان در رشته ریاضی و تجربی ادامــه دادم. ۳۴ ســال دوران تدریس من بود که تمام مدت را در گلپایگان در دبیرســتان‌های گلپایگان و در دانش‌سرای مقدماتی، در مرکز تربیت معلم درس دادم و در دانشگاه پیام‌نور دو سال ۳۴ واحد ریاضی دانشگاه به‌عهــده من بود. یک روز در کلاس داشــتم هندســه

گفتم: یعنی چه، چه درس خواندنی؟ تو شــاگرد ممتاز کلاس هستی، گفت: آقا پدرم نمی‌گذارد بیایم مدرسه، پــدرم می‌گوید ما تو خرج زندگــی ماندیم تو باید کار کنی. مــن جمعه‌ها می‌روم کارگــری، روزهای تعطیل هم همین‌طور تا بتوانم بیایم مدرســه. تمام تابســتان را مــی‌روم کار می‌کنم، باز هم پــدرم می‌گوید زندگی ما اداره نمی‌شــود. رفتم در مغــازه پدر این دانش‌آموز. یک مغازه بســیار بســیار ابتدایی و با او خیلی صحبت کــردم با خودش هم صحبت کردم. گفت آقا چه فایده درس خواندن؟ حقوق شــما چقدر هست؟ گفتم مثلاً ۲ هــزار تومــان. آن وقت ۲ هزار تومــان بود. گفت آن ســیگارفروش که تو میدان شهر اســت از شما بیشتر می‌گیرد. گفتم تو با این طرز تفکر آمدی مدرســه که خودت را با ســیگارفروش و درآمد آن مقایســه کنی؟ مملکت مگر فقط به ســیگارفروش نیاز دارد؟ شما باید آن شــغل را بگیری. منقلب شدم و بعد برایش داستان همان کتاب تاریخ و این شعر را گفتم:

ای گل تو دوش داغ صبوحی چشیده‌ای
ما آن شقایقیم که با داغ زاده‌ایم

گفتم من تمام این مشکلات را خیلی بیشتر تحمل کرده‌ام. باید درس بخوانی، تشــویقش کردم. الان این آقا در یکی از دانشگاه‌های خارج از کشور رئیس بخش

رایانه هست. بالاترین تقدیری هست که من از طرف دانش‌آموزانم و خانواده‌های آنان دریافت کردم. آن‌ها هستند که با نگاه پر از لطف و محبت و حق‌شناسی خود، من را نسبت به کارم بیش از پیش علاقه‌مند کردند. من محو نگاه شاگردانم در کلاس هستم که با یک دنیا عشق، محبت، صمیمیت و حق‌شناسی کار من را پاس می‌دارند. علاقه نشان می‌دهند، من را تشویق می‌کنند و من را دوست دارند. رابطه ما رابطه یک پدر و فرزند و رابطه یک باغبان با گل‌های پرگل و ریحان گلزار این زندگی بوده است. به معلمان عزیز توصیه می‌کنم، عشق و محبت نسبت به شاگردان، اولین الفبای تعلیم‌وتربیت است. از خدای بزرگ واقعاً سپاس‌گزارم. شکر خدا که هرچه طلب کردم از خدا بر منتهای طلب خود کامران شدم. باید عاشق شغل معلمی باشید و این شغل را انتخاب کنید. باید دوست داشته باشید معلم باشید. باید در راه مبارزه با جهل و خرافات عاشقانه فعالیت کنید. معلم طلایه‌دار تمدن بشری است. بنابراین باید کار او مدام مبارزه با جهل با بی‌سوادی با بی‌دانشی با خرافه و خرافه‌پرستی باشد. معلم باید هر شب مطالعه کند. همیشه در حال مطالعه باشد و با دانش بشری خودش را وفق بدهد و جلو ببرد. معلم دیروز نمی‌تواند با معلومات امروز پاسخ‌گوی نسل فردا باشد. شاگردان ما از ما جلوتر هستند. ما نمی‌توانیم عقب‌تر از آن‌ها باشیم و آن‌ها را هدایت کنیم. باید آن‌ها را عاشقانه دوست داشته باشیم و راه زندگی را، راه زیستن را، راه محبت و دوست داشتن را به آن‌ها یاد بدهیم. این کار معلم هست. معلم طلایه‌دار تمدن هست. برای پیشرفت تمدن و فرهنگ باید به قافله‌سالاران تمدن احترام بگذاریم. باید معلم را عزیز بشماریم. امیرالمؤمنین علی(ع) در حکمت‌های نهج‌البلاغه می‌فرماید: **دانش برترین شرف آدمی است.** شرافت انسان‌ها به خیلی چیزها است، ولی علی(ع) می‌فرماید: دانش بالاترین و برترین شرف برای انسان است. این یک دستوری است برای پیروان مکتب علی (ع) که **میاسای ز آموختن یک زمان** و به قول فردوسی بزرگ **توانا بود هر که دانا بود/ ز دانش دل پیر برنا بود.**

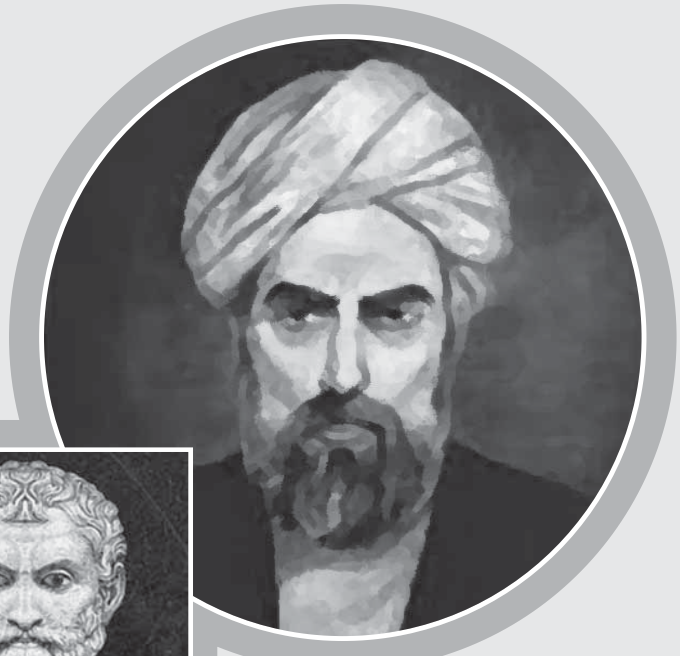
باران باش و ببار و نگو کاسه‌های خالی از آن کیست. شاگردان در کلاس در راه تعلیم‌وتربیت برای معلم یکسان هستند. درس معلم مثل صدهزار کالری گرماست که در کلاس پخش می‌شود. علاقه‌مند بودم به دانش‌سرای مقدماتی بروم، چون از آن اول می‌خواستم، معلم باشم و هیچ شغل دیگری را علی‌رغم اینکه شاگرد ممتاز بودم بر معلمی ترجیح ندادم. الان هم اگر صدبار بمیرم و زنده بشوم و بگویند چه شغلی را ادامه خواهی داد؟ جز معلمی شغل دیگری و جز دبیری ریاضی را انتخاب نخواهم کرد.

اگر صدبار بمیرم و زنده بشوم و بگویند چه شغلی را ادامه خواهی داد؟ جز معلمی شغل دیگری و جز دبیری ریاضی را انتخاب نخواهم کرد

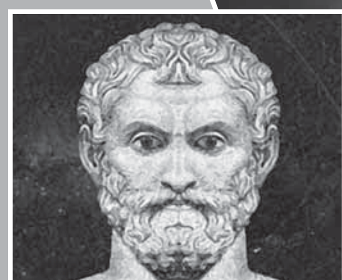
عددی در دو مبنای عددی مختلف کوچک‌تر از ده به‌صورت ۴۲۳ و ۲۲۱ نوشته می‌شود. اگر این عدد در مبنای مجموع دو مبنای فوق نوشته شود، به کدام‌یک از صورت‌های زیر نوشته می‌شود؟

الف) ۹۸
ب) ۸۹
ج) ۹۵
د) ۵۹
هـ) ۱۰۰

هوشنگ شرقی



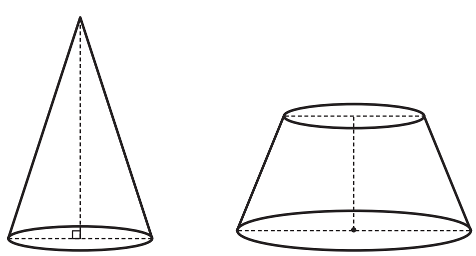
شیخ بهاءالدین عاملی و قضیهٔ تالس



محمدبن حسین بهاءالدین عاملی، معروف به **شیخ بهایی**، در سال ۹۵۳ هجری قمری در «بعلبک» لبنان متولد شد و چون اصل وی از جبل عامل بود، به عاملی معروف شد. شیخ بهایی نه‌تنها ریاضی‌دان، بلکه دانشمند، مهندس و ادیبی به تمام معنی بود. شاهد این امر آثاری است که از وی در اصفهان و از عهد **شاه عباس‌اول** به‌جا مانده است. غیر از رساله‌ها و کتاب‌های بسیاری که در نجوم و ریاضیات نگاشته و برخی از آن‌ها به‌دست ما رسیده است، آثار او در معماری، همچون حمام معروف شیخ بهایی (که مشهور است انرژی مورد نیاز آن از سوختن یک شمع تأمین می‌شده است!) و عمارت منارجنبان، هنوز پابرجا هستند.

وی در اوان جوانی به ایران سفر کرد و به تحقیق و تتبع در فلسفه، نجوم، ریاضیات و شعر و ادبیات پرداخت و آثار بسیاری در این زمینه‌ها داشت که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، «خلاصةالحساب» در ریاضیات است که اصل آن متأسفانه از میان رفته، ولی نسخه‌های خطی بازنویسی شده از روی آن موجودند. این کتاب در نه باب به شرح مباحثی از محاسبات عددی، جبر و هندسه می‌پردازد. باب ششم کتاب دربارهٔ محاسبهٔ سطح و حجم شکل‌های هندسی فضایی است.

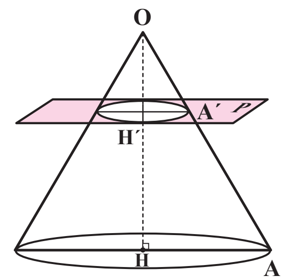
نکتهٔ جالب توجه این است که شیخ بهایی در کتابش از حجم با عنوان «مساحت جسم» یا مساحت مجسم و از سطح با عنوان «مساحت سطح» یاد می‌کند. در فصل سوم این باب دستورهای محاسبهٔ حجم کره، استوانه و مخروط را به درستی بیان کرده است و به معرفی مخروط ناقص این‌گونه می‌پردازد: «مخروط تام عبارت از آن است که سر مخروط منتهی به نقطه‌ای شود، که اگر منتهی به نقطه نشود، بلکه رأس مخروط سر ستبر باشد و کوچک‌تر از قاعده، او را مخروط ناقص گویند.»



مخروط ناقص — مخروط تامّ

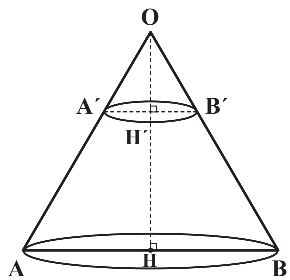
شکل ۱

به زبان امروزی، مخروط ناقص از برش دادن مخروط کامل (تام) با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن به‌دست می‌آید:



مخروط ناقص

شکل ۲



شکل ۳

اکنون پرسش این است که حجم مخروط ناقص را چگونه باید به‌دست آورد؟

شیخ بهایی دستور تعیین حجم مخروط تام را می‌دانسته است: «پس مساحت مخروط تام، که ضرب کنند ارتفاع مخروط را در ثلث مساحت قاعدهٔ آن مخروط، که حاصل‌ضرب، مساحت مجسم همان مخروط است.» این همان دستور امروزی محاسبهٔ حجم مخروط است:

$$V = \frac{۱}{۳} S.h$$

اما برای تعیین حجم مخروط ناقص، بدیهی است که باید حجم مخروط اصلی (مخروط تام) را از حجم مخروط کوچک بالای صفحه در شکل ۲ کم کرد. یعنی داریم:

$$V = \frac{۱}{۳} OH.S - \frac{۱}{۳} OH'.S'$$

اما آنچه در دست ماست، مخروط ناقص و اجزای آن یعنی ارتفاع (HH´) و شعاع‌های قاعده‌های بزرگ و کوچک (R و R´) است. لذا باید به کمک این مقادیر، OH یعنی ارتفاع مخروط تام را بیابیم و سپس با کم کردن ارتفاع مخروط ناقص از آن، OH´ یعنی ارتفاع مخروط کوچک را هم به‌دست آوریم و از آنجا محاسبه‌مان را انجام دهیم. برای تعیین اندازهٔ OH چه باید کرد؟ شیخ بهایی دستور زیر را بدون اثبات و استدلال ارائه می‌دهد:

«مساحت مجسم مخروط ناقص اگر مستدیر[1] باشد، آن است که قطر قاعدهٔ بزرگ‌تر را که اکثر اوقات ملاصق[2] زمین است، در ارتفاع مخروط ناقص ضرب کنند و حاصل‌الضرب را بر تفاوتی که میان دو قطرین این مخروط باشد، قسمت کنند. یعنی یک قطر قاعده و یک قطر دایرهٔ اعلا[3] و خارج‌قسمت، ارتفاع مخروط تام این مخروط ناقص است.»

به زبان امروزی یعنی در شکل ۳ داریم:

$$OH = \frac{AB.HH'}{AB - A'B'}$$

اگرچه همان‌گونه که اشاره شد، شیخ بهایی این دستور را بدون استدلال بیان می‌کند، ولی به یقین با قضیهٔ تالس و نتایج و مسائل مرتبط با آن به خوبی آشنایی داشته و این دستور را از آنجا استنتاج کرده است. در شکل ۳ با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OH'}{OH}$$
$$\Rightarrow OH = \frac{AB.OH'}{A'B'} = \frac{AB(OH - HH')}{A'B'}$$
$$\Rightarrow OH.A'B' = OH.AB - HH'.AB$$
$$\Rightarrow OH(AB - A'B') = HH'.AB$$
$$\Rightarrow OH = \frac{AB.HH'}{AB - A'B'}$$

و می‌بینیم که نتیجه‌گیری او کاملاً درست است.

اکنون به ادامهٔ بحث و محاسبهٔ حجم مخروط ناقص از زبان وی می‌پردازیم:

«مثلاً قطر قاعدهٔ عظیمه پنج ذرع بود و ارتفاع مخروط ناقص چهار ذرع و قطر قاعدهٔ اعلا سه ذرع. پس ضرب کردیم پنج قاعده را در چهار ارتفاع، حاصل ضرب بیست شد. بر تفاوت بین‌القطرین که دو است قسمت کردیم، ده خارج‌قسمت شد و این ده ارتفاع تام این مخروط ناقص است. پس ثلث ارتفاع مخروط کوچک را در قاعدهٔ این مخروط کوچک که انتهای رأس مخروط ناقص است ضرب کنیم، آنچه حاصل شود، مساحت مخروط کوچک مفروض خواهد شد. این چون از مساحت این مخروط به شرط آنکه تام باشد اسقاط[4] کنی، آنچه باقی ماند مساحت مجسم این مخروط ناقص باشد.»

اگر در حالت کلی به این روش عمل کنیم، دستور کلی زیر برای محاسبهٔ حجم مخروط ناقصی که شعاع‌های قاعده‌های کوچک و بزرگ آن R و R´ و ارتفاع آن h است، به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{\pi h}{۳}(R^۲ + R'^۲ + RR')$$

درستی این دستور را خودتان اثبات کنید.

پی‌نوشت‌ها

۱. مخروط مستدیر یعنی مخروط دوار. شیخ بهایی از نوع دیگری از مخروط ناقص با عنوان «مضلع» نیز یاد می‌کند که مراد وی از آن ذوزنقه است.
۲. ملاصق یعنی الصاق شده یا چسبیده و منظور از قاعده‌ای که ملاصق به زمین است، همان قاعدهٔ بزرگ است که روی زمین قرار می‌گیرد.
۳. دایرهٔ اعلا همان دایرهٔ بالایی و یا قاعدهٔ کوچک است.
۴. اسقاط کردن یعنی تفریق کردن.

منبع

ترجمه و شرح خلاصةالحساب شیخ بهایی براساس نسخهٔ خطی دانشگاه اصفهان و از مؤلفی ناشناخته از هم روزگاران شیخ بهایی، به کوشش حمیده حجازی و دکتر یوسف بیگ باباپور، نشر مجمع ذخائر اسلامی، ۱۳۹۲.

مربع‌های جادویی

اشاره

در ایـن مقاله که حاصل تجربیات شـخصی بنده در دوران تدریس درس ریاضیات گسســته است، بنابر علاقهٔ شـخصی به این درس و اینکه مطرح کردن سـؤالات هوش همیشــه برایم خوشایند بوده اسـت، بر آن شدم که طرز سـاخت مربع‌های جادویی (وفقی) را بیان کنم تا خوانندگان به راحتی بتوانند ماتریســی n در n بســازند که حاصل جمع درایه‌های هر سـطر، هر سـتون و حاصل جمع درایه‌هـای قطر اصلی و حاصل جمـع درایه‌های قطر فرعی آن عدد ثابتی شـود و بسـته به انتخاب عدد n، این عدد ثابت تغییر کند. سـپس از روی این مربع‌هـای وفقی برچسـب‌گذاری جادویی را برای گراف‌ها مطرح کرده‌ام.

کلیدواژه‌ها: مربع‌های وفقی، برچسب‌گذاری جادویی، گراف.

فرزاد حمزه‌پور
دبیر ریاضی از شهرستان بانه

مقدمه

یادم هست، از بچگی که همیشه بزرگ‌ترها سؤالات هوش یا فکری برایم مطرح می‌کردند (که یکی از آن‌ها همین داستان است که مربعی بسازید که چنین خاصیتی داشته باشد و نظایر آن)، این سؤال برایم پیش آمده بود که: آیا برای این سـؤالات می‌تـوان ایده‌ای کلی یافت؟ این مطالب حین تدریس ریاضیات گسســته (قسـمت ترکیبیات) هنگام رسـیدن به قسـمت برچسب‌گذاری جادویــی برای گراف‌ها و اینکه گرافی را تحت شـرایط خاصــی برچسـب زد، دوباره برایم تداعی شـد. معرفی مربع‌های وفقی شـور و شـوقی عجیب در دانش‌آموزان به‌وجود می‌آورد. حتی یادش بخیر، دانش‌آموزی داشتم کــه خیلی به «سـودوکو» علاقه‌مند بـود و می‌گفت با ایـن ایده از ایـن پس می‌توانم جدول‌های سـودوکو را حل کنم. من هم ضمن تشـویق ایشان برای انجام این خلاقیت، پیشـنهاد دادم نتیجه را حتماً به شـکل یک کنفرانس، سرکلاس درس به بچه‌ها هم ارائه دهد و ... .

تعریف ۱

یـک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز (مانـند n^2، ...، ۳، ۲، ۱) را یـک مربع وفقی می‌نامنـد، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و با هم برابر باشند. بسته به انتخاب عدد n، این عدد ثابت تغییر می‌کند. برای مثال یک مربع وفقی ۳×۳ در شکل ۱ نشان داده شده که عدد ثابت آن ۱۵ است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

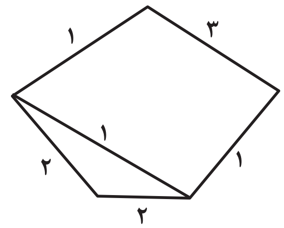
شکل ۱. مربع جادویی ۳×۳

ثابت می‌شـود که در هر مربع وفقی ۳×۳ که از اعداد ۱، ۲، ... و ۹ تشکیل شده باشد، عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد، همیشه عدد ۵ است (به راحتی تحقیق می‌شود).

تعریف ۲

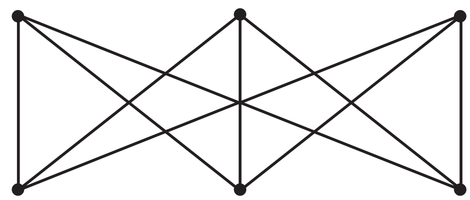
گراف G داده شـده است. یک برچسب‌گذاری گراف G عبارت اسـت از متناظرکردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبـت، به یال‌های G به‌طـوری که حاصل جمع اعداد متناظـر با یال‌های مرورکننده بر هــر رأس، عددی ثابت باشد.

مثال: گراف شکل۲ برچسب‌گذاری شده است (باعدد ثابت۴).



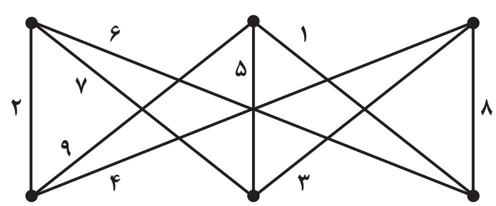
شکل ۲. برچسب‌گذاری جادویی گراف

حال فرض کنید که می‌خواهیم گراف دو پارچهٔ شکل ۳ را برچسب‌گذاری کنیم.



شکل ۳

آیا با دیدن اینکه درجهٔ همهٔ رئوس گراف مساوی ۳ است و ما می‌خواهیم متناظر با هر رأس، سه عدد روی سه یال گذرنده از آن قرار دهیم که مجموع آن‌ها مقداری ثابت شود، به یاد مربع وفقی ۳×۳ نمی‌افتیم؟ با توجه به تعداد یال‌های این گراف (۹ یال) و مجموع سطرها و ستون‌ها و قطرهای مربع وفقی، برچسب‌گذاری به راحتی مقدور می‌شود که آن را در شکل ۴ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۴. برچسب‌گذاری جادویی گراف با مربع جادویی

پرسیده شد که آیا غیر از مربع‌های جادویی ۳×۳ می‌توان مربع‌های وفقی n×n را نیز ساخت؟ مجموع آن‌ها را چگونه محاسبه می‌کنند؟ این سؤال باعث شد تا با تحقیق، مراحل زیر را برای پاسخ سؤال طی کنیم:

سؤال اول: مجموع اعداد در مربع وفقی چگونه به‌دست می‌آید؟

$$S = 1+2+3+\dots+n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

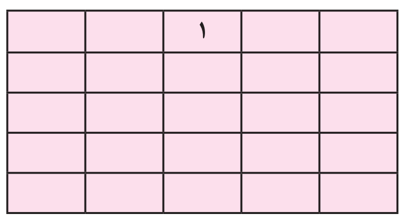
$$\Rightarrow A = \frac{S}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

که A عدد ثابت مربع وفقی است.

سؤال دوم: با ارائهٔ یک مثال، یک مربع وفقی n×n که n فرد باشد، طراحی کنید.

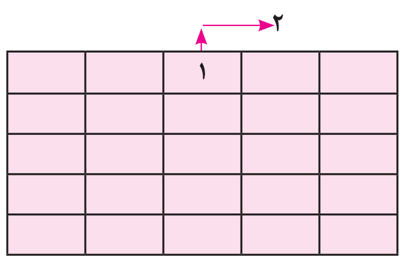
روش حل:

۱. عدد ۱ را در وسط سطر اول قرار می‌دهیم.



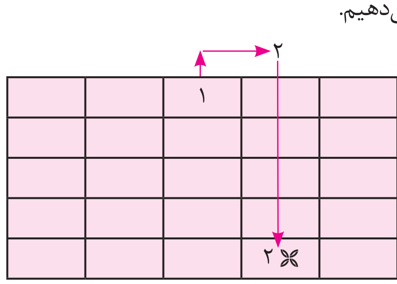
شکل ۵

۲. به کمک جهت‌یاب یک حرکت به بالا و یک حرکت به راست انجام می‌دهیم و عدد بعدی یعنی ۲ را قرار می‌دهیم.



شکل ۶

۳. چون خانه‌ای نیست به آخرین خانهٔ زیر خودش در ستون موردنظر (✂) می‌رویم و ۲ را آنجا قرار می‌دهیم.



شکل ۷

۴. به‌همین ترتیب اگر خانه‌ای وجود داشت عدد بعدی یعنی ۳ را می‌گذاریم.

		۱		
				۳
			۲	

شکل ۸

۵. به‌همین ترتیب به عدد بعدی، یعنی ۴ می‌رسیم. اما چون خانه‌ای نیست، به آخرین خانهٔ پشت‌سر خودش در همان سطر (✿) می‌رویم و ۴ را آنجا قرار می‌دهیم.

		۱		
	۵			
۴ ✿				
				۳
			۲	

شکل ۹

۶. اگر خانه پر شده بود، به خانهٔ زیر همان خانه‌ای که حرکت را انجام داده‌ایم می‌رویم و (💣) عدد ۶ را قرار می‌دهیم.

		۱		
	۵			
۴ ✿	۶💣			
				۳
			۲	

شکل ۱۰

۷. یک استثنا هم داریم که با علامت (❊) نشان داده است. اگر به آنجا وارد شدیم، مانند بند ۶ عمل می‌کنیم.

(❊)

۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵
۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶
۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳
۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹

شکل ۱۱

سؤال سوم: با ارائهٔ مثالی، کلیت حکم بالا را برای حالتی که در مربع وفقی n×n، n مضربی از ۴ باشد، انجام دهید.

حل: ابتدا مربع‌های ۴×۴ را جدا و قطر آن را مانند شکل ۱۲ رسم می‌کنیم. با شروع از بالاترین گوشهٔ سمت چپ، در امتداد سطرها از چپ به راست به ترتیب ۱، ۲، ۳ و... بشمارید (اعداد با رنگ سیاه) و اعداد را در خانه‌هایی بگذارید که توسط **قطری قطع نشده‌اند.** یعنی عدد ۱ را که باید در خانهٔ سطر اول ستون اول باشد، چون این خانه توسط قطر قطع شده است، قرار نمی‌دهیم و به سراغ عدد بعدی، یعنی ۲ می‌رویم. چون خانهٔ عدد ۲ توسط قطر رسم شده قطع نشده است، آن را در این جایگاه قرار می‌دهیم و به‌همین ترتیب تا انتها.

حال برعکس عمل کنید. با شروع از گوشهٔ تحتانی سمت راست، در امتداد سطرها از راست به چپ به‌ترتیب ۱، ۲، ۳ و... بشمارید و اعداد را فقط در خانه‌هایی درج کنید که به‌وسیلهٔ **قطری قطع شده باشد.** یعنی ۱ را باید در سطر چهارم ستون چهارم بگذارید، چون توسط قطر قطع شده است. عدد بعدی یعنی ۲، در سطر چهارم ستون سوم قرار نمی‌گیرد و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا همهٔ خانه‌ها پر شوند.

۱۶	۲	۳	۱۳
۵	۱۱	۱۰	۸
۹	۷	۶	۱۲
۴	۱۴	۱۵	۱

شکل ۱۲. طرز ساخت مربع وفقی مرتبهٔ ۴

مسئلهٔ آخر: یک مربع جادویی ۸×۸ را بسازید.

۶۴	۲	۳	۶۱	۶۰	۶	۷	۵۷
۹	۵۵	۵۴	۱۲	۱۳	۵۱	۵۰	۱۶
۱۷	۴۷	۴۶	۲۰	۲۱	۴۳	۴۲	۲۴
۴۰	۲۶	۲۷	۳۷	۳۶	۳۰	۳۱	۳۳
۳۲	۳۴	۳۵	۲۹	۲۸	۳۸	۳۹	۲۵
۴۱	۲۳	۲۲	۴۴	۴۵	۱۹	۱۸	۴۸
۴۹	۱۵	۱۴	۵۲	۵۳	۱۱	۱۰	۵۶
۸	۵۸	۵۹	۵	۴	۶۲	۶۳	۱

شکل ۱۳. طرز ساخت مربع وفقی مرتبهٔ ۸

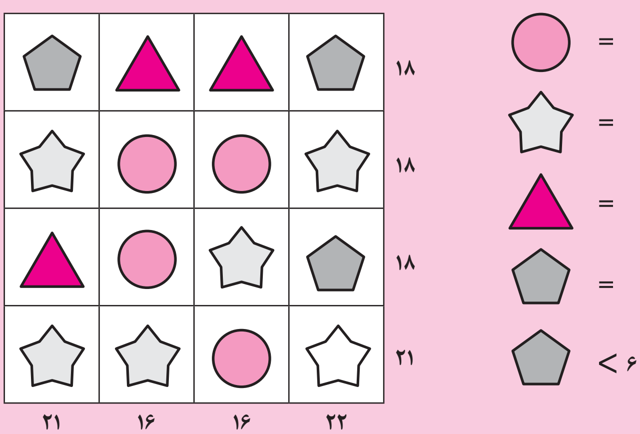
تمرین: یک مربع جادویی ۱۲×۱۲ بسازید.

هوشنگ شرقی

ایستگاه اول

در اینجا دو بازی ساده برایتان داریم:

بازی اول: با توجه به اطلاعات داده شده، به‌جای هر شکل هندسی، یک عدد مناسب قرار دهید، به‌طوری‌که مجموع عددهای هر سطر و هر ستون مساوی عددهای داده شده در جدول باشد.



بازی دوم: در هر سطر جدول، یک عدد غیرعادی وجود دارد. الگوی موجود را کشف کنید و عدد غیرعادی را علامت بزنید.

۸۱	۶۳	۴۹	۱۶	۲۵
۵۲	۶۲	۶۵	۹۱	۳۹
۴۳	۳۳	۲۹	۲۳	۱۹

پرسش‌های پیکارجو!

اگر عددهای صحیح x و y در رابطهٔ $4x+5y=7$ صدق کنند، مینی‌مم $5|x|-3|y|$ کدام است؟

الف) صفر

ب) -1

ج) ۱

د) ۴

هـ) ۱۲

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

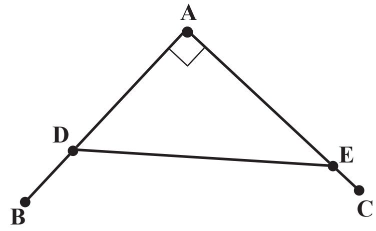
«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

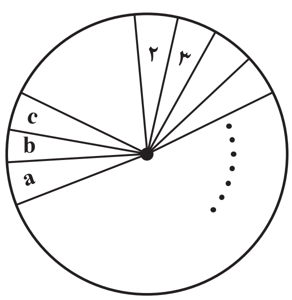
بخش اول:
مسئله‌ها

۲۴۱. همهٔ مقادیر حقیقی a را بیابید، به‌طوری که منحنی دو تابع با ضابطه‌های $y=ax^2-x-4$ و $y=x^3-x^2+3x-4$ دقیقاً در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند.

۲۴۲. در شکل زیر $DB=9$، $\angle CAB=90^\circ$، $AB=AC=DE$ و $EC=8$. مطلوب است طول پاره‌خط DE.

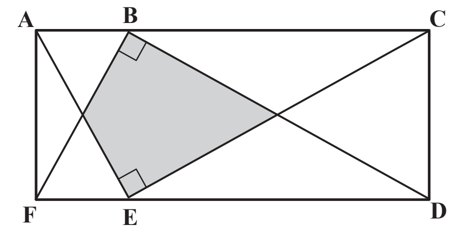


۲۴۳. دایره‌ای را به ۳۶ قسمت مساوی مانند شکل تقسیم کرده‌ایم و در هر قسمت یک عدد صحیح نوشته‌ایم. به‌طوری که برای هر سه عدد متوالی b، a و c داریم: $b=ac$. اگر دو عدد ابتدایی، ۲ و ۳ باشند، حاصل جمع همهٔ اعداد را بیابید.



۲۴۴. در مستطیل ACDF، $CD=50$، $AC=200$ و دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و FBD همنهشت

هستند. مساحت قسمت هاشورخورده را به‌دست آورید.



۲۴۵. در تصاعد حسابی $a_1,a_2,a_3,...$، داریم: $a_1\neq a_2$ و سه جملهٔ a_1، a_2 و a_6 نیز یک تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. همهٔ مقادیر k را بیابید، به‌طوری که سه جملهٔ a_1، a_4 و a_k (با همین ترتیب) یک تصاعد هندسی تشکیل دهند.

۲۴۶. یک سهمی محور xها را در نقاط P(۲,۰) و Q(۸,۰) قطع می‌کند و رأس سهمی (V) زیر محور xها قرار دارد. اگر مساحت مثلث VPQ برابر ۱۲ باشد، مختصات V را بیابید.

۲۴۷. مجموع شعاع‌های دو دایره برابر است با ۱۰ و محیط آن‌ها اختلافی برابر ۳ دارد. اختلاف مساحت دو دایره را به‌دست آورید.

۲۴۸. تابع f به این صورت تعریف شده است که اگر n زوج باشد، f(n) برابر است با: n^2-1 و اگر n فرد باشد، f(n) برابر است با: n−۱. همهٔ اعداد صحیح n را بیابید به‌طوری که:

$$f(f(n))=3$$

۲۴۹. A، B و C سه مجموعه هستند، به‌طوری‌که: A−B=B−C=C−A. ثابت کنید: A=B=C.

۲۵۰. پنج نقطه روی کره‌ای مفروض هستند. ثابت کنید نیم‌کره‌ای بسته شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه وجود دارد. (نیم‌کره‌ای را که شامل مرز خود باشد، نیم‌کرهٔ بسته می‌نامیم. مرز هر نیم‌کره یک دایرهٔ عظیمه است.)

بخش دوم:
راه حل‌ها

۲۱۱. اگر همهٔ اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت‌سر هم بنویسیم، چند رقم زوج و چند رقم فرد نوشته خواهد شد؟

بین یک رقمی‌ها، ۴ رقم زوج و ۵ رقم فرد وجود دارد. بین اعداد دو رقمی در جایگاه یکان ۴۵ رقم زوج، و ۴۵ رقم فرد وجود دارد، اما در جایگاه دهگان ۵۰ رقم فرد و ۴۰ رقم زوج وجود دارد. در نتیجه در مجموع ۹۱ رقم زوج و ۱۰۱ رقم فرد وجود دارد.

۲۱۲. مکعبی به ضلع $\frac{2}{3}m$ را روی مکعبی به ضلع 1m قرار داده‌ایم و سطح بیرونی حجم حاصل را رنگ کرده‌ایم. سطح رنگ شده چه مساحتی دارد؟

از دو مکعب، مربعی به ضلع $\frac{2}{3}m$ رنگ شده است. پس مساحت سطح رنگی برابر است با:

$$S=6\times1^2+6\times(\frac{2}{3})^2-2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{38}{9}m^2$$

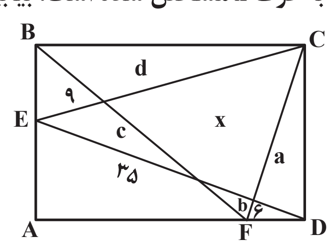
۲۱۳. رقم یک در عدد 2^{2009} چندبار ظاهر می‌شود؟

۶۴ رقم یک دارد!

۲۱۴. شش سخنران در سمیناری سخنرانی خواهند کرد. می‌خواستیم ترتیب سخنرانی‌ها را طوری انتخاب کنیم که سخنران A قبل از سخنران B و سخنران B قبل از سخنران C صحبت کنند. چند جور می‌توان برنامهٔ سخنرانی‌ها را تنظیم کرد؟

ترتیب‌های ممکن برای سه سخنران A، B و C برابر است با: ۶=!۳. این شش حالت به‌دلیل تقارن تعداد یکسانی دارند و در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $\frac{6!}{6}=120$. به عبارت دیگر، اگر در صورت مسئله جای A، B و C را تغییر دهیم، پاسخ مسئله تغییر نمی‌کند. در نتیجه در $\frac{6!}{6}$ حالت، A قبل از B و B قبل از C سخنرانی خواهند کرد.

۲۱۵. در شکل پاره‌خط‌های DE، CE، BF و CF مستطیل را به ناحیه‌های کوچک‌تر افراز کرده‌اند که مساحت سه‌تا از ناحیه‌ها در شکل مشخص شده است. مساحت ناحیه‌ای را که با حرف x مشخص شده است، بیابید.



با نام‌گذاری مساحت‌های مجهول مطابق شکل و نوشتن مساحت مثلث‌های DEC و BFC خواهیم داشت:

$$a+c+x=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=b+d+x$$

در نتیجه: $a+c=b+d$. از طرف دیگر:

$$a+b+c+d+x+۳۵+۶+۹=S_{ABCD}$$

در نتیجه: $x=۵۰$.

۲۱۶. در چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، حاصل‌ضرب هر دو عدد مجاور زوج است؟

در واقع اعداد فرد نباید مجاور باشند. ابتدا رقم‌های زوج را به !۳ طریق می‌نویسیم. سپس ۳ رقم فرد را در لابه‌لای آن‌ها (۴ مکان) قرار می‌دهیم (به ۲×۳×۴ طریق). در نتیجه تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $۴!۳!=۱۴۴$.

۲۱۷. عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$ مفروض است. ثابت کنید این عدد مضرب ۷ است اگر و تنها اگر عدد $\overline{abcd}-۲\times e$ مضرب ۷ باشد.

با فرض $x=\overline{abcd}$، حکم مسئله به این صورت خواهد شد: «$۱۰x+e$ مضرب ۷ است، اگر و تنها اگر $x-۲e$ مضرب ۷ باشد.» تساوی زیر حکم را نتیجه می‌دهد:

$$۲(۱۰x+e)+(x-۲e)=۲۱x$$

۲۱۸. همهٔ اعداد حقیقی x را بیابید، به‌طوری که: $\left[\frac{۱}{x}\right]+\left[\frac{۳}{x}\right]=۴$. ($[x]$ همان جزءصحیح x است.)

اگر x منفی باشد، طرف اول منفی است و معادله جواب ندارد. اگر $x>۱$ آن‌گاه: $\frac{۱}{x}+\frac{۳}{x}<۴$ و در نتیجه: $[\frac{۱}{x}]+[\frac{۳}{x}]<۴$ و معادله جواب ندارد. پس: $۰<x\le۱$. با فرض: $\frac{۳}{۴}<x\le۱$ خواهیم داشت: $[\frac{۱}{x}]+[\frac{۳}{x}]=۱+۳=۴$. در بازه $۰<x\le\frac{۳}{۴}$، طرف اول از ۴ بیشتر خواهد شد و معادله جواب ندارد. در نتیجه پاسخ مسئله بازهٔ $(\frac{۳}{۴},۱]$ خواهد بود.

۲۱۹. ثابت کنید:

$$\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۲\times۳}{۲}+\frac{۳\times۴}{۲}+...+\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

راه‌حل‌های متفاوتی برای اثبات این تساوی وجود دارد. راه‌حل زیر یک راه‌حل ترکیبیاتی است. فرض کنید می‌خواهید از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n+۲\}$ یک زیرمجموعهٔ سه عضوی انتخاب کنید. $\binom{n+۲}{۳}$ انتخاب برای این زیرمجموعه وجود دارد که برابر است با: $\frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶}$.

بزرگ‌ترین عضو این زیرمجموعه می‌تواند عددی از ۳ تا $n+۲$ باشد. اگر بزرگ‌ترین عضو این زیرمجموعه برابر $n+۲$ باشد، برای دو عضو دیگر $\binom{n+۱}{۲}$ انتخاب، اگر برابر $n+۱$ باشد، برای دو عضو دیگر $\binom{n}{۲}$، ...، و اگر برابر ۳ باشد، برای دو عضو دیگر $\binom{۲}{۲}$ انتخاب وجود دارد. در نتیجه:

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+...+\binom{n+۱}{۲}=\binom{n+۲}{۳}$$

و می‌دانیم $\binom{k}{۲}=\frac{k(k-۱)}{۲}$ بنابراین:

$$\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۲\times۳}{۲}+...+\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

۲۲۰. روی ۲۰۰۹ کارت اعداد طبیعی متفاوتی نوشته شده‌اند، به‌طوری که مجموع آن‌ها برابر است با: ۲۰۲۰۰۴۹. عدد وسط چه عددی است؟

مجموع اعداد ۱ تا ۲۰۰۹ برابر است با: ۲۰۱۹۰۴۵. اگر یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰۵ مانند x در میان کارت‌ها نباشد، حاصل جمع اعداد روی کارت‌ها حداقل برابر است با:

$$S=۱+۲+...+۲۰۰۹-x+۲۰۱۰$$
$$=\frac{۲۰۱۰\times۲۰۱۱}{۲}-x=۲۰۲۱۰۵۵-x$$

چون: $x\le۱۰۰۵$، پس: $S\ge۲۰۲۱۰۵۰$ که با فرض مسئله تناقض دارد. پس اعداد ۱ تا ۱۰۰۵ در میان اعداد کارت‌ها خواهند بود. در نتیجه عدد وسط حتماً ۱۰۰۵ خواهد شد.

آموزشی

۲

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

کارآگاهی در کلاس آقای مهریار

در جلسهٔ قبل حسابان، (که در شمارهٔ قبل ماجرای آن را گفتم!) داستان یکی از آن مسئله‌هایی را برایتان تعریف کردم که سر راه‌حل آن، بچه‌ها به مشــکل برخورده بودند و این مشکل در اصل به‌صورت نادقیق مسئله در کتاب حسابان برمی‌گشت. صورت مسئله این بود:

«اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$، تابع $g(x)$ را به‌گونه‌ای بیابید که:

$(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$»

بعد از اصلاح صورت مســئله و حــل آن، من همچنان علاقه‌مند بودم که مســئله را با همین صورتی که هست، حل کنم و در نهایت آن‌را حل کردم. مسئله بی‌نهایت جواب دارد!

آقای **مهریار**، معلم حســابان ما، از من خواست که راه‌حل آن را در جلســهٔ بعدی درس حسابان ارائه کنم. از آنجا که نوشتن راه‌حل و برهان برای من خیلی اهمیت دارد، به‌خصوص در مورد مســئله‌های چالش‌برانگیز، سعی می‌کنم راه‌حل را مکتوب کنم تا اگر ایرادی دارد آن را برطرف کنم. اما راه‌حل مسئله:

«در جلسهٔ قبل، **حسن** دو پاسخ به فرم چندجمله‌ای برای g پیدا کرد که هر دو در معادله داده شــده صــدق می‌کردند. این دو جواب عبارت بودند از:

$g_۱(x)=x-۳\ ,\ g_۲(x)=-x+۱$

حــال می‌توان جواب‌های دیگری برای تابع g از روی $g_۱$ و $g_۲$ پیدا کرد. زیرمجموعهٔ دلخواهی مانند A را از مجموعهٔ اعداد حقیقی در نظر بگیرید و تابع g_A (بخوانید g اندیس A) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_A(x)=\begin{cases} g_۱(x) & x\in A \\ g_۲(x) & x\notin A \end{cases}$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این تابع در شرایط مسئله صدق می‌کنــد. زیرا برای هــر $x\in R$: $g_A(x)=g_۱(x)$ و یا $g_A(x)=g_۲(x)$. در نتیجه با جای‌گذاری $g_A(x)$ در تســاوی مسئله، گزارهٔ درستی حاصل خواهد شد، چرا که $g_۱$ و $g_۲$ هر دو در تساوی مذکور صدق می‌کنند. در نتیجه تابع g_A به ازای هر زیرمجموعهٔ دلخواه A از R در شــرایط مســئله صدق خواهد کــرد. اکنون تعداد چنین توابعی را مشــخص کنیم. چون بی‌شمار زیرمجموعه از R وجود دارد، پس بی‌شمار جواب متفاوت هم برای این مسئله وجود دارد.»

اما با حل این مســئله پرسش دیگری ذهن مرا درگیر کرده است که آن را با شــما در میان می‌گذارم: آیا من تمام جواب‌ها را یافته‌ام؟ حدس من این است که پاسخ مثبت است و هر جوابی برای g داشته باشیم، حتماً باید به فرم g_A باشد. نظر شما چیست؟

(اگر $A\neq B$، آن‌گاه g_A و g_B برابر نیستند؛ چرا؟)

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اثبات از طریق برهان خلف

ما می‌خواهیم نشـان بدهیم که p درست اسـت. فرض می‌کنیم چنین نباشد و بنابراین $\sim p$ (نقیض p) درسـت است. سپس یک تناقض به‌دست می‌آوریم (نتیجه می‌گیریم). با توجه به حکمی که از بحث دربارهٔ تناقض در فصل ۱ به‌دست آوردیم، p باید درست باشد.

قضیهٔ ۱۰.۱

اگر $n^۲$ یک عدد صحیح و زوج باشد، در این صورت n نیز همین‌طور است (صحیح و زوج است).

اثبات:

خلاف این را فرض می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم n فرد باشـد. بنابراین، عددی صحیح مانند k وجود دارد به قسمی که: $n=۲k+۱$. در این حالت $n^۲=۲(۲k^۲+۲k)+۱$ عددی فرد است و این با فرض زوج بودنِ $n^۲$ تناقض دارد. بنابراین n می‌باید زوج باشد.

قضیهٔ ۱۰.۲

عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است.

اثبات:

فرض کنیم چنین نباشد. یعنی فرض کنیم که $\sqrt{۲}$ گویاست. بنابراین دو عدد صحیح m و n بدون هیچ مقسوم‌علیه مشترک وجود دارند به‌طوری که: $\sqrt{۲}=\frac{m}{n}$. با به توان ۲ رساندن دو طرف این تساوی خواهیم داشـت: $۲n^۲=m^۲$. بنابراین $m^۲$ زوج اسـت. طبق قضیهٔ ۱۰.۱، m زوج اسـت. یعنی، ۲ عدد m را می‌شمارد (m بر ۲ بخش‌پذیر است). به‌عبارت دیگر، برای بعضی اعداد صحیح مانند k داریم: $m=۲k$.

با به توان دو رساندن خواهیم داشت: $۲n^۲=m^۲=۴k^۲$ که نتیجه می‌گیریم: $n^۲=۲k^۲$.

این تساوی نشان می‌دهد که $n^۲$ زوج است و طبق قضیهٔ ۱۰.۱، n زوج است.

مـا نتیجـه گرفتیم که ۲ هر دو عدد m و n را می‌شـمارد (m و n هر دو بر عدد ۲ بخش‌پذیرند) و این با فرض ما که m و n هیچ مقسـوم‌علیه (عامل) مشـترکی ندارند، در تناقض است. بنابراین، $\sqrt{۲}$ باید گنگ باشد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1.Proof .... اثبات،برهان	2.Contradiction .... خُلف
3. Assume .... فـرض کـردن	4. Even .... زوج
5.integer .... عددصحیح	6. Suppose .... فرض کردن
7.Contradicts .... تناقض	8. Assumption .... فرض
9. Irrational .... گُنگ، اصم، ناگویا	10.Squaring .... به توان ۲ رساندن
11. Common divisors .... عامل‌های مشـترک	12.Conclude .... نتیجه‌گیری

Proof by contradiction:

We want to show that p is true. We assume it is not and therefore $\sim p$ is true and then derive a contradiction. By the rule of contradiction discussed in Chapter 1, p must be true.

Theorem 10.1

If n^2 is an even integer so is n.

Proof.

Suppose the contrary. That is suppose that n is odd. Then there is an integer k such that $n=2k+1$. In this case, $n^2=2(2k^2+2k)+1$ is odd and this contradicts the assumption that n^2 is even. Hence, n must be even. ■

Theorem 10.2

The number $\sqrt{2}$ is irrational.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that $\sqrt{2}$ is rational. Then there exist two integers m and n with no common divisors such that $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. Squaring both sides of this equality we find that $2n^2=m^2$. Thus, m^2 is even. By Theorem 10.1, m is even. That is, 2 divides m. But then $m=2k$ for some integer k. Taking the square we find that $2n^2=m^2=4k^2$, that is $n^2=2k^2$. This says that n^2 is even and by Theorem 10.1, n is even. We conclude that 2 divides both m and n and this contradicts our assumption that m and n have no common divisors. Hence, $\sqrt{2}$ must be irrational. ■

ترجمه برای دانش‌آموزان

Theorem 10.3

The set of prime numbers is infinite.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that the set of prime numbers is finite. Then these prime numbers can be listed, say, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Now, Consider the integer $N=p_1p_2\ldots p_n+1$. By the Unique Factorization Theorem, (See Problem 12.5) N can be factored into primes. Thus, there is a prime number p_i such that $p_i|N$. But since $p_i|p_1p_2\ldots p_n$ we have $p_i|(N-p_1p_2\ldots p_n)=1$, a contradiction since $p_i>1$ ■

چرا تعداد اعداد اول نامتناهی است؟

برهان لئونارد اویلر

اشاره

در این مقاله کوشـیده‌ایم برهان ریاضی‌دان مشهور سوئیسی، لئونارد اویلـر[1]، را دربارهٔ نامتناهی بودن تعداد اعداد اول بیـان کنیم. این اثبات که از مباحث «نظریهٔ تحلیلی اعداد»[2] اسـتفاده می‌کند، در قرن هجدهم مطرح شده است.

کلیدواژه‌ها: نظریهٔ اعداد، نظریهٔ تحلیلی اعداد، تعداد اعداد اول

مبین لطفی‌زاده‌دهکردی
دانش‌آموز سال چهارم ریاضی
دبیرستان شهید بهشتی شهرکرد

عـدد طبیعی $p>1$ را اول می‌گوییـم، اگر تنها اگر مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و p باشند. اعداد اول قسمت اعظمی از نظریهٔ اعداد را شـامل می‌شـوند. ویژگی‌های خاص این اعداد باعث شـده اسـت، ریاضی‌دانانی مانند **اقلیدس، اویلر** و **اردوش** روی خواص آن‌ها کار کنند و حاصل این مطالعات، قضایای مختلفی است که امروزه در کتاب‌های ریاضی دیده می‌شوند؛ و البته حدس‌ها و مسائل متعددی که هنوز به اثبات نرسیده‌اند!

یکی از مباحث مقدماتی دربارهٔ اعداد اول، تعداد این اعداد است. اگر دنبالهٔ این اعداد را در نظر بگیریم:

۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷, ...

پیدا کردن نظمی خاص بین آن‌ها غیرممکن است. به‌علاوه، اگر این دنباله را تا اعداد سه‌رقمی و بیشتر ادامه دهیـم، می‌بینیم فراوانی آن‌ها بین اعداد طبیعی هرچه بالاتر می‌رویم، کمتر می‌شـود. و ممکن است این‌گونه به‌نظر بیاید که این اعداد جایی به پایان می‌رسند. اما در واقع این‌گونه نیست!

کوتاه‌تریـن و احتمالاً قابل فهم‌ترین برهان برای این حکم، روش اقلیدس اسـت که دانش‌آموزان سال چهارم رشتهٔ ریاضی در کتاب «ریاضیات گسسته» آن را مطالعه می‌کننـد. حال آنکه در مطالعهٔ اعداد، بیشـتر به افرادی مانند اویلر و **فرمـا** برمی‌خوریم تا اقلیدس! در این مقاله هدف آن است که برهان اویلر برای نامتناهی بودن اعداد اول به‌صورت سـاده بیان شـود. ایـن روش اگرچه کمی پیچیده‌تر و طولانی‌تر است، اما زیبایی خاص خود را دارد.

حکم: تعداد اعداد اول نامتناهی است.

پیـش از بیان برهان این حکـم، دو لم کاربردی را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم اول: جمع معکوس‌های همهٔ اعداد طبیعی نامتناهی است.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$$

برهان لم اول: می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}>\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$

اگر نامساوی‌های بالا را تا بی‌نهایت در نظر بگیریم، با جمع زدن طرف‌های چپ و راست به‌صورت جداگانه داریم:

$$\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i}>n\times\frac{1}{2}n\to\infty\Rightarrow\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$$

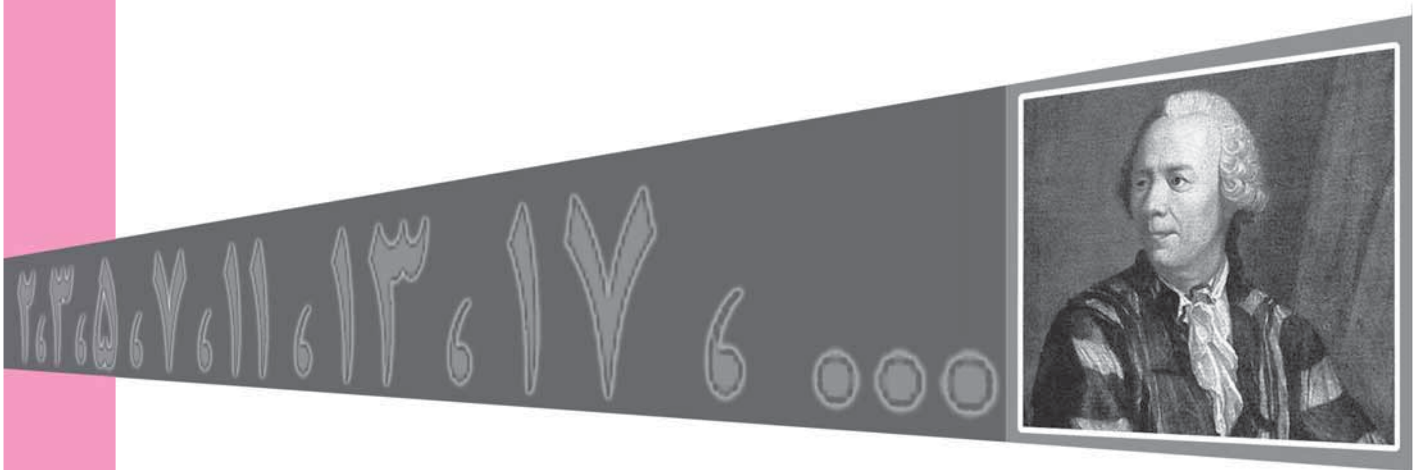
پس لم اول ثابت شد. ■

لم دوم: با فرض $0<q<1$ می‌توان ادعا کرد:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

برهان لم دوم: قرار می‌دهیم:

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^n$$
$$qS_n=q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}$$
$$S_n-qS_n=1-q^{n+1}\Rightarrow S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$



حـال با توجه به اینکه n به بی‌نهایت میل می‌کند و اینکه: $۰<q<۱$، می‌توان گفت q^{n+1} به صفر میل می‌کند.

پس لم دوم نیز ثابت شد. ■

حال به سراغ اثبات مسئلهٔ اصلی می‌رویم.

برهان خلف: فرض می‌کنیم تعـداد اعداد اول متناهی باشد و بتوان دنبالهٔ این اعداد را به‌صورت $۲,۳,۵,۷,۱۱,...,p$ نشان داد. حال مجموع توان‌های معکوس همهٔ اعداد اول را در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$a_۲=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+...$$

$$a_۳=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۳^۳}+...$$

$$a_۵=۱+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵^۲}+\frac{۱}{۵^۳}+...$$

$$\vdots$$

$$a_p=۱+\frac{۱}{p}+\frac{۱}{p^۲}+\frac{۱}{p^۳}+...$$

داریم:

$$A=a_۲\times a_۳\times a_۵\times...\times a_p$$
$$=\left(\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲^i}\right)\left(\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{۳^i}\right)\left(\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{۵^i}\right)...\left(\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{p^i}\right)$$

ادعا می‌کنیم:

$$A=\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{i}$$

اثبات ادعا: برای ساـختن هر یک از جملات مجموع $\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{i}$ باید از هر یک از پرانتزهای تشکیل‌دهندهٔ A یک عـدد را انتخاب کنیم. امـا می‌دانیم همهٔ توان‌های همهٔ اعداد اول در این پرانتزها آمده‌اند. از طرف دیگر، مطابق «قضیهٔ بنیادی حســاب»[3]، هر عــدد بزرگ‌تر از یک را می‌توان به‌صورت یکتا به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل اول نوشت. پس هر یک از $\frac{۱}{i}$ ها در بسط A ظاهر می‌شوند. همچنین، با توجه به یکتایی این نمایش، هر یک از $\frac{۱}{i}$ ها فقط یک‌بار در بسط A ظاهر می‌شوند. پس ادعا ثابت می‌شود. ■

در نتیجه مطابق لم اول می‌توان گفت:

$$A\to\infty \qquad (*)$$

اما با استفاده از لم دوم می‌دانیم:

$$a_۲=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$a_۳=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}$$

$$a_۵=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۵}}$$

$$\vdots$$

$$a_p=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}}$$

$$\Rightarrow A=a_۲\times a_۳\times a_۵\times...\times a_p$$
$$=\left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}\right)\left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}\right)\left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۵}}\right)...\left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}}\right)$$

به وضوح حاصل‌ضرب بالا که دارای متناهی جمله اسـت، برابر یک عدد گویاسـت و این بـا رابطهٔ $(*)$ در تناقض است.

پس فرض خلف باطل اسـت و حکـم ثابت؛ یعنی تعداد اعداد اول نامتناهی است. ■

پی‌نوشت‌ها

1. Leonhard Euler
2. Analytic number theory
3. Fundamental theorem of arithmetic

منبع

۱. کمیتــه علمی المپیاد ریاضی اول (۱۳۹۴). ویدیوهــای آموزشــی مرحلهٔ دوم المپیاد ریاضی.
۲. بهزاد، مهــدی؛ رجالی، علی؛ عمیــدی، علــی؛ محمودیان، عبــادالله (۱۳۹۳). ریاضیــات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

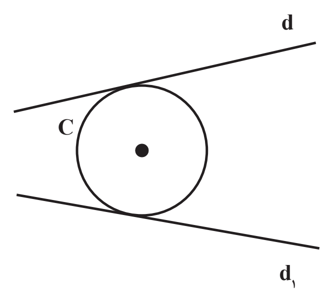
دنبالهٔ دایره‌ها

سید مهدی بشارت
معلم ریاضی، شهر تهران
کارشناس مدیریت آموزشی

اشاره

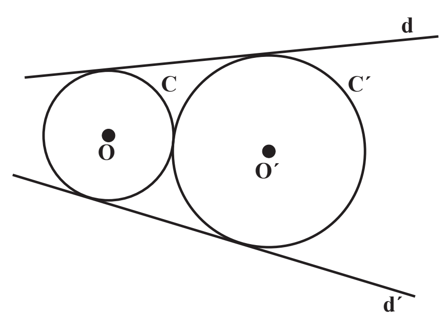
دنباله‌ها یکی از دل‌انگیزترین مباحث ریاضی هستند، زیرا در فرایند منظم و تکرارپذیر آن‌ها به‌سوی بی‌نهایت، رازی نهفته است که کشف آن یکی از پرده‌ها را از برابر چشم ما برمی‌افکند و روزنه‌ای برای سپردن نگاه به فراسوی افق مرئی می‌گشاید.
تاکنون بیشتر دنباله‌ها را در حوزهٔ اعداد مشاهده کرده بودیم. اینک برآنیم که گام‌به‌گام به ضیافت دنباله‌ها در قلمرو دایره‌ها برویم.

۱. دو خط بر دایره‌ای مماس‌اند. دایرهٔ دیگری رسم کنید که بر این دو خط و دایره مماس باشد.



شکل۱

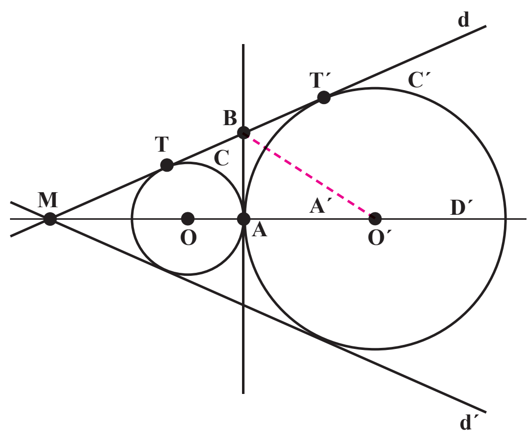
به قول بچه‌ها، مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. جواب مسئله دایرهٔ ´r در شکل ۲ است.



شکل۲

برای فهم بهتر مسئله، مماس مشترک داخلی را هم رسم می‌کنیم (خط گذرنده از AB).

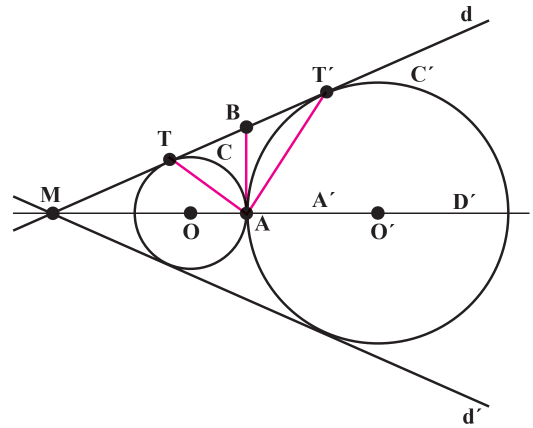
خط‌های d و ´d را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. نیم‌ساز زاویهٔ M از مراکز دایره‌ها می‌گذرد. (چرا؟)



شکل۳

در شکل ۳، ´BA=BT=BT است. زیرا از نقطهٔ B مماس‌های BA و BT بر دایرهٔ c رسم شده‌اند که با هم مساوی‌اند. به‌دلیل مشابه: ´BA=BT. بنابراین نقطهٔ B روی عمودمنصف ´AT است. لذا عمودمنصف ´AT که نیم‌ساز زاویهٔ ´ABT نیز هست، از مرکز دایرهٔ ´c می‌گذرد. پس برای پیدا کردن مرکز دایره ´c نقطهٔ تقاطع نیم‌سازهای M و B را پیدا می‌کنیم.

۲. در شکل ۴ نشان دهید، مثلث TAT´ در رأس A قائم‌الزاویه است.



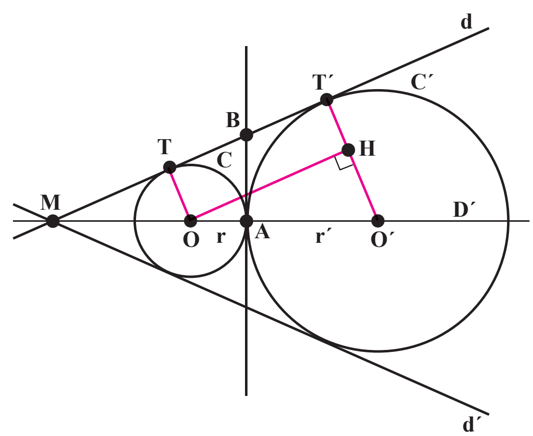
شکل ۴

اثبات: مثلثی که در آن، میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، قائم‌الزاویه است. در این مثلث نیز AB میانه و نصف TT´ است.

۳. اگر شعاع دایره‌های O و O´ در شکل ۵ به‌ترتیب r و r´ باشد، نشان دهید:

$AB = BT = BT' = \sqrt{rr'}$

از نقطهٔ O بر OT عمودی رسم می‌کنیم، چهارضلعی OTT´H مستطیل است، پس: TT´=OH.



شکل ۵

$$OO' = r + r' \ ,\ \ O'H = r' - r$$

$$TT' = OH = \sqrt{OO'^{۲} - O'H^{۲}}$$

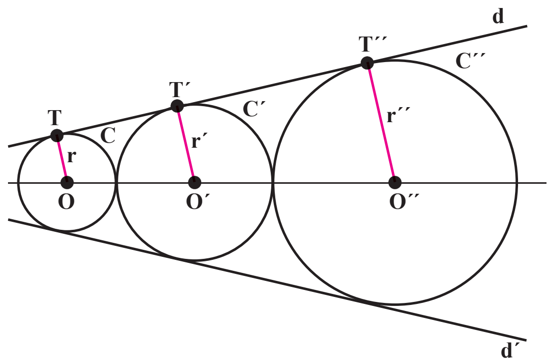
$$= \sqrt{(r+r')^{۲} - (r'-r)^{۲}}$$

$$= \sqrt{۴rr'} = ۲\sqrt{rr'}$$

$$\Rightarrow BT = BT' = BA = \sqrt{rr'}$$

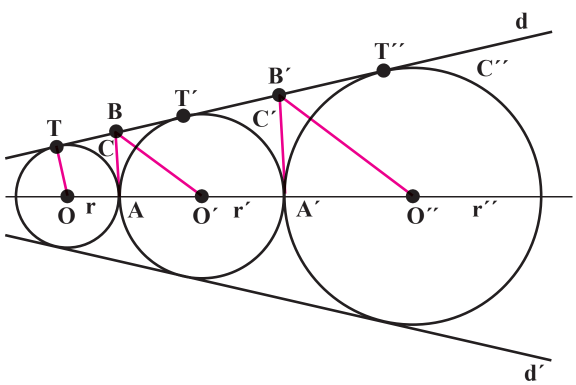
۴. با روشی که در بند ۱ آموختیم، دایرهٔ سومی مماس بر c´، d و d´ رسم می‌کنیم (شکل ۶). شعاع این دایره را r´´ می‌نامیم.

نشان دهید: $r' = \sqrt{rr''}$؛ **یعنی r´ واسطهٔ هندسی بین r و r´´ است.**



شکل ۶

مماس‌های داخلی AB و A´B´ را رسم می‌کنیم. مثلث‌های ABO´ و A´B´O´´ به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا BA و B´A´ موازی و BB´ مورب است، BO´ و B´O´´ نیم‌سازند، و زاویه‌های داخلی A و A´ نیز قائمه‌اند.



شکل ۷

پس در این دو مثلث زوایای داخلی B و B´ برابرند و دو مثلث به حالت دو زاویه متشابه‌اند. از تناسب اضلاع داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{r'}{r''}$$

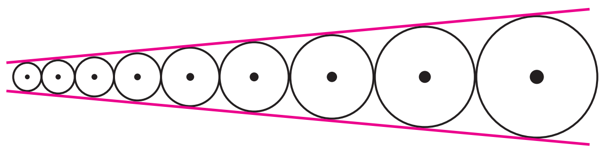
مطابق بند ۳ داریم: $AB = \sqrt{rr'}$

به دلیل مشابه خواهیم داشت: $A'B' = \sqrt{r'r''}$. بنابراین:

$$\frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r'r''}} = \frac{r'}{r''} \Rightarrow \frac{r\cancel{r'}}{\cancel{r'}r''} = \frac{r'^{۲}}{r''^{۲}}$$

$$\Rightarrow rr''^{۲} = r'^{۲}r'' \Rightarrow rr'' = r'^{۲}$$

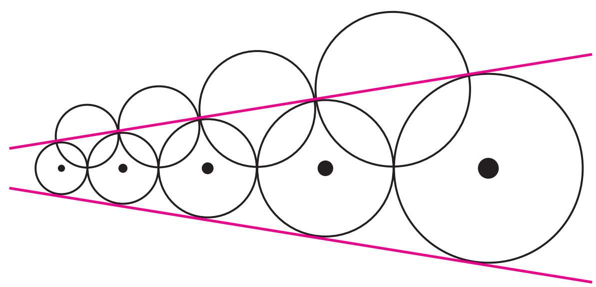
۵. پس می‌توان نتیجه گرفت اگر این دنباله از دایره‌ها را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، **شعاع‌های آن‌ها یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند.**



شکل ۸

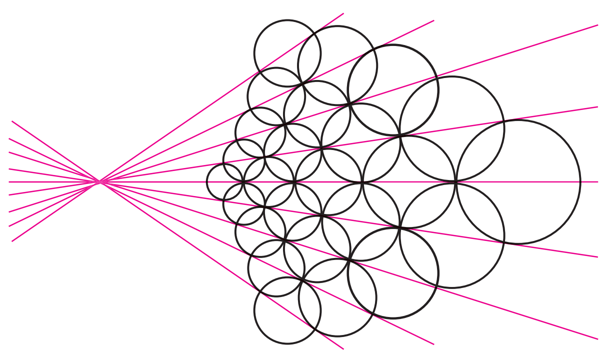
این دایره‌ها را به سمت نقطهٔ تقاطع مماس‌ها نیز می‌توان رسم کرد. آیا می‌دانید به این ترتیب تا نقطهٔ تقاطع چند دایره می‌توان رسم کرد؟ درست حدس زدید. بی‌شمار دایره! جالب است، نه؟!

۶. در بند ۲ دیدیم مثلث ´TAT قائم‌الزاویه است، پس می‌توان دایره‌ای به مرکز B از رئوس این مثلث گذراند. با رسم دایره‌های مشابه برای نقاط متناظر، دنبالهٔ دیگری از دایره‌های متوالیاً مماس به‌دست می‌آید. خط گذرنده از مرکز دایره‌های دنبالهٔ قبلی، مماس مشترک دایره‌های جدید است.



شکل ۹

و این دنباله‌ها را می‌توان ادامه داد (شکل ۱۰).

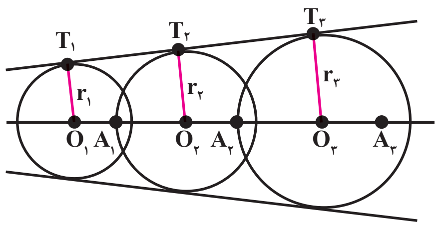


شکل ۱۰

جالب است که تمام خطوط مماس از یک نقطه می‌گذرند.

۷. لازم نیست دنبالهٔ دایره‌ها متوالیاً برهم مماس باشند، بلکه ممکن است متقاطع یا متخارج نیز باشند.

برای صورت‌بندی بهتر مسئله، ضریب α را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۱۱

$$\alpha=\frac{O_1A_1}{r_1}=\frac{O_2A_2}{r_2}=L$$

نقاط A_i نقطهٔ شروع دایرهٔ بعدی هستند.

در اینجا چهار حالت رخ می‌دهد:

۱. اگر $\alpha=1$ باشد، همان حالت مماس متوالی پیش می‌آید.

۲. اگر $\alpha>1$ باشد، دایره‌ها متخارج هستند.

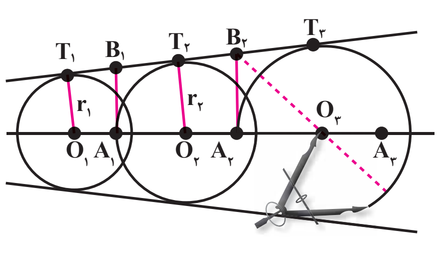
۳. اگر $-1<\alpha<1$ باشد، دایره‌ها متقاطع خواهند بود.

۴. و اگر $\alpha=-1$ باشد، دایره‌ها مماس داخل خواهند شد.

قبل از نشان دادن حالت‌ها به یک سؤال مهم باید پاسخ داد:

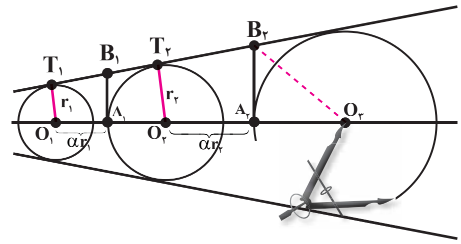
● **اگر دو دایره داشته باشیم، دایرهٔ سوم و دایره‌های بعدی را چطور رسم می‌کنیم؟**

فرض کنید دو دایره متقاطع به شعاع‌های r_1 و r_2 داریم. ابتدا نسبت α را پیدا می‌کنیم، یعنی نقطهٔ A_1 از مرکز دایرهٔ اول، چه کسری از شعاع این دایره جلوتر یا عقب‌تر است. مثلاً اگر $\frac{O_1A_1}{r_1}$ برابر ۰/۷ باشد، از O_2 نیز به اندازهٔ $0/7\,r_2$ جلو می‌رویم تا نقطهٔ A_2 به‌دست آید. سپس از A_2 بر خط‌المرکزین عمود اخراج می‌کنیم تا مماس مشترک را در B_2 قطع کند. هرجا نیم‌ساز B_2 خط‌المرکزین را قطع کند، مرکز دایرهٔ سوم است که آن را O_3 می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O_3 و شعاع O_3A_2 جواب است. به‌همین ترتیب دایره‌های بعدی نیز رسم می‌شوند.

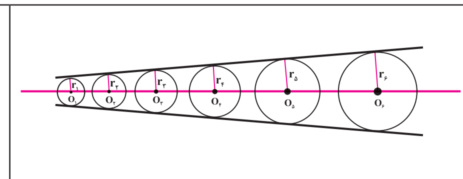
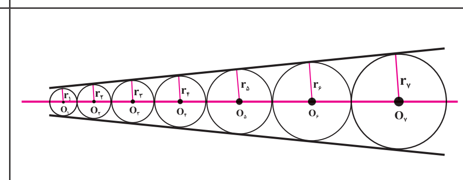
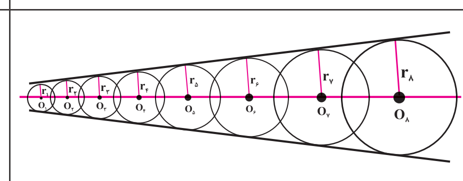
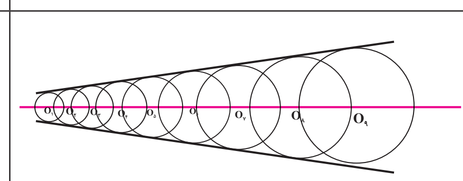
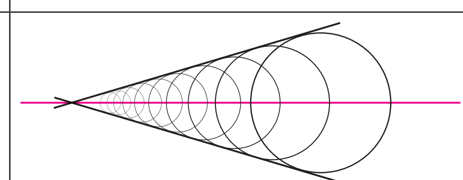
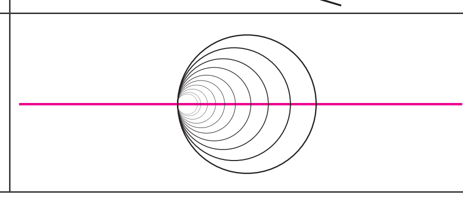


شکل ۱۲

سؤال: چرا این دایره بر مماس مشترک دو دایرهٔ قبلی مماس است؟ و چرا شعاع آن برابر است با: $r_3=\frac{r_2^2}{r_1}$؟ پاسخ به‌عهدهٔ شما! واضح است که برای حالت متخارج نیز همین کار را می‌کنیم.



شکل ۱۳

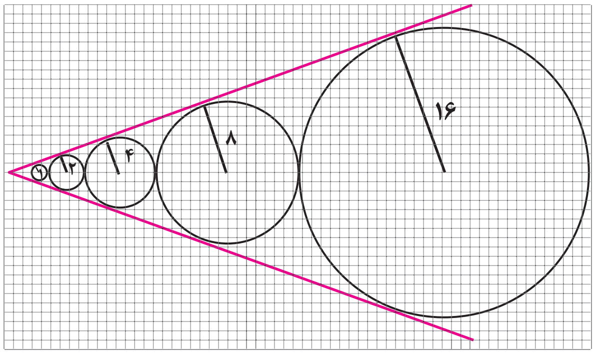
α=۱/۵	
α=۱	
α=۰/۵	
α=۰	
α= −۰/۵	
α= −۱	

شکل ۱۴ در همهٔ حالات فوق، شعاع‌های دایره‌ها یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند.

تصویری از دنبالهٔ هندسی

به این ترتیب امکانی فراهم می‌آید که بتوانیم یک دنبالهٔ هندسی را به تصویر بکشیم.

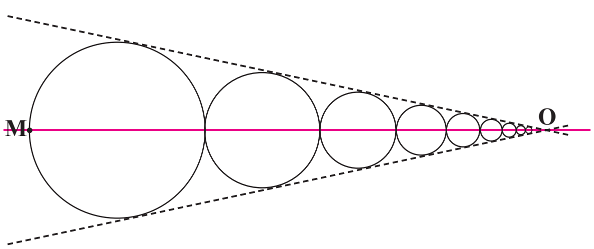
مثلاً دنباله‌ای هندسـی با قدرنسـبت ۲ را می‌توان با دنباله‌ای از دایره‌ها که همگی بر دو خط مماس هستند، نشان داد.



شکل ۱۵

حد مجموع

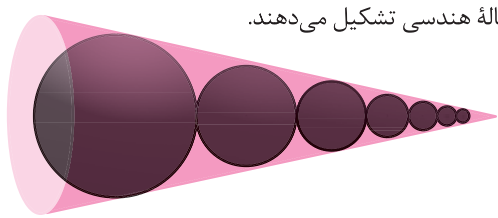
می‌دانیم اگر قدرنسبت در یک دنبالهٔ هندسی بین ۱ و ۱- باشد، آن دنباله هم‌گراسـت و مجموع اعداد آن دنباله تا بی‌نهایت به سمت عددی مشـخص میل می‌کند که «حد مجموع» نامیده می‌شـود. با تصویری که با استفاده از دنبالهٔ دایره‌ها به‌عنوان یک تصاعد هندسی پیدا کردیم، می‌توانیم برای هم‌گرایی دنباله‌ای با قدرنسـبت کمتر از یک و حد مجموع آن‌ها، یک دلیل شـهودی ارائه دهیم. برای مثال، در شـکل ۱۶ قدرنسبت از ۱ کوچک‌تر است. می‌توانیم از نقطهٔ M تا نقطهٔ تقاطع مماس مشـترک‌ها، بی‌شمار دایره رسم کنیم. قطرهای این دایره‌ها یک دنبالهٔ هندسـی می‌سـازند که به سـمت صفر میل می‌کند و حد مجموع این قطرها به اندازهٔ پاره‌خط MO است.



شکل ۱۶

دنبالهٔ کره‌ها

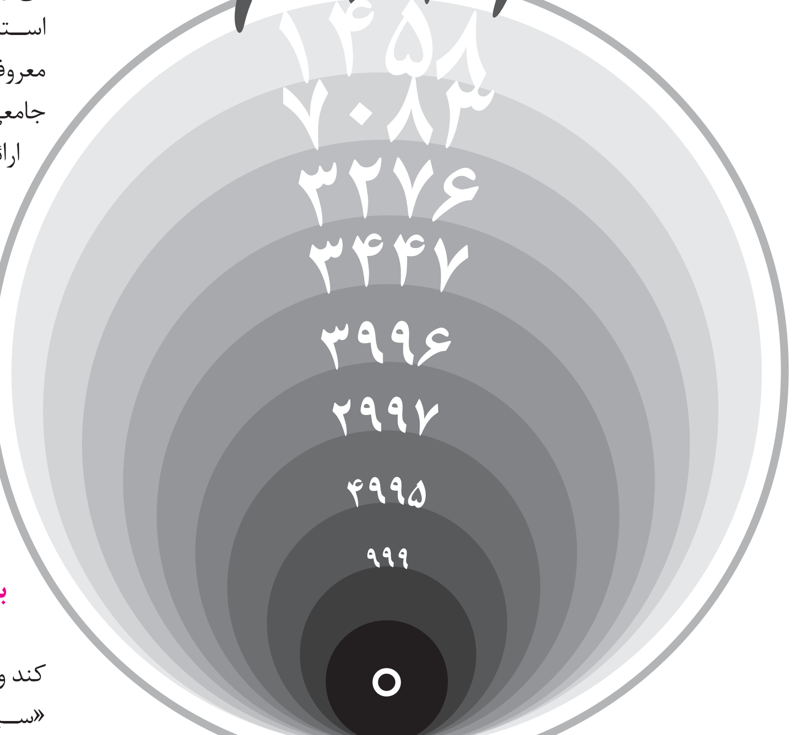
بدیهی است اگر این مطلب را در فضای سه‌بعدی در نظر بگیریم، دنبالهٔ دایره‌ها به دنبالهٔ کره‌ها تبدیل می‌شود و مماس مشترک آن‌ها جای خود را به مخروطی می‌دهد که بر تمامی آن کره‌ها مماس است. به‌عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ای از کره‌ها که متوالیاً برهم مماس باشند، همگی بر سطح جانبی یک مخروط مماس باشند، شعاع‌هایشان یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۷

اسرا رضافدایی
دبیرستان فرزانگان حضرت زینب(س)، سمپاد، نوبت دوم شهری
غلامحسین رستگارنسب
دانشکده فنی‌وحرفه‌ای دختران دکتر شریعتی تهران

بررسی سیاهچالهٔ ۶۱۷۴



اشاره

آنچـه در این پژوهش مورد بررسـی قرار گرفته، مسـئلهٔ احتمالاً حل نشـدهٔ سـیاهچالهٔ عـدد ۶۱۷۴ اسـت. در این پژوهش، با انجام محاسـباتی ساده، الگوریتمی به‌دست آمد که می‌تواند به نوعی مسئله را حل کند. نکتهٔ مهم سادگی در ارائهٔ مطلب است، به‌طوری که هر فردی با دانستن پایهٔ ریاضیات دبیرستان قادر به درک و حل این مسئله خواهد بود.

کلیدواژه‌ها: سیاهچالهٔ عدد، الگوریتم، خاصیت‌های عدد، عملیات کاپرکا.

مقدمه

سیاهچالهٔ عدد ۶۱۷۴ در سال ۱۹۴۹ توسط **کاپرکا**[۱] مطرح شد و بسـیاری از ذهن‌ها را به چالش کشید. مسـئله‌ای که کاپرکا بیان کـرد، این بـود که: چرا اگر ما یک عدد چهار رقمی را در نظر بگیریم (به‌طوری که مضربی از ۱۱۱۱ نباشد) و ارقام آن را از بزرگ به کوچک و سـپس از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کنیم و همین کار را دوباره روی عدد حاصل انجام بدهیم، حتماً به عدد ۶۱۷۴ می‌رسیم؟ ابتدا این مسئله آسان به‌نظر می‌رسد، اما سال‌هاسـت که کسی نتوانسته است دلیل قانع‌کننده‌ای برای این موضوع بیاورد [1].

در مورد این مسـئله صاحب‌نظران گوناگونی از سرتاسـر جهان تحقیق و بررسـی کرده‌اند و کوشیده‌اند آن را حل کنند. برای مثال، می‌توان به دکتر **اریک ولفگانگ وستین**[۲]، **بردی هاران**[۳] مستندساز اسـترالیایی، و همچنین پروفسور **یوتاکا نیشـی یامـا**[۴]، اقتصاددان معروف ژاپنی، اشـاره کرد. پروفسور یوتاکا نیشی یاما بررسی خوب و جامعی را در سـایت «plus maths» [۵] با عنوان عدد مرموز ۶۱۷۴ ارائه کرده است.

آنچه در این پژوهش بررسی شده این سؤالات است که:

- چرا همهٔ اعداد ۴ رقمی به ۶۱۷۴ می‌رسند؟
- چرا به عددی غیر از این عدد نمی‌رسند؟
- چه خاصیتی در عدد ۶۱۷۴ موجب شده است که تمامی اعداد را به خود جذب کند؟

این پژوهش به‌صورت کتابخانه‌ای و با استفاده از متون مرتبط و جامع و سایت‌های معتبر علمی و مصاحبه با افراد متخصص انجام گرفته است.

بحث و بررسی

هـر‌گاه هر عدد طبق رابطهٔ خاصی به‌صورت سـری ادامه پیدا کند و در انتها برای هر عدد به ارقام مشترک برسیم، به ارقام مشترک «سـیاهچاله» گویند [۶]. این تعریفی اسـت که در متون و مقالات فارسـی برای سـیاهچالهٔ اعداد بیان می‌شود. اما نکتهٔ قابل توجه این اسـت که در مورد سیاهچالهٔ عدد ۶۱۷۴ تنها در متون فارسی از واژهٔ سـیاهچاله استفاده شده اسـت و در متون انگلیسی از این مسئله با عنوان «عدد مرموز ۶۱۷۴»[۵] [۷] یاد شده است.

برای شـروع یـک عدد ۴ رقمی را در نظـر بگیرید (به‌طوری که مضرب ۱۱۱۱ نباشد، یعنی ارقام آن یکسان نباشند.) سپس ارقام آن را از بزرگ‌تـر به کوچک‌تـر و برعکس مرتب کنید. عدد بزرگ‌تر را از عدد کوچک‌تر کم کنید. همین عملیات را دوباره روی باقی‌مانده انجام دهید (به این عملیات، عملیات کاپرکا می‌گویند). بعد از چند مرحله

حتماً به ۶۱۷۴ می‌رسیم. برای مثال:

۳۴۵۲ ⟵ ۵۴۳۲-۲۳۴۵ = ۳۰۸۷

۳۰۸۷ ⟵ ۸۷۳۰-۳۷۸ = ۸۳۵۲

۸۳۵۲ ⟵ ۸۵۳۲-۲۳۵۸ = ۶۱۷۴

حال سؤال این است که چرا همهٔ این اعداد به ۶۱۷۴ می‌رسند؟ برای شـــروع لازم است چند مورد از روابط حاکم بر این عملیات را پیدا کنیم.

ابتدا این معادله را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم:

If: a>b>c>d & a≠d

(به نقل از سایت plus maths [۸])

$$\begin{cases}\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ -\;d & c & b & a \\ \hline (a-d) & (b-۱-c) & (c+۹-b) & (d+۱۰-a)\end{array}\end{cases}$$

If b=c (a-۱-d) (b+۹-c) (c+۹-d) (d+۱۰-a)

❋ **یکان:** d همیشـــه از a کوچک‌تر اســـت، بنابراین باید همواره یک واحـــد از دهگان کم کنیم و ده واحد به یکان اضافه کنیم. بنابراین می‌شود:

c-۱ & d+۱۰-a

❋ **دهگان:** برای c دو حالت وجود دارد: یا با b برابر اســـت و یا از آن کوچک‌تر است که در هر دو صورت به‌خاطر عملیات تفریق یکان، یک واحد از c کمتر شـــده و در حال حاضر از b کوچک‌تر اســـت. بنابراین می‌شود:

b-۱ & c-۱+۱۰-b= c+۹-b

❋ **صـــدگان:** برای b نیز دو حالت وجود دارد: یا با c برابر اســـت و یا از آن بزرگ‌تر اســـت. اگر از آن بزرگ‌تر باشد، می‌شود: b-۱-c . اما اگر با آن برابر باشد، چون به‌خاطر عملیات تفریق دهگان یک واحد از آن کم شـــده، حالا از c کوچک‌تر اســـت. پس باید یک واحد از هزارگان کم و ده واحد به صدگان اضافه کنیم که می‌شود:

d-۱ & b-۱+۱۰-c= b+۹-c

در ایـــن حالت چون b و c با هم برابرند، بنابراین جواب دهگان و صدگان برابر ۹ می‌شود:

c+۹-d=۹

d+۹-c=۹

❋ **هزارگان:** هزارگان بسته به یکی از حالات b و c نسبت به هم، یکی از حالات زیر می‌شود:

If b≠c then d-a

If b=c then d-۱-a

اکنون این ارقام را در دستگاه قرار می‌دهیم:

If b≠c

$$\begin{cases} a-d=y \\ d+۱۰-a=x \\ \hline x+y=۱۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} b-۱-c=m \\ c+۹-b=n \\ \hline m+n=۸ \end{cases}$$

(x+y) + (m+n)=۱۰+۸=۱۸

از این کار دو نتیجه حاصل می‌شود:

۱. عدد به‌دســـت آمده از عملیاتی که در آن b با c برابر نباشـــد، مجموع ارقامش برابر ۱۸ است و بر ۹ نیز بخش‌پذیر است.

۲. مجموع یکان و هزارگانش برابر با ۱۰ است و مجموع صدگان و دهگانش برابر با ۸ است. پس برای تشخیص اینکه یک عدد می‌تواند عدد حاصل از یک عملیات باشـــد یا خیر، باید بررسی کرد که آیا مجموع دو رقمش ۱۰ و دو رقم دیگرش ۱۸ هست یا خیر.

اما باید عدد حاصلی را که در آن b=c است نیز محاسبه کنیم. همانند قبل این ارقام را در دستگاه می‌گذاریم:

If b=c

$$\begin{cases} d+۱۰-a=x \\ a-۱-d=y \\ \hline x+y=۹ \end{cases} \qquad \begin{cases} c+۹-b=۹ \\ b+۹-c=۹ \\ \hline =۱۸ \end{cases}$$

x+y+۱۸=۹+۱۸=۲۷

از این عملیات دو نتیجه حاصل می‌شود:

۱. اعداد حاصل از عملیاتی که در آن b با c برابر اســـت، مجموع ارقامش برابر با ۲۷ است.

۲. در این اعداد حداقل دو رقم باید ۹ باشند. بنابراین مجموع دو رقم دیگر باید ۹ باشد. پس در اعدادی که دو رقم c و b آن‌ها مساوی است، عدد حاصل آن‌ها باید بین چهار رقمش، دو رقم آن حتماً ۹ باشد و مجموع دو رقم دیگر نیز ۹ باشد.

بـــا اطلاعات به‌دســـت آمده می‌توانیـــم تمامی اعـــداد حاصله را بنویسیم:

If b≠c

x+y=۱۰ → (x,y)={(۹,۱), (۸,۲), (۷,۳), (۶,۴), (۵,۵)}

m+n=۸ → (m,n)={(۸,۰), (۷,۱), (۶,۲), (۵,۳), (۴,۴)}

بنابراین اعداد حاصل به‌صورت زیر هستند:

{۹۸۱۰,۹۷۷۱,۹۶۲۱,۹۵۳۱,۹۴۴۱,۸۸۲۰,۸۷۲۱,۸۶۲۲,
۸۵۳۲,۸۴۴۲,۸۷۳۰,۷۷۳۱,۷۶۳۲,۷۵۳۳,۷۴۴۳,۸۶۴۰,۷۶۴۱,
۶۶۴۲,۶۵۴۳,۶۴۴۴,۸۵۵۰,۷۵۵۱,۶۵۵۲,۵۵۵۳,۵۵۴۴}

این اعداد در حالت مرتب شــده هستند و می‌توانند حالاتی دیگر هم البته با ارقام مســاوی داشته باشند؛ برای مثال: ۵۶۴۳. طبق فرض مســئله، ما بیشتر با حالت مرتب شده کار داریم و در شمارش نیز تنها تعداد حالت‌های مرتب شدهٔ ارقام را می‌شماریم.

If b=c

x+y=۹ → (x,y) or (y,x)={(۹,۰), (۸,۱), (۷,۲), (۶,۳), (۵,۴)}

m=n=۹

اعداد حاصل با این فرض عبارت‌اند از:

{۹۹۹۰,۹۹۸۱,۹۹۷۲,۹۹۶۳,۹۹۵۴}

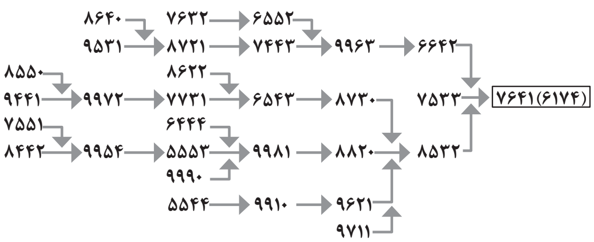
(در سایت «plus maths» [۹] این ۳۰ عدد توسط رایانه محاسبه و آورده شده و نویسندهٔ آن نیز بیان کرده است که علت رسیدن اعداد به این ۳۰ عدد هنوز پیدا نشــده اســت که اکنون با انجام محاسباتی ساده دلیل آن را یافتیم.)

پــس همهٔ اعداد بعد از یک مرحله باید بــه یکی از این ۳۰ عدد برسند (این رابطه برای تمامی اعداد صدق می‌کند). بنابراین این ۳۰ عدد نیز باید با هم رابطه‌ای داشته باشند. برای پیدا کردن این روابط یک مرحله از عملیات روی هریک از این اعداد را انجام دهیم:

۹۸۱۰	۹۸۱۰-۱۸۹=۹۶۲۱
۸۸۲۰	۸۸۲۰-۲۸۸=۸۵۳۲
۸۷۳۰	۸۷۳۰-۳۷۸=۸۳۵۲
۸۶۴۰	۸۶۴۰-۴۶۸=۸۱۷۲
۸۵۵۰	۸۵۵۰-۵۵۸=۷۹۹۲
۹۷۱۱	۹۷۱۱-۱۱۷۹=۸۵۳۲
۸۷۲۱	۸۷۲۱-۱۲۷۸=۷۴۴۳
۷۷۳۱	۷۷۳۱-۱۳۷۷=۶۳۵۴
۷۶۴۱	۷۶۴۱-۱۴۶۷=۶۱۷۴
۷۵۵۱	۷۵۵۱-۱۵۵۷=۵۹۹۴
۹۶۲۱	۹۶۲۱-۱۲۶۹=۸۵۳۲
۸۶۲۲	۸۶۲۲-۲۲۶۸=۶۳۵۴
۷۶۳۲	۷۶۳۲-۲۳۶۷=۵۲۶۵
۶۶۴۲	۶۶۴۲-۲۴۶۶=۴۱۷۶
۶۵۵۲	۶۵۵۲-۲۵۵۶=۳۹۹۶
۹۵۳۱	۹۵۳۱-۱۳۵۹=۸۱۷۲
۸۵۳۲	۸۵۳۲-۲۳۵۸=۶۱۷۴
۷۵۳۳	۷۵۳۳-۳۳۵۷=۴۱۷۶
۶۵۴۳	۶۵۴۳-۳۴۵۶=۳۰۸۷
۵۵۵۳	۵۵۵۳-۳۵۵۵=۱۹۹۸
۹۴۴۱	۹۴۴۱-۱۴۴۹=۷۹۹۲
۸۴۴۲	۸۴۴۲-۲۴۴۸=۵۹۹۴

۷۴۴۳	۷۴۴۳-۳۴۴۷=۳۹۹۶
۶۴۴۴	۶۴۴۴-۴۴۴۶=۱۹۹۸
۵۵۴۴	۵۵۴۴-۴۴۵۵=۱۰۸۹
۹۹۹۰	۹۹۹۰-۹۹۹=۸۹۹۱
۹۹۸۱	۹۹۸۱-۱۸۹۹=۸۰۸۲
۹۹۷۲	۹۹۷۲-۲۷۹۹=۷۱۷۳
۹۹۶۳	۹۹۶۳-۳۶۹۹=۶۲۶۴
۹۹۵۴	۹۹۵۴-۴۵۹۹=۵۳۵۵

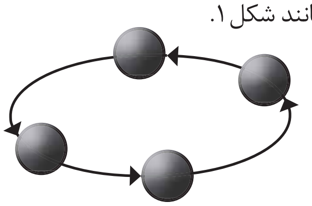
با این اطلاعات به‌دست آمده اکنون می‌توانیم نمودار ۱ را رسم کنیم:



نمودار۱ **همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید، اعداد پس از رسیدن به یکی از این اعداد حاصل، روندی از پیش تعیین شــده را طی می‌کنند [۱۰].**

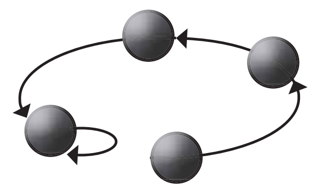
در اصل می‌توان کاری را که کاپرکا کرده است، به یک بازی تشبیه کرد. در این بازی پس از یک مرحله انجام عملیات کاپرکا روی یک عدد، عدد حاصل باید در میان یکی از ۳۰ عدد یاد شــده باشد. زمانی که به یکی از این اعداد می‌رسیم، عملیات کاپرکا دیگر، تنها میان ۳۰ عدد رد و بدل می‌شود. یعنی عدد اولیه به یکی از این ۳۰ عدد می‌رسد و عدد بعدی به یکی از میان خودشــان می‌رسد. عدد بعدی هم، همین‌طور و مانند یک زنجیره به هم می‌رســند. اما این قضیه تا ابد نمی‌تواند ادامه پیدا کند، زیرا تعداد اعداد حاصل تنها ۳۰ عدد اســت. پس جایی این زنجیره یا تمام می‌شود یا از نو شروع می‌شود.

اکنون باید بررســی کنیم که زنجیره چگونه اســت. برای داشتن زنجیره‌ای از اعداد که پس از یک دور دوباره از نو شروع شود، نیازمند یک عدد رابط هســتیم. بدیــن معنا که این عدد رابــط پس از چند مرحلــه عملیات کاپرکا دوباره به خودش برســد. زمانی که این عمل انجــام پذیرفت، اعداد زنجیرهٔ ما همــواره مانند یک حلقه به یکدیگر می‌رسند؛ همانند شکل ۱.



شکل۱ **همان‌طور که می‌بینید، اعداد به‌صورت سلسله‌وار به‌هم می‌رسند..**

و اما زنجیره‌ای که خاتمه می‌یابد، نیازمند یک عدد خاتمه‌دهنده است. این عدد باید این ویژگی را داشته باشد که بعد از یک مرحله دوباره به خودش برسد. زمانی که یک عدد با چنین ویژگی وجود داشته باشد، در اصل باعث شکست میان حلقه ما می‌شود؛ مانند شکل ۲.



شکل ۲ همان‌طور که گفته شد، عدد خاتمه دهنده باعث شکسته شدن زنجیره شده است.

در این حلقه تمامی اعداد به ناچار به عدد خاتمه‌دهنده می‌رسند. اما اگر حلقهٔ ما هیچ‌یک از این دو عدد را (خاتمه دهنده و رابط) دارا نباشد، زنجیره تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد و این نیازمند بی‌نهایت عدد است؛ در صورتی که ما تنها ۳۰ عدد داریم. پس زنجیرهٔ ما باید حداقل دارای یکی از این دو عدد باشد.

این مسئله نیازمند بررسی است. برمی‌گردیم به داده‌های به‌دست آمدهٔ قبلی. در میان این ۳۰ عدد، هیچ عددی وجود ندارد که دارای ویژگی‌های عدد رابط باشد. اما اگر دقت کنید درمی‌یابید که عددی با خواص عدد خاتمه‌دهنده وجود دارد. عدد ۶۱۷۴ عددی است که شما هر چند باری که عملیات کاپرکا روی آن انجام دهید، دوباره به همان عدد اولیه باز می‌گردید.

جواب سؤال‌هایی که ممکن است پیش بیایند، از این قرار است:

۱. شاید شما بپرسید: آیا این روند پس از رسیدن به یک عدد تکراری، یک دور متفاوت را نمی‌تواند شروع کند؟ در جواب باید گفت: زمانی که به یک عدد تکراری می‌رسیم، حتماً باید دوباره همان روند قبلی را تکرار کنیم و نمی‌توانیم وارد یک دور متفاوت شویم. زیرا یک عدد تنها به یک عدد می‌رسد. پس عدد تکراری به همان عدد قبلی می‌رسد و عدد بعدی هم همین‌طور. بنابراین همان روند قبلی را پیش می‌گیرد.

۲. آیا امکان وجود دو یا چند زنجیره از اعداد به‌طور جداگانه وجود دارد؟ در جواب باید گفت که امکان چنین اتفاقی وجود دارد. مثلاً در مورد اعداد ۹ رقمی دو زنجیرهٔ جداگانه وجود دارد. داشتن دو زنجیره نیازمند وجود دو عدد رابط و یا خاتمه‌دهنده است. پس اگر اعداد ۴ رقمی دارای دو زنجیرهٔ جداگانه باشند، به جز ۶۱۷۴ باید یک عدد خاتمه‌دهنده یا رابط دیگر نیز وجود داشته باشد.

نتیجه‌گیری

پس از بررسی‌های انجام شده، اکنون می‌توان رازهای عدد مرموز ۶۱۷۴ را بیان کرد. اولین و مهم‌ترین راز این عدد آن است که پس از انجام عملیات کاپرکا (یعنی تفریق دو عددی که حاصل مرتب کردن ارقام عدد اصلی به‌صورت نزولی و صعودی هستند) روی ۶۱۷۴، دوباره به ۶۱۷۴ می‌رسیم. دومین راز این است که با انجام عملیات کاپرکا روی اعداد، یک سری اعداد حاصل می‌شوند که این اعداد دارای ویژگی‌های خاص خود هستند. ویژگی‌های مزبور موجب می‌شوند که پس از انجام یک مرحله عملیات کاپرکا وارد الگوریتمی شویم که در آن تنها ۳۰ عدد وجود دارد (تنها حالت مرتب شده از بزرگ به کوچک اعداد حاصل محاسبه شده‌اند). این دو راز موجب شده‌اند که تمامی اعداد ۴ رقمی تنها به عدد ۶۱۷۴ برسند. به بیانی دیگر، عدد ۶۱۷۴ تمامی اعداد ۴ رقمی را به خود جذب می‌کند.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Kaperka
2. Eric Wolfgang Weisstein
3. Brady John Haran
4. Yutaka Nishiyama
5. Mysterious number 6174

***منابع**

1. https://plus.maths.org/content/mysterious-number - 6174
2. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number %29
3. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number %29
4. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number %29
5. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
6. http://www.jamokam.blogfa.com
7. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
8. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
9. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
10. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174

پرسش‌های پیکارجو! ؟

۴

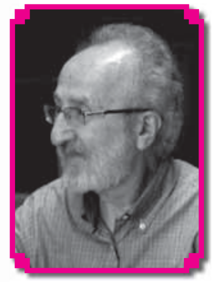
اگر برای عددهای حقیقی x و y داشته باشیم: $x+y=1$ و $|x|\leq 1$ و $|y|\leq 1$، ماکزیمم $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$ کدام است؟

الف) $\sqrt{3}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

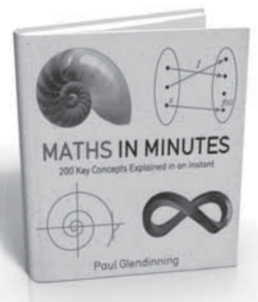
ج) $2\sqrt{3}$ د) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

هـ) ۱

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور



ریاضیات در چند دقیقه



نظریهٔ احتمال

«احتمال» (probability) شـاخه‌ای از ریاضیات است که با اندازه‌گیری و پیش‌بینی احتمال پیشامدهای معینی سروکار دارد. این نظریه که یکی از کاربردهای «نظریهٔ مجموعه‌ها»ســت، به‌طور کامل نظریه‌ای تازه محسوب می‌شود.

یکی از راه‌های نگریســتن به احتمالات بررســی حــوزه‌ای از نتایج ممکــن، به‌صــورت اعضایی از یک مجموعه اســت. برای مثال، وضعیت سه بار انداختن ســکهٔ یکنواختی را در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعهٔ جمیع پیشامدهای ممکن را می‌توان با اعضای شامل سه حرف، هر یک به ازای یک‌بار انداختن سکه، H به جای رو، و T به جای پشــت، نمایش داد. واضح است که این مجموعه دارای هشت عضو است:

{TTT,TTH,THT,THH,HTT,HTH,HHT,HHH}

از آنجــا کــه یکــی از ایــن پیشــامدها باید روی دهد، مجمــوع جمیع این احتمال‌ها باید ۱ باشــد، و در صورتی‌که ســکه یکنواخت باشد، و هر پیشامد به احتمال برابر باشد، احتمال هر حالت $\frac{۱}{۸}$ است.

مسائل پیچیده‌تر احتمالات را می‌توان با بررسی پیشامدهای مشخصی به‌صورت مجموعه‌هایی پاسخ داد کــه زیرمجموعه‌های مجموعهٔ پیشــین، شــامل جمیع پیشامدهای ممکن هستند.

بــرای مثال، می‌توان بلافاصلــه ملاحظه کرد که مجموعهٔ پیشامدهایی با دقیقاً دو رو شامل سه عضو و بنابراین دارای احتمال $\frac{۳}{۸}$ است.

امــا در مــورد اینکه احتمــال رو آمــدن یک‌بار انداختن سکه، با در دست داشتن اینکه دست‌کم یک مورد پشت باشد، چه می‌توان گفت؟

اگر بدانیم که دست‌کم یکی پشت است، می‌توانیم مجموعهٔ پیشامدها را به‌صورت زیر محدود کنیم:

{TTT,TTH,THT,THH,HTT,HTH,HHT}

دو عضــو این مجموعه از هفت عضو در کل، دقیقاً یک رو دارد. بنابراین احتمال مطلوب $\frac{۲}{۷}$ است.

استدلال‌های مشابه اما عمومی‌تر، به ریاضی‌دانان امکان داده است که مجموعهٔ اصول موضوعهٔ احتمال را توسعه دهند؛ مجموعه‌ای که با عنوان احتمال مجموعه‌ها و کاربردها، برای مجموعه‌ها تعریف شده است.

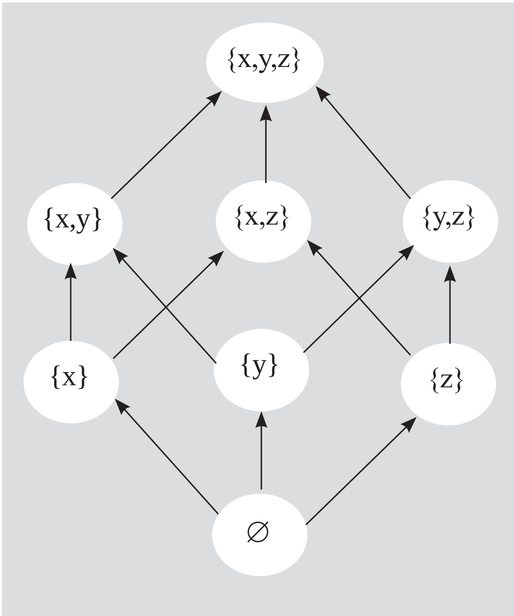
مجموعه‌های توانی

«مجموعهٔ توانی» یک مجموعهٔ مفروض S، مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌های S، از جمله خود S و مجموعهٔ تهی است. بنابراین اگر S={۰،۱} ، آن‌گاه مجموعهٔ توانی آن‌که با P(S) نمایش داده می‌شود، عبارت است از:

{∅,{۰},{۱},{۰،۱}}

ژرژ کانتور، ریاضی‌دان آلمانی، با استدلالی به طریقی مشابه پارادوکس سلمانی پیشین اما با قدمت بیشتر، از مجموعهٔ توانی استفاده کرد تا نشان دهد بی‌نهایت ردهٔ بزرگ‌تر و بزرگ‌تر متفاوتی از نامتناهی وجود دارند.

استدلالات قطری کانتور پیش از این نشان داده بود که دست‌کم دو نوع مجموعهٔ نامتناهی موجودند: مجموعه‌های شمارا، یا فهرست شده، و مجموعه‌های ناشمارا، از قبیل «پیوستار» (continuum)؛ یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی. در این مورد کانتور نشان داد که اگر S یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ توانی آن همواره بزرگ‌تر از S است. به این مفهوم که طریقی وجود ندارد که اعضای S را به اعضای P(S) چنان نگاشت دهیم که هر عضو واقع در یک مجموعه به یک و تنها یک عضو مجموعهٔ دیگر وابسته باشد. به عبارت دیگر، «اصلیت» (cardinality) P(S) همواره بزرگ‌تر از اصلیت خود S است.



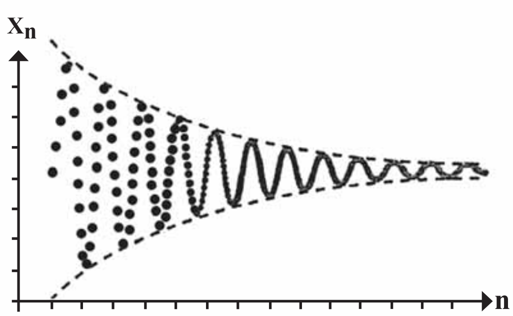
نمودار فوق سلسلهٔ مراتب زیرمجموعه‌های مجموعهٔ توانی مجموعهٔ {x,y,z} را نشان می‌دهد. پیکان‌ها مواردی را نشان می‌دهند که زیرمجموعه‌های P(x,y,z) زیرمجموعه‌های، زیرمجموعه‌های دیگر نیز هستند.

معرفی دنباله‌ها

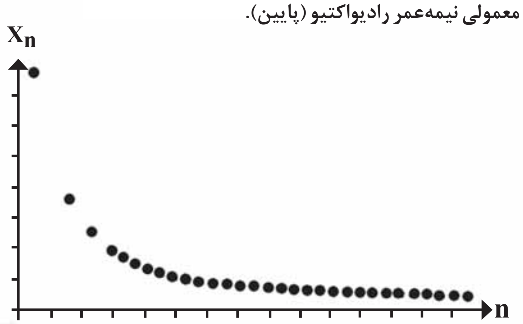
دنباله‌های ریاضی فهرست‌های مرتبی از اعدادند. دنباله‌ها نیز مانند مجموعه‌ها می‌توانند هیچ‌گاه پایان نداشته و نامتناهی باشند. اما برخلاف مجموعه‌ها، عضوها یا جمله‌های یک دنباله دارای ترتیبی معین‌اند، و جمله‌هایی یکسان ممکن است در نقاط متفاوت فهرست مورد بحث رخ دهند.

مشهورترین دنباله‌ها فهرست «اعداد طبیعی» از قبیل ۱، ۲، ۳، ... است. جمله‌های این دنباله به‌طور یکنواخت قرار گرفته و به سمت بی‌نهایت ادامه یافته‌اند. نوع دیگر، «دنبالهٔ فیبوناتچی» است که در آن فاصلهٔ بین جمله‌ها بیشتر رشد می‌کند. هر دوی این دنباله‌ها واگرا هستند. دنباله‌های دیگر هم‌گرا هستند؛ یعنی هنگام نزدیک شدن به حد جمله‌های بی‌نهایت، به مقدار معینی منتهی می‌شوند.

جمله‌های نمایش‌دهندهٔ فروپاشی رادیواکتیو که در آن مقدار باقی‌ماندهٔ ایزوتوپ رادیواکتیو در بازهٔ معینی، موسوم به «نیمه عمر»، نصف می‌شود، هنگامی که دنباله پیشرفت می‌کند، به صفر نزدیک‌تر می‌شود. دنبالهٔ هم‌گرای مورد بحث را می‌توان چنان که در شکل نشان داده شده، با «خم فروپاشی نمایی» توضیح داد.



مثال‌های دنبالهٔ همگرا (بالا) و دنبالهٔ فروپاشی نمایی، از قبیل دنبالهٔ معمولی نیمه‌عمر رادیواکتیو (پایین).



قضیه پُونسله

اشاره

ارتباط با موضوع درسی

مسـئلهٔ ۱۰ صفحهٔ ۵۶ کتاب درسـی هندسه (۲) سـوم ریاضی درخصوص ثابت بودن محیط مثلث حاصل از رسـم مماس‌هـای دایرهٔ محاطی خارجی مطرح شـده که در سـطوح بالاتر به «مسئلهٔ پونسـله» معروف است. ابتدا برای توجه دادن بیشـتر دانش‌آموزان به اهمیت و کاربرد این مسـئله، به‌طور مختصر این ریاضی‌دان فرانسـوی را معرفی می‌کنیم و سـپس به بیان و اثبات قضیه می‌پردازیم.

مراد کریمی‌شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان
پسرانه شاهد شهرکرد

پونسله که بود؟

ژان ویکتور پونسـله، ریاضـی‌دان و فیزیک‌دان فرانسـوی، در سال ۱۷۸۸ در شـهر «متز» به‌دنیا آمد. وی در جنگی میان روسـیه و فرانسـه، در رأس ستونی به نیروهای روس هجوم برد و توسـط آن‌ها اسیر شد. او در سال ۱۸۱۴، با طی مسافتی برابر ۱۵۰۰ کیلومتر، از روسیه به فرانسه گریخت. پونسله هنگام اسارت و بدون دسترسی به هیچ‌گونه کتابی، اساس مهم‌ترین اثرش را برنامه‌ریزی و مطالعه کرد. نام پونسله را در فهرست ۷۲ نفـری که با نظر و با عمل در سـاخت برج ایفل کمک و هم‌یـاری کردنـد، ثبـت و روی برج نصـب کرده‌اند. همچنین در فیزیک یک واحد اندازه‌گیری توان را به‌نام او نام‌گذاری کرده‌اند. پونسله در ۲۲ دسامبر سال ۱۸۶۷ در شهر پاریس زندگی را بدرود گفت. او را بنیان‌گذار و پدر دانش هندسهٔ تحلیلی یا هندسهٔ پروژکتیو می‌دانند.

قضیهٔ پونسله

خط‌هـای AE، AF و BC به‌ترتیـب در نقطه‌های E، F و D بـر دایـرهٔ C(O,R) مماس‌انـد. مماس BC، خط‌هـای AE و AF را به‌ترتیـب در نقطه‌های B و C قطع کرده است:

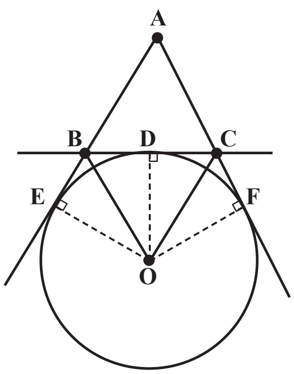
الف) ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت E و F، محیط مثلث ABC مقداری ثابت است.

ب) نشـان دهید اندازهٔ زاویه BOC برابـر مقدار ثابت $۹۰-\frac{A}{۲}$ است.

اثبات الف: می‌دانیم از هر نقطه خارج یک دایره فقط دو مماس بر آن می‌توان رسم کرد که طول این دو مماس با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$\left|\begin{array}{l} AE = AF \\ BD = BE \Rightarrow \\ CF = DC \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= AB + AC + BC \\ &= AB + AC + (BD + DC) \\ &= (AB + BD) + (AC + DC) \\ &= (AB + BE) + (AC + CF) \\ &= AE + AF = ۲AE = \text{مقدار ثابت} \end{aligned}$$



اثبات ب: می‌دانیـم در چهارضلعی‌هـای شـبه‌لوزی ODCF و ODBE، پاره‌خط‌هـای OC و OB قطـر و در نتیجه نیم‌سـاز زوایای خود هسـتند. به کمک این خاصیت داریم:

$$\begin{aligned} B\hat{O}C &= C\hat{O}D + D\hat{O}B = \frac{۱}{۲}D\hat{O}F + \frac{۱}{۲}D\hat{O}E \\ &= \frac{۱}{۲}(\underbrace{D\hat{O}F + D\hat{O}E}_{E\hat{O}F}) = \frac{۱}{۲}(E\hat{O}F) = \frac{۱}{۲}(۱۸۰ - \hat{A}) \\ &= ۹۰ - \frac{A}{۲} = \text{مقدار ثابت} \end{aligned}$$

***منبع**

دایرةالمعارف هندسه (جلد سوم)، تألیف محمدهاشم رستمی

در میان شوالیه‌ها و سربازها!

«جزیرهٔ شــوالیه‌ها و ســربازها»، در نوشته‌های بسیاری از طراحان معماها، نامی شناخته شــده است. شوالیه‌ها همیشه راســت‌گو و سربازها همیشه دروغ‌گویند. همهٔ شهروندان این جزیره هم یا شــوالیه‌اند یا ســرباز. اکنون به چند پرســش در مورد این جزیرهٔ عجیب و غریب پاســخ دهید. در شماره‌های آینده در این‌باره معماهای جالب‌تری برایتان داریم.

ایستگاه دوم

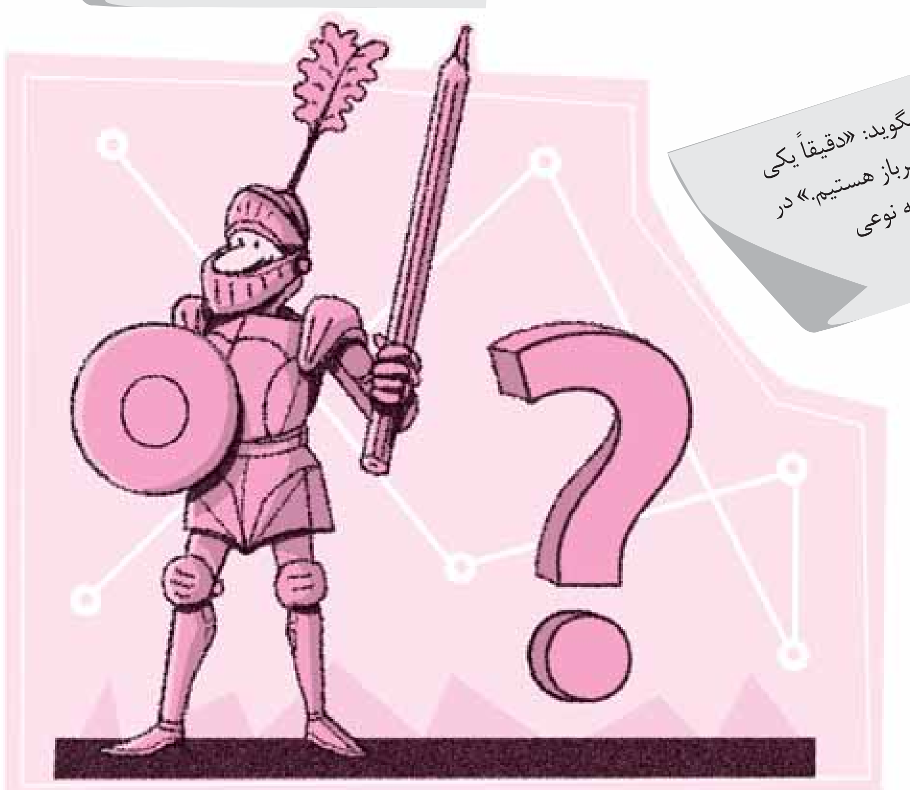
۱. آیا ممکن است شهروندی از این جزیره بگوید: «من یک سرباز هستم؟»

۲. آیـا ممکـن اسـت شـهروندی از این جزیره بگوید: «من و برادرم هر دو سـرباز هستیم؟» اگر ممکن است، در این صورت او و برادرش از چه نوعی هستند؟

۳. فــرض کنید شــهروندی بگوید: «حداقل یکــی از مــا دو نفر (مــن و برادرم) ســرباز هســتیم.» در این صورت این دو برادر از چه نوعی هستند؟

۴. فرض کنید شهروندی بگوید: «دقیقاً یکی از ما دو نفر (من و برادرم) سرباز هستیم.» در این صورت این دو برادر از چه نوعی هستند؟

۵. فرض کنید شــهروندی بگویــد: «من و بــرادرم از یک نوع هســتیم.» در این صــورت در مــورد این دو برادر چه می‌توان گفت؟



محمود داورزنی، هوشنگ شرقی

ریاضی ۳ تجربی

فصل سوم: حد و پیوستگی

۱. اگر به ازای هر x داشته باشیم: $2-x^2<f(x)\le 2\cos x$، حد تابع $\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ در $x=0$ را به‌دست آورید.

۲. حد تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^4-1}{2x^2-3x+1}$ وقتی $x\to 1$ را به‌دست آورید.

۳. حاصل $\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}$ را محاسبه کنید.

۴. حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}$ را به‌دست آورید.

سؤالات جبر و احتمال

فصل سوم: احتمال و پدیده‌های تصادفی

۱. در هر آزمایش تصادفی، تعداد اعضای فضای نمونه را بنویسید.

الف) ساختن یک عدد سه‌رقمی با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴،۵ (بدون ارقام تکراری).

ب) انتخاب سه مهرهٔ پشت سرهم و بدون جای‌گذاری از کیسه‌ای که حاوی ۲ مهرهٔ سفید متمایز و ۳ مهرهٔ سیاه متمایز است.

ج) انتخاب سه مهرهٔ پشت‌سرهم و با جای‌گذاری از کیسه‌ای که حاوی ۲ مهرهٔ سفید متمایز و ۳ مهرهٔ سیاه متمایز است.

د) پرتاب یک سکه به دفعات، تا برای اولین‌بار سکهٔ رو ظاهر شود.

هـ) انتخاب دو عدد حقیقی در بازهٔ $(-1,3)$.

و) انتخاب یک نقطه از دستگاه مختصات که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(-2,1)$ کمتر یا مساوی یک باشد.

ز) پرتاب یک تاس که اگر مضرب ۳ ظاهر شود، سپس دو سکه و در غیر این‌صورت یک تاس دیگر پرتاب شود.

۲. در پرتاب دو تاس به‌طور هم‌زمان، اگر A پیشامد مجموع اعداد رو شده حداقل ۹ و B پیشامد هر دو تاس اول، باشد، A و B را بنویسید و سپس پیشامدهای زیر را به‌دست آورید:

الف) هر دو پیشامد رخ دهند.

ب) فقط A رخ دهد.

ج) فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد.

د) هیچ‌کدام رخ ندهند.

هـ) حداقل یکی از آن‌ها رخ دهد.

حسابان

فصل سوم: مثلثات

۱. اگر α و β دو زاویهٔ حاده باشند و داشته باشیم: $\cos(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۳}$ و $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{۲}{۳}$، مقدار $\cos۲\alpha$ را به‌دست آورید.

۲. ثابت کنید:

$$۴\sin x\sin(\frac{\pi}{۳}-x)\sin(\frac{\pi}{۳}+x)=\sin ۳x$$

۳. معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cot x-۳\tan x=۰$

ب) $\sqrt{۳}\sin x+\cos x=\sqrt{۲}$

۴. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\sin^{-۱}(\sin\frac{۲\pi}{۳})$

ب) $\sin(۲\cos^{-۱}(\frac{۱}{۵}))$

سؤالات ریاضی دهم

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

۱. دو برابر عدد مثبتی از ثلث مربع آن، ۹ واحد کم‌تر است. این عدد را به‌دست آورید.

۲. یک کشـــاورز، ۲۴۰ متر نردهٔ چوبی برای حصارکشی خریده است. اگر زمینی که او برای حصارکشـــی انتخاب کرده، مستطیل شکل باشد، طول و عرض این زمین را به گونه‌ای پیدا کنید که مساحت زمین، بیشترین مقدار ممکن شود.

۳. نامعادلات زیر را حل کنید.

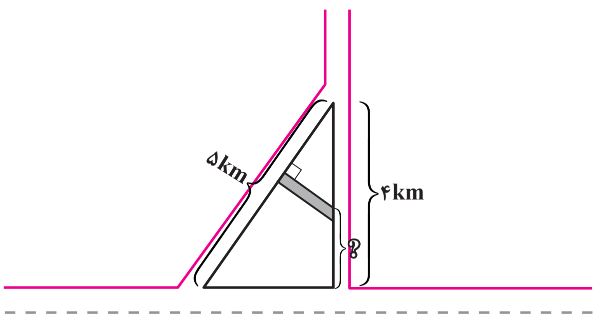
الف) $\frac{x^۳-۱}{-x^۲+x-۲}\geq ۰$

ب) $\left|x-\frac{۲}{۳}\right|+۱<\frac{۵}{۳}$

۴. سهمی $y=ax^۲+bx+c$ از نقاط (۰،۲)، (۱،۰-) و (۲،۰) عبور کرده است. با تعیین مقادیر a، b و c، این سهمی را رسم کنید.

هندسهٔ پایهٔ دهم

۱. مطابق شـــکل، از یک ســـه راهی، دو خیابان، یکی به‌صورت قائم و دیگری به‌صورت مایل به یک بلوار وصل شده‌اند. طول خیابان‌های قائم و مایل از مبدأ سه راهی تا بلوار به ترتیب ۴km و ۵km است. می‌خواهیم یک خیابان فرعی عمود بر خیابان مایل و به طول ۶۰۰ متـــر بنا کنیم. مبـــدأ کوچه روی خیابان قائـــم در چه فاصله‌ای از انتهای آن باید بنا شود؟



۲. در مثلث ABC به اضلاع $AB=۴\sqrt{۳}$، AC=۴ و BC=۸، طول نیم‌ساز زاویهٔ C را به‌دست آورید.

۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AB=AC=۸cm و BC=۴cm طول ارتفاع رأس B را به‌دست آورید.

۴. پاره‌خطـــی به طـــول x و واحد طول را داریـــم. پاره‌خطی به طول $\sqrt{x}$ رسم کنید.

سوم ریاضی

هندسهٔ ۲

۱. در دایـــرهٔ C(O,R) دو قطـــر عمودبرهـــم AB و CD را در نظـــر می‌گیریم. از نقطهٔ A وتری رسم می‌کنیم تا قطر CD را در سمت راســـت O، در نقطهٔ P و دایره را در نقطهٔ Q قطع کند. مماس در Q بر دایره نیز امتداد CD را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید: QE=PE.

۲. ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیم‌ساز زاویهٔ مقابل به آن یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۳. طول مماس مشترک دو دایرهٔ متقاطع C(O,۳R) و C(O´,۲R) را به‌دست آورید که طول وتر مشترک آن‌ها مساوی ۲R است.

آموزشی

تقریب وتر در مثلث قائم‌الزاویه

هـ. راهوماتهولا[1]
ترجمهٔ **مرتضی صومی**
پژوهشگر تاریخ علم، دانشگاه تهران

مسئله: اگر x و y طول‌های دو ضلع مجاور در مثلث قائم‌الزاویه باشند، تقریبی از z وتر این مثلث را به‌دست می‌آوریم.

طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $z^۲=x^۲+y^۲$. پس هدف ما این است که $x^۲+y^۲$ را به‌عنوان مربع عدد z بیان کنیم.

فرض می‌کنیم عددهای x و y عددهای مثبت و گویا باشند و: $x\leq y$. به علاوه آن‌ها را عددهای صحیح مثبت می‌گیریم، بدون آنکه کلیت فرض نقض شود. در واقع اگر x و y صحیح نباشند، آن‌ها را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌هایشان ضرب می‌کنیم و برای جبران این عمل، نتیجهٔ نهایی را بر آن کوچک‌ترین مضرب مشترک تقسیم می‌کنیم.

دستور

✓ در تقسیم $x^۲$ بر $۲y$ خارج‌قسمت را k و باقی‌مانده را m در نظر می‌گیریم.

✓ فرض کنیم: $a=y+k$ و $b=m-k^۲$. در این صورت مقدار $a+\dfrac{b}{۲a+\dfrac{b}{۲a}}$ تقریبی اندازهٔ وتر z است.

اثبات: متناظر با اعداد صحیح مثبت $x^۲$ و $۲y$، با عمل تقسیم، دو عدد صحیح k و m (خارج‌قسمت و باقی‌مانده) وجود دارند، چنان‌که: $x^۲=۲yk+m$ که در آن $k>۰$ و $۰\leq m<۲y$. پس:

$$\begin{aligned} x^۲+y^۲&=y^۲+۲yk+m\\ &=y^۲+۲yk+k^۲+m-k^۲\\ &=(y+k)^۲+m-k^۲\\ &=a^۲+b \qquad (a=y+k\ ,\ b=m-k^۲)\\ &=(a+t)^۲-۲at-t^۲+b \qquad \text{به ازای هر عدد } t\\ &=(a+t)^۲ \quad (-۲at-t^۲+b=۰ \quad \text{(با انتخاب t چنان‌که)} \quad (A)\end{aligned}$$

در (A) شرطی از درجهٔ دوم موجود است: $t^۲+۲at=b$

برای پیدا کردن جوابی تقریبی، معادله را چنین می‌نویسیم:

$$t(t+۲a)=b,\Rightarrow t=\frac{b}{۲a+t} \qquad (B)$$

اکنون فرایند تکرار شونده را به‌کار می‌بریم. با یک تقریب خام نخستین با حذف $t^۲$ شروع می‌کنیم. پس معادله می‌شود: $۲at=b$ که نتیجه می‌شود: $t=\dfrac{b}{۲a}$.

جواب به‌دست آمده را در طرف راست معادلهٔ (B) می‌گذاریم. مقدار تقریبی نزدیک‌تر برای t می‌شود: $\dfrac{b}{۲a+\dfrac{b}{۲a}}$.

پس به‌طور تقریبی (A) معادل است با: $x^۲+y^۲=(a+\dfrac{b}{۲a+\dfrac{b}{۲a}})^۲$

در نتیجه $z=a+\dfrac{b}{۲a+\dfrac{b}{۲a}}$ مقداری تقریبی برای اندازهٔ وتر است.

مثال ۱: در نظر می‌گیریم $x=۳$ و $y=۴$ و آن‌گاه: $\dfrac{x^۲}{۲y}=\dfrac{۹}{۸}$.

خارج‌قسمت $k=۱$ و باقی‌مانده $m=۱$ می‌شود.

$$a=y+k=۴+۱=۵,\quad b=m-k^۲=۱-۱^۲=۰$$

پس وتر چنین به‌دست می‌آید:

$$z=a+\frac{b}{۲a+\dfrac{b}{۲a}}=۵+\frac{۰}{۱۰+\dfrac{۰}{۱۰}}=۵+\frac{۰}{۱۰+۰}$$
$$=۵+۰=۵$$

که با نتیجهٔ حاصل از قضیهٔ فیثاغورس هم‌خوان است: $۵=\sqrt{۳^۲+۴^۲}$

مثال ۲: در نظر می‌گیریم $x=۴۰$ و $y=۵۰$ و آن‌گاه: $\dfrac{x^۲}{۲y}=\dfrac{۱۶۰۰}{۱۰۰}$.

خارج‌قسمت $k=۱۶$ و باقی‌مانده $m=۰$ می‌شود.

$$a=y+k=۵۰+۱۶=۶۶,\quad b=m-k^۲$$
$$=۰-۱۶^۲=-۲۵۶$$

پس وتر چنین به‌دست می‌آید:

$$z=a+\frac{b}{۲a+\dfrac{b}{۲a}}=۶۶+\frac{-۲۵۶}{۱۳۲+\dfrac{-۲۵۶}{۱۳۲}}=۶۶-\frac{۲۵۶}{۱۳۰/۰۶}$$
$$=۶۶-۱/۹۶۸۳=۶۴/۰۳۱$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\sqrt{۴۰^۲+۵۰^۲}=\sqrt{۴۱۰۰}\approx ۶۴/۰۳۱۲۴۲۳۷$$

که به جواب ما نزدیک است.

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر تقریبی از وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که طول‌های اضلاع زاویهٔ قائمه آن داده شده‌اند، به‌دست آورید و نتیجه را به کمک قضیهٔ فیثاغورس امتحان کنید:

الف) $x=۱۲\ ,\ y=۵$

ب) $x=۱۷\ ,\ y=۱۵$

ج) $x=۱۲۰\ ,\ y=۴۲$

پی‌نوشت

1. H Rahumathulla

منبع

برگرفته از بولتن انجمن ریاضی کرالا (هند)، سال ۱۰، شمارهٔ ۲ (دسامبر ۲۰۱۳)، ص ۲۳۶-۲۳۷.

ایستگاه سوم

حکایت اول

در شهر «پرینستون» ایالت نیوجرسی آمریکا، دختر کوچکی در مدرسهٔ ابتدایی خود با درس حساب مشکل جدی داشت و تکالیفش را به خوبی انجام نمی‌داد. تا اینکه ناگهان در درس خود پیشرفت فوق‌العاده‌ای کرد و تکالیفش را به‌خوبی انجام می‌داد. معلم که از پیشرفتش تعجب کرده بود، از او پرسید که چگونه به این پیشرفت رسیده است. دختر در جواب گفت: «پیرمرد موقر و مهربانی در خیابان **مرسر** زندگی می‌کند و من در پارک با او آشنا شدم. او به من در انجام تکلیف‌هایم کمک می‌کند.» معلم با احضار مادر دخترک موضوع را به او اطلاع داد و مادر با مراجعه به منزل پیرمرد به او گفت: «پروفسور **اینیشتین**! از کمک‌کردن به فرزندم چه چیزی عاید شما می‌شود؟!» و اینیشتین در پاسخ گفت: «حتماً چیزی عایدم می‌شود. هربار که به او در انجام تکالیفش کمک می‌کردم، او به من یک آب‌نبات چوبی می‌داد!»

حکایت دوم

نقل شده است که وقتی اینیشتین اولین چک حقوقی خود را برای کار در «انستیتوی مطالعات تکمیلی دانشگاه پرینستون نیوجرسی» دریافت کرد، از پشت چک برای انجام محاسبات ریاضی خود استفاده کرد و کمی بعد آن تکه کاغذ را به سطل زباله انداخت و گم کرد! از آن به بعد چک‌های حقوق اینیشتین مستقیماً به همسرش تحویل داده می‌شد!

حکایت سوم

زمانی، گروه بزرگی از ریاضی‌دانان آمریکایی برای شرکت در یک کنفرانس ریاضی به شهر «گوآدلاخارا» در مکزیک رفته بودند. در میان آن‌ها، پروفسور **فرانسیس مورگان**، از دانشگاه هاپکینز هم شرکت داشت که به‌طور جدی با غذاهای مکزیکی مشکل داشت و نمی‌توانست با آن‌ها کنار بیاید. روزی در حاشیهٔ کنفرانس، **آرتور روزنبلوت**، یکی از شرکت‌کنندگان، با اشتیاق گفت: «من دوران بسیار خوبی را احساس می‌کنم!» و پروفسور **نوربرت وینر**[1] که در آن نزدیکی بود، بلافاصله گفت: «درست مثل مورگان که در معدهٔ خود احساس تعفن می‌کند!»

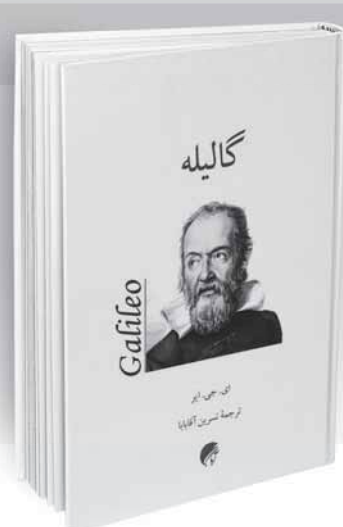
پی‌نوشت‌ها

۱. Norbert Wiener (۱۹۶۴-۱۸۹۴) استاد نام‌دار ریاضی و فلسفه در دانشگاه ام‌آی‌تی آمریکا و بنیان‌گذار نظریهٔ سیبرنتیک. از او یک اتوبیوگرافی با عنوان «من یک ریاضی‌دانم» منتشر شده است که چکیده‌ای از آن توسط زنده‌یاد **پرویز شهریاری** به فارسی ترجمه شده و توسط «انتشارات فاطمی» در سال ۱۳۶۴ منتشر شده است.

غلامرضا یاسی‌پور

گالیله به کرهٔ زمین چه گفت؟

نویسنده: ای. جی. ایر[1] **مترجم: نسرین آقابابا**



شنیدستم که هر کوکب جهانی است
جداگانه زمین و آسمانی است
«نظامی، خسرو و شیرین»

نـــام **گالیلـــه**[2] برای همهٔ ما آشناســت و اگر نه همه، بیشــترمان سخنی را که گالیله به کرهٔ زمین گفت شــنیده‌ایم. پس غرض از آوردن این عنوان برای معرفی کتاب «گالیله» چیســت؟ غرض این اســت که بگوییم چرا گالیله این حرف را زد و چه روشــی را پیش گرفت تا به این حرف منجر شد.

در مقدمه کتاب می‌خوانیم: «دربارهٔ عهد رنسانس و ظهور و پیشرفت علم بسیار گفته و شــنیده‌ایم. هر یک از مورخان، به‌خصوص نویســندگان تاریخ علــم، از وقایع و حوادثی که به این رویداد عظیم تاریخ بشــری منجر شده‌اند، در حد وسع خود سخن‌های بی‌شمار گفته و نوشــته‌اند و تحقیق‌ها و بررسی‌های بســیاری انجام داده‌انــد. تحقیق‌هایی که هر یــک از آن‌ها گوشــه‌ای از زوایای تاریک این مرحله از تاریخ بشــریت را باز کرده و روشنی مناسبی به آن تابانده است.

در ایــن میــان، دو قــرن شــانزدهم و هفدهــم میلادی و دو دانشــمند ایتالیایی و انگلیسی این دو قرن، یعنی، گالیله و **نیوتن**، از اهمیتــی والا و مرتبه‌ای بــالا برخوردارند؛ مرتبه و اهمیتی که هیچ‌یک از دانشــمندان این دو قرن به آن نرسیده و آن را ندیده‌اند.

البتــه در ایــن زمینــه مورخــان غربی معمولاً از ســهم مســلمانان سخنی به میان نمی‌آورنــد، و بــه ســهو یــا به عمــد از آن می‌گذرند، و این وظیفهٔ مورخان مســلمان، به‌خصوص ایرانی اســت که در پر کردن این رخنه بکوشــند و کالای خود را خود در این جمعه بازار بفروشند. چراکه چنین می‌نماید که مســلمانان، به‌خصوص ایرانیان، ســهمی بســزا در پیشــبرد علم داشــته‌اند و غربیان بی‌اســتفاده از این ســهامِ بی‌نام، قادر به رام کردن توســن سرکش علم نبوده‌اند و بی‌این مدد و یاری توان راندن آن را نداشته‌اند.

بــاز در مقدمــه کتاب آمده اســت که: «گرچه شرح حال گالیله و نیوتن را بارها در کتاب‌های تاریخ علم و داستان‌ها، و حتی در فیلم‌های سینمایی و سریال‌های تلویزیونی خوانــده، دیده و شــنیده‌ایم، اما مطالب این کتــاب از زاویــه‌ای دیگــر به ایــن حکایت پرداخته و از آن روایت ساخته است.»

در کتــاب می‌خوانیــم کــه معلم‌ها به گالیله می‌گفتند: «خیلی سؤال می‌کنی، تو هنــوز بچه‌ای. باید به حرف ما گوش کنی و اندیشه‌های ما را بپذیری.»

گالیله پاســخ می‌داد: «بعضی از معلمان اندیشه‌هایی نادرست دارند. آن‌ها می‌گویند همیشــه حــق به جانــب **ارسطو**ســت. اما ارسطو دو هزار سال پیش زندگی می‌کرد، و از آن زمان تاکنون چیزهای بســیاری تغییر کرده‌اند.»

ـ حقایق تغییر نمی‌کنند.

ـ می‌دانم. اما ارسطو مرتکب اشتباهاتی شده است. وی تنها گوشهٔ کوچکی از دنیا را می‌شناخت. انسان‌ها همواره حقایق تازه‌ای را به‌دست می‌آورند. مثلاً **فرانسیس دِرِیک** تازه با کشــتی دور دنیا حرکت کرده و سال پیش به انگلستان بازگشته است.

ـ آیــا تصور می‌کنی دریک از ارســطو باهوش‌تر است؟

ـ نــه. اما انســان‌هایی چــون دریک و **کلمــب** حقایق تازه‌ای را به مــا آموخته‌اند. بایــد از زندگی هم بیاموزیم و نمی‌توان تنها از کتاب‌ها آموخت.

گالیله عادت داشــت بگویــد: «آموزگار من **ارشمیدس** است. وی نیز مانند ارسطو، مدت‌ها پیش می‌زیست، اما آزمایش به عمل می‌آورد و اندیشــه‌های خود را به درســتی امتحان می‌کــرد. وی نویســنده نبود، بلکه دانشمندی واقعی بود.»

گالیله همــواره مایل بــه آزمون کردن اندیشه‌های خود بود و می‌گفت: «ابتدا آن‌ها

را با اعداد بررسی می‌کنم، سپس به بررسی آن‌ها با دست‌ها و چشم‌هایم می‌پردازم. آن وقت اگر پاسخ‌هایی یکسان به دست آورم، معمولاً صحیح خواهند بود. برای مثال، به آن کوزه و جعبه بنگرید. یکی گرد و دیگری مربع شکل است. کدام‌یک مقدار بیشتری شن در خود نگه می‌دارد؟ می‌توان با خط‌کشی اندازه گرفت و پاسخ را با عدد به‌دست آورد. اما انسان‌ها با اعداد خطا می‌کنند. آن‌ها را با شن و بدون شن وزن می‌کنیم، اما از اعداد نیز برای این منظور استفاده می‌بریم.»

کتاب می‌گوید داستان مورد علاقهٔ گالیله داستان ارشمیدس و حمام بود:

«یک روز سلطان **سراکیوز** ارشمیدس را به حضور پذیرفت و گفت: لطفاً به این تاج نگاه کن. آیا از طلا ساخته شده است یا از فلزهایی دیگر؟ می‌خواهم این را بدانم، زیرا پول زیادی بابت آن پرداخته‌ام.

ارشمیدس تاج را بلند کرد. به نظر می‌رسید از طلا ساخته شده باشد. اما شاید فلز دیگری داخل طلا بود. چگونه می‌توانست متوجه این مطلب شود؟ سلطان گفت: به خانه برو و بیندیش. به آزمایش بپرداز. مردم بر این‌اند که آزمایش‌های تو بسیار هوشمندانه‌اند.

ارشمیدس به خانه رفت، و سخت اندیشید. سرانجام خسته شد، و به حمامی عمومی رفت. کنار وانش ایستاد و به آن نگریست. وان کاملاً پر نبود. سپس داخل آن شد، و آب تا لب وان بالا آمد.

هنگامی که داخل وان نشسته بود، فکری ناگهانی به‌خاطرش آمد. به یونانی فریاد زد: **یورکا!** (یافتم!)

به خیابان دوید و به سرعت به خانه رفت. مردم کوچه و خیابان از نبودن لباس بر تن ارشمیدس متعجب شدند. ذهنش از اندیشه‌ای شگفت پر بود، و به‌همین علت لباس پوشیدن را فراموش کرده بود.

آزمایش‌هایی چند در خانه انجام داد. سپس مستقیماً پیش سلطان رفت و گفت: قربان، جواب پرسشتان را یافتم. بگذارید در این مورد آزمایشی بکنم.

مقداری طلا و نقره روی میز کنار دو ظرف گذاشت، و سپس آغاز کرد: وزن تاج شما چهار پوند[3] است. این میلهٔ طلایی نیز چهار پوند وزن دارد، و وزن این میلهٔ نقره‌ای نیز همین اندازه است. اما طلا سنگین‌تر از نقره است، بنابراین میلهٔ نقره باید بزرگ‌تر باشد. درست است؟

سلطان گفت: آری.

ارشمیدس پرسید: خب. مایلید به من کمک کنید؟ این ظرف بزرگ پر از آب است. اگر میلهٔ طلایی را در آن بگذارید، مقداری آب از آن در ظرف کوچک‌تر می‌ریزد. این مقدار آب را اندازه بگیرید. نشانه‌ای داخل ظرف برای این کار کافی است. درست است؟

ارشمیدس میلهٔ طلایی را بیرون آورد. سپس ظرف بزرگ را پر و ظرف کوچک را خالی کرد.

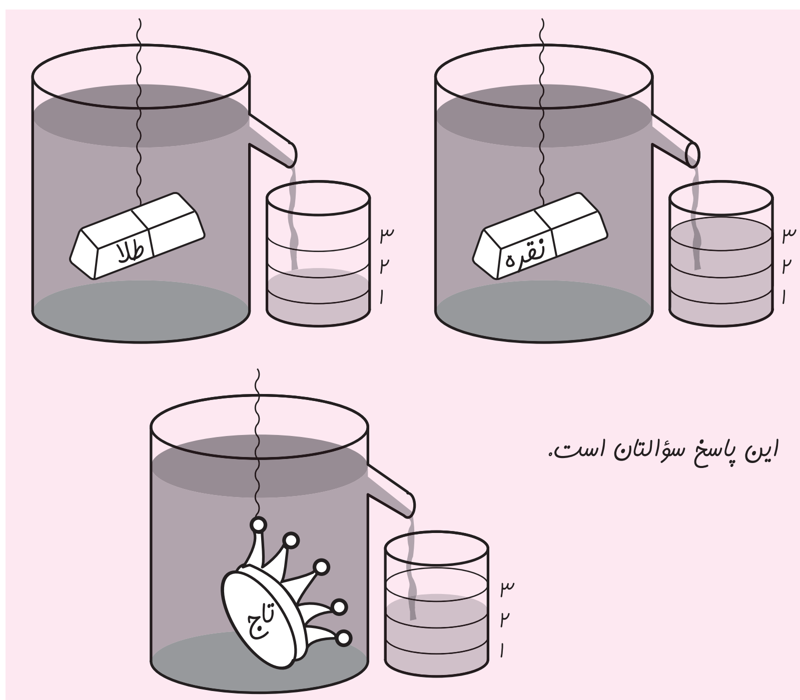
ـ بعد، میلهٔ نقره‌ای را داخل آن بگذارید. هنگامی که آب بیرون ریخت آن را به همان طریق قبل اندازه بگیرید.

سلطان چنین کرد. ارشمیدس ادامه داد: «اکنون تاج را درون آب می‌گذاریم. اگر کاملاً از طلا ساخته شده باشد، آب به نشانهٔ اول می‌رسد. اگر از نقره ساخته شده باشد، آب به نشانهٔ دوم می‌رسد.»

نگاه کردند. آب بین دو علامت قرار گرفت. ارشمیدس فریاد کشید: «ببینید! این پاسخ سؤال شماست. تاج شما کاملاً از طلا ساخته نشده است. نقره هم در آن وجود دارد.»

سراسر کتاب به‌همین ترتیب پر از تجربه‌هایی است که علوم تجربی را به‌کار گرفته‌اند. در مقدمهٔ کتاب می‌خوانیم:

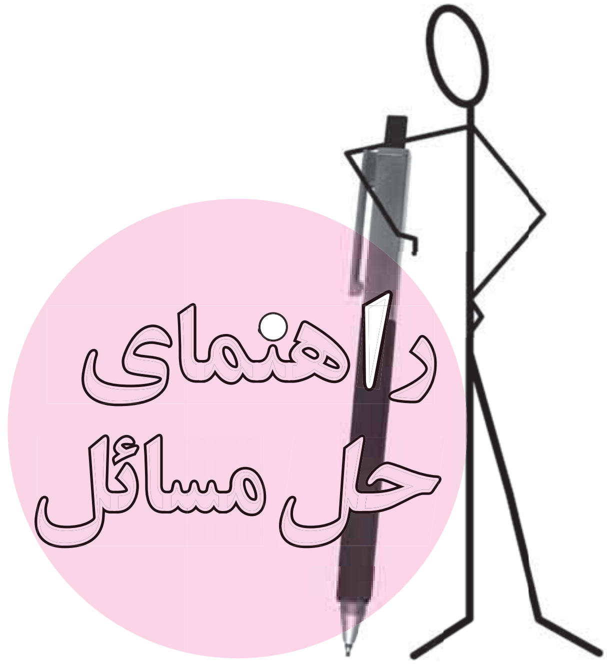
«خواندن کتاب نه‌تنها دانش‌آموزان را می‌سزد، معلمان را نیز سزاوار است تا راه و روش تعلیم خود را عمیق‌تر به بار نهند و تجربه و علم را دقیق‌تر قرار دهند.»



این پاسخ سؤالتان است.

پی‌نوشت‌ها

1. Eyre, Anthony Gascoigne
2. Galileo
۳. هر کیلو ۲/۲ پوند است.



پاسخ‌نامهٔ ریاضی ۳ تجربی

۱. اگر: $۲-x^۲<f(x)\le ۲\cos x$ ، با توجه به اینکه:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰}(۲-x^۲)=۲-۰=۲\\ \lim\limits_{x\to ۰}(۲\cos x)=۲\cos ۰=۲\times ۱=۲\end{cases}$$ ، از قضیهٔ فشردگی داریم:

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲$. پس: $$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۰} f(x)-۱}{\lim\limits_{x\to ۰} f(x)+۱}=\frac{۲-۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۲.
$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۱}{۲x^۲-۳x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)(x^۲+۱)}{(۲x-۱)\cancel{(x-۱)}}$$
$$=\frac{(۱+۱)(۱+۱)}{(۲-۱)}=\frac{۴}{۱}=۴$$

۳.
$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}$$
$$=\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x(x+۱)}\times\frac{۲x-\sqrt{۳-x}}{۲x-\sqrt{۳-x}}$$
$$=\lim_{x\to -۱}\frac{۴x^۲-(۳-x)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}$$
$$=\lim_{x\to -۱}\frac{۴x^۲+x-۳}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}$$
$$=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}(۴x-۳)}{x\cancel{(x+۱)}(۲x-\sqrt{۳-x})}=\frac{-۴-۳}{-۱(-۲-۲)}=\frac{-۷}{۴}$$

۴. با توجه به اینکه: $\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$، داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\tan x-۱)}(۱+\tan^۲ x)}{\cancel{(۱-\tan x)}(۱+\tan x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-(۱+\tan^۲ x)}{۱+\tan x}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

۱. الف) $\boxed{۵}\boxed{۵}\boxed{۴}\Rightarrow n(s)=۵\times ۵\times ۴=۱۰۰$

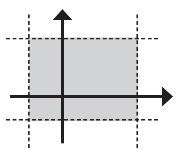
مهره اول — مهره دوم — مهره سوم

ب) $\boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{۳}\Rightarrow n(s)=۵\times ۴\times ۳=۶۰$

ج) $\boxed{۵}\boxed{۵}\boxed{۵}\Rightarrow n(s)=۵\times ۵\times ۵=۱۲۵$

د) S={ر,(پ,ر),(ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,پ,پ),...} ⇒ S نامتناهی است.

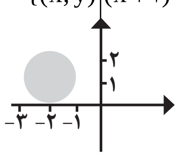
ه) $S=\{(x,y)\,|\,-۱<x,y<۳\}$



⇒ S نامتناهی است.

و) $S=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲}\le ۱\}$

$=\{(x,y)\,|\,(x+۲)^۲+(y-۱)^۲\le ۱\}$



⇒ S نامتناهی است.

ز) پرتاب تاس ← پرتاب ۲ سکه ← مضرب ۳ (۳ یا ۶)

پرتاب تاس ← پرتاب تاس ← در غیر این‌صورت (۱، ۲، ۴ و ۵)

$\Rightarrow n(S)=[۲\times(۲\times ۲)]+(۴\times ۶)=۸+۲۴=۳۲$

۲.

A={(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)}

B={(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)}

الف) $A\cap B=\{(۵,۵)\}$

ب) $A-B=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

ج) $(A-B)\cup(B-A)$

د) $(A\cup B)'$

هـ) $A\cup B$

پاسخنامهٔ حسابان

۱.

$$\cos ۲\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})-\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}.\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}$$
$$=-\frac{۲}{۹}-(\frac{\sqrt{۵}}{۳})(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\frac{-۲-۲\sqrt{۱۰}}{۹}$$

۲.

$$۴\sin x.[\sin(\frac{\pi}{۳}-x)\sin(\frac{\pi}{۳}+x)]$$
$$=۴\sin x[-\frac{۱}{۲}(\cos\frac{۲\pi}{۳}-\cos ۲x)]$$
$$=-۲\sin x(-\frac{۱}{۲}-\cos ۲x)=-۲\sin x(-\frac{۱}{۲}-۱+۲\sin^۲ x)$$
$$=-۲\sin x(-\frac{۳}{۲}+۲\sin^۲ x)=۳\sin x-۴\sin^۳ x=\sin ۳x$$

۳.

الف) $\cot x-۳\tan x=۰\Rightarrow\frac{۱}{\tan x}-۳\tan x=۰$

$$\Rightarrow ۱-۳\tan^۲ x=۰\Rightarrow\tan^۲ x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$
$$=\pm\tan(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

ب) $\sqrt{۳}\sin x+\cos x=\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}$$

۴. الف) می‌دانیم که $\sin^{-۱}(\sin x)=x$ به شرطی که $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$. با توجه به اینکه $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin\frac{\pi}{۳}$، پس:

$$\sin^{-۱}(\sin\frac{۲\pi}{۳})=\sin^{-۱}(\sin\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۳}$$

ب) قرار دهید $\alpha=\cos^{-۱}(\frac{۱}{۵})$، پس $\cos\alpha=\frac{۱}{۵}$ و $۰\le\alpha\le\frac{\pi}{۲}$. اکنون باید مقدار $\sin ۲\alpha$ را به‌دست آوریم. با توجه به اینکه α در ربع اول است، پس $\sin\alpha>۰$.

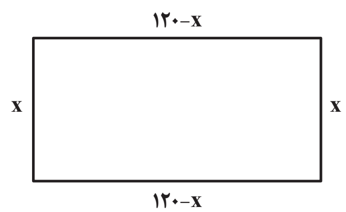
$$\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$
$$\Rightarrow\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۲\sqrt{۶}}{۵})(\frac{۱}{۵})=\frac{۴\sqrt{۶}}{۲۵}$$

پاسخنامهٔ ریاضی دهم

۱. اگر این عدد a باشد، داریم: $۲a=\frac{a^۲}{۳}-۹$. اکنون این معادله را حل می‌کنیم.

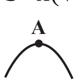
$$۲a=\frac{a^۲}{۳}-۹\overset{\times ۳}{\Rightarrow}۶a=a^۲-۲۷\Rightarrow a^۲-۶a-۲۷=۰$$
$$\Rightarrow(a-۹)(a+۳)=۰\Rightarrow a=۹\ \text{یا}\ a=-۳\overset{a>۰}{\Rightarrow}a=۹$$

۲. طول و عرض این زمین را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



مساحت این زمین عبارت است از:

$S=x(۱۲۰-x)=۱۲۰x-x^۲$



بنابراین نمودار $S=۱۲۰x-x^۲$ به‌صورت یک سهمی به شکل است که A رأس آن است و عرض این نقطه، بیشترین مقدار مساحت را حاصل می‌کند.

$$\text{رأس}\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{-۲}=۶۰$$
$$\Rightarrow S=۱۲۰(۶۰)-(۶۰)^۲=۷۲۰۰-۳۶۰۰=۳۶۰۰$$

و زمین باید مربع شکل به ضلع ۶۰ باشد.

۳.

الف)
$$\begin{cases}x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)=۰\\ \quad\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x^۲+x+۱=۰\Rightarrow\Delta=-۳<۰\end{cases}\\ -x^۲+x-۲=۰\Rightarrow\Delta=-۷<۰\end{cases}$$

x		۱	
$(x-۱)$	$-$	۰	$+$
$x^۲+x+۱$	$+$		$+$
$-x^۲+x-۲$	$-$		$-$
$\frac{x^۳-۱}{-x^۲+x-۲}$	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow x\leq ۱$

ب) $\left|x-\frac{۲}{۳}\right|+۱<\frac{۵}{۳}\Rightarrow\left|x-\frac{۲}{۳}\right|<\frac{۵}{۳}-۱$

$$\Rightarrow\left|x-\frac{۲}{۳}\right|<\frac{۲}{۳}\Rightarrow-\frac{۲}{۳}<x-\frac{۲}{۳}<\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{+\frac{۲}{۳}}\Rightarrow ۰<x<\frac{۴}{۳}$$

۴.

$$\begin{cases}(۰,۲)\Rightarrow ۲=a\cancel{(۰)}+b\cancel{(۰)}+c\Rightarrow\boxed{c=۲}\\(-۱,۰)\Rightarrow ۰=a(۱)+b(-۱)+۲\Rightarrow a-b=-۲\\(۲,۰)\Rightarrow ۰=a(۴)+b(۲)+۲\Rightarrow ۴a+۲b=-۲\end{cases}$$

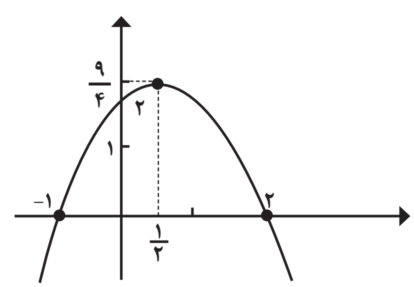
$$\Rightarrow\begin{cases}۲a\cancel{-۲b}=-۴\\۴a\cancel{+۲b}=-۲\end{cases}$$

$$\oplus\quad ۶a=-۶\Rightarrow\boxed{a=-۱}$$

$$a-b=-۲\overset{a=-۱}{\Rightarrow}-۱-b=-۲\Rightarrow\boxed{b=۱}$$

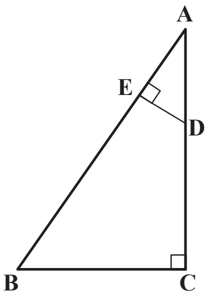
پس: $y=-x^۲+x+۲$. این سهمی را با یافتن سه نقطه از آن‌که یکی از این نقاط، رأس آن است، رسم می‌کنیم.

x	$y=-x^۲+x+۲$
-۱	۰
$\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۹}{۴}$
۲	۰



پاسخنامهٔ هندسهٔ پایهٔ دهم

۱. مسئله را به این صورت مدل‌سازی می‌کنیم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AC=۴، AB=۵، DE⊥AB و DE=۰/۶. هدف یافتن طول DC است. ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس BC را می‌یابیم و سپس به کمک تشابه مثلث‌های ADE و ABC، طول AD و از آنجا DC را به‌دست می‌آوریم:



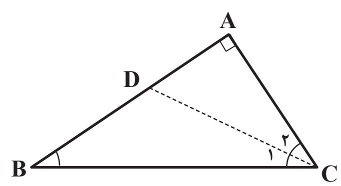
$$AB^۲=AC^۲+BC^۲\Rightarrow ۲۵=۱۶+BC^۲\Rightarrow BC=۳$$

$$\hat{A}=\hat{A},\hat{E}=\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\Delta ADE\sim\Delta ABC$$

$$\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{۰/۶}{۳}=\frac{AD}{۵}\Rightarrow AD=۱\Rightarrow DC=۳$$

یعنی مبدأ خیابان فرعی در فاصلهٔ ۳ کیلومتری از انتهای آن واقع است.

۲. با توجه به مفروضات مسئله داریم: $AB^۲+AC^۲=BC^۲$.

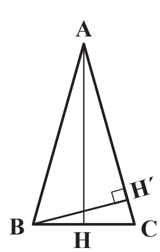


در نتیجه طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس، $\hat{A}=۹۰^\circ$ علاوه بر آن: $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه: $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$. بنابراین اگر CD نیمساز زاویهٔ C باشد، آن‌گاه: $\hat{C}_۱=\hat{B}=۳۰^\circ$ و بنابراین: CD=BD. حال با توجه به قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\overbrace{AD+BD}^{AB=۴}}{BD}=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow BD=۲/۵\Rightarrow CD=۲/۵$$

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، AH را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم و سپس به کمک مساحت مثلث، طول ارتفاع BH´ را می‌یابیم.



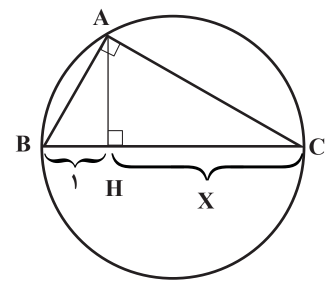
$$BH = HC = \frac{BC}{۲} = ۲ \qquad \Delta ABH : AH^{۲} + BH^{۲} = AB^{۲}$$

$$\Rightarrow AH^{۲} + ۴ = ۶۴ \Rightarrow AH^{۲} = ۶۰ \Rightarrow AH = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH.BC = \frac{۱}{۲} BH'.AC$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۵} \times ۴ = ۸BH' \Rightarrow BH' = \sqrt{۱۵}$$

۴. در امتداد پاره‌خط به طول x، پاره‌خطی به طول واحد (۱) رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به قطر BC=x+1 می‌کشیم.



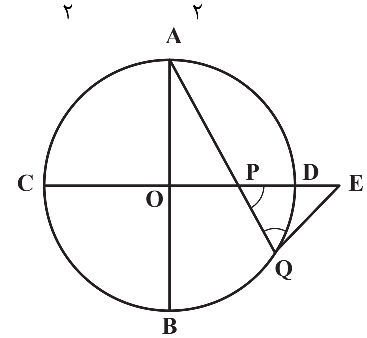
از نقطهٔ H روی BC عمودی خارج می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. طبق ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AH^{۲} = BH.HC \Rightarrow AH^{۲} = x,\ AH = \sqrt{x}$$

پاسخ‌نامهٔ هندسهٔ ۲

۱. زاویهٔ ظلی Q برابر است با:

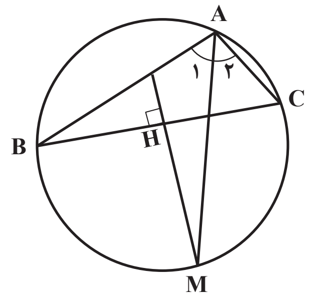
$$\hat{Q} = \frac{\overset{\frown}{AQ}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DQ}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DQ}}{۲}$$



و زاویهٔ داخلی P نیز برابر با همین است: $\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DQ}}{۲}$

بنابراین: $\hat{P} = \hat{Q}$ و از آنجا: PE=QE.

۲. فرض می‌کنیم عمودمنصف BC، دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ M قطع کند. چنانچه می‌دانیم، عمودمنصف هر وتر، از مرکز دایره می‌گذرد و کمان آن وتر را نیز نصف می‌کند. بنابراین: $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BM}$.



حال M را به A وصل می‌کنیم و از آنجا داریم: $\hat{A}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{CM}}{۲}$ و $\hat{A}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{BM}}{۲}$ و در نتیجه: $\hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}$ و یعنی AM نیم‌ساز A است.

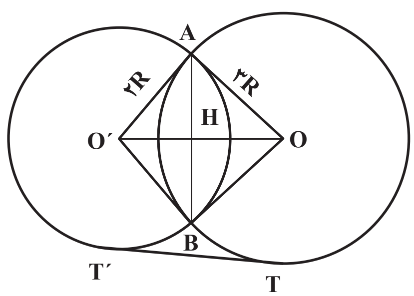
۳. می‌دانیم خط‌المرکزین هر دو دایره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. (چرا؟)

بنابراین داریم: AH=BH=R و در نتیجه:

$$OH = \sqrt{۹R^{۲} - R^{۲}} = ۲\sqrt{۲}R,\ O'H = \sqrt{۴R^{۲} - R^{۲}} = \sqrt{۳}R$$

$$\Rightarrow d = OO' = (۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳})R,\ TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

$$= \sqrt{(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳})^{۲}R^{۲} - R^{۲}} = \sqrt{۱۰ + ۴\sqrt{۶}}R = (\sqrt{۶} + ۲)R$$



پرسش‌های پیکارجو! ؟

به چند طریق می‌توان از مجموعهٔ زیر یک سه‌تایی انتخاب کرد که هر سه عدد مضرب ۹۱ باشند و مضرب ۱۰۱ نباشند؟

$$A = \left\{ ۱, ۱۱, ۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{\text{۱۳۹۵ رقم}} \right\}$$

الف) ۲۰۵۴۳۶۰

ب) ۲۶۰۱۳۰

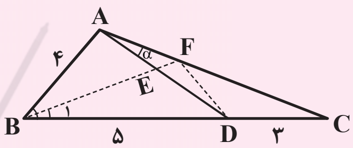
ج) ۲۰۲۷۷۹۵

د) ۲۴۶۹۰۵

هـ) ۲۵۳۴۶۰

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. نیم‌ساز زاویهٔ B را رسم می‌کنیم تا AD را در E و AC را در F قطع کند. F را به D وصل می‌کنیم. اکنون با توجه به قضیهٔ نیم‌سازها در مثلث ABC، طول‌های AF و FC را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{AF}{FC}=\frac{AB}{BC}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{AF+FC}^{AC}}{FC}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \frac{۶}{FC}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow FC=۴, AF=۲$$

حال می‌بینیم که:

$$CF.CA=۴\times۶=۲۴, CD.CB=۳\times۸=۲۴$$

$$\Rightarrow CF.CA=CD.CB$$

بنابراین از A، F، D و B دایره‌ای می‌گذرد و AFDB محاطی است. در نتیجه زاویه‌های α و $B_۱$ در این دایرهٔ محاطی رو به یک کمان و با هم برابرند و در نتیجه:

$$\hat{B}=۲\hat{B}_۱=۲\alpha\Rightarrow\beta=۲\alpha$$ (گزینهٔ ج)

۲. طبق فرض داریم:

$$(۴۲۳)_x=(۲۲۱)_y$$

$$\Rightarrow ۳+۲x+۴x^۲=۱+۲y+۲y^۲$$

$$\Rightarrow ۲y^۲-۴x^۲+۲y-۲x-۲=۰$$

$$\Rightarrow y^۲-۲x^۲+y-x-۱=۰$$

$$\Rightarrow y^۲+y-۲=۲x^۲+x-۱$$

$$\Rightarrow (y-۱)(y+۲)=(۲x-۱)(x+۱)$$

و با توجه به اینکه: y≤۹ و ۲≤x با آزمایش مقادیر مختلف، نتیجه می‌شود که: x=۵ و y=۷ و x+y=۱۲. چون مقدار این عدد در مبنای ده مساوی ۱۱۳ است، لذا در مبنای ۱۲ به‌صورت ۹۵ نوشته می‌شود (گزینهٔ ج).

۳.

$$۴x+۵y=۷\Rightarrow ۴x=۷-۵y, x=\frac{۷-۵y}{۴}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۸-۴y-y-۱}{۴}=۲-y-\frac{y+۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y+۱=۴k,\ y=۴k-۱$$

$$\Rightarrow x=۲-(۴k-۱)-k\Rightarrow x=۳-۵k, k\in Z$$

$$S=۵|x|-۳|y|=۵|۳-۵k|-۳|۴k-۱|$$

با تعیین علامت مقادیر داخل قدرمطلق‌ها و با توجه به صحیح بودن k، حالت‌های متفاوت زیر بررسی می‌شوند:

$$k\le ۰: S=۵(۳-۵k)-۳(۱-۴k)=-۱۳k+۱۲$$

$$k\ge ۱: S=۵(۵k-۳)-۳(۴k-۱)=۱۳k-۱۲$$

بنابراین در حالت اول: S≥۱۲ و در حالت دوم: S≥۱ و لذا می‌نیمم S مساوی ۱ است (گزینهٔ ج).

۴. با توجه به نامساوی واسطه‌های مربعی و حسابی $(\frac{a+b}{۲}\le\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}})$

با فرض: $a=\sqrt{۱-x^۲}$ و $b=\sqrt{۱-y^۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-y^۲}}{۲}\le\sqrt{\frac{۱-x^۲+۱-y^۲}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲-x^۲-y^۲}{۲}}=\sqrt{\frac{۲-(x+y)^۲+۲xy}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۱+۲xy}{۲}}\Rightarrow\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-y^۲}\le\sqrt{۲+۴xy}$$

اما با توجه به نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی نیز داریم:

$$\frac{x+y}{۲}\ge\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow\sqrt{xy}\le\frac{۱}{۲}, xy\le\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴xy\le ۱$$

$$\Rightarrow\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-y^۲}\le\sqrt{۳}$$ (گزینهٔ الف)

۵. می‌دانیم که: ۱۱۱۱۱۱=۹۱×۱۲۲۱. بنابراین هر عددی که شامل 6m رقم ۱ باشد، بر ۹۱ بخش‌پذیر است و می‌توان به سادگی نشان داد: عددهایی که شامل ۵ رقم ۱ و کمتر از آن باشند، مضرب ۹۱ نیستند. اما همچنین داریم:

$$\underbrace{۱۱۱...۱}_{\text{۱۲ رقم}}=(۱۱۱۱۱۱)+۱۰^۶(۱۱۱۱۱۱)$$

$$=۱۱۱۱۱۱\times۱۰۰۰۰۰۱$$

$$=۱۱۱۱۱۱\times۱۰۱\times۹۹۰۱$$

پس عددهایی که شامل 12m رقم ۱ باشند، هم بر ۹۱ و هم بر ۱۰۱ بخش‌پذیرند. لذا باید از مجموعهٔ ۱۳۹۵ عضوی فوق عددهایی را انتخاب کنیم که تعداد رقم‌های آن‌ها مضرب ۶ باشد و مضرب ۱۲ نباشد که برابر است با:

$$\left[\frac{۱۳۹۵}{۶}\right]-\left[\frac{۱۳۹۵}{۱۲}\right]=۲۳۲-۱۱۶=۱۱۶$$

و تعداد سه‌تایی‌هایی که از این ۱۱۶ عدد می‌توان انتخاب کرد برابر است با:

$$\binom{۱۱۶}{۳}=\frac{۱۱۶\times۱۱۵\times۱۱۴}{۶}=۲۵۳۴۶۰$$ (گزینهٔ هـ)

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

درودی دیگر بر همهٔ خوانندگان و دوستداران «مجلهٔ ریاضی برهان»، دانش‌آموزان عزیز و دیگر یاران مجله که با ما به طریق‌های متفاوت در ارتباط هستند. نامه‌ها و ایمیل‌های دیگری در این فاصله که مجلهٔ شمارهٔ ۴ را آماده می‌کردیم، به‌دست ما رسید که به بعضی از آن‌ها اشاره‌ای می‌کنیم:

● دوست و همکار گرامی، جناب آقای **سعید چتر آبنوس**، از شهر شیراز

مقاله‌تان با عنوان «حدهای به ظاهر بی‌نهایت ولی نامعلوم» به‌دست ما رسید. بدون تعارف باید بگوییم که این‌گونه مطالب که بی‌شباهت به بخشی از یک جزوهٔ درسی حساب دیفرانسیل دورهٔ پیش‌دانشگاهی نیستند، با اهداف مجلهٔ برهان به کلی در تناقض هستند. برای اطلاع شما و سایر دوستان و به‌خصوص همکارانی که قصد دارند مطلب برایمان ارسال کنند، برای چندمین‌بار نکاتی را متذکر می‌شویم:

۱. از اشارهٔ مستقیم به مباحث درسی یا نکات مرتبط با آن‌ها به شیوهٔ کتاب‌های کمک‌درسی و نکته و تست، جداً خودداری کنید.

۲. حتی‌الامکان از پرداختن به مباحث دورهٔ پیش‌دانشگاهی پرهیز کنید، مگر بحث‌های کاربردی که لااقل برای بخشی از دانش‌آموزان (علاقه‌مندان به رشتهٔ ریاضی و داوطلبان المپیادهای ریاضی) جذابیت دارند (مانند مباحث ریاضیات گسسته: نظریهٔ گراف، ترکیبیات و...). زیرا این مباحث به تشخیص مسئولان «دفتر تألیف کتب درسی» در حال خروج از دورهٔ دبیرستان و انتقال به دوره‌های دانشگاهی هستند.

۳. به‌جای اشارهٔ مستقیم به مباحث درسی، سعی کنید به کاربردهای آن‌ها بپردازید. اگر هم می‌خواهید مقاله‌ای کاملاً تخصصی دربارهٔ موضوعی بنویسید، لااقل به بحث‌هایی بپردازید که در کتاب درسی یا کتاب‌های کمک‌درسی به آن‌ها اشاره‌ای نشده است.

۴. حتی‌الامکان از زبان «دستوری ـ گزاره‌ای» در ارائهٔ مطلب خودداری کنید. به‌جای آن می‌توانید از زبان «روایت ـ داستان» استفاده کنید تا مطلبتان جذاب‌تر شود. یا اینکه با طرح یک پرسش یا یک مسئله شروع کنید و به آرامی و با ایجاد انگیزه و نیاز در خواننده به تدریج وارد بحث شوید.

۵. به مباحث تاریخی و فلسفی موضوع‌های مورد بحث توجه کنید. با اشاره به آن‌ها می‌توانید مطلبتان را جذاب‌تر کنید.

● همکار گرامی، آقای **رضا محمدیان بارانلو**، از استان آذربایجان‌شرقی

توجه شما را هم به نکات اشاره شده در پاسخ قبلی جلب می‌کنیم.

● همکار محترم، خانم **زهرا شاه‌محمدی**، از گروه‌های آموزشی استان تهران

با سپاس از لطفتان، تصحیح مقاله‌تان با عنوان تربیع و کاربردهای آن به دستمان رسید. ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آتی آن را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

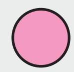
● همکار گرامی، آقای **امین کشاورز** از شهر شیراز

با سپاس از لطفتان، مطلب کوتاهتان دربارهٔ ارائهٔ راه‌حلی دیگر برای یک مسئلهٔ مشهور هندسه به دستمان رسید و در یکی از شماره‌های آینده آن را می‌آوریم. همکار گرامی تلاش کنید که با استفاده از تجاربتان در امر آموزش به ارائهٔ مقالات کاربردی و مفید برای دانش‌آموزان بپردازید. با امید به ارتباط بیشتر، شما و همهٔ دوستان مجله را تا شمارهٔ آینده به خدای مهربان می‌سپاریم.

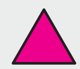
پاسخ ایستگاه‌های اندیشه

ایستگاه اول: بازی با جدول‌های اعداد!

بازی اول:

 = ۳

 = ۶

 = ۴

 = ۵

بازی دوم:

۸۱ — ۶۳ — ۴۹ — ۱۶ — ۲۵

به غیر از ۶۳ بقیهٔ اعداد مربع کامل هستند.

۵۲ — ۶۲ — ۶۵ — ۹۱ — ۳۹

به غیر از ۶۲، بقیهٔ اعداد اعداد مضرب ۱۳ هستند.

۴۳ — ۳۳ — ۲۹ — ۲۳ — ۱۹

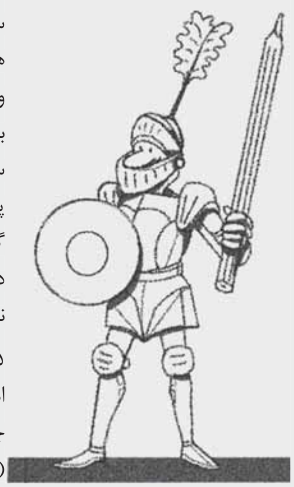
به غیر از ۳۳ بقیهٔ اعداد، عدد اول هستند.

ایستگاه دوم: در میان شوالیه‌ها و سربازها!

۱. نه هیچ شهروندی نمی‌تواند اظهار کند که سرباز است، زیرا هیچ شوالیه‌ای دروغ نمی‌گوید (که بگوید سرباز است) و هیچ سربازی هم نمی‌توان صادقانه بگوید که سرباز است! (زیرا دروغ‌گو است.)

۲. گویندهٔ این سخن مسلماً نمی‌تواند شوالیه باشد، پس فقط یک سرباز می‌تواند این را بگوید. ولی در این صورت باید برادرش شوالیه باشد. (چرا؟)

۳. گویندهٔ این سخن نمی‌تواند سرباز باشد. (چرا؟) پس او شوالیه است و در این صورت حتماً برادرش سرباز است. (چرا؟)



۴. اگر گویندهٔ این سخن سرباز باشد، باید برادرش هم سرباز باشد. (چرا؟) ولی اگر او شوالیه باشد، باز هم باید برادرش سرباز باشد. (چرا؟) پس می‌توان گفت برادرِ گوینده، سرباز است ولی در مورد خودش چیزی نمی‌توان گفت.

۵. برادر گوینده شوالیه است و در مورد خود او چیزی نمی‌توان گفت. (چرا؟)