وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

دورهٔ بیست‌وششم
شمارهٔ ۹۷
آذر ۱۳۹۵
۴۸ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

پیامک: ۲۰۰۰۶۹۹۵۰۶
www.roshdmag.ir

نوشتن را جدی بگیرید!

اول فروردین ۱۳۹۶ چند شنبه است؟!

فی، پی و هرم بزرگ مصر

مسائل مجموع جملات دنبالهٔ فیبوناچی

حرف اول

حمیدرضا امیری

نوشتن را جدّی بگیرید!

سعی کنید آن را به‌صورت یک عادت در وجودتان نهادینه کنید؛ نوشتن را می‌گویم. هر روز بنویسید، هر شب بنویسید، باور کنید نوشتن اعجاز می‌کند.

خداوند به قلم و هر آنچه می‌نویسد قسم خورده است. آرزوهای خودتان را بنویسید تا محقق شوند. شما هدفی را که می‌نویسید خلق خواهید کرد.

وقتی اهدافتان را می‌نویسید، با آن‌ها زندگی می‌کنید و از جایی که باور نمی‌کنید و شاید از مسیری که فکرش را هم نکرده‌اید، به آن‌ها دست می‌یابید.

دوستان خوبم نوشتن را جدی بگیرید و این فرهنگ خوب را در خود ایجاد کنید.

در حدیثی گهربار، پیامبر اکرم(ص) فرمودند: «قید العلم بالکتابة» (بحارالانوار، ج ۵۸، ص ۱۲۴). یعنی با نوشتن، علم را به زنجیر بکشید (در اختیار بگیرید).

فرهنگ و عادت خوبِ نوشتن را در خودتان ایجاد کنید. بکوشید مطالبی را که یاد گرفته‌اید و یا مهم هستند و باید به‌یاد بسپارید، به قلم خودتان، یعنی با زبان خودتان، روی کاغذ بیاورید.

اگر تلاش کنید و خودتان را ملزم کنید به نوشتن، ماندگاری مطالب و دقت و تمرکز شما بیشتر می‌شود. مکتوب کردنِ مطالب باعث می‌شود قدرت حفظ کردن در شما تقویت شود. به این روایت جالب دقت کنید:

«مردی نزد پیامبر از ناتوانی خود در حفظ کردن شکایت کرد. رسول خدا(ص) فرمودند: «استعن بیمینک» (الهیثی، نورالدین/ مجمع‌الزوائد و منبع الفوائد/ ج ۱، ص ۱۵۲): حفظ را با دست راست یاری کن! یعنی، آنچه را می‌شنوی، بنویس.»

موفق و پیروز باشید.

جابر مختاری دهقادی
دبیر ریاضی از استان لرستان

اول فروردین ۱۳۹۶ چند شنبه است؟!

تقویم و ریاضی دبیرستان

روزی داخل دفتر دبیرستان نشسته بودیم که مدیر مدرسه گفت: «نوزدهم آذر انجمن اولیا و مربیان داریم.» همکاران پرسیدند: «چند شنبه می‌شه؟»

یکی از همکاران رفت تقویم بیاورد که برگشت و گفت: «داخل کیفم نیست. خونه جامونده.»

من این سؤال برایم پیش آمد که آیا می‌شود بدون تقویم فهمید هر تاریخی چند شنبه می‌شود؟

وقتی به منزل برگشتم، تقویم را مورد کنکاش قرار دادم و متوجه شدم که تقویم شمسی متناوب است و ۶ ماه اول سال ۳۱ روزه و ۶ ماه دوم سال ۳۰ یا ۲۹ روزه هستند. روز شروع سال نقش مهمی دارد. ابتدا برای هر تاریخی تعداد کل روزها را حساب کردم و بر هفت (دورهٔ تناوب) تقسیم کردم. باقی‌ماندهٔ تقسیم تقریباً روز موردنظر را نشان می‌داد. ولی دنبال فرمولی بودم که برای همگان قابل استفاده و در سطح معلومات دبیرستان باشد. می‌خواستم باقی‌ماندهٔ صفر شنبه و باقی‌ماندهٔ یک یکشنبه و... و باقی‌ماندهٔ شش جمعه را نشان دهد.

سؤال‌های دیگری که برایم پیش آمد این بود که: بحث تقویم یا گاه‌شمار از چه زمانی شروع شده؟ کدام نیاز بشر او را به‌سوی ابداع تقویم سوق داد؟ و آیا ایرانیان در این کشف نقشی داشته‌اند؟ برای اینکه از بحث اصلی دور نشویم، اجازه دهید در پایان مقاله به این سؤالات پاسخ بدهم.

برای اینکه موضوع مورد استفادهٔ همهٔ دانش‌آموزان قرار بگیرد، یکی از مباحث شیرین و جذاب ریاضی، یعنی هم‌نهشتی و چندتا از خواص آن را مطرح می‌کنم.

تعریف هم‌نهشتی: دو عدد صحیح a و b را به پیمانهٔ c هم‌نهشت گویند، در صورتی‌که تفاضل آن‌ها بر c بخش‌پذیر باشد و آن را با نماد $a \overset{c}{\equiv} b$ نشان می‌دهند. در واقع، هرگاه دو عدد صحیح را برهم تقسیم کنیم، مقسوم و باقی‌ماندهٔ تقسیم به پیمانهٔ مقسوم‌علیه هم‌نهشت هستند. مثال: $۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۳$.

۱. طرفین یک هم‌نهشتی را می‌توان در عددی غیرصفر ضرب کرد.

۲. طرفین دو هم‌نهشتی با یک پیمانه را می‌توان با هم جمع کرد.

هر دستگاه تقسیم زمان به سال، ماه، هفته و روز و جدولی که شامل این تقسیمات است، به «تقویم» یا «تاریخ» موسوم است

۳. طرفین یک هم‌نهشتی را می‌توان به توان هر عدد طبیعی رساند.

۴. اگر $a \overset{c}{\equiv} b$ و $b \overset{c}{\equiv} d$، آن‌گاه: $a \overset{c}{\equiv} d$. به عبارت دیگر، هم‌نهشتی خاصیت تعدی دارد.

در هر تاریخی از سال ۱۳۹۵ ماه را m و روز را d در نظر گرفته‌ام، در شش ماه اول سال به باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۱(m-۱)+d بر هفت نیاز داریم. لذا از بحث هم‌نهشتی به پیمانهٔ هفت استفاده می‌کنیم.

$$۳۱(m-۱)+d \overset{۷}{\equiv} r$$

$$۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow ۳(m-۱)+d \overset{۷}{\equiv} r$$

$$۳m+d-۳ \overset{۷}{\equiv} r$$

$$-۳ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow ۳m+d+۴ \overset{۷}{\equiv} r$$

حال اگر تاریخ مربوط به شش ماههٔ دوم سال باشد:

$$۳۰(m-۷)+d+۴ \overset{۷}{\equiv} r$$

$$۳۰ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow ۲(m-۷)+d+۴ \overset{۷}{\equiv} r$$

$$۲m+d-۱۰ \overset{۷}{\equiv} r$$

$$-۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow ۲m+d+۴ \overset{۷}{\equiv} r$$

بنابراین با معلومات دبیرستانی به نتیجه رسیدیم. اگر عدد ۴ را به ۶ تبدیل کنیم، می‌توان رابطه را برای سال ۱۳۹۶ استفاده کرد و در کل با تغییر ۴ می‌توان‌آن را برای هر سالی به‌دست آورد. جدول زیر اعداد مورد نیاز سال‌های متفاوت را نشان می‌دهد:

سال	۱۳۹۹*	۱۳۹۸	۱۳۹۷	۱۳۹۶	۱۳۹۵*	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱*
عدد جایگزین۳	۲	۱	۰	۶	۴	۳	۲	۱	۶

سال	۱۴۰۸	۱۴۰۷*	۱۴۰۶	۱۴۰۵	۱۴۰۴	۱۴۰۳*	۱۴۰۲	۱۴۰۱	۱۴۰۰
عدد جایگزین۳	۰	۵	۴	۳	۲	۰	۶	۵	۴

در این جدول الگویی مشاهده می‌شود. از جمله اینکه سال‌های متمایز شده با ستاره، اسفندی ۳۰ روزه دارند و هر چهار سال یک‌بار تکرار می‌شود. یعنی سال‌های ۱۳۹۱، ۱۳۹۵، ۱۳۹۹، ۱۴۰۳، ۱۴۰۷، ۱۴۱۱، ۱۴۱۵ و... ۳۶۶ روزه هستند. اعداد سطر پایین اعداد حسابی کوچک‌تر از هفت هستند که از صفر شروع می‌شوند. بعد از سال‌های ستاره‌دار دو واحد به عدد قبل اضافه می‌شود و با توجه به مبنای ۷، عدد ۷ را صفر در نظر می‌گیریم. مثلاً سال ۱۳۹۱ عدد ۶ را دارد که ۲ واحد به آن اضافه کنیم و ۸ می‌شود که در مبنای ۷ همان ۱ است. یعنی سال ۱۳۹۲ عدد ۱ را نیاز دارد. می‌توان این جدول را به‌صورت فرمول، به فرمول‌های به‌دست آمده اضافه کرد، ولی در این صورت فرمول به‌دست آمده پیچیده می‌شود و ما را از هدف تحقیق و مقاله دور می‌سازد.

خلاصه

برای سال ۱۳۹۵ می‌توان روز هر تاریخی را از فرمول زیر مشخص کرد:

$$\begin{cases} m \le ۶ \Rightarrow ۳m+d+۴ \overset{۷}{\equiv} r \\ m \ge ۷ \Rightarrow ۲m+d+۴ \overset{۷}{\equiv} r \end{cases}$$

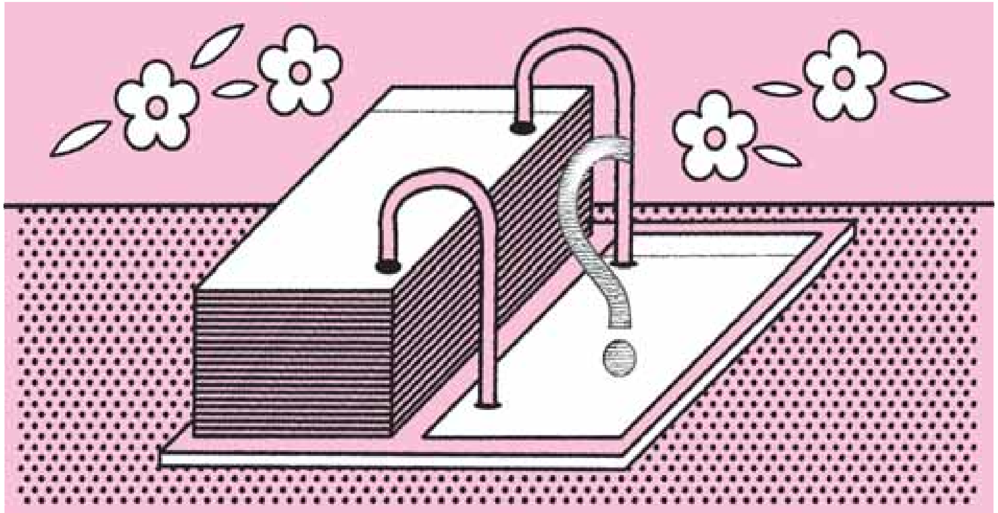
r نشان‌دهنده روز موردنظر است. صفر یعنی شنبه و... و شش یعنی جمعه.

سال	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
عدد جایگزین۳	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه

نتیجه

اگر تاریخ مربوط به شش ماههٔ اول سال ۱۳۹۵ باشد، حاصل ۳m+d+۴ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم باقی‌مانده روز موردنظر را نشان می‌دهد.

اگر تاریخ مربوط به شش ماههٔ دوم سال ۱۳۹۵ باشد، حاصل ۲m+d+۴ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده روز موردنظر را نشان می‌دهد. برای سال‌های دیگر کافی است با توجه به جدول سال‌ها عدد سطر دوم را به‌جای ۴ قرار دهیم.



حـال مجال آن را یافته‌ایـم که مختصری در مورد تاریخچـۀ تقویم مکتـوب کنیم و به تمـدن و تاریخ و دانشمندان کشورمان افتخار کنیم.

سـال ۴۶۷ در زمان سلطنت **جلال‌الدین ملکشاه سلجوقی** و وزارت **خواجه نظام‌الملک**، چون خواستند ترتیب **تقویم**، یعنی محاسبۀ سال و ماه را طبق قوانین نجومی و دقیق معین کنند، گروهی از دانشـمندان آگاه به علـم نجوم را برای ایـن کار انتخـاب کردند و آن‌ها مأمور بودند تا محاسـبه را ترتیب دهند. این محاسـبه، درست‌ترین و دقیق‌ترین محاسبه سال‌شماری و معروف به **تقویم** جلالی است و **خیام** یکی از دانشمندان و گویا سرپرست این گروه بوده است.

هر دسـتگاه تقسیم زمان به سـال، ماه، هفته و روز و جدولی که شـامل این تقسـیمات است، به «تقویم» یا «تاریخ» موسـوم است. همۀ این دسـتگاه‌های قراردادی حساب زمان در نهایت به امور متناوب طبیعی و دوره‌های گردش طبیعـی برمی‌گردند. در واقع باید گفت که تاریخ تقویم از زمانی شروع می‌شود که انسان به حال ماندگاری بـه زراعـت پرداخت؛ در نتیجه متوجه شـد که موسـم بذرافشانی به فواصل منظم همه ساله بازمی‌گردد. سپس با شمردن ایام میان دو موسم متوالی به بذرافشانی پرداخت.

تقویم جلالی یا ملکی

تقویم شمسـی کـه در زمان جلال‌الدین ملکشـاه سـلجوقی تأسیس شـد و در قسـمت اعظم ایران رواج یافت، همان تقویمی اسـت که امروزه رایج است. مبدأ ایـن تقویـم روز جمعه ۹ رمضـان ۴۷۱ هجری قمری است. سال جلالی از اول بهار آغاز می‌شود و ۱۲ ماه ۳۰ روزه و ۵ روز اضافی به دنبال ماه دوازدهم دارد. روز اول سال جلالی، یعنی روز ورود خورشید به اعتدال بهاری، با روز ورود خورشـید به نخسـتین درجۀ حمل انطباق یافت. با این قرارداد، سال جلالی به عکس سال مسیحی که در هر ۱۰ هزار سـال، قریب ۳ روز با سـال شمسی اختلاف پیدا می‌کند، همیشه مطابق با سال شمسی قرار دارد و آن را می‌تـوان دقیق‌ترین تقویم جهان دانسـت، البته سال‌های کبیسه در تقویم جلالی، ثابت نیستند و کبیسه کردن موقوف به نتایج رصد هر سال است.

***منابع**

۱. تقویم سال‌های مختلف

پرسش‌های بیکارجو!

؟

در مثلـث ABC، $\hat{B}=2\hat{C}$ و AB=3BH=3 (H پای ارتفاع رأس A اسـت). طول CH چقدر است؟

الف) ۳

ب) ۴

ج) ۳/۵

د) ۴/۵

هـ) $2+\sqrt{3}$

۱

پروفسور و معادلهٔ محبوبش

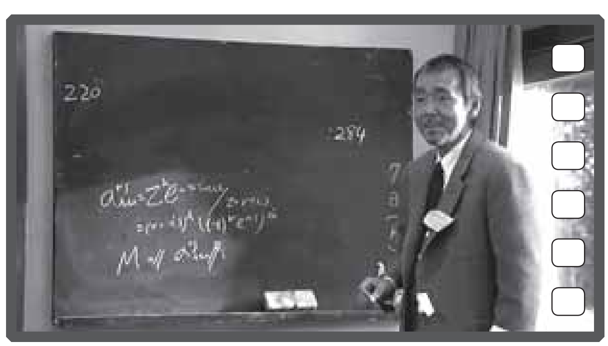
احسان یارمحمدی

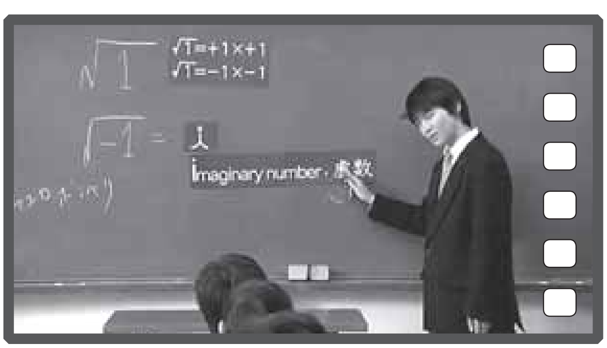
- **اسم فیلم:** پروفسور و معادله محبوبش[۱]
- **کارگردان:** تاکاشی کوئیزومی[۲]
- **تهیه‌کنندگان:** میاکو آراکی[۳] و تِسوتومو ساکورآی[۴]
- **نوشته شده براساس:** رمانی از یوکو اُگاوا[۵]
- **فیلم‌نامه:** تاکاشی کوئیزومی
- **بازیگران:** آکیرا تِراآ[۶]، اِری فوکاتسو[۷] و تاکاناری سایتو[۸]
- **موسیقی:** تاکاشی کاکو[۹]
- **فیلم‌برداری:** هیرویوکی کیتازاوا[۱۰] و ماساهارو یوادا[۱۱]
- **تدوین:** هیدِتو آگا[۱۲]
- **محصول:** ژاپن
- **تاریخ اکران:** ۲۱ ژانویه ۲۰۰۶
- **مدت فیلم:** ۱۱۷ دقیقه
- **زبان فیلم:** ژاپنی

اویلر در شـهر «بازل» سـوئیس در سال ۱۷۰۷ بـه دنیا آمد. بعد از قدم گذاشـتن به عرصهٔ علوم الهی، پیشـهٔ واقعی خود را در ریاضیات یافـت. در این مورد پدرش، که کشیشی از پیروان **کالون** بود و به ریاضیات علاقه داشت، با آموختن پایه‌های موضوع به پسرش، به وی کمـک کرد. پدر، ریاضیات را نزد **یاکوب برنولی**[۱۳] (۱۷۰۵-۱۶۶۵) تحصیل کرده بود و ترتیبی داده شـده بود که پسر نزد **یوهان برنولی**[۱۴] (۱۷۴۸-۱۶۶۷) درس بخواند.

در سـال ۱۷۲۷، وقتـی کـه اویلر فقط ۲۰ سـال داشت، دو دوسـت او **دانیل برنولی**[۱۵] (۱۷۸۲-۱۷۰۰) و **نیکولاوس برنولی**[۱۶] که به آکادمی «سن‌پترزبورگ» که مؤسس آن **پطر کبیر** بود، وابسته بودند، پُستی برای اویلـر در آکادمی روس تأمین کردنـد. دانیل به زودی روسـیه را ترک گفت تا کرسـی ریاضیات شهر بازل را عهده‌دار شود و اویلر سر ریاضی‌دانِ آکادمی شد.

بعد از اعتلا بخشیدن به آکادمی سن‌پترزبورگ به مدت ۱۴ سـال، اویلر دعوتی را که از طرف **فردریک کبیر** بـه عمل آمده بود، پذیرفت تا برای سرپرسـتی آکادمـی پروس بـه «برلین» برود. اویلـر به مدت ۲۵ سـال در آکادمی پروس ماند، ولی شخصیت بی‌آلایش او با نوع پرجلاتری که مورد توجه فردریک بود، تطبیق نکرد و وی سـال‌های زیـادی را در ناگواری‌ها به رنج برد. روس‌ها به اویلر احترام زیادی می‌گذاشتند و حتی بعـد از اینکه وی به پـروس رفت، حقوق کمی برای او می‌فرستادند.






لئونارد اویلر

گرمی احساسات روس‌ها نسبت به او، در تقابل با سردی دربار فردریک کبیر، موجب شد که اویلر در سال ۱۷۶۶ دعوت **کاترین کبیر** را برای بازگشت به آکادمی سن‌پترزبورگ بپذیرد. وی ۱۷ سال باقی‌ماندهٔ عمر خود را در آنجا ماند. اویلر به‌طور کاملاً ناگهانی در سال ۱۷۸۳، وقتی که ۷۶ سال داشت، درگذشت.

اویلر نویسندهٔ کثیرالتألیفی در ریاضیات، و در واقع، پرتألیف‌ترین نویسنده در تاریخ این موضوع است. نام وی به هر شاخه‌ای از این علم پیوسته است. جالب است بدانیم که در بازدهی شگفت‌آور وی، وقتی که در حدود سال ۱۷۶۶، دچار نابینایی کامل شد، کم‌ترین خللی به وی وارد نشد. به کمک حافظهٔ شگفت‌انگیز و توانایی تمرکز حواس حتی با وجود سروصدای زیاد، به کار خلاق خود با دیکته کردن به یک منشی و با نوشتن فرمول‌ها روی تختهٔ بزرگی که منشی‌اش از روی آن رونویسی می‌کرد، ادامه داد. وی ۵۳۰ کتاب و مقاله در طول عمرش منتشر کرد و هنگام مرگش به قدری دست‌نوشته از خود به‌جا گذاشت که جایگاه و اعتبار آکادمی سن‌پترزبورگ را به مدت ۴۷ سال دیگر غنا بخشید. «**انجمن علوم طبیعی سوئیس**»[۱۷] یک چاپ تاریخی از آثار اویلر را، شامل ۸۸۶ مقاله و کتاب، در سال ۱۹۰۹ آغاز و برای ۷۳ جلد با قطع خشتی بزرگ طرح‌ریزی کرد.

سهم اویلر در ریاضیات خیلی زیادتر از آن است که بتوان آن را به تفصیل در اینجا بیان کرد، ولی می‌توان برخی از کارهای او را در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی ذکر کرد. مقدم بر همه، ما رسمیت یافتن نمادهای زیر را به اویلر مدیونیم:

- $f(x)$ به نشانهٔ نماد تابع
- e برای پایهٔ لگاریتم طبیعی
- P برای نصف محیط مثلث ABC
- r برای شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC
- R برای شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC
- $\sum$ برای مجموع‌یابی
- i برای واحدِ انگاری $\sqrt{-1}$

فرمول بسیار مهم $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ را هم به اویلر مدیونیم که به ازای $x=\pi$، به‌صورت $e^{i\pi}+1=0$ درمی‌آید؛ رابطه‌ای که سه عدد از مهم‌ترین اعداد ریاضیات را به هم مربوط می‌کند. با روش‌هایی صرفاً صوری، اویلر به تعداد زیادی رابطهٔ عجیب نظیر $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ دست یافت و توانست نشان دهد که هر عدد حقیقی غیرصفر r (در پایهٔ مفروضی) بی‌نهایت لگاریتم دارد که همهٔ آن‌ها موهومی‌اند، هرگاه $r<0$، و همه جز یکی موهومی‌اند،

اویلر نویسندهٔ کثیرالتألیفی در ریاضیات، و در واقع، پرتألیف‌ترین نویسنده در تاریخ این موضوع است. نام وی به هر شاخه‌ای از این علم پیوسته است

یک ریاضی‌دان حتی یک ریاضی‌دان برجسته، برای اینکه بتواند در جهان و محیط اطراف خود به زندگی بپردازد، لازم و کافی است که از ریاضی به عنوان ابزاری توانمند برای ایجاد راه‌حل‌های منطقی و عقلانی در جهت رشد خود و جامعه بکوشد و از روند اجتناب‌ناپذیر زندگی دوری نورزد

هرگاه $r>0$.

در هندسهٔ مقدماتی دانشگاهی به خط اویلر مثلث برخورد می‌کنیــم، در درس‌های مقدماتی دانشــگاهی دربارهٔ نظریهٔ معادلات، دانشــجویان با روش اویلر برای حل معادلات درجهٔ چهارم آشــنا می‌شــوند، و حتی در مقدماتی‌ترین درس‌های نظریهٔ اعداد، اشخاص با قضیهٔ اویلر و تابع فی ـ اویلر مواجه می‌شــوند. توابع بتا و گاما در حســابان پیشرفته به اویلر منســوب‌اند، گرچه طرح ابتدایی آن‌ها توسط ریاضی‌دان انگلیسی، **جان والیس**[18] (۱۷۰۳-۱۶۱۶) داده شده است. اویلر فکر عامل انتگرال را در حــل معادلات دیفرانســیل بــه‌کار گرفت، روش سیستماتیک معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را ارائه کرد و بین معادلات دیفرانســیل خطی همگن و غیرهمگن تمایز قائل شد.

اویلر یکی از اولین کســانی بــود که نظریه‌ای برای کسرهای مسلسل به‌وجود آورد و در زمینه‌های هندسهٔ دیفرانسیل و حساب تغییرات، سهمی ایفا کرد. او به‌طور قابــل توجهی نظریهٔ اعــداد را غنا بخشــید، در یکی از مقــالات کوتاهش رابطهٔ $v-e+f=2$ دیده می‌شــود که قبلاً بر ریاضی‌دان و فیلســوف فرانسوی، **رِنه دکارت**[19] (۱۶۵۰-۱۵۹۶) معلوم شــده بــود و v تعداد رأس‌ها، e تعــداد یال‌ها و f تعداد وجه‌های هر چندوجهی بســتهٔ ساده را به‌هم ربط می‌دهد. البته زمینهٔ اصلی انتشارات او در پهنــهٔ ریاضیات کاربردی، به‌ویــژه نظریهٔ حرکت ماه، مسئلهٔ سه حجم مکانیک سماوی، رایش بیضوی، هیدرولیک، کشتی‌ســازی، توپخانه و نظریهٔ موســیقی است.

دانش و علاقهٔ اویلر به‌هیچ عنوان فقط به ریاضیات و فیزیک محدود نبود. وی عالِمی برجســته، با دانشــی وسیع در نجوم، پزشکی، گیاه‌شناسی، شیمی، الهیات و زبان‌های شــرقی بود. او آثار نویسندگان برجستهٔ رومی را به دقت می‌خواند. از تاریخ مدنی و ادبی کلیهٔ اعصار و تمامی ملل با اطلاع بود، و آشنایی گسترده‌ای با زبان‌ها و بسیاری از شاخه‌های ادبیات داشت. بدون شک کمک بزرگ او در این موضوعــات گوناگون، حافظهٔ غیرعادی او بود.

ســتایش‌های پــرآب و تابــی، مانند دو مــورد زیر به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان، فیزیک‌دان و اخترشناس فرانسوی، **فرانسوا آراگو**[20] (۱۸۵۳-۱۷۸۶) از اویلر به عمل آمده است:

- اویلــر را می‌توان، بدون هیچ اســتعاره‌ای و قطعاً بدون هیچ اغراقی، تجسم آنالیز دانست.
- اویلــر بی‌هیچ تلاش ظاهری محاســبات خود را انجام می‌داد، درســت به گونه‌ای که انسان نفس می‌کشد و عقاب خود را در هوا نگاه می‌دارد.

اویلــر ۱۳ فرزنــد داشــت. اولین پســر او، **یوهان آلبرِشــت اویلر**[21] (۱۸۰۰-۱۷۳۴) در زمینهٔ فیزیک به شهرتی دست یافت.[22]

اکنــون با توجه به آنچه در بــالا دربارهٔ لئونارد اویلر بیان شد، حتماً حدس زده‌اید که موضوع فیلم پروفسور و معادلهٔ محبوبش دارای ارتباطی با اویلر یا دستاوردهای ریاضی اوســت. در پاسخ به شــما ریاضی‌آموزان بیان می‌کنیم که درست حدس زده‌اید. اما چرایی و چگونگی این پیش‌بینی شما را در ادامهٔ مقاله پی می‌گیریم.

فیلم با این صحنه آغاز می‌شود که یک معلم ریاضی وارد یک کلاس در دورهٔ دبیرســتان می‌شــود و به بیان خاطراتی از دوران ۱۰ سالگی به بعد خود می‌پردازد که سبب شد به ریاضیات علاقه پیدا کند. دورهٔ ۱۰ سالگی **روت** به این صورت اســت که او با مادرش که به‌عنوان خدمتکار در خانه‌های مردم مشغول به‌کار است، زندگی می‌کند. مادر روت برای کار کردن در منزل یک پروفسور

ریاضی که مدرک دکترای ریاضی خود را از دانشگاه کمبریج انگلیس گرفته است، معرفی می‌شود و در اولین برخورد، پروفسور ریاضی از او سؤالاتی دربارهٔ اعداد به شرح زیر می‌پرسد:

پروفسور: شمارهٔ کفشت چند است؟

خدمتکار: ۲۴.

پروفسور: وای چه عدد خاصی، فاکتوریل ۴.

پروفسور: شماره تلفنت چند است؟

خدمتکار: ۵۷۶۱۴۵۵.

پروفسور: گفتی ۵۷۶۱۴۵۵؟ این فوق‌العاده است! این برابر تعداد عددهای اول تا یک میلیارد است!

در صحنه‌ای دیگر پروفسور ساعت مچی‌اش را به خدمتکار نشان می‌دهد و از او می‌خواهد، آنچه را که روی صفحهٔ ساعت مچی نوشته شده است، بخواند. خدمتکار جواب می‌دهد: ۲۸۴. سپس پروفسور بیان می‌کند که می‌توانیم بین ۲۸۴ و ۲۲۰ یک رابطهٔ جالب به‌صورت زیر پیدا کنیم:

۲۸۴=۱+۲+۴+۵+۱۰+۱۱+۲۰+۲۲+۴۴+۵۵+۱۱۰

و

۲۲۰=۱+۲+۴+۷۱+۱۴۲

در واقع ۲۸۴ برابر با مجموع مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ (بـه غیر از ۲۲۰) و ۲۲۰ برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های ۲۸۴ (به غیر از ۲۸۴) است.[۲۳]

در صحنه‌هایی از فیلم روت به‌عنوان معلم ریاضی در کلاس تدریس می‌کند و از جمله مباحثی از ریاضی که مطرح می‌کند می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. تعریف اعداد اول و معرفی مجموعهٔ اعداد اول.

۲. عدد کامل (مانند: ۲۸=۱+۲+۴+۷+۱۴ که از مجموع مقسوم‌علیه‌های خودش به غیر از خود ۲۸ به‌دست می‌آید.)

۳. معرفی و تعریف عدد موهومی $i=\sqrt{-1}$

۴. معرفی عدد π=۳/۱۴

۵. معرفی عدد e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵

۶. معرفی رابطهٔ اویلر به‌صورت: $e^{i\pi}+1=0$

اما آنچه باعث شده است، کارگردان فیلم پروفسور و معادلهٔ محبوبش، فیلم را این‌گونه نام‌گذاری کند و رابطهٔ اویلر را به‌عنوان محور فیلم برگزینند، این است که در رابطهٔ اویلر دو عدد غیرجبری e و π و عدد موهومی $i=\sqrt{-1}$ وجود دارد که همواره برای آن‌ها داریم:

$$e^{i\pi}+1=0 \Rightarrow e^{i\pi}=-1$$

بنابراین تا زمانی که زندگی و رفتار پروفسور متأثر از نوع دیدگاه بستهٔ خود فقط دربارهٔ ریاضیات و اعداد است، نتیجهٔ آن همانی است که از ترکیب اعداد مزبور در رابطهٔ اویلر حاصل می‌شود؛ یعنی مقدار ۱- که حتی از صفر هم بی‌ارزش‌تر است. اما بـا ورود خدمتکار به منزلش و آشـنایی پروفسور با پسر ۱۰ سالهٔ او (روت) و ورود به بازی‌های کودکانه و روند عادی زندگی، می‌بینیم که روند زندگی پروفسور نیز از حالت خشک و یکنواخت و بـی‌روح خود خارج می‌شـود و رویـهٔ تکامل به خود می‌گیرد. این موضوع تا جایی پیش می‌رود که پروفسور اعتراف می‌کند: «هر چند قوانین ریاضی ظریف و دقیق هستند، اما در زندگی روزمره بی‌فایده‌اند. حتی اگر همهٔ ویژگی‌های اعداد اول کشـف بشوند، زندگی کسی بهتر نمی‌شود. بسیاری از کشفیات ریاضی کاربرد عملی پیدا کردند. حتـی از اعداد اول در جنـگ در قالب کدهای رمزی استفاده شد. اما این یک واقعیت تلخ است، چون این هدف ریاضیات نیسـت. تنها هدف ریاضیات کشف حقیقت است.»

کارگردان فیلم در نهایت با گنجاندن این جمله در پایان فیلم قصد تأکید بر این نکته را داشته است که یک ریاضی‌دان حتی یک ریاضی‌دان برجسـته، برای اینکه بتواند در جهان و محیط اطراف خود به زندگی بپردازد، لازم و کافی است که از ریاضی به عنوان ابزاری توانمند برای ایجاد راه‌حل‌های منطقی و عقلانی در جهت رشد خود و جامعه بکوشـد و از رونـد اجتناب‌ناپذیر زندگی دوری نورزد.

از ادامـهٔ بحث دربارهٔ نکات گنجانده شـده در فیلم پروفسور و معادلهٔ محبوبش خودداری می‌کنیم و شما را به تهیه و تماشای این فیلم مفهومی زیبا تشویق می‌کنیم. در ضمن برای دانش‌آموزان رشتهٔ علوم ریاضی در دورهٔ دوم دبیرسـتان نیز کـه قصد دارند در آینـده به انجام تحصیلات مقدماتی دانشگاهی و تکمیلی دانشگاهی در رشـته‌هایی مانند نظریهٔ اعداد، نظریهٔ گراف‌ها و حساب دیفرانسـیل و انتگرال بپردازند، پیشـنهاد می‌کنیم که بخش نخسـت مقاله را که دربارهٔ لئونارد اویلر اسـت، با دقت مطالعه کنند و پیش‌زمینه‌ای برای بررسـی آثار و دستاوردهای لئونارد اویلر برای خودشان فراهم کنند.

اویلر یکی از اولین کسانی بود که نظریه‌ای برای کسرهای مسلسل به‌وجود آورد و در زمینه‌های هندسهٔ دیفرانسیل و حساب تغییرات، سهمی ایفا کرد

*** پی‌نوشت‌ها**

1. The Professor and His Beloved Equation
2. Takashi Koizumi
3. Miyako Araki
4. Tsutomu Sakurai
5. Yoko Ogawa
6. Akira Terao
7. Eri Fukatsu
8. Takanari Saito
9. Takashi Kako
10. Hiroyuki Kitazawa
11. Masaharu Ueda
12. Hideto Aga
13. Jacob Bernoulli
14. Johann Bernoulli
15. Daniel Bernoulli
16. Nicholaus Bernoulli
17. Swiss Society Natural Science
18. John Wallis
19. Rene Descartes
20. Francois Arago
21. Johann Albrecht Euler

۲۲. برگرفته از کتاب آشنایی بـا تاریخ ریاضیـات (جلد دوم)، بـه قلم هاورد و. ایوز که توسـط محمدقاسـم وحیـدی اصل به فارسـی برگـردان شـده و چـاپ نخست آن در سال ۱۳۶۸ در انتشـارات مرکز نشـر دانشـگاهی بـه زیور طبع آراسته شده است.

۲۳. به اعدادی که دارای چنین ویژگی‌هایی باشند، «اعداد دوستدار» می‌گوییم.

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اعداد حقیقی و قدرمطلق

در بخش ۲ آموختیم که یک عدد گویا است، اگر و فقط اگر بتوان آن را به‌صورت عددی اعشاری با تکرار نامتناهی نوشت.

توضیح از مترجم: اعداد روبه‌رو براساس تعریف فوق گویا هستند:

$$۰/\overline{۲}=۰/۲۲۲=\frac{۲}{۹},$$
$$۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}=۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷...=\frac{۱}{۷},$$
$$۰/\overline{۱۲}=۰/۱۲۱۲۱۲...=\frac{۴}{۳۳},$$
$$۰/۱\overline{۶}=۰/۱۶۶۶...=\frac{۱}{۶}$$
$$۰/۲۵=۰/۲۵\overline{۰},$$
$$۱=۰/\overline{۹}=۰/۹۹۹...$$

در هر صورت ما می‌دانیم که اعدادی اعشاری و نامتناهی وجود دارند که (رقم‌های اعشار آن‌ها) تکرار نمی‌شوند. برای مثال، اعداد زیر دارای الگوهایی هستند که به شکل نامتناهی ادامه دارد ولی تکرار نمی‌شود (دورهٔ تناوب ندارند).

$$۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰۰۰۲۰۰۰۰۰...,$$
$$۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵...$$

این اعداد، اعداد گنگ (اصم) نامیده می‌شوند.

تعریف: «عدد گنگ» عددی است که اعشاریِ نامتناهی و غیرتکراری باشد.

ریشهٔ دوم از اعداد صحیح که مربع کامل نیستند، مثال‌هایی دیگر برای اعداد گنگ هستند. برای مثال، $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۷}$ همگی اعداد گنگ هستند. همچنین، نسبت محیط یک دایره به قطرش، یعنی π، یک عدد گنگ است.

تعریف: اجتماع مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد گنگ مجموعهٔ «اعداد حقیقی» است.

هر نقطه از خط اعداد به یک و فقط یک عدد حقیقی، مربوط (وابسته) است و هر عدد حقیقی به یک و فقط یک نقطه از خط اعداد، مربوط (وابسته) است. می‌گوییم که یک تناظر یک‌به‌یک بین اعداد حقیقی و نقاط روی خط اعداد وجود دارد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Rational .... گویا	2. Irrational .... گنگ،اصم
3. Square root .... ریشهٔ دوم	4. Perfect Square .... مربع کامل
5. Ratio .... نسبت	6. Circumference .... محیط
7. Diameter .... قطر	8. Real numbers .... اعداد حقیقی
9. Associated .... مرتبط، وابسته	10. Correspondence .... تناظر
11. Infinite .... نامتناهی	12. Pattern .... الگو

THE REAL NUMBERS AND ABSOLUTE VALUE

- In Chapter 2 we learned that a number is rational if and only if it can be written as an infinitely repeating decimal. However, we know that there are infinite decimal numbers that do not repeat. For example, the following numbers have patterns that continue infinitely but do not repeat.
0.20200200020000200000...
0.123456789101112131415...
- These numbers are called **irrational numbers.**

DEFINITION

- An **irrational number** is an infinite decimal number that does not repeat.
- Other examples of irrational numbers are numbers that are the square root of an integer that is not a perfect square. For example, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, and $\sqrt{7}$ are all irrational numbers. The ratio of the circumference of a circle to its diameter, π, is also an irrational number.

DEFINITION

- The union of the set of rational numbers and the set of irrational numbers is the use of **real numbers.**
- Every point on the number line is associated whit one and only one real number and every real unmber is associated with one and only one point on the number line. We say that there is a one-to-one correspondence between the real numbers and the points on the number line.

ترجمه برای دانش‌آموزان

EXAMPLE 1

- Which of the following numbers is irrational?

$-7,\ \frac{5}{4},\ 2.1\overline{54},\ 0.12131415...$

Solution

- $-7=\frac{-7}{1}$ and $\frac{5}{4}$ are each the ratio of integers and are therefore rational.
- $2.1\overline{54}=2.1545454...$ is a infinite repeating decimal and is therefore rational.
- 0.12131415... is an infinite decimal that does not repeat and is therefore irrational.

Answer

- 0.12131415...

Graphing Inequalities on the Number Line

- In the set of integers, the solution set of an inequality can often be listed.
- For example, when the domain is the set of integers, the solution set of the inequality shown at the right is $\{-1,0,1,2,3,4,5\}$.

$$5<x+7\le 12$$
$$5-7<x+7-7\le 12-7$$
$$-2<x\le 5$$

۱

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

کارآگاهی در کلاس آقای مهریار

بیـــن بچه‌های کلاس به کارآگاه معروف شـــده بـــودم. از بس به راه‌حل‌های آن‌ها ایراد می‌گرفتم. بعضی‌ها هم اسم «شرلوک ریاضی» را برایـــم انتخاب کرده بودند. این شـــوخی‌ها ناراحتم نمی‌کرد و حتی یک حس غرور هم داشـــتم که با این اســـم‌ها صدایم می‌کردند. این را هم می‌دانســـتم که ته دل بچه‌ها هیچ نشـــانه‌ای از تمسخر نیست، مطمئن بودم.

کلاس حسابان داشتیم و نوبت حل تمرین‌های کتاب بود. بچه‌ها تمرین‌هـــای کتـــاب را عموماً بدون مشـــکل حل می‌کردنـــد. به قول خودشـــان تمرین‌ها ساده و آبکی بودند. اما بعضی وقت‌ها هم غافلگیر می‌شـــدند و ســـر یکی دوتا از تمرین‌ها می‌زدند تو خاکی. می‌خواهم داستان یکی از این مسئله‌ها را برایتان تعریف کنم.

در صفحـــهٔ ۷۵ از کتـــاب و در فصـــل دوم آن مســـئلهٔ زیر دربارهٔ ترکیب توابع مطرح شده است:

«اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که: $(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$»

قبل از آنکه وارد داستان اصلی بشوم، بگویم که من حتی به نحوهٔ نوشتن خود مسئله‌ها در کتاب درسی هم ایراد می‌گرفتم و با دبیران به بحث دربارهٔ درستی یا نادرســـتی آن‌ها می‌پرداختم. خوش‌بختانه در اکثر موارد دبیران ریاضی حق را به من می‌دادند و اشـــکال را وارد می‌دانســـتند. مثلاً در همین مسئله یک ایراد در صورت سؤال وجود دارد و بهتر بود که نوشـــته می‌شـــد: **تابع g را...** نه اینکه بنویســـیم **تابع g(x) را...** در واقع هر تابع مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هاســـت و با ضابطه‌اش یکی نیست! بگذریم.

مســـئله‌ها را یکی‌یکی حل می‌کردیم. آقای مهریار از خود بچه‌ها می‌خواســـت که بیایند و مســـئله‌ها را حل کنند. به این مســـئله که رســـیدیم، دو نفر داوطلب شدند که بیایند پای تخته. آقای مهریار با اشارهٔ دست از **حسن** خواست که بیاید و راه‌حلش را بنویسد.

این‌طور وقت‌ها کنجکاوی من عود می‌کند و بچه‌ها هم می‌دانند که کوچک‌ترین خطایی در نوشـــتن راه‌حل داشته باشند، من دستم را بالا می‌برم.

اما راه‌حل حسن:

$$(fog)(x)=x^۲-۴x+۵$$
$$\Leftrightarrow f(g(x))=x^۲-۴x+۵$$
$$\Leftrightarrow (g(x))^۲+۲(g(x))+۲=x^۲-۴x+۵$$
$$\Leftrightarrow (g(x)+۱)^۲+۱=(x-۲)^۲+۱$$
$$\Leftrightarrow g(x)+۱=\pm(x-۲)$$

حالت اول : $g(x)+۱=x-۲\Rightarrow g(x)=x-۳$

حالت دوم : $g(x)+۱=-x+۲\Rightarrow g(x)=-x+۱$

حســـن بعد از نوشتن آخرین تســـاوی، به آقای مهریار گفت که مسئله دو جواب دارد.

از حســـن خوشم آمد که توانســـته بود راه‌حل مسئله را پیدا کند و این‌طـور دقیق آن‌را بنویســـد. توی همین افکار بودم که **ســـروش** دستش را بالا برد و بعد از اجازهٔ دبیر گفت: «آقا راه‌حل ما و جواب‌های ما کمی فرق می‌کند.»

آقای مهریار عاشـــق بحث کردن بود. بنابراین از سروش خواست که او هم بیاید و راه‌حلش را بنویســـد. ســـروش بچهٔ تیزی بود و من احتمال می‌دادم که در محاســـبه شـــاید اشتباه کرده باشـــد. از کنارم که رد شد، یواشکی پرسید «راه‌حل حسن درست است؟» معلوم بود که به شک افتاده بود. گفتم: «حالا راه‌حلت را بنویس تا ببینیم کدام‌یک درست است.»

سروش شروع به نوشتن راه‌حل خود کرد. ابتدای راه‌حلش شبیه به راه‌حل حســـن بود. حسن با لبخند داشت راه‌حل سروش را دنبال می‌کرد. سروش به اینجا که رسید، راهش را از حسن جدا کرد:

$$(g(x))^2+2(g(x))+(-x^2+4x-3)=0$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(-x^2+4x-3)}}{2}$$

$$=-1\pm\sqrt{x^2-4x+4}$$

$$\Rightarrow g(x)=-1\pm\sqrt{(x-2)^2}\Rightarrow\begin{cases}g(x)=-1+|x-2|\\g(x)=-1-|x-2|\end{cases}$$

بعد ســـروش رو به معلم کرد و گفـــت: «آقا ما هم دو جواب پیدا کردیم، اما جواب‌های ما قدرمطلقی درآمده‌اند.»

دو سه تا از بچه‌ها که مثل من کنجکاو شده بودند، عجله کردند و گفتند: «آقا خب معلومه، اگر x-۲ مثبت باشد، جواب $-1+|x-2|$ همان x-۳ اســـت و اگر x-۲ منفی باشـــد، $-1+|x-2|$ همان ۱-x است.»

اما وقتی دیدنـــد که آقای مهریار چهره‌اش درهم رفت، فهمیدند که ســـوتی داده‌اند. چون بارها آقـــای مهریار گفته بود که تابعی مثل $y=-1+|x-2|$، نه با y=x-۳ برابر است و نه با تابع y=۱-x.

آقای مهریار که انگار این بحث‌ها را پیش‌بینی کرده بود و در واقع او بود که بحث را به این نقطه هدایت کرده بود، رو کرد به بچه‌ها و گفت: «کسی نظری نداره؟ بالاخره کدام‌یک از این دو راه‌حل درست است؟»

بچه‌ها دوتا دوتا با هم پچ‌پچ می‌کردند. بعضی‌ها هم منتظر بودند تا نتیجه مشخص شود و دفترشان را پر کنند! اما در این‌جور مواقع ذهن من به یک راهرو تبدیل می‌شـــود که در آن مفاهیم و اشـــیای ریاضی مدام در رفت‌وآمد هستند. در این مورد خاص، چهار تابعی که حسن و سروش پیدا کرده بودند، توی فکر من دست به یقه شده بودند!

بیایید دو جوابی را که حسن پیدا کرده بود، با g_1 و g_2 و دو تابعی را که ســـروش پیدا کرده بود بـــا g_3 و g_4 نمایش بدهیم. آقای مهریار گفت: «بچه‌ها چطور می‌تونیم بفهمیم که جواب‌های به‌دســـت آمده درست‌اند یا نه».

همهٔ بچه‌ها با هم گفتند «امتحان می‌کنیم.»

جالب بود که همه این‌را می‌دانستند، اما کسی هنوز شروع نکرده بود. من که در این فاصله جواب‌ها را در شـــرایط مسئله امتحان کرده بودم، گفتم: «آقا ما امتحان کردیم. هر چهار تا تابع در شرایط مسئله صدق می‌کنند و درست هستند.»

بچه‌هـــا، به‌خصوص آن‌هایـــی که هر دو راه‌حل را نوشـــته بودند، نفس راحتی کشـــیدند. آقای مهریار که مانند شـــخصیت اصلی فیلم «مردی که زیاد می‌دانســـت»، توانســـته بود بحث را به اینجا برساند، گفت: «بله همهٔ توابع جواب‌های مطلوب هستند و در شرایط مسئله صدق می‌کنند، اما...»

صـــدای زنگ بلند شـــد. بچه‌ها منتظـــر بودند که آقـــای مهریار جمله‌اش را تمام کند، اما ایشـــان سکوت کرد. یکی از بچه‌ها پرسید: «آقا تو امتحان نهایی کدام راه‌حل را بنویسیم؟» آقای مهریار همیشه با شـــنیدن این‌جور ســـؤال‌ها ناراحت می‌شـــد. البته این ناراحتی در چهره‌اش پنهان بود و بچه‌ها متوجه ناراحتی او نمی‌شـــدند. تنها یک کارآگاه می‌تونســـت متوجـــه این‌جور حالت‌ها در معلم بشـــود. آقای مهریـــار گفت: «البته این ســـؤال در امتحان نهایی هیچ‌وقت نیامده و نخواهد آمد، اما شـــما بهتر است ملاکتان امتحان نهایی نباشد. نکتهٔ دوم اینکه مؤلفان کتاب احتمالاً منظورشان چندجمله‌ای‌ها بوده است و اگـــر اصلاح کوچکی در صورت مســـئله بکنیم و بنویســـیم: «**تابع چندجمله‌ای g را به‌گونه‌ای...**» آن وقت پاسخ حسن، پاسخ درست این مسئلهٔ اصلاح شده خواهد بود.

بچه‌ها از اینکه مسئله ختم به خیر شده بود، راضی بودند، اما من می‌دانســـتم که آقای مهریار همهٔ حقیقت را نگفته است. تقریباً همهٔ بچه‌ها از کلاس خارج شده بودند که خودم را به آقای مهریار رساندم. تا آمدم چیزی بگویم، آقای مهریار پیش‌دستی کرد و گفت: «می‌دانم، می‌دانم چه می‌خواهی بگویی. لابد سؤالت این است که پاسخ مسئله در همان شکل قبلی چه می‌شود؟»

با ســـر تأیید کـــردم و منتظر ایســـتادم. البتـــه حدس‌هایی زده بـــودم. آقای مهریار از چهره‌ام خوانـــده بود و برای همین گفت: «بگو. حدس‌هایت را بگو.»

گفتم: «مسئله بی‌نهایت جواب دارد. درست است؟»

لبخند آخر آقای مهریار دلنشـــین بود و حدسم را تأیید می‌کرد. آقای مهریار در حالی که داشت از کلاس خارج می‌شد آخرین جمله از سناریویی را که نوشته بود، گفت: «درسته. جلسهٔ بعد منتظرم که بیایی و آن بی‌نهایت جواب را برای بچه‌ها توضیح دهی.»

به حق که آقای مهریار کارگردان خوبی بود!

(ادامه دارد)

ردپای دو ثابت ریاضی در هرم بزرگ مصر

اشاره

این مقاله به بررسی ابعاد هرم بزرگ مصر و ارتباط آن با دوتا از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی (فی و پی) می‌پردازد. در نوشتن مقاله از منابع متنوع انگلیسی و فارسی استفاده شده و تمامی محاسبات در نهایت دقت توسط نویسنده انجام گرفته است. مقاله می‌توانست با توجه به گستردگی ویژگی‌های خاص و رمز و رازهای این بنای عظیم، کامل‌تر به این مقوله بپردازد، لیکن محدودیت حجم مقاله این امر را ناممکن ساخت.

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی از ارومیه

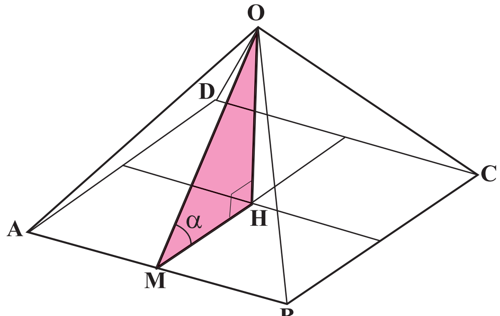
مقدمه

اهرام مصر، کهن‌ترین و یگانه اثر شگرف از عجایب هفت‌گانهٔ ساخت دست بشر در دنیای قدیم‌اند که هنوز پابرجا هستند. از این سه هرم، قدمت هرم بزرگ به ۲۵۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد. این بنای عظیم بیش از چهارهزار سال است که فیلسوفان، دانشمندان و جهانگردان را از نقاط مختلف جهان مجذوب خود ساخته است. دلیل جذابیت آن را می‌توان در این پرسش جست‌وجو کرد که: «مصریان قدیم چگونه و چقدر بر مفاهیم ریاضی و اصول مهندسی مسلط بوده‌اند که توانسته‌اند چنین اثری خارق‌العاده با این همه رمز و راز و پیچیدگی‌های خاص هندسی پدید آورند؟»

در این مقاله به دنبال ردپای دو مورد از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی، یعنی φ (فی) و π (پی) در هرم بزرگ خواهیم بود و سعی خواهیم کرد، ارتباط این دو ثابت را با ابعاد هرم بررسی کنیم و با گوشه‌ای از ریاضیات حاکم بر این بنای عظیم آشنا شویم.

مشخصات هرم بزرگ

تمام هرم‌هایی که مصریان باستان ساخته‌اند، قاعده‌ای مربع‌شکل دارند. «هرم بزرگ»[1] نیز یک هرم مربعی است که برای آشنایی با ابعاد آن ابتدا اجزای یک هرم مربعی مفروض را که در شکل ۱ نمایی از آن به تصویر کشیده شده است، معرفی می‌کنیم. سپس اندازهٔ این اجزا را در هرم بزرگ می‌آوریم.



شکل ۱

قاعدهٔ هرم: مربع ABCD

رأس هرم: نقطهٔ O

محل برخورد پاره‌خط‌هایی را که وسط‌های دو ضلع مقابل قاعده را به‌هم وصل می‌کنند، نقطهٔ H می‌نامیم.

ارتفاع هرم: OH

چهار ضلع قاعده را پایه‌های هرم می‌نامیم: AB=BC=CD=AD.

وجوه جانبی هرم: مثلث‌های OAB، OBC، OCD و OAD

فاصلهٔ رأس هرم تا وسط ضلع پایینی وجه OAB: OM

زاویهٔ شیب هرم: $\angle\alpha$

اندازه‌ها در هرم بزرگ:

طول ضلع قاعدهٔ هرم = ۲۳۰/۴ متر

ارتفاع هرم = ۱۴۶/۵ متر (بلندتر از یک ساختمان ۴۰ طبقه)

(به‌فرم اعشاری) $\angle\alpha = ۵۱^\circ ۵۰' ۴۰'' = ۵۱/۸۵^\circ$

تعداد قطعه سنگ‌های به‌کار رفته = بیشتر از ۲/۵ میلیون قطعه

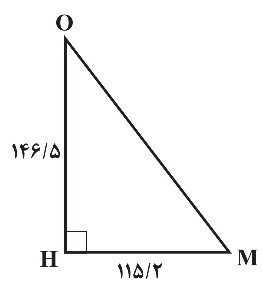
وزن (جرم) تقریبی سنگ‌ها = ۲ تا ۷۰ تن

چون در ادامه به طول OM و مساحت وجوه جانبی نیاز خواهیم داشت، آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$OM^۲=OH^۲+HM^۲$

$\Rightarrow OM^۲=(۱۴۶/۵)^۲+(۱۱۵/۲)^۲$

$\Rightarrow OM\approx ۱۸۶/۴m$



شکل ۲

= مساحت قاعدهٔ هرم

(بیش از ۵ هکتار) مترمربع ۲۳۰/۴×۲۳۰/۴=۵۳۰۸۴/۱۶

مساحت وجوه جانبی: هر چهار وجه مساحت یکسانی دارند. برای محاسبهٔ مساحت وجه مثلثی OAB توجه می‌کنیم که OM میانهٔ وارد بر ضلع AB است و به‌دلیل متساوی‌الساقین بودن OAB، M پای عمود و OM ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB خواهد بود.

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{OM \times AB}{۲} = \frac{۱}{۲}(۱۸۶/۴ \times ۲۳۰/۴) = ۲۱۴۷۳/۲ \text{ مترمربع}$$

φ و هرم بزرگ

نسبت طلایی[۲]: مستطیلی را که نسبت طول به عرض آن برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ یا به‌طور تقریبی ۱/۶۱۸ باشد، «مستطیل طلایی» گویند. این عدد نسبت طلایی نامیده و با حرف (فی) یونانی (φ) نشان داده می‌شود.

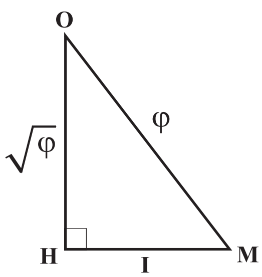
$\varphi \approx ۱/۶۱۸۰۳۰۰۰$

(فی) تنها عدد مثبت دارای این ویژگی است که مربع آن یک واحد از خودش بیشتر است.

$$(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})^۲ = \frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} = ۱+(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})$$

$$\Rightarrow \varphi+۱=\varphi^۲ \quad (۱)$$

مثلث طلایی: با به‌کار بردن «رابطهٔ **فیثاغورس**»[۳] در رابطهٔ (۱) می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌طوری که در شکل ۳ می‌بینیم، بنا کنیم.

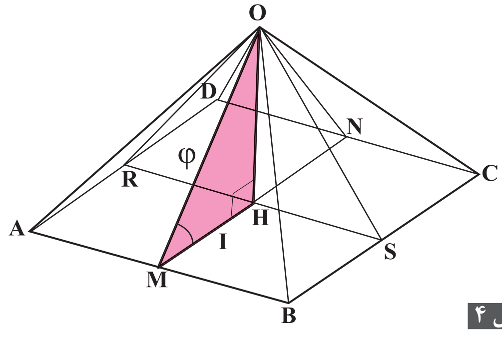


شکل ۳

این مثلث و هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که با آن متشابه باشد (یعنی نسبت وتر به یک ضلع قائم آن φ و به ضلع دیگر $\sqrt{\varphi}$ باشد)، «مثلث طلایی» می‌نامند.

هرمی که برپایهٔ φ بنا شده است:

می‌توان تصور کرد، هرم مربعی روی مثلث قائم‌الزاویه‌ای (در واقع چهار مثلث که دوبه‌دو و پشت‌به‌پشت هم قرار دارند و ضلع مشترک آن‌ها ارتفاع هرم است. در شکل ۴ به مثلث‌های ONH، OSH، ORH، OMH، توجه کنید.) بنا شده که وتر این مثلث فاصلهٔ رأس تا وسط ضلع قاعده است. اگر هرمی مربعی روی مثلث شکل ۳ بنا کنیم، هرم به‌صورت شکل ۴ خواهد بود. گوییم این هرم برپایهٔ φ بنا شده است.



شکل ۴

اکنون به مقایسهٔ هرم بزرگ با هرمی که برپایهٔ φ بنا شده است، می‌پردازیم:

در هرمی که برپایهٔ φ بنا شـده است، داریم: $\sqrt{\varphi}$=۱/۲۷۲= ارتفاع و ۲= طول ضلع قاعده. نسـبت ارتفاع به طول ضلع قاعده برابر ۰/۶۳۶ خواهد بود.

در هرم بزرگ داریم: ۱۴۶/۵= ارتفاع و ۲۳۰/۴= طول ضلع قاعده. اگر نسبت این دو عدد را بیابید، به عدد ۰/۶۳۶ خواهید رسید.

در هرمی که برپایهٔ φ بنا شده است، نسبت مجموع مساحت‌های چهار وجه جانبی به مسـاحت قاعده برابر φ اسـت. طبق محاسبات آغازین مقاله می‌توانیم در هرم بزرگ نیز به چنین نتیجه‌ای برسیم.

مترمربع ۸۵۸۹۲/۸=۲۱۴۷۳/۲×۴=مجموع مساحت‌های وجوه جانبی

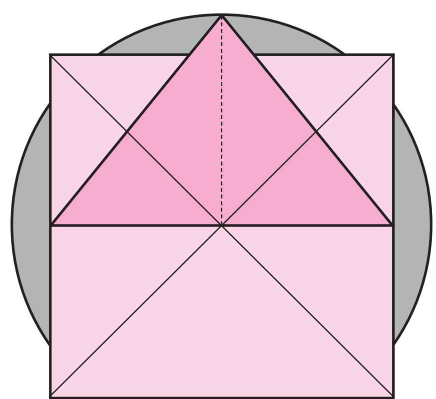
۸۵۸۹۲/۸÷۵۳۰۸۴/۱۶=۱/۶۱۸= φ

در واقع هرم بزرگ را می‌توان یک هرم طلایی نامید.

π و هرم بزرگ

پی: نسبت محیط هر دایره به قطر آن، عددی ثابت است که آن را با حرف پی یونانی (π) نشان می‌دهند و تا ۵ رقم اعشار این‌گونه است:
$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹$

در هرم بزرگ، محیط قاعده با محیط دایره‌ای که شـعاع آن برابر ارتفاع هرم است، یکسان است. (محاسبات لازم را انجام دهید و به این نتیجه برسید.) پس می‌توانیم نتایج زیر را داشته باشیم:



شکل ۵

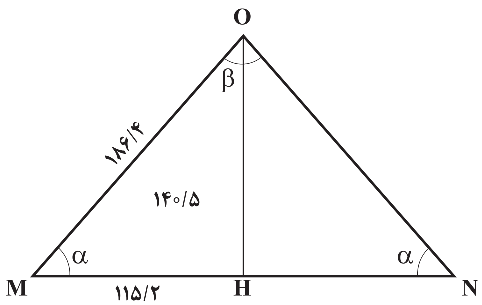
طول ضلع قاعده×۴= محیط قاعده
ارتفاع ×π×۲= محیـط دایره‌ای که شعاع آن برابر ارتفاع هرم است.

$\Rightarrow \pi = ۲ \times \frac{\text{طول ضلع قاعده}}{\text{ارتفاع}}$

یعنی $\pi \approx ۲ \times \frac{۲۳۰/۴}{۱۴۶/۵}$

زاویهٔ شیب هرم:

$$\tan\alpha = \frac{۱۴۶/۵}{۱۱۵/۲} = ۱/۲۷۲$$
$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{Arc}\tan(۱/۲۷۲)$$
$$\Rightarrow \alpha \approx ۵۱/۸۵^\circ$$



شکل ۶

حال با در نظـر گرفتن $\varphi \approx ۱/۶۱۸۰۳۰۰۰$، $\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹$ و با استفاده از جدول نسبت‌های مثلثاتی نتایج جالب زیر را بررسی کنید و به ارتباط هرچه بیشتر هرم بزرگ با این دو ثابت مهم ریاضی پی ببرید:

$$\tan ۵۱/۸۵^\circ \approx \frac{۴}{\pi}$$
$$\cos ۵۱/۸۵^\circ \approx \frac{۱}{\varphi}$$
$$\sin ۵۱/۸۵^\circ \approx \frac{۴}{\pi\varphi}$$

اگـر در مثلث OMN، اندازهٔ زاویـهٔ β را بیابید و $\frac{\alpha}{\beta}$ را چهار برابر کنید، به یکی دیگر از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی خواهید رسـید. این ثابت همان «عدد اویلری» است که تا پنج رقم اعشار به‌صورت زیر است:
$e \approx ۲/۷۱۸۲۸$

$$۴ \times \frac{\alpha}{\beta} \approx e$$

جالب اسـت بدانید که این عدد در سـال ۱۶۱۸ میلادی کشف شـده و جای بسـی تعجب اسـت که در هرم بزرگ مصر که قدمت ۴۵۰۰ ساله دارد، دیده می‌شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Great pyramid
2. Golden ratio
3. pythagorean equation

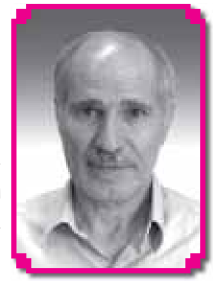
منابع

۱. هندسهٔ ۱، سال دوم دبیرستان. دفتر تألیف کتب درسی. چاپ بیست‌ویکم. ۱۳۹۴.
۲. ریاضی پایهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. دفتر تألیف کتب درسی. چاپ پانزدهم. ۱۳۸۸.

3. meisner, Gary. (August 18, 2012), phi, pi and the Great Pyramid of Egypt at Giza.
4. lemesurier, peter. (1977). the great pyramid Decoded.

۳

همراه با سرشماری ۱۳۹۵!



دکتر عین‌الله پاشا
استاد آمار و ریاضی
دانشگاه خوارزمی
(تربیت معلم)

اشاره

دادهٔ بهتر، زندگی بهتر

شعار سازمان ملل متحد
به مناسبت روز جهانی آمار

در شماره‌های ۱ و ۲ (مهرماه و آبان‌ماه) به تاریخچه و اصول برگزاری سرشماری و نتایج آن در کشورهای مختلف جهان و ایران پرداختیم. حال در این شماره که قسمت آخر این مقاله می‌باشد، به مقولهٔ سرشماری در سال‌های پس از انقلاب اسلامی و آثار و نتایج آن‌ها می‌پردازیم.

ج) سرشماری بعد از انقلاب

چهارمین سرشماری عمومی نفوس و مسکن ایران، با وجود مشکلات و مسائل ناشی از جنگ، در سال ۱۳۶۵ برگزار شد. در این سال جمعیت کشور ۴۹/۴۴۵/۰۱۰ نفر به‌دست آمد که ۲۵/۲۸۰/۹۶۱ نفر آن‌ها مرد و ۲۴/۱۶۴/۰۴۹ نفر آن‌ها زن بود. بر این اساس نسبت تعداد مردان به تعداد زنان برابر ۱/۰۵ اعلام شد.

سیال بودن جمعیت در دوران جنگ، به علاوه تغییرات سریع جمعیتی از سال ۱۳۵۵ تا سال ۱۳۶۵ (جمعیت از ۳۴ میلیون نفر به ۵۰ میلیون نفر رسید)، ایجاب می‌کند که برآورد دقیق‌تری از میزان جمعیت پس از جنگ داشته باشیم. به این منظور در سال ۱۳۷۰ فقط سرشماری جمعیت انجام شد. در این سرشماری، جمعیت کشور ۵۵/۸۳۷/۱۶۳ نفر به‌دست آمد که ۲۸/۷۶۸/۴۵۰ نفر مرد و ۲۷/۰۶۸/۷۱۳ نفر آن زن و نسبت جنسی ۱/۰۶ بود.

سال ۱۳۷۵ سالی بود که می‌باید سرشماری عمومی نفوس و مسکن طبق قانون اجرا می‌شد. مجدداً همانند دوره‌های قبل، در سال ۱۳۷۴ سرشماری‌هایی به‌عنوان نمونه برای آزمایش طرح سرشماری به‌عمل آمد. در سرشماری سال ۱۳۷۵، جمعیت کشور برابر ۶۰/۰۵۵/۴۸۸ نفر شامل ۲۰/۳۹۸/۲۳۵ خانوار به‌دست آمد. از این تعداد ۳۰/۵۱۵/۱۵۹ نفر مرد و ۲۹/۵۴۰/۳۲۹ نفر زن و نسبت مردان به زنان برابر ۱/۰۳ بود.

در سال ۱۳۸۵ سرشماری به روال معمول سال‌های گذشته و البته با بهره‌گیری از تجارب آن‌ها و استفاده از فناوری‌های جدید برای استخراج اطلاعات انجام شد. در این سرشماری جمعیت کشور ۷۰/۴۹۵/۷۸۲ نفر، تعداد مردان ۳۵/۸۶۶/۳۶۲ نفر، تعداد زنان ۳۴/۶۲۹/۴۲۰ نفر و نسبت آن‌ها ۱/۰۴ به‌دست آمد.

سرانجام، آخرین سرشماری همان‌طوری که قبلاً توضیح داده شد، پنج سال بعد، یعنی در سال ۱۳۹۰ برگزار شد و در این سرشماری جمعیت کشور ۷۵/۱۴۹/۶۶۹ نفر به‌دست آمد که تعداد مردان ۳۷/۹۰۵/۶۶۹ نفر و تعداد زنان ۳۷/۲۴۴/۰۰۰ نفر با نسبت جنسی ۱/۰۲ بود.

از نسبت جنسی در سرشماری‌های ۱۳۴۴ تا سال ۱۳۹۰ معلوم می‌شود که این نسبت در جامعه دارای روند نزولی است. این روند نشانهٔ چه چیزی است؟ آن را چگونه تعبیر می‌کنید؟ آیا نشانهٔ خوبی است یا خبر از حادثه می‌دهد؟

آنچه آمد، خلاصه‌ای بود از سرشماری‌های کشور و داستانی که بر آن‌ها گذشته است. ما اینک در حال برگزاری سرشماری سال ۱۳۹۵ هستیم. قطعاً مراحل آزمایشی در شرف انجام‌اند و تدارکات مقدماتی انجام شده و اقدامات لازم برای این سرشماری از ماه‌ها قبل آغاز شده است.

در پایان اطلاعات بیشتری از سرشماری‌های انجام شده، در اختیار خوانندگان قرار می‌دهیم. دقت در اعداد و ارقام و نحوهٔ افزایش یا کاهش آن‌ها حاوی اطلاعاتی است که تعبیر و تفسیر آن‌ها

می‌توانـد روند تغییرات جامعه را به‌خوبی نشـان دهد. برخی از این اطلاعات علائم هشداردهنده و برخی دیگر علائم اطمینان‌بخش‌اند. در کنـار هم قرار گرفتن اطلاعات مربوط به سـال‌های متوالی خود پایه‌ای برای مقایسهٔ تغییرات در جامعه است.

د) خلاصه‌ای از نتایج سرشماری

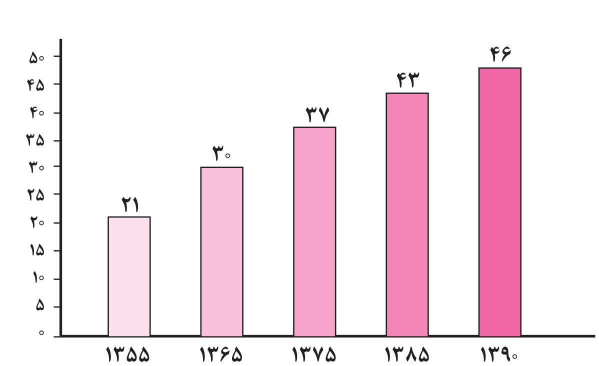
در ایـن بخش تصویری تمام قد از کشـور در قالب اعداد و ارقام ارائه می‌شـود. از آنجا که این تصویرها دربردارندهٔ اطلاعات کشور در سرشماری‌های متوالی است، می‌تواند مبنایی برای مقایسه و مطالعه در رفتار شاخص‌های کشور باشد. تأکید می‌شود، این‌ها تمام اطلاعات حاصل از سرشماری‌ها نیستند.

جدول ۱. جمعیت و خانوار: ۱۳۹۰-۱۳۵۵

سال	جمعیت	مرد	زن	نسبت جنسی	خانوار	بُعد خانوار
۱۳۹۰	۷۵/۱۴۹/۶۶۹	۳۷/۹۰۵/۶۶۹	۳۷/۲۴۴/۰۰۰	۱/۰۲	۲۱/۱۸۵/۶۴۷	۳/۵۵
۱۳۸۵	۷۰/۴۹۵/۷۸۲	۳۵/۸۶۶/۳۶۲	۳۴/۶۲۹/۴۲۰	۱/۰۴	۱۷/۵۰۱/۷۷۱	۴/۰۳
۱۳۷۵	۶۰/۰۵۵/۴۸۸	۳۰/۵۱۵/۱۵۹	۲۹/۵۴۰/۳۲۹	۱/۰۳	۱۲/۳۹۸/۲۳۵	۴/۸۴
۱۳۶۵	۴۹/۴۴۵/۰۱۰	۲۵/۲۸۰/۹۶۱	۲۴/۱۶۴/۰۴۶	۱/۰۵	۹/۶۷۳/۹۳۱	۵/۱۱
۱۳۵۵	۳۳/۷۰۸/۷۴۴	۱۷/۳۵۶/۳۴۷	۱۶/۳۵۲/۳۹۷	۱/۰۶	۶/۷۱۱/۶۲۸	۵/۰۲

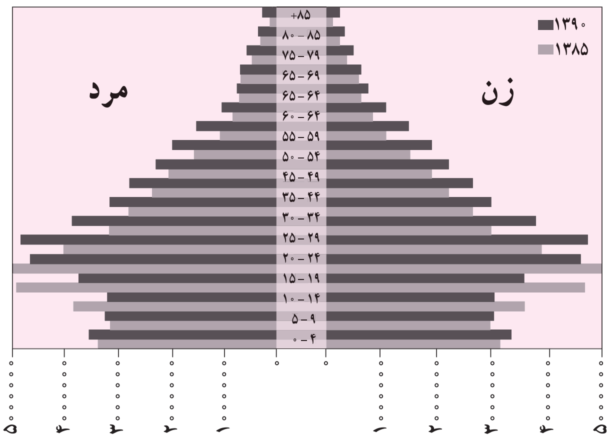
با نگاهی به جدول ۱ ملاحظه می‌شـود که در عرض ۳۵ سال، از ۱۳۵۵ تا ۱۳۹۰، جمعیت بیش از دو برابر شده، نسبت جنسی رو به کاهـش (کم‌کم تعداد مردان و زنان در جامعه برابر می‌شـوند) و بعد خانوار (تعداد افراد خانوار) نیز رو به کاهش است.

نمودار ۱. تراکم جمعیت کشور (نفر در کیلومتر مربع): ۱۳۹۰-۱۳۵۵



در نمودار ۱ دیده می‌شـود که به علـت افزایش جمعیت، تعداد افرادی که در یک کیلومترمربع زندگی می‌کنند، رو به افزایش است. در ۳۵ سال گذشته این شاخص از ۲۱ نفر در سال ۱۳۵۵ به ۴۶ نفر در سال ۱۳۹۰ رسیده است. افزایش تراکم، مسئلهٔ مسکن و رساندن خدمات شـهری از قبیل آب و برق، توسـعهٔ خیابان‌هـا، حمل‌ونقل عمومی، و برخی نکات ضروری دیگر را به دنبال دارد.

نمودار ۲. هرم سنی: ۱۳۹۰-۱۳۸۵



در نمـودار ۲، سـن از ۰ تـا ۸۵ سـال، چهـار سـال بـه چهار سـال تفکیک شـده اسـت و در ردیـف میانـی نمـودار به‌صورت ۰-۴، ۵-۹، ۱۰-۱۴، ...، ۸۰-۸۵، ۸۵+ نوشـته شـده است در طرف راست نمودار، تعداد زنان در هر یک از این طبقات سنی در سال ۱۳۹۰ با رنگ روشن و در سال ۱۳۸۵ با رنگ تیره و به‌همین ترتیب در طرف چپ نمودار اطلاعات مربوط به مردان نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود، تعداد افراد هر طبقهٔ سـنی در سال ۱۳۹۰ بیشتر از تعداد آن طبقه در سال ۱۳۸۵ است. برخی از این مستطیل‌های روشن از مسـتطیل‌های تیره بزرگ‌تر (مثلاً ۱۵-۱۹ یـا ۲۰-۲۴) و در برخی دیگر، این مستطیل‌ها به‌هم نزدیک‌اند (مثلاً ۰-۴ یا ۵-۹).

ایـن اعداد نشـان می‌دهند که ما با پدیدهٔ رشـد جمعیت جوان مواجهه هسـتیم. بنابرایـن، باید پیش‌بینی‌های لازم برای اشـتغال، تحصیل و سـایر ملزومات این سـن و سـال فراهم آید. نکتهٔ دیگری کـه در این هرم اهمیت دارد، کمتربودن تعداد نوزادان دختر از تعداد نوزادان پسـر است. به‌عبارت دیگر، احتمال آنکه فرزندی دختر باشد کمی کمتر از احتمال آن است که پسر باشد. این نکته را می‌توان در اولین مستطیل تیره (یا روشن، فرق نمی‌کند) مربوط به فاصلهٔ سنی ۰-۴ دید. مستطیل سمت چپ کمی بلندتر از مستطیل سمت راست است.

در سرشماری‌ها دیده‌ایم که نسبت جنسی همواره از یک بزرگ‌تر اسـت. آیا این فزونی جمعیت مردان بر زنان همواره ادامه دارد؟ یکی از شاخص‌های توسـعه در هر جامعه‌ای، سنی است که تعداد مردان از تعداد زنان کمتر می‌شـود. هر قدر این سن بالاتر باشد، آن جامعه پیشـرفته‌تر است. به‌نظر شما این شاخص در سال ۱۳۵۵ بهتر بود یا در سال ۱۳۹۰؟

جدول ۲. امید به زندگی به تفکیک جنس: ۱۳۹۰-۱۳۸۵

سال و جنس	۱۳۹۰		۱۳۸۵	
	مرد	زن	مرد	زن
امید به زندگی	۷۲/۱	۷۴/۶	۷۱/۱	۷۳/۱

امید به زندگی نیز یکی از شاخص‌های توسعه است. براساس شاخص امید به زندگی به این سؤال پاسخ می‌دهند که فرزندی که به دنیا می‌آید، انتظار می‌رود چند سال زندگی کند. در جدول ۲ می‌بینیم که در طول پنج سال، از ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰، امید به زندگی هم در مردان و هم در زنان افزایش یافته است. بالا بودن این سن به معنای پیشرفت‌هایی است که در بهداشت، تغذیه و برخی مسائل دیگر ایجاد شده است. زنان امید به زندگی بالاتری نسبت به مردان دارند.

جدول ۳. تحولات خانوار و بعد خانوار: ۱۳۹۰-۱۳۵۵

سال	بعد خانوار		
	کل	شهری	روستایی
۱۳۹۰	۳/۵	۳/۵	۳/۷
۱۳۸۵	۴	۳/۹	۴/۴
۱۳۷۵	۴/۸	۴/۶	۵/۲
۱۳۶۵	۵/۱	۴/۰	۵/۵
۱۳۵۵	۵/۰	۴/۹	۵/۲

با گذشت سال‌ها خانواده‌ها کوچک‌تر می‌شوند. در عرض ۳۵ سال، بعد خانوار ۵ نفری در سال ۱۳۵۵ به ۳/۵ نفر در سال ۱۳۹۰ رسید. این کاهش بعد خانوار به این معنی است که شعار فرزند کمتر، زندگی بهتر که در آن سال‌ها مطرح بود، به اهداف خود رسیده است. پدیدهٔ کوچک‌تر شدن بعد خانوار هم در شهر و هم در روستا واقع شده است، اما بعد خانوار در روستا بیشتر از بعد خانوار در شهر است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، برخی از جمعیت‌شناسان کیفیت زندگی فرزندان را نیز در نظر می‌گیرند. از این‌رو، برای افزایش کیفیت رشد فرزندان، باید تعداد آن‌ها کمتر باشد و همچنین توانایی فراهم کردن امکانات برای فرزندان، بیشتر باشد.

جدول ۴. درصد خانوار برحسب تعداد افراد خانوار: ۱۳۹۰-۱۳۸۵

سال	۱ نفر	۲ نفر	۳ نفر	۴ نفر	۵ نفر و بیشتر
۱۳۹۰	۷/۱	۱۸/۴	۲۷/۱	۲۶/۳	۲۱/۰
۱۳۸۵	۵/۲	۱۵/۳	۲۲/۹	۲۴/۴	۳۲/۲

این جدول هم به نوعی منعکس‌کنندهٔ حقایقی است که در جدول ۳ دیدیم. در جدول ۴ جزئیات بیشتری را می‌توان دید. ۱۸/۴ درصد خانوارها فرزندی ندارند و ۲۷/۱ درصد فقط یک فرزند دارند.

تمام درصدها در سال ۱۳۸۵ کمتر از درصدهای نظیر در سال ۱۳۹۰ است، به‌جز درصد بعد خانوار پنج نفر و بیشتر. بعد خانوار پنج نفر و بیشتر به سمت ابعاد کمتر حرکت کرده است.

جدول ۵. درصد خانوار برحسب جنس سرپرست خانوار: ۱۳۹۰-۱۳۵۵

جنس	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۰
مرد	۹۲/۷	۹۲/۹	۹۱/۶	۹۰/۵	۸۷/۹
زن	۷/۳	۷/۱	۸/۴	۹/۵	۱۲/۱

اینکه سرپرستی خانوار به وسیلهٔ زنان سال‌به‌سال افزایش می‌یابد، هم می‌تواند نشانی از توانایی زنان در تحصیل درامد باشد و هم نشانی از افزایش طلاق و تقبل حضانت فرزندان به‌وسیلهٔ آن‌ها و احتمالاً دلایل دیگر. در هر صورت ممکن است بحث‌های اجتماعی بیشتری در این زمینه لازم باشد.

جدول ۶. تعداد جمعیت دارای تحصیلات عالی و حوزوی به تفکیک جنس: ۱۳۹۰-۱۳۵۵

سال	مرد		زن	
	تعداد	درصد	تعداد	درصد
۱۳۹۰	۵/۴۷۴/۶۸۳	۱۸/۲	۵/۰۲۳/۹۹۲	۱۸/۴
۱۳۸۵	۳/۷۶۹/۷۴۱	۱۳/۱	۳/۱۱۶/۳۹۲	۱۲/۳
۱۳۷۵	۱/۶۵۷/۶۹۹	۷/۴	۹۰۰/۸۹۵	۴/۷
۱۳۶۵	۶۲۱/۵۲۵	۷/۱	۲۲۳/۴۳۶	۳/۳
۱۳۵۵	۳۱۰/۶۳۸	۳/۸	۱۲۲/۷۵۳	۲/۶

در سال ۱۳۹۰، جمعیت دارای تحصیلات عالی و حوزوی زنان از مردان پیشی گرفت. اختلاف در سال ۱۳۸۵ خیلی کمتر و در سال‌های قبل حدود نصف بود. این پدیده به چه معنی است؟

در خاتمه

آنچه در این مقاله آمد، خلاصه‌ای بود از وضعیت کشور که به‌وسیلهٔ اعداد و ارقام به نمایش گذاشته شد. البته مجموعهٔ اطلاعات حاصل از سرشماری‌ها بسیار فراتر از آن است که در اینجا آمد. سؤال‌های سرشماری به نوعی هستند که با سرشماری کشورهای دیگر هم‌خوانی دارند و در نتیجه می‌توان با روی هم‌ریختن اطلاعات حاصل از هر کشور، دورنمایی از وضع جهانی به‌دست آورد. در واقع سرشماری هر کشوری به مثابه بخشی از سرشماری جهان است. البته زمان‌های این سرشماری یکسان نیستند و در اقلام تحت مطالعه نیز اختلافاتی هست، ولی همان قدری که بین سرشماری‌ها اشتراک هست، می‌تواند بازتاب‌دهندهٔ وضعیت جهان باشد.

در ادامه بخشی از نامهٔ دبیرکل سازمان ملل متحد به دولت‌های سراسر دنیا برای بزرگداشت «روز جهانی آمار» (۲۰۱۵/۱۰/۲۰ میلادی/ ۱۳۹۴/۰۷/۲۸ شمسی) آمده است:

«آمار نقش حیاتی در تصمیم‌سازی‌های شاهد ـ پایه در تمام زمینه‌های تاریخی و فرهنگی کشورها، بدون وابستگی به سطح توسعهٔ آن‌ها، ایفا می‌کند. با پذیرش قطعنامهٔ ۶۹/۲۸۲، مجمع عمومی به اهمیت بنیادی ظرفیت آماری ملی ممکن در تولید آمارها و نشانگرهای قابل اعتماد و به موقع اذعان دارد. داده‌های ناب مبنای اغماض‌ناپذیر فرمول‌بندی سیاست‌های آگاهانه و نظارت بر توسعه‌های ۲۰۱۵ به بعد در سطح ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی هستند.

من از تلاش‌هایی که در سال‌های اخیر در بسیاری از کشورها در جهت ارتقای ظرفیت آماری خود تحت رهبری دوایر آمار ملی، در زمینه‌هایی چون سرشماری نفوس و مسکن، و نظارت بر رشد اهداف پیشرفت هزاره انجام شده است، دلگرم شده‌ام. من همچنین از موفقیت قابل توجه بزرگداشت اولین روز جهانی آمار که در ۲۰ اکتبر ۲۰۱۰ با فعالیت‌های سازمان داده شده، در بیش از ۱۳۰ کشور عضو و حداقل ۴۰ سازمان منطقه‌ای و بین‌المللی برگزار شد، هیجان‌زده شده‌ام.

به منظور آنکه از روز جهانی آمار ۲۰۱۵ موفقیت مشابهی بسازیم، از دولت شما به‌عنوان تولیدکننده، کاربر و منتفع شونده اولیه از آمارهای رسمی، دعوت به عمل می‌آورم تا پشتیبانی کامل و به موقع خود را به منظور مثمرثمر واقع شدن تلاش‌های امسال شما نیز معطوف دارد.»

منابع

۱. هوشمند فینی، غلامرضا (۱۳۸۵). مروری بر تاریخچهٔ سرشماری و آمارگیری‌های ایران و جهان از دیرباز تاکنون. سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی استان تهران. چاپ دوم.

۲. گزیدهٔ نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن ۱۳۹۰، مرکز آمار ایران (www.amar.org.ir).

پرسش‌های بیکارجو!

کدام عدد دو رقمی است که خودش میانگین حسابی دو عدد و مقلوبش میانگین هندسی همان دو عدد است؟

الف) ۶۵

ب) ۵۶

ج) ۶۴

د) ۴۶

هـ) ۴۸

فاصله‌های علامت‌دار و نامساوی اردوش ـ موردل

محمد طبیعی
دانشجوی عمران دانشگاه
صنعتی شریف

مقدمه

پل اردوش[1]، ریاضیدان مجاری قرن بیستم است که بیشتر در زمینهٔ ترکیبیات فعالیت داشت. نبوغ وی از همان دوران کودکی هم آشکار بود، به گونه‌ای که در سه سالگی توانست با اعداد نسبتاً بزرگ، محاسبات ریاضی انجام دهد. او همچنین نخستین مقالهٔ خود را در زمانی که تنها ۱۸ سال داشت، نوشت.

اردوش در دوران حیات بیش از هر کس دیگری در تمام طول تاریخ ریاضیات مقاله منتشر کرده است. ثمرهٔ تلاش‌های او انتشار بیش از ۱۵۰۰ مقاله و کتاب است که آن‌ها را به تنهایی یا با همکاری دیگران به رشتهٔ تحریر درآورده است.

در سال ۱۹۳۵ اردوش یک نامساوی هندسی با صورتی بسیار جالب مطرح می‌کند. دو سال بعد ریاضیدانی به نام **موردل**[2] اثباتی نه‌چندان ساده برای آن ارائه می‌دهد و به این ترتیب نام این نامساوی، «نامساوی اردوش ـ موردل» می‌شود. صورت این نامساوی از این قرار است:

از نقطهٔ دلخواه P در مثلث ABC به رئوس آن متصل می‌کنیم تا سه مثلث PAB، PAC و PBC تشکیل شوند. اگر PL، PN و PM به ترتیب ارتفاعات نظیر رأس P در این سه مثلث باشند، آن‌گاه:

$$PA+PB+PC\geq 2(PM+PN+PL)$$

بعد از این، آوردن روش‌های خلاقانه برای اثبات این نامساوی به یک دغدغه و چالش جالب برای علاقه‌مندان به هندسه تبدیل شد و در طول این سال‌ها، راه‌حل‌های زیادی برای آن ارائه شده‌اند و حتی به صورت‌های مختلفی تعمیم داده شده است. به‌عنوان مثالی از این تعمیم‌ها می‌توان به «نامساوی بارو»[3] اشاره کرد که در آن به جای ارتفاعات سه مثلث داخلی، نیم‌سازهای آن‌ها در نظر گرفته می‌شود و باز هم همان نامساوی برقرار است. در این مقاله هم نویسنده سعی داشته است یکی از این تعمیم‌ها را به شیوه‌ای بدیع ثابت کند.

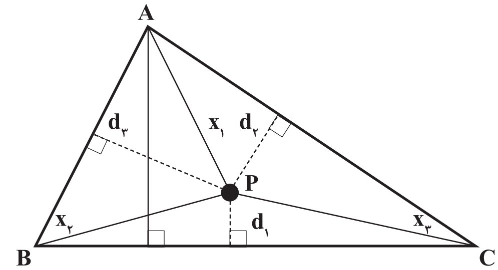
ما با استفاده از فاصله‌های علامت‌دار از اضلاع مثلث یک نامساوی را ثابت می‌کنیم و از آن، نامساوی اردوش ـ موردل را به عنوان یک نتیجهٔ ساده به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مثلث ABC باشد. فاصلهٔ P تا رئوس A، B و C را با x_1، x_2 و x_3 و فاصله‌های علامت‌دار P تا اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با d_1، d_2 و d_3 نمایش دهید. a، b و c را طول این اضلاع در نظر بگیرید. ما یک نامساوی را انتخاب می‌کنیم که از آن نامساوی مشهور اردوش ـ موردل به آسانی نتیجه می‌شود.

قضیه:

$$x_1+x_2+x_3\geq\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)d_1+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)d_2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)d_3 \qquad (1)$$

تساوی تنها زمانی برقرار است که P مرکز دایرهٔ محیطی ABC باشد.



اثبات: فرض کنید h_1 طول ارتفاع وارد از A بر BC و Δ مساحت ABC باشد. روشن است که:

$$2\Delta=ah_1=ad_1+bd_2+cd_3$$

توجه کنید که: $x_1+d_1\ge h_1$. این نامساوی اگر $d_1<0$ باشد نیز برقرار است (زمانی که P یک نقطه داخل مثلث نباشد). همچنین تساوی تنها زمانی برقرار است که P نقطه‌ای روی ارتفاع رأس A باشد. حال داریم:

$ax_1+ad_1\ge ah_1=ad_1+bd_2+cd_3$ یا:

(۲) $ax_1\ge bd_2+cd_3$

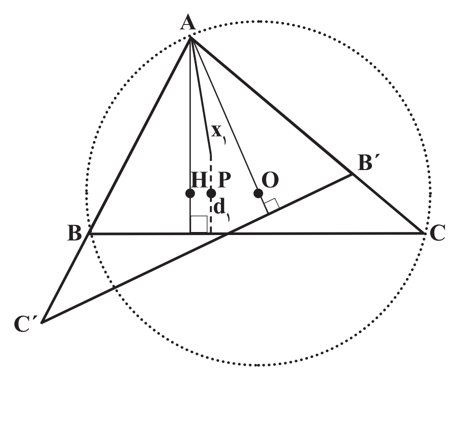
اگر نامساوی (۲) را در مثلث $AB'C'$ (قرینهٔ مثلث ABC نسبت به نیم‌ساز زاویهٔ A از مثلث ABC) به‌کار بریم، آن‌گاه به‌دست می‌آوریم:

$$ax_1\ge cd_2+bd_3$$

یا:

(۳) $x_1\ge \frac{c}{a}d_2+\frac{b}{a}d_3$

تساوی تنها زمانی برقرار است که P روی ارتفاع رأس A از مثلث $AB'C'$ قرار داشته باشد (خطی که از A و مرکز دایرهٔ محیطی ABC می‌گذرد).



به‌طور مشابه به‌دست می‌آوریم:

(۴) $x_2\ge \frac{a}{b}d_3+\frac{c}{b}d_1$

(۵) $x_3\ge \frac{b}{c}d_1+\frac{a}{c}d_2$

و با جمع (۳)، (۴) و (۵) نامساوی (۱) را به‌دست می‌آوریم. تساوی تنها زمانی برقرار است که P مرکز دایرهٔ محیطی ABC باشد.

اگر P یک نقطه داخل $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، آن‌گاه $d_1,d_2,d_3>0$. حال از آنجا که $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$ و $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$ و $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ داریم:

$$x_1+x_2+x_3>2(d_1+d_2+d_3)$$

این نامساوی مشهور اردوش ـ موردل است. تساوی تنها زمانی برقرار است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد و P مرکز دایرهٔ محیطی آن باشد. اثبات‌های بسیار زیادی برای نامساوی اردوش ـ موردل وجود دارند. در اثبات اصلی موردل نامساوی (۱) با فرض $d_1,d_2,d_3>0$ اثبات شده بود. با این حال، اثبات ما شفاف‌تر است و تمام مکان‌های P را پوشش می‌دهد.

منبع

مقالهٔ «Signed distances and the Erdos-Mordell inequality»، از مجلهٔ Forum Geometricorum، جلد ۴، سال ۲۰۰۴، به قلم Nikolaos Dergiades

پی‌نوشت‌ها

1. Paul Erdos
2. Louis Joel Mordell
3. Barrow's inequality

پرسش‌های بیکارجو!

۴

۱۵ تیم والیبال در یک تورنمنت با هم بازی می‌کنند و هر تیم با هر تیم دیگر یک بازی برگزار می‌کند. معلوم شد هر تیم در هفت بازی برنده شده است. چند گروه شامل سه تیم می‌توان پیدا کرد که در هر گروه، هرتیم فقط یک‌بار برنده شده باشد؟

الف) ۱۲۰

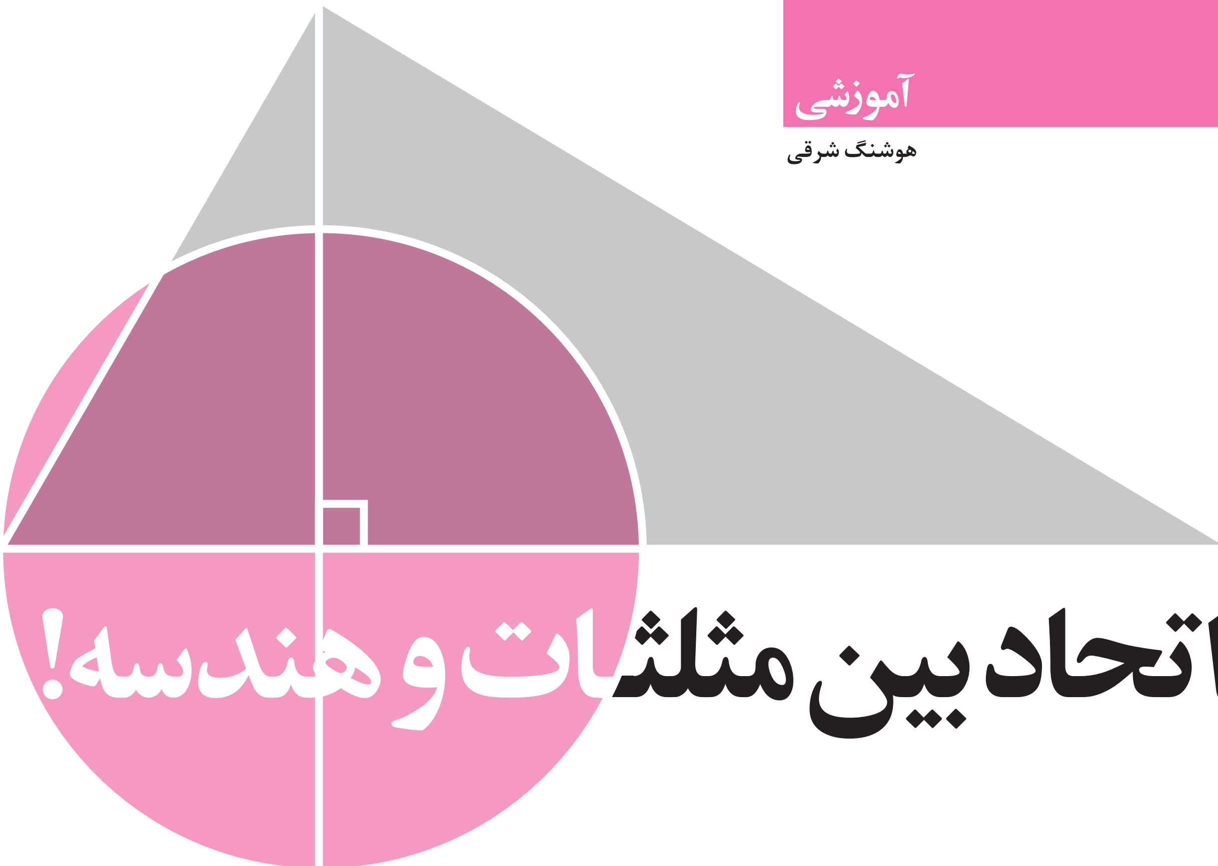
ب) ۱۴۰

ج) ۱۰۰

د) ۱۵۰

هـ) ۲۲۰

هوشنگ شرقی



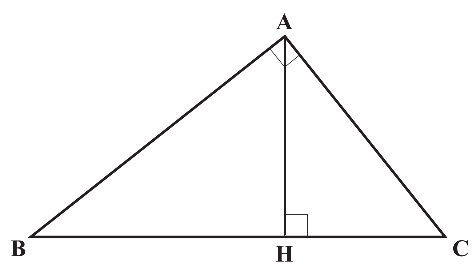
اتحاد بین مثلثات و هندسه!

اشاره

با مفهوم اتحاد و نیز اتحادهای مثلثاتی آشنایی دارید. اینک می‌خواهیم برخی از اتحادهای مثلثاتی پایه‌ای را به روش هندسی برایتان اثبات کنیم. در ضمن این بحث با دو نسبت مثلثاتی جدید که البته به لحاظ تاریخی چندان هم جدید نیستند، آشنا می‌شوید.

با هندسه شروع می‌کنیم!

در کتاب هندسهٔ دهم با روابط طولی زیر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ آشنا شده‌اید:



(۱) $AH^2 = BH.CH$

(۲) $AC^2 = BC.CH$

(۳) $AB^2 = BC.BH$

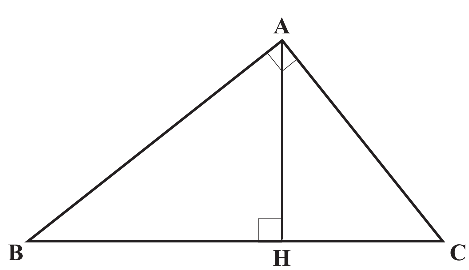
(۴) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

(۵) $AB.AC = AH.BC$

یک رابطهٔ طولی معروف هم به‌صورت (۶) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ وجود دارد که به سادگی به کمک روابط ۱، ۲ و ۳ اثبات می‌شود.

(خودتان انجام دهید!) قبل از ورود به بخش بعدی، این نکتهٔ جالب را یادآوری می‌کنیم که همهٔ این روابط را فقط به کمک «قضیهٔ **فیثاغورس**» $(AB^2 + AC^2 = BC^2)$ می‌توانیم اثبات کنیم. یعنی اگر بتوانیم قضیهٔ فیثاغورس را به‌طور مستقل و بدون استفاده از پنج رابطهٔ دیگر، اثبات کنیم (که این کار مثلاً با استفاده از مساحت‌ها امکان‌پذیر است)، می‌توانیم پنج رابطهٔ دیگر را به کمک قضیهٔ فیثاغورس نیز اثبات کنیم.

فرض کنید درستی قضیهٔ فیثاغورس را می‌دانیم. پس در مثلث‌های AHC و AHB داریم:



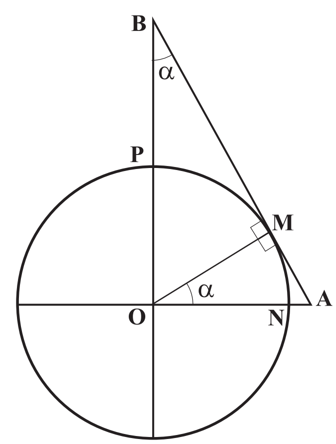
$AH^2 + BH^2 = AB^2$ (*)

$AH^2 + CH^2 = AC^2$ (**)

حال دو طرف این دو تساوی را با هم جمع کنید و به‌جای $AB^{۲}+AC^{۲}$، $BC^{۲}$ را قرار دهید. آن‌گاه به جای BC، BH+CH را قرار دهید و با کمی محاسبهٔ جبری، رابطهٔ $AH^{۲}=BH.CH$ را نتیجه بگیرید. حالا با جایگزینی این تساوی در هر یک از تساوی‌های (*) و (**) روابط $AB^{۲}=BC.BH$ و $AC^{۲}=BC.CH$ را اثبات کنید و از ضرب طرفین این دو رابطه نیز تساوی $BC.AH=AB.AC$ را نتیجه بگیرید.

ورود به مثلثات!

اکنون وارد بحث اصلی خودمان می‌شویم. دایرهٔ مثلثاتی به مرکز O و به شعاع r=۱ را در نظر بگیرید. اگر M انتهای کمان $\widehat{NM}=\alpha$ باشد، در نقطهٔ M مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا امتدادهای شعاع‌های ON و OP (محورهای کسینوس‌ها و سینوس‌ها) را در نقطه‌های A و B قطع کند.



می‌دانیم که شعاع OM بر مماس AB عمود است. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OMA و OMB داریم:

$$\Delta OMA:\hat{O}=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{OM}{OA}=\frac{۱}{OA}$$
$$\Rightarrow OA=\frac{۱}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha=\frac{OM}{MA}=\frac{۱}{MA}\Rightarrow MA=\frac{۱}{\cot\alpha}=\tan\alpha$$
$$\Delta OMB:\hat{B}=\alpha \ \text{(چرا؟)}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{OM}{OB}=\frac{۱}{OB}$$
$$\Rightarrow OB=\frac{۱}{\sin\alpha},\tan\alpha=\frac{OM}{MB}=\frac{۱}{MB}$$
$$\Rightarrow MB=\frac{۱}{\tan\alpha}=\cot\alpha$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB با رأس قائمهٔ O، داریم: ارتفاع وارد بر وتر، یعنی OM=۱، MA=tanα، MB=cotα، $OA=\frac{۱}{\cos\alpha}$ و $OB=\frac{۱}{\sin\alpha}$.

حال روابط طولی ۱ تا ۶ را در این مثلث بنویسیم:

$$(۱)\ OM^{۲}=MA.MB\Rightarrow ۱=\tan\alpha.\cot\alpha$$
$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha.\cot\alpha=۱}$$

$$(۲)\ OA^{۲}=MA.AB\Rightarrow \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=\tan\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$$
$$=\tan^{۲}\alpha+\tan\alpha.\cot\alpha=\tan^{۲}\alpha+۱$$
$$\Rightarrow \boxed{۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}}$$

$$(۳)\ OB^{۲}=MB.AB\Rightarrow \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}=\cot\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$$
$$=\cot\alpha.\tan\alpha+\cot^{۲}\alpha=۱+\cot^{۲}\alpha$$
$$\Rightarrow \boxed{۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}}$$

$$(۴)\ OM.AB=OA.OB$$
$$\Rightarrow ۱\times(\tan\alpha+\cot\alpha)=\frac{۱}{\sin\alpha}.\frac{۱}{\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$$

$$(۵)\ OA^{۲}+OB^{۲}=AB^{۲}$$
$$\Rightarrow (\frac{۱}{\sin\alpha})^{۲}+(\frac{۱}{\cot\alpha})^{۲}=(\tan\alpha+\cot\alpha)^{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}+\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=(\tan\alpha+\cot\alpha)^{۲}$$

سؤال: چگونه می‌توانید این رابطه را از رابطهٔ (۴) نتیجه بگیرید؟

$$(۶)\ \frac{۱}{OA^{۲}}+\frac{۱}{OB^{۲}}=\frac{۱}{OM^{۲}}\Rightarrow \frac{۱}{(\frac{۱}{\sin\alpha})^{۲}}+\frac{۱}{(\frac{۱}{\cos\alpha})^{۲}}=\frac{۱}{۱}$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱}$$

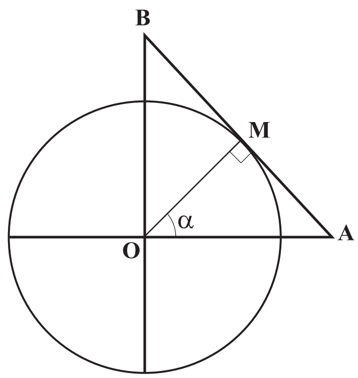
به این ترتیب توانستیم روابط مثلثاتی معروف را به‌صورت هندسی اثبات کنیم و ظاهراً سخن ما به پایان رسیده است. اما اگر مطلب را در اینجا به پایان بریم، لااقل این است که به واقع به تاریخ پربار ریاضی کشورمان کم‌لطفی و ناسپاسی کرده‌ایم! حتماً می‌پرسید چرا؟

ریاضی‌دانان نام‌آور ایرانی در سده‌های نخستینِ دورهٔ ریاضیات

ابوالوفا بوزجانی

ایرانی ـ اسلامی کارهای بزرگی در زمینهٔ مثلثات انجام داده بودند و در آثار بزرگانی همچون **جمشید کاشانی**، **خواجه نصیرالدین طوسی** و **حکیم عمر خیام** کارهایی در این زمینه دیده می‌شوند. ریاضی‌دانان ایرانی نسبت‌های مثلثاتی را خطوط مثلثاتی می‌نامیدند. (فکر می‌کنید چرا؟) آن‌ها سینوس زاویه را جِیب، کسینوس آن را جیب تمام، تانژانت را ظلّ و کتانژانت را ظلّ تمام نامیدند. اما در میان ریاضی‌دانان ایرانی، **ابوالوفا بوزجانی** (۳۲۸–۳۸۸ هـ.ق) ریاضی‌دان بنام ایرانی قرن چهارم هجری، زادهٔ بوزجان (بوژگان) از توابع تربت جام در استان خراسان رضوی، جایگاهی بس رفیع در گسترش دانش مثلثات دارد. او به غیر از کارهایی که در زمینهٔ ریاضیات محاسباتی و مساحی (اندازه‌گیری مساحت زمین‌ها) و هندسهٔ اقلیدسی و نجوم انجام داده بود، به‌طور خاص در زمینهٔ مثلثات کارهای زیادی انجام داد و اثبات بسیاری از روابط مثلثاتی را در ابتدا به او نسبت داده‌اند.

بوزجانی نخستین کسی است که به عکس نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس به‌همین صورتی که دیدیم، توجه کرد و $\frac{۱}{\sin\alpha}$ و $\frac{۱}{\cos\alpha}$ را به‌صورت خطوط مثلثاتی نشان داد. چنان که دیدیم، برای نمایش این خطوط کافی است در نقطهٔ انتهایی کمان α، مماسی بر دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد این مماس و محور کسینوس‌ها تا مبدأ محور (یعنی نقطهٔ O مرکز دایره)، $\frac{۱}{\cos\alpha}$ و فاصلهٔ نقطهٔ برخورد مماس و محور سینوس‌ها تا مبدأ محور، $\frac{۱}{\sin\alpha}$ است. ابوالوفا بوزجانی، عکس کسینوس را قطر ظلّ و عکس سینوس را قطر ظلّ تمام نامید. امروزه عکس کسینوس را سکانت و عکس سینوس را کسکانت می‌نامند. یعنی در شکل زیر داریم:



$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha} = OA$$

$$\csc\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha} = OB$$

همچنین داریم: $\tan\alpha = AM$ و $\cot\alpha = BM$

تمرین:

۱. با توجه به شکل بالا، آیا می‌توانید روشی دیگر برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۳۰ و °۴۵ ارائه دهید؟

۲. برای زاویهٔ α که انتهای آن در نواحی دوم، سوم و چهارم باشد، $\sec\alpha$ و $\csc\alpha$ را نمایش داده و علامت آن را مشخص کنید. آیا با توجه به شکل‌ها می‌توانید حدود قابل قبول برای $\sec\alpha$ و $\csc\alpha$ را مشخص کنید؟ این حدود چه رابطه‌ای با حدود $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ دارد؟

درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۷ واحد، نقطه‌ای که از دو رأس مثلث، به فاصله‌های ۳ و ۵ واحد است، از رأس سوم به چه فاصله‌ای است؟

الف) $۲\sqrt{۵}$

ب) $۳\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt{۱۹}$

د) $\sqrt{۲۱}$

هـ) ۵

داستان کلاه چوپان روستا!

در یک روســتای معین، همهٔ مردان فقــط در روزهای خاصی از ســال که به دلایلی به آن روزها علاقه دارنــد، کلاه‌های رنگی و یک شکل به‌ســر می‌گذارند و هیچ دو روستایی در همهٔ روزها از این نظر رفتار مشابهی ندارند. یعنی برای هر دو روستایی معین، لااقل یک روز وجود دارد که یکی از آن‌ها کلاه برســر دارد و دیگری ندارد. برای هر دو روســتایی X،Y و Y دنباله روی X نامیده می‌شــود، اگر در تمام روزهایــی که X کلاه دارد، Y هم کلاه بگذارد (و البته ممکن اســت در روزهای دیگری هم کلاه داشــته باشــد). همچنین برای هر ســه روســتایی X، Y و Z، Z دنبالــه روی X و Y اســت، اگر Z در همهٔ روزهایــی که X و Y هر دو کلاه دارند، کلاه بر ســر بگذارد. در مورد پنج روستایی به نام‌های **اکبر**، **جواد**، **پرویز**، **خسرو** و **سعید**، حقایق زیر معلوم شده است:

ایستگاه دوم

۱. جواد و پرویز در عادت‌های کلاه‌گذاری‌شان، برعکس هم عمل می‌کنند، در هر روز معین، یکی از آن‌ها کلاه می‌گذارد و دیگری نمی‌گذارد.

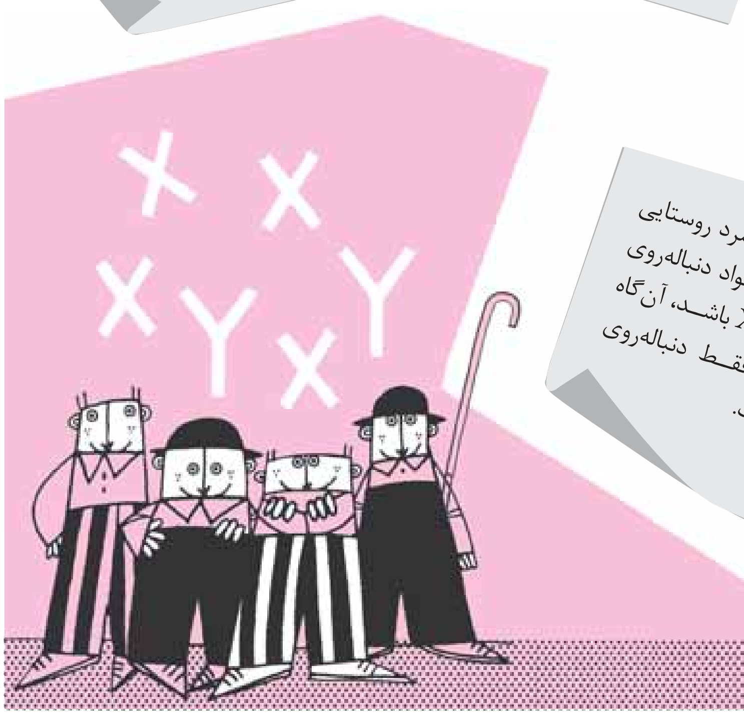
۲. خسرو و سعید هم دقیقاً به همان ترتیب، متضاد هم عمل می‌کنند.

۳. سـعید فقط و فقط در روزهایی که اکبـر و پرویز هر دو کلاه دارند، کلاه بر سر می‌گذارد.

۴. این روســتا فقــط یک چوپان دارد و جــواد دنباله‌روی چوپان و اکبر است.

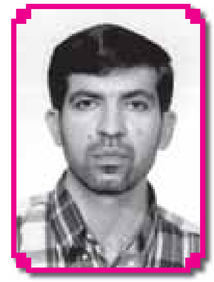
۵. برای هر مرد روستایی X، اگر جـواد دنباله‌روی X باشـد، آن‌گاه اکبـر و X چوپان فقـط دنباله‌روی X است.

۶. اکبر فقط کلاه مشــکی می‌گذارد، جواد فقط کلاه ســفید می‌گــذارد، پرویز فقــط کلاه خاکســتری می‌گذارد، خسرو فقط کلاه قرمــز می‌گذارد و ســعید فقط کلاه قهوه‌ای می‌گذارد.



یک روز صبح چوپان، کلاه بر سر با گوسفندان از روستا خارج شد. کلاه او چه رنگی بود؟!

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

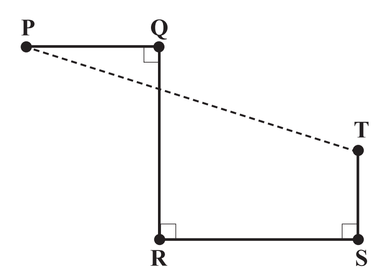


بخش اول:
مسئله‌ها

۲۳۱. به ازای چه مقادیری از $n\in\{۱,۲,...,۱۵\}$ ، $n^n+۱$ اول است؟

۲۳۲. فرض کنید: $f(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)$. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $(f(x))^{۱۱۵}$ بر $f(x^۲)$ برابر $ax+b$ باشد، آن‌گاه $۹a+b$ چقدر است؟

۲۳۳. در شکل زیر PQ بر QR، QR بر RS و RS بر ST عمود هستند. همچنین PQ=۴، RS=QR=۸ و ST=۳. طول PT را به‌دست آورید.



۲۳۴. با فرض $\frac{x-y}{x+y}=۹$ و $\frac{xy}{x+y}=-۶۰$ مطلوب است حاصل $(x+y)+(x-y)+xy$

۲۳۵. x و y دو عدد حقیقی هستند. کمترین مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$S=(x+۳)^۲+۲(y-۲)^۲+۴(x-۷)^۲+(y+۴)^۲$$

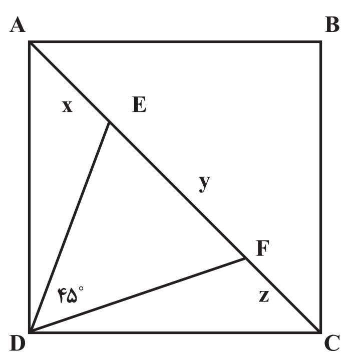
۲۳۶. همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که طول یکی از اضلاع آن برابر ۶۰ باشد و طول اضلاع آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

۲۳۷. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_۴^x-\log_x^{۱۶}=\frac{۷}{۶}-\log_x^{۸}$$

۲۳۸. چند عدد ده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان ساخت به‌طوری که چهار رقم متوالی آن <u>۱۲۲۱</u> نباشد؟

۲۳۹. در شکل، ABCD یک مربع است و نقاط E و F روی قطر AC طوری انتخاب شده‌اند که: $\angle EDF=۴۵^\circ$. اگر AE=x، EF=y و FC=z ثابت کنید: $y^۲=x^۲+z^۲$.



۲۴۰. مختصات سه رأس مثلثی عبارت‌اند از (۱,۴)، (۵,۳) و (۵,c). مجموع همهٔ مقادیر c را بیابید، به‌طوری که مثلث مذکور مساحتی برابر ۱۴ داشته باشد.

بخش دوم:
حل مسئله‌های شماره‌های قبل

۲۰۱. حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی که دقیقاً سه‌تای آن‌ها فرد هستند، برابر !۷ و مجموع آن‌ها برابر است با ۶۳. بین آن‌ها بزرگ‌ترین عدد چه‌قدر است؟

عدد زوج باید تمام عامل‌های اول زوج !۷ را داشته باشد. پس این عدد برابر است با ۱۶ یا ۴۸. با بررسی حالت‌ها به چهار عدد {۴۸,۳,۵,۷} می‌رسیم که مجموعشان برابر است با ۶۳. بنابراین پاسخ ۴۸ است.

۲۰۲. دایرهٔ C شامل نقاط (۰,۶)،(۰,۱۰) و (۸,۰) است. این دایره محور xها را در چه نقطه‌ای به‌جز (۸,۰) قطع می‌کند؟

مرکز دایره روی خط y=۸ قرار دارد، چون باید از دو نقطهٔ (۰,۶) و (۰,۱۰) به یک فاصله باشد. از طرف دیگر، مرکز روی عمودمنصف پاره‌خطی است که دو نقطهٔ (۰,۶) و (۸,۰) را به‌هم وصل می‌کند. معادلهٔ این خط برابر است با: $y-۳=\frac{۴}{۳}(x-۴)$. در نتیجه مختصات مرکز برابر است با: (۷/۷۵,۸) و نقطهٔ برخورد دایره با محور xها، نقطهٔ (۷/۵,۰) است.

۲۰۳. شیب پاره‌خطی را بیابید که دو نقطهٔ تقاطع منحنی‌های $x^۲+y^۲=۳۶$ و $۲x+۳y=۶$ را به‌هم وصل می‌کنند.

چون نقاط تقاطع روی خط $۲x+۳y=۶$ هستند. پس پاره‌خط بر این خط منطبق است و شیب آن برابر است با: $m=-\frac{۲}{۳}$.

۲۰۴. چند عدد کوچک‌تر از یک میلیون وجود دارد که ارقام آن یکسان و مضرب ۹ است؟

فرض کنید عدد a، n رقم یکسان مانند d داشته باشد. a مضرب ۹ است، اگر و تنها اگر nd مضرب ۹ باشد. چون: $۱\leq n\leq ۶$، پس d تنها می‌تواند ۳، ۶ و یا ۹ باشد. اگر d=۳، دو عدد ۳۳۳ و ۳۳۳۳۳۳ مطلوب هستند. اگر d=۶، دو عدد ۶۶۶ و ۶۶۶۶۶۶ مطلوب هستند و اگر d=۹، ۶ عدد ۹، ۹۹، ...، ۹۹۹۹۹۹ به‌دست می‌آیند. پس در مجموع ۱۰ عدد با شرایط فوق داریم.

۲۰۵. مجموع ارقام عدد $N=\frac{۱۰^n+۲}{۳}$ را برحسب n به‌دست آورید ($n\in N$).

$$N=\frac{۱۰^n+۲}{۳}=\frac{۱۰^n-۱}{۳}+۱=\underbrace{\overline{۳۳...۳}}_{n\text{ بار}}+۱=\overline{۳۳...۳۴}$$

حاصل عددی n رقمی است که مجموع ارقام آن برابر است با: $۳n+۱$.

۲۰۶. همهٔ سه‌تایی‌های (x,y,z) را بیابید، به‌طوری که: $۳x^۲+۳y^۲+z^۲-۲xy+۲yz=۰$

می‌توان معادله را به‌صورت $(x-y)^۲+۲x^۲+y^۲+(y+z)^۲=۰$ نوشت. در نتیجه $x=y=z=۰$ تنها جواب معادله است.

۲۰۷. مجموع معکوسات چهار عدد طبیعی برابر است با ۱/۸۵. مجموع این چهار عدد را به‌دست آورید.

چون $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}<۱/۸۵$، پس یکی از اعداد باید ۱ باشد. از طرف دیگر، $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}<۰/۸۵$، پس یکی از اعداد هم برابر ۲ است. دو عدد دیگر را b و c در نظر بگیرید. داریم: $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۰/۳۵$. چون $\frac{۱}{۶۰}=۰/۳۵-\frac{۱}{۳}$، پس یکی از جواب‌ها {۱,۲,۳,۶۰} است. اگر b=۴، آن‌گاه c=۱۰ و جواب دوم {۱,۲,۴,۱۰} خواهد بود. در بقیهٔ حالت‌ها می‌توان نشان داد که $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۰/۳۵$ جواب ندارد ($\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}\neq ۰/۳۵$ و اگر $b,c\geq ۶$، آن‌گاه $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<۰/۳۵$).

۲۰۸. مساحت مثلثی را پیدا کنید که طول اضلاعش برابر ۵، ۶ و $\sqrt{۱۳}$ است.

از قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$(\sqrt{۱۳})^۲=۵^۲+۶^۲-۲\times۵\times۶\times\cos A$$

در نتیجه $\cos A=\frac{۴}{۵}$ و $\sin A=\frac{۳}{۵}$ و مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۵\times۶\times\sin A=۹$$

۲۰۹. شیب خطی را پیدا کنید که از نقاط تقاطع دو منحنی $y=x^۲$ و $y=۸-x^۲$ می‌گذرد.

چون دو تابع زوج هستند، نقاط تقاطع آن‌ها نسبت به محور yها قرینه هستند. پس شیب خطی که نقاط تقاطع را به‌هم وصل می‌کند، صفر است.

۲۱۰. از میان اعداد ۱ تا ۲۱، پانزده عدد به تصادف برمی‌داریم. احتمال این پیشامد را بیابید که سه عدد پشت‌سرهم انتخاب شده باشند.

اعداد ۱ تا ۲۱ را به ۷ دستهٔ سه‌تایی {۱,۲,۳}، {۴,۵,۶}، ... و {۱۹,۲۰,۲۱} افراز می‌کنیم. می‌خواهیم ۱۵ عدد از این ۷ دسته برداریم. طبق اصل لانهٔ کبوتر، حداقل از یک دسته باید سه عدد را برداریم. پس احتمال برداشتن سه عدد متوالی برابر است با یک.

آموزشی

مراد کریمی شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان پسرانه شاهد شهرکرد

مجموع جملات دنباله فیبوناچی

اشاره

در بحث معرفی دنباله‌ها، بعد از پیدا کردن جملهٔ عمومی دنباله (در صورت وجود)، بلافاصله این موضوع مطرح می‌شود که چگونه می‌توان مجموع جملات یک دنباله را به‌دست آورد. درخصوص «دنباله فیبوناچی» نیز این سؤال مطرح است که: آیا می‌توان مجموع جملات آن را حساب کرد؟ و در صورتی‌که این عمل امکان‌پذیر باشد، از چه رابطه‌ای می‌توان مجموع n جملهٔ اول را به‌دست آورد؟ جواب این سؤال مثبت است. یعنی می‌توان فرمولی ارائه کرد که به کمک آن، مجموع جملات یک دنبالهٔ فیبوناچی را به‌دست آورد. در ادامه دنبالهٔ مذکور را به‌طور مختصر معرفی و فرمول مدنظر را بیان می‌کنیم.

تعریف رابطهٔ بازگشتی (دنبالهٔ بازگشتی)

در بسیاری از دنباله‌ها بین هر جمله و جملهٔ قبل (جملات قبل) از آن رابطه‌ای برقرار است. به این نوع دنباله‌ها، دنبالهٔ بازگشتی گویند.

مثال ۱. در دنباله اعداد طبیعی رابطه بازگشتی به‌صورت $t_n=t_{n-۱}+۱$ است.

■ **تعریف اول دنبالهٔ فیبوناچی:** دنباله‌ای که جملهٔ اول و دوم آن برابر یک است و هر جملهٔ پس از آن‌ها از مجموع دو جملهٔ قبل به‌دست آید. رابطه بازگشتی دنبالهٔ فیبوناچی به‌صورت مقابل است:

$$\begin{cases} t_۱ = t_۲ = ۱ \\ t_n = t_{n-۱} + t_{n-۲} \quad (n \geq ۳) \end{cases} \Rightarrow ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,\dots$$

■ **تعریف دوم دنباله فیبوناچی:** در بعضی از تعریف‌ها صفر را هم جزو اعداد دنبالهٔ فیبوناچی به‌حساب می‌آورند و دنبالهٔ فیبوناچی را دنباله‌ای تعریف می‌کنند که هر جملهٔ آن برابر است با مجموع دو جملهٔ قبل از آن. رابطهٔ بازگشتی این تعریف به شکل زیر است:

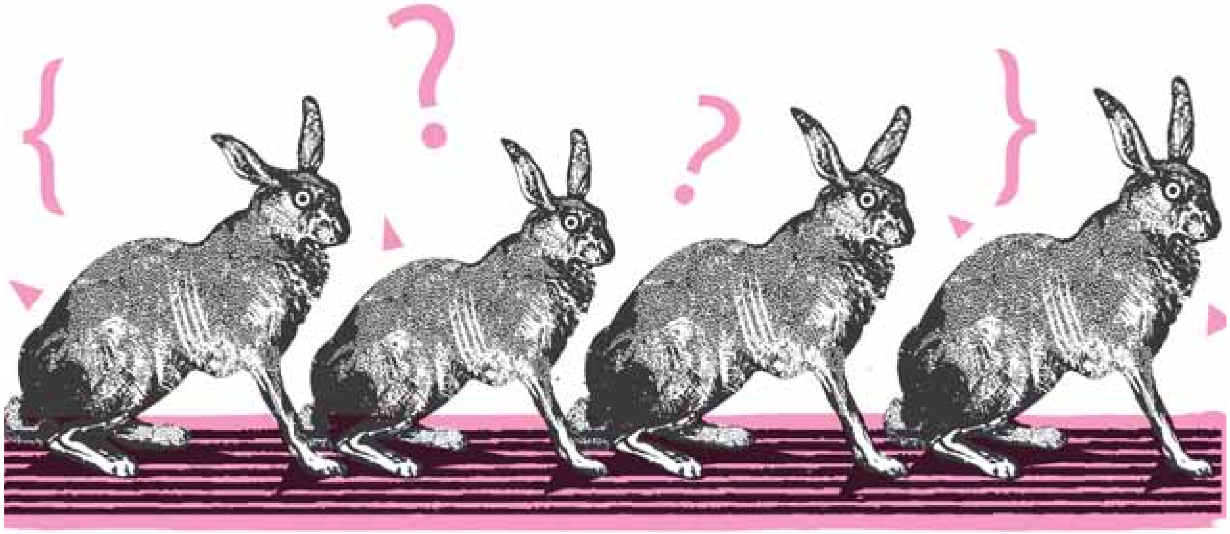
$$F(n) = \begin{cases} ۰ \,, & \text{اگر } n = ۱ \\ ۱ \,, & \text{اگر } n = ۲ \\ F(n-۱) + F(n-۲) \,, & \text{اگر } n > ۲ \end{cases} \qquad \Rightarrow ۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,\dots$$

الف) روش محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ فیبوناچی

اگر t_n جملهٔ nام دنبالهٔ فیبوناچی و S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله باشد، به کمک روش استقرایی فرمولی برای S_n به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
S_۱ &= ۱ = ۲\times۱ + (۰-۱) \\
S_۲ &= ۱+۱ = ۲ = ۲\times۱ + (۱-۱) \\
S_۳ &= ۱+۱+۲ = ۴ = ۲\times۲ + (۱-۱) \\
S_۴ &= ۱+۱+۲+۳ = ۷ = ۲\times۳ + (۲-۱) \\
S_۵ &= ۱+۱+۲+۳+۵ = ۱۲ = ۲\times۵ + (۳-۱) \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
S_n &= t_۱ + t_۲ + \dots + t_{n-۱} + t_n = ۲\times t_n + [t_{n-۱} - ۱]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overset{\text{مجموع n جمله اول}}{S_n} = ۲\overset{\text{جمله nام}}{t_n} + (\overset{\text{جمله n-۱ام}}{t_{n-۱}} - ۱)}$$



ب) روش دیگری برای به‌دست آوردن مجموع جملات دنباله فیبوناچی

می‌دانیم که جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ فیبوناچی را می‌توان به شـــکل‌های متفاوتی نمایش داد. یکی از این نوع نمایش‌ها به‌صورت مقابل است:

$$(*)t_{n+۲}=t_{n+۱}+t_n\ ,\ n\geq ۱۰$$

اگر در رابطهٔ فوق اعداد حســـابی ($n\geq۰$) را قرار دهیم، روابط زیر به‌دست می‌آیند که با جمع کردن نظیربه‌نظیر طرفین رابطه، جملهٔ عمومی برای محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad t_{n+۲}=t_{n+۱}+t_n\\
n=۱۰\Rightarrow t_۲=t_۱+t_۰\Rightarrow \cancel{t}_۲-\cancel{t}_۱=t_۰\\
n=۱\Rightarrow t_۳=t_۲+t_۱\Rightarrow \cancel{t}_۳-\cancel{t}_۲=t_۱\\
n=۲\Rightarrow t_۴=t_۳+t_۲\Rightarrow \cancel{t}_۴-\cancel{t}_۳=t_۲\\
n=۳\Rightarrow t_۵=t_۴+t_۳\Rightarrow \cancel{t}_۵-\cancel{t}_۴=t_۳\\
\ \vdots \qquad\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
n=n\Rightarrow t_{n+۲}=t_{n+۱}+t_n\Rightarrow \underline{\cancel{t}_{n+۲}-\cancel{t}_{n+۱}=t_n\qquad\qquad}
\end{array}$$

$$-t_۱+t_{n+۲}=t_۰+t_۱+t_۲+t_۳+\dots+t_n\overset{t_۱=۱}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\boxed{t_۰+t_۱+t_۲+t_۳+\dots+t_n=t_{n+۲}-۱}$$

مثال ۲. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناچی را از دو روش فوق به‌دست آورید.

۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۳,۵۴,۸۷

محاسبهٔ ۱۰ جملهٔ اول دنباله به روش اول:

$$\begin{array}{l}S_{۱۰}=t_۱+t_۲+t_۳+\dots+t_{۱۰}=۲t_{۱۰}+(t_۹-۱)\\
\quad=۲(۳۳)+(۲۱-۱)=۶۶+۲۰=۸۶\end{array}$$

محاسبهٔ ۱۰ جملهٔ اول دنباله به روش دوم:

$$S_{۱۰}=t_۰+t_۱+t_۲+t_۳+\dots+t_{۱۰}=t_{۱۲}-۱=۸۷-۱=۸۶$$

نکته: *در دنبالهٔ فیبوناچی، علاوه بر اینکه می‌توان مجموع n جملهٔ اول را به‌دست آورد، می‌توان روابط کلی دیگری مانند محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول فرد، مجموع n جملهٔ اول زوج و مجموع مربعات جملات را به‌دست آورد که در ادامه به ارائهٔ الگوهای کلی برای موارد ذکر شده می‌پردازیم:*

ج) روش محاسبه مجموع n جمله اول فرد متوالی دنباله فیبوناچی

اگر در رابطهٔ (※) مقادیر زوج را برای n انتخاب کنیم، رابطه‌های بازگشتی زیر به‌دست می‌آیند که با جمع کردن نظیربه‌نظیر آن‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l}
n=0 \Rightarrow t_2=t_1+t_0 \Rightarrow \cancel{t_2}-t_0=t_1\\
n=2 \Rightarrow t_4=t_3+t_2 \Rightarrow \cancel{t_4}-\cancel{t_2}=t_3\\
n=4 \Rightarrow t_6=t_5+t_4 \Rightarrow \cancel{t_6}-\cancel{t_4}=t_5\\
\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
n=n \Rightarrow t_{n+2}=t_{n+1}+t_n \Rightarrow \underline{t_{2n}-\cancel{t_{2n-2}}=t_{2n-1}}
\end{array}$$

$$-t_0+t_{2n}=t_1+t_3+\ldots+t_{2n-1} \overset{t_0=0}{\Rightarrow} \boxed{t_1+t_3+\ldots+t_{2n-1}=t_{2n}}$$

مثال ۳. مجموع ۱۰ جملهٔ اول فرد دنبالهٔ فیبوناچی را به‌دست آورید.

$$t_1+t_3+t_5+t_7+t_9+t_{11}+t_{13}+t_{15}+t_{17}+t_{19}$$
$$=t_{2\times 10}=t_{20}=4081$$

د) روش محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول زوج متوالی دنبالهٔ فیبوناچی

اگر در رابطهٔ (※) مقادیر فرد را برای n انتخاب کنیم، رابطه‌های بازگشتی زیر به‌دست می‌آیند که با جمع کردن طرفین به رابطهٔ موردنظر می‌رسیم:

$$\begin{array}{l}
n=1 \Rightarrow t_3=t_2+t_1 \Rightarrow \cancel{t_3}-t_1=t_2\\
n=3 \Rightarrow t_5=t_4+t_3 \Rightarrow \cancel{t_5}-\cancel{t_3}=t_4\\
n=5 \Rightarrow t_7=t_6+t_5 \Rightarrow \cancel{t_7}-\cancel{t_5}=t_6\\
\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
n=n \Rightarrow t_{n+2}=t_{n+1}+t_n \Rightarrow \underline{t_{2n+1}-\cancel{t_{2n-1}}=t_{2n}}
\end{array}$$

$$t_{2n+1}+t_1=t_2+t_4+t_6+\ldots+t_n \overset{t_1=1}{\Rightarrow}$$
$$\boxed{t_2+t_4+t_6+\ldots+t_{2n}=t_{2n+1}-1}$$

مثال ۴. مجموع ۱۰ جملهٔ اول زوج دنبالهٔ فیبوناچی را به‌دست آورید.

$$t_2+t_4+t_6+t_8+t_{10}+t_{12}+\ldots+t_{20}$$
$$=t_{2(10)+1}-1=t_{21}-1=6465-1=6464$$

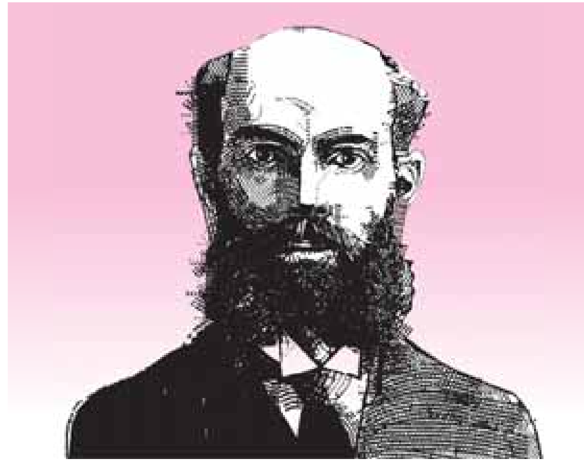
***منبع**

ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ج ۱)، تألیف گریمالدی، ترجمهٔ دکتر محمدعلی رضوانی و دکتر بیژن شمس.

چند حکایت خواندنی از ریاضی‌دانان معاصر

ایستگاه سوم

در این بخش می‌خواهیم به چند حکایت بپردازیم که خود به نوعی لطیفهٔ ریاضی به‌حساب می‌آیند! البته همهٔ این روایت‌ها واقعی هستند:



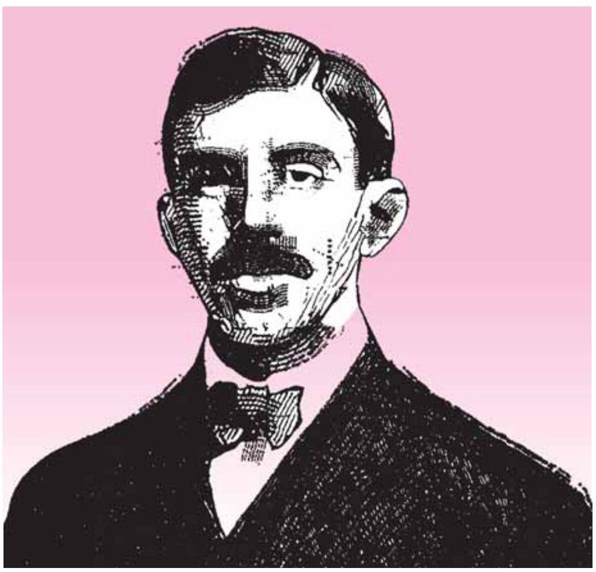
حکایت اول: این حکایت دربارهٔ زندگی **ویلیام فوگ اوزگود**[1]، استاد آنالیز ریاضی در دانشگاه هاروارد در سال‌های آخر قرن نوزدهم است. این استاد بزرگ، در زندگی شخصی و در برنامه‌ریزی کارهایش بسیار منظم و دقیق و مبادی آداب بود. گفته شده که هر روز صبح وقتی از خواب بیدار می‌شد، به‌صورتی کاملاً جدی رو به آینه می‌ایستاد و خطاب به خودش می‌گفت: «صبح به خیر پروفسور اوزگود!»

***

حکایت دوم: دربارهٔ زندگی و کارهای **ادوارد کَسنِر**[2] (۱۹۵۵-۱۸۷۸) پروفسور ریاضی دانشگاه کلمبیا که شخصیتی عجیب و غریب داشت، چیزهای زیادی نقل شده است. از جمله اینکه او علاقهٔ زیادی به پرسه زدن در جاهای غیرعادی و در میان کلبه‌های جنگلی، در نیوجرسی و نیویورک داشت. اما برای آنکه طی این مسیر مجبور به حمل مقدار زیادی باروبنه و اسباب و اثاثیه نشود، تنها چیزهایی که با خود حمل می‌کرد، چای خشک و قند بود و بقیهٔ اسباب و وسایل ضروری مانند قوری و اجاق و غذاهای فاسد نشدنی و کنسروهایش را در جعبه‌های مخصوصی جاسازی و در جاهایی در مسیر حرکتش مخفی می‌کرد!

***

حکایت سوم: این حکایت هم از زندگی ادوارد کسنر نقل شده است: کسنر همیشه تعطیلات تابستانی خود را در بروکسل، پایتخت بلژیک می‌گذراند و خودش می‌گفت یکی از برنامه‌های هر ساله‌اش در آنجا، انجام یک صعود به بلندترین نقطهٔ آن کشور است و رضایت‌بخش‌ترین قسمت سفرش را صعود به آن نقطه می‌دانست. اما وقتی از او دربارهٔ ارتفاع آن نقطه می‌پرسیدند، خیلی جدی می‌گفت: «دوازده فوت از سطح دریا!»



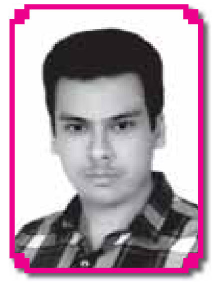
حکایت چهارم: باز در مورد کسنر نقل شده است که او تقریباً در همهٔ زمان‌ها یک نوع لباس می‌پوشید که یک پیراهن و شلوار یک دست خالدار بود! در ضمن چون معتقد بود کمربند یک اختراع جدید و بی‌فایده است، کمربند هم نمی‌بست و غالباً در حین سخنرانی مجبور بود شلوارش را دقیقه‌به‌دقیقه بالا بکشد!

همچنین گفته شده است که او معتقد بود، بهترین غذا را در نیویورک می‌توان از یک مرکز تهیهٔ غذای ماشینی خریداری کرد! تنها یک‌بار به یک رستوران درجهٔ یک در آن شهر رفت، آن هم فقط برای آنکه از درستی نظر خودش مطمئن شود!

پی‌نوشت‌ها

1. William Fog Osgood
2. Edward Kasner

کیوان عباس‌زاده اسک شهری، دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشگاه صنعتی شریف



شمارش با استفاده از کدگذاری!

مقدمه

یکی از مسائل مطرح در مجموعه‌ها، شمارش تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه است. مسئله از این قرار است که یک مجموعهٔ n عضوی دارای چند زیرمجموعه است. یعنی اگر: $S=\{۱,۲,...,n\}$، آن‌گاه S دارای چند زیرمجموعه است؟ روش‌های متفاوتی برای پاسخ دادن به این سؤال وجود دارد، اما یکی از زیباترین روش‌ها برای پاسخ به این سؤال استفاده از روش کدگذاری روی زیرمجموعه‌هاست. فرض کنید: $A\subseteq S$، حال می‌توان به مجموعهٔ A یک کد n رقمی $a_۱a_۲...a_n$ از ارقام ۱ و ۰ نسبت داد، به‌طوری که برای هر $i=۱,۲,...,n$ داریم:

$$a_i=\begin{cases}۱ & i\in A\\ ۰ & i\in A^c\end{cases} \qquad (۱)$$

و برعکس، به هر کد n رقمی از ارقام ۱ و ۰ می‌توان یک زیرمجموعه از مجموعهٔ S را نسبت داد. به این صورت که فرض کنید $a_۱a_۲...a_n$ یک کد n رقمی از ارقام ۱ و ۰ است. حال می‌توان به آن مجموعهٔ $A=\{i|a_i=۱\}$ را نسبت داد که زیرمجموعه‌ای از S است. بنابراین یک تناظر یک‌به‌یک بین گردایهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی S و گردایهٔ کدهای n رقمی از ارقام ۱ و ۰ وجود دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S برابر است با تعداد کدهای n رقمی از ارقام ۱ و ۰ که تعدادشان طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{n}=۲^n$$

حال می‌توان سؤالات متعددی در رابطه با تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه مطرح کرد.

برای مثال:

۱. چند دوتایی مرتب (A,B) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری که: $A\cup B=S$.

۲. چند سه‌تایی (A,B,C) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری که: $C\subseteq A\cup B$.

۳. چندسه‌تایی (A,B,C) از زیرمجموعه‌های مجموعه $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که: $A\subseteq B\subseteq C$.

برای پاسخ به این سؤالات می‌توان از روش کدگذاری که در بالا گفته شد، استفاده کرد. اما چگونه؟ در این مقالهٔ کوتاه قرار است با پاسخ به سه سؤال مطرح شده به این مطلب پرداخته شود.

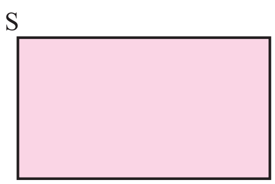
پاسخ سؤال‌ها

۱. چند دوتایی مرتب (A,B) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری‌که: $A\cup B=S$.

حل: فرض کنید (A,B) یک دوتایی مرتب از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ است و داریم: $A\cup B=S$. حال به این دوتایی مرتب می‌توان کد n رقمی $a_۱a_۲...a_n$ را از ارقام ۰، ۱و ۲ نسبت داد، به‌طوری‌که برای هر $i=۱,۲,...,n$ داریم:

$$a_i=\begin{cases}۰ & i\in A-B\\ ۱ & i\in A\cap B\\ ۲ & i\in B-A\end{cases} \qquad (۲)$$

اما اندکی تأمل کنیم. سؤال این است که چگونه کد بالا را ساخته‌ایم؟! برای پاسخ به این سؤال از «نمودار ون» استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ S را با مستطیل نمایش می‌دهیم، یعنی فرض کنید مستطیل مقابل، مجموعهٔ S است:



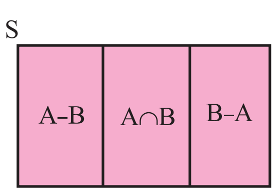
حال دوتایی (A,B) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S را در نظر بگیرید، با این فرض که: $A\cup B=S$. مستطیل بالا را می‌توان به سه ناحیه افراز کرد، به‌گونه‌ای که یک ناحیه شامل اعضای مجموعهٔ $A-B$، یک ناحیه شامل اعضای مجموعهٔ $B-A$ و یک ناحیه شامل اعضای $A\cap B$ باشد. زیرا به ازای هر $x\in S$ سه حالت داریم:

حالت ۱. $x\in A$ و $x\notin B$ که در این صورت: $x\in A-B$.

حالت ۲. $x\in B$ و $x\notin A$ که در این صورت: $x\in B-A$.

حالت ۳. $x\in A$ و $x\in B$ که در این صورت: $x\in A\cap B$.

به شکل زیر توجه کنید:



حال به ازای هر $i=1,2,\dots,n$، بسته به اینکه i متعلق به کدام‌یک از ناحیه‌های بالا باشد، به رقم nام کد، یکی از ارقام ۰، ۱ و ۲ را نسبت می‌دهیم. در واقع اگر $i\in A-B$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=0$، اگر $i\in A\cap B$، آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=1$، و اگر $i\in B-A$، آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=2$. به این ترتیب به یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ می‌رسیم. برعکس به هر کد n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ می‌توان دوتایی مرتب (A,B) از زیرمجموعه‌های S را نسبت داد که: $A\cup B=S$. به این صورت که فرض کنید $a_1,a_2,\dots,a_n$ یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ است. قرار می‌دهیم:

$A_0=\{i|a_i=0\}$
$A_1=\{i|a_i=1\}$
$A_2=\{i|a_i=2\}$

حال تعریف کنید: $A=A_0\cup A_1$ و $B=A_1\cup A_2$. واضح است که A و B زیرمجموعهٔ S هستند و داریم: $A\cup B=S$. پس یک تناظر یک‌به‌یک بین گردایهٔ دوتایی‌های (A,B) از زیرمجموعه‌های S که $A\cup B=S$ و گردایهٔ کدهای n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ وجود دارد. پس تعداد دوتایی‌های (A,B) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S که $A\cup B=S$، برابر است با تعداد کدهای n رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ که تعدادشان طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underbrace{3\times3\times\dots\times3}_{n}=3^n$$

۲. چند سه‌تایی مرتب (A,B,C) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,n\}$ وجود دارد، به‌طوری که: $A\cup B\subseteq C$.

حل: فرض کنید (A,B,C) یک سه‌تایی مرتب از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,n\}$ است، به‌طوری که: $A\cup B\subseteq C$. حال به این سه‌تایی مرتب می‌توان کد n رقمی $a_1,a_2,\dots,a_n$ از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت داد، به‌طوری که برای هر $i=1,2,\dots,n$ داریم:

$$a_i=\begin{cases}0 & i\in A-B\\ 1 & i\in A\cap B\\ 2 & i\in B-A\\ 3 & i\in C-(A\cup B)\\ 4 & i\in S-C\end{cases}\qquad(3)$$

در واقع مجموع S را با یک مستطیل نمایش می‌دهیم. حال با توجه به اینکه $A\cup B\subseteq C$، به ازای هر $x\in S$ پنج حالت داریم:

حالت ۱. $x\in A$ و $x\notin B$ که در این صورت: $x\in A-B$.

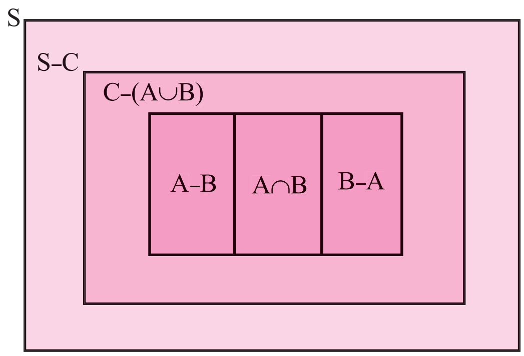
حالت ۲. $x\in B$ و $x\notin A$ که در این صورت: $x\in B-A$.

حالت ۳. $x\in A$ و $x\in B$ که در این صورت: $x\in A\cap B$.

حالت ۴. $x\notin A$، $x\notin B$ و $x\in C$. در این صورت: $x\in C-(A\cup B)$.

حالت ۵. $x\notin C$. در این صورت: $x\in S-C$.

پس می‌توان مستطیل S را همانند شکل زیر به پنج ناحیه افراز کرد. توجه کنیم که در شکل سه مستطیل افقی وجود دارد که مستطیل بزرگ‌تر نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ S و مستطیل میانی نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ C و مستطیل کوچک‌تر نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ $A\cup B$ است. همچنین، سه مستطیل عمودی کوچک که نمایانگر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ و $A\cap B$ هستند.



حال به ازای هر $i=1,2,\dots,n$، بسته به اینکه i در کدام‌یک از ناحیه‌های بالا قرار می‌گیرد، به رقم nام کد یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت می‌دهیم. در واقع اگر $i\in A-B$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=0$، اگر $i\in A\cap B$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=1$، اگر $i\in B-A$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=2$، اگر $i\in C-(A\cup B)$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $a_i=3$، و اگر $i\in S-C$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=4$. به این ترتیب به یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌رسیم. حال برعکس، فرض کنید $a_1,a_2,\dots,a_n$ یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ است. قرار دهید:

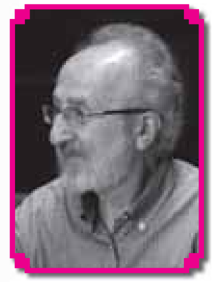
$A_0=\{i|a_i=0\}$
$A_1=\{i|a_i=1\}$
$A_2=\{i|a_i=2\}$
$A_3=\{i|a_i=3\}$

اکنون تعریف کنید: $A=A_0\cup A_1$، $B=A_1\cup A_2$ و $C=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3$. واضح است که A، B و C زیرمجموعهٔ S هستند و داریم: $A\cup B\subseteq C$. پس یک تناظر یک‌به‌یک بین گردایهٔ سه‌تایی‌های (A,B,C) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,n\}$ که $A\cup B\subseteq C$ و گردایهٔ کدهای n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد. پس تعداد این سه‌تایی‌ها برابر است با تعداد کدهای n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ که طبق اصل ضرب برابر است با:

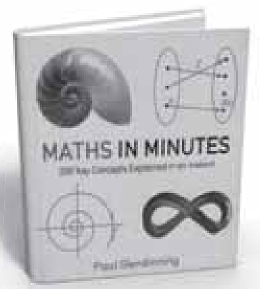
$$\underbrace{5\times5\times\dots\times5}_{n}=5^n$$

با استفاده از این روش می‌توانید به سؤال سوم نیز پاسخ دهید و جواب آن 4^n است.

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور



ریاضیات در چند دقیقه



مسئله‌های هیلبرت

مسئله‌های هیلبرت فهرستی از ۲۳ مسئلهٔ پژوهشی ریاضیات است که توسط **داوید هیلبرت**[1] در سال ۱۹۰۰ در «کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات» در پاریس مطرح شد. وی آن‌ها را به‌عنوان سرنخی برای توسعهٔ ریاضیات در قرن بیستم در نظر گرفت.

در سراسر سدهٔ ۱۸۰۰، دستگاه اکسیوماتیکی (اکسیوم یعنی اصل و اکسیوماتیک یعنی اصل موضوعی) که ابتدا توسط **اقلیدس اسکندریه‌ای**[2] مورد استفاده قرار گرفته بود، در حوزه‌های بسیاری به‌کار رفت. ریاضی‌دانان روش‌هایی را برای یافتن اکسیوم‌های معرف حوزه‌های مورد بررسی‌شان ـ برای مثال، در هندسه: نقاط، خطوط، خم‌ها و ویژگی‌هاشان ـ و سپس توسعهٔ این موضوعات از این اکسیوم‌ها از طریق منطق، گسترش داده بودند.

بسیاری از مسائل هیلبرت مرتبط با توسیع روش اکسیوماتیک، و راه‌حل‌هایشان به طرز قابل ملاحظه‌ای باعث پیشرفت ریاضیات شدند، گرچه اثر **کورت گودل**[3] به زودی نظرگاه خودِ نظریه‌های اکسیوماتیک را تغییر داد. این نظریه‌ها طریقی برای تنظیم فهرستی از معماهای ریاضی مشخص کردند که تا امروز نیز ادامه دارد.

پی‌نوشت‌ها

1. David Hilbert
2. Euclid of Alexandria
3. Kurt Gödel

قضایای ناتمامیت گودل

«قضایای ناتمامیت گودل»[1] دستاوردهای قابل‌توجهی هستند که چگونگی ریاضیات اکسیوماتیک را از منظر ریاضی‌دانان تغییر دادند. قضایای مزبور که توسط ریاضی‌دان آلمانی، **کورت گودل**[2] در اواسط دهۀ ۱۹۲۰ و اوایل دهۀ ۱۹۳۰ توسعه یافتند، با توجه به روش رمزبندی گزاره‌ها در نظریه‌های اکسیوماتیک، و روش نشان دادن چگونگی تعدیل گزاره‌ها توسط قواعد منطق، رشد یافتند.

گرچه روش اکسیوماتیک برای توصیف میدان‌های گوناگون ریاضیات، با موفقیت بسیار به‌کار رفته بود، پاره‌ای از نظریه‌ها نشان داده بودند که در خودشان به مجموعه‌های نامتناهی اکسیوم‌ها نیاز دارند، و بنابراین ریاضی‌دانان نگران یافتن راه‌های صوری اثبات تمامیت و سازگاری مجموعۀ داده شده‌ای از اکسیوم‌ها بودند.

یک مجموعه از اکسیوم‌ها «تمام»[3] در نظر گرفته می‌شود اگر توان اثبات یا نقض هر گزارۀ مفروض در زبان مناسبش را داشته باشد. در حالی‌که مجموعه‌ای از اکسیوم‌ها «سازگار»[4] است اگر نتوان هیچ گزاره‌ای تشکیل داد که بتواند هم اثبات شده هم نقض شده باشد.

قضیۀ اول گودل بر این است که:

در هر نظریۀ اکسیوماتیک (مناسب)، گزاره‌هایی موجودند که در داخل آن نظریه دارای معنی‌اند، اما نمی‌توانند در داخل آن نظریه به‌عنوان راست یا دروغ اثبات شوند.

این قضیه بدین معنی است که اکسیوم‌های یک نظریه، که ممکن است امیدوار باشیم که آن نظریه را به‌طور کامل توصیف کنند، هیچ‌گاه نمی‌توانند این کار را انجام دهند، و همواره امکان دارد که تعداد اکسیوم‌ها افزایش یابد.

پیچیدگی این ماجرا آنقدرها ناجور نبود که پیچیدگی دیگری، که شامل سازگاری درونی مجموعه‌های اکسیوم‌ها بود، آشکار شد:

تنها ممکن است بتوانیم اثبات کنیم که مجموعه‌ای (مناسب) از اکسیوم‌ها ناسازگار است، اما نه اینکه اثبات کنیم سازگارند.

به عبارت دیگر، هیچ‌گاه نمی‌توان مطمئن بود که مجموعه‌ای از اکسیوم‌ها شامل تناقضی پنهان نباشد.

دستاوردهای گودل آثاری عمیق بر فلسفۀ ریاضی دارد، اما به‌طور کلی گرایش ریاضی‌دانان عملی این است که کارشان را مانند اینکه چیزی تغییر نکرده است، انجام دهند.

پی‌نوشت‌ها

1. Gödel's incompleteness theorems
2. Kurt Gödel
3. complete
4. consistent

اکسیوم انتخاب

«اکسیوم انتخاب»[1] قاعده‌ای اساسی است که اغلب به فهرست اکسیوم‌های به‌کار رفته در تعریف اندیشۀ ریاضی افزوده می‌شود. این اکسیوم به‌طور ضمنی در استدلال قطری کانتور و بسیاری از دیگر اثبات‌های ریاضی که شامل این فرض‌اند که فهرست‌های نامتناهی وجودی مجرد دارند، و می‌توانند یک مجموعه از انتخاب‌های نامتناهی را تشکیل دهند، به‌کار رفته است.

به‌گونه‌ای دقیق‌تر، این اثبات بر آن است که با معلوم بودن تعدادی نامتناهی از مجموعه‌های ناتهیِ شامل بیش از یک عضو، انتخاب دنباله‌ای نامتناهی از اعضا با دقیقاً یک عضو از هر مجموعه، امکان‌پذیر است.

در نگاه گروهی این موضوع بی‌معنی به‌نظر می‌رسد ـ نامتناهی بار دیگر با رأس منکر خود سر برآورده است ـ اما قاعده‌ای که طی چنین شیوه‌ای را مجاز می‌کند، اکسیوم انتخاب است.

البته می‌توان اکسیوم‌های دیگری را چنان انتخاب کرد، که اجازه دهند اکسیوم انتخاب به‌عنوان قضیه مطرح شود، اما هر روایتی که به‌کار گرفته شود، افزودن مزبور به مجموعۀ پایه‌ای قواعد منطقی برای مجاز کردن استدلالاتی چنین، لازم است.

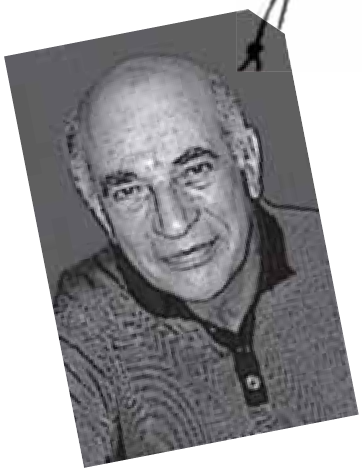
پی‌نوشت‌ها

1. axiom of choice

دکتر محرم نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

حدس بهزاد

پنجاه سال در آرزوی قضیه شدن



همان‌طور که دبیر ریاضیات گسسته قول داده بود، این جلسه قرار بود خانم **مریم‌پرور** حدس بهزاد را برایمان تعریف کند.

◆ **خانم معلم:** خب بچه‌ها، جلسهٔ قبل من رنگ‌آمیزی گراف را برایتان گفتم و یکی از کاربردهای آن را هم دیدید. حالا برای آنکه ببینم چقدر از موضوع را یاد گرفته‌اید، مسئله‌ای را مطرح می‌کنم.

مسئلهٔ ۱. با گراف دوری C_n همه آشنا هستید. گرافی از مرتبهٔ n که نمودار آن شبیه nضلعی است. حال مسئله این است که عدد رنگی C_n چقدر است؟

بچه‌ها شروع کردند به شکل کشیدن.

◆ **پروانه:** خانم برای رنگ‌آمیزی C_3، سه رنگ لازم است. پس برای رنگ‌آمیزی C_n، n رنگ لازم داریم.

◆ **معلم:** یک مقداری عجله کردی. C_4 را هم امتحان کن.

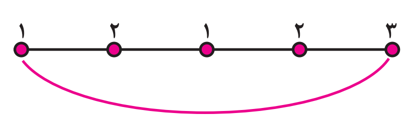
◆ **فاطمه:** خانم برای C_4، ۲ رنگ کافی است. می‌توانیم رأس‌ها را یکی در میان قرمز و آبی کنیم.

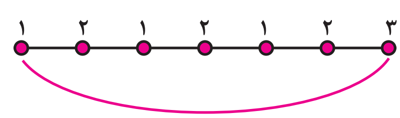
◆ **معلم:** بله درست است.

فاطمه ادامه داد: «این روش برای C_6، C_8 و... مناسب است، اما برای C_3، C_5 و... کار نمی‌کند. شاید لازم باشد روی زوج و فرد بودن n بحث کنیم.»

◆ **معلم:** بله کاملاً درست است. با توضیحاتی که فاطمه داد، اگر n زوج باشد، عدد رنگی C_n برابر است با ۲. اگر n فرد باشد، پاسخ قطعاً ۲ نیست.

◆ **مهسا:** فکر کنم برای nهای فرد، عدد رنگی C_n برابر ۳ باشد.





◆ **معلم:** خب، معلومه که موضوع برایتان جالب بوده. اما در ادامهٔ موضوع رنگ‌آمیزی، می‌خواهم یک مسئلهٔ دیگر را برایتان مطرح کنم که با رنگ‌آمیزی گراف‌ها ارتباط پیدا می‌کند.

مسئلهٔ ۲. شش تیم از کشورهای متفاوت به ایران آمده‌اند تا در یک تورنمنت ورزشی با هم رقابت کنند. هر دو تیم یک مسابقه با یکدیگر برگزار خواهند کرد. چند مسابقه باید برگزار شود؟

◆ **سهیلا:** خانم انتخاب ۲ از ۶ که می‌شود ۱۵ تا.

◆ **معلم:** بله درست است. ۱۵ مسابقه باید برگزار شود. هدف این است که در کمترین زمان ممکن این کار انجام شود. برای همین، از چند سالن برای مسابقات استفاده می‌شود. سؤال اصلی این است که چند سالن برای برگزاری مسابقات لازم داریم و چند روز این مسابقات طول خواهد کشید؟

◆ **مهسا:** خانم مسئلهٔ جالبی است، اما چه ارتباطی به گراف دارد؟

◆ **فاطمه:** می‌توانیم تیم‌ها را با رأس‌ها و بازی‌ها را با یال نمایش بدهیم. چون هر دو تیم یک‌بار با هم مسابقه می‌دهند، پس گراف حاصل K_6 خواهد شد.

◆ **معلم:** آفرین فاطمه. حالا تعداد سالن‌ها و روزها را باید به کمک رنگ‌آمیزی به‌دست آوریم.

◆ **سعیده:** خانم چون ۶ تیم هستند، می‌توانیم هم‌زمان ۳ مسابقه در ۳ سالن برگزار کنیم. یعنی هر روز ۳ مسابقه. پس $\frac{۱۵}{۳}=۵$ روز برای برگزاری همهٔ بازی‌ها لازم داریم.

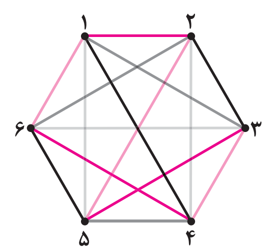
◆ **معلم:** این استدلال شما نشان می‌دهد، حداقل ۵ روز لازم داریم. اما برای اطمینان از اینکه ۵ روز کافی است، باید مسابقات این ۵ روز را مشخص کنیم.

◆ **سهیلا:** خانم می‌توانیم ۳ بازی هر روز را که ۳ یال از گراف تیم‌هاست، با یک رنگ مشخص کنیم. یال‌های هم‌رنگ نباید مجاور باشند، چون یک تیم نمی‌تواند در یک زمان در دو سالن باشد!

◆ **معلم:** بله درست است. پس مسئلهٔ ما تبدیل شد به رنگ‌آمیزی یال‌های K_6 به‌طوری که یال‌های هم‌رنگ مجاور نباشند. تعداد روزها همان تعداد رنگ‌های به‌کار رفته خواهد بود. سعی کنید یک رنگ‌آمیزی یالی K_6 با ۵ رنگ پیدا کنید.

◆ **پروانه:** خانم ما یک جواب پیدا کردیم.

◆ **معلم:** آفرین دخترم. از ۵ رنگ استفاده شده و هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نیستند. بچه‌ها این تعداد رنگ را عدد رنگی یالی گراف می‌نامیم. حالا یک مسئلهٔ دیگر.



مسئلهٔ ۳: عدد رنگی یالی K_5 چقدر است؟

◆ **سهیلا:** خانم برای K_6، ۵ رنگ لازم بود. شاید برای K_5 جواب ۴ باشد.

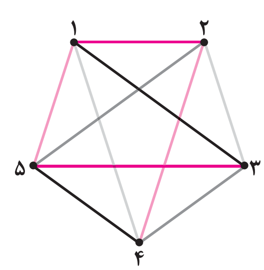
◆ **معلم:** اگر به این سؤالی که می‌پرسم جواب بدهید، جواب را هم پیدا خواهید کرد. در یک روز چند مسابقهٔ هم‌زمان می‌توانید برگزار کنید؟

◆ **سعیده:** خانم ۵ تیم داریم. پس حداکثر در یک زمان ۲ بازی می‌تواند برگزار شود و یک تیم هم استراحت می‌کند. نتیجه می‌شود از هر رنگ ۲ بار می‌توانیم استفاده کنیم.

◆ **معلم:** بله درست است.

◆ **مهسا:** K_5 ۱۰ یال دارد. پس $\frac{۱۰}{۲}=۵$ رنگ لازم داریم.

◆ **سهیلا:** خانم ما جواب را پیدا کردیم.



◆ **معلم:** آفرین بچه‌ها! مسئلهٔ بعدی که می‌خواهم بگویم کلی است.

مسئلهٔ ۴: اگر ماکزیمم درجهٔ یک گراف k باشد، آن‌گاه عدد رنگی یالی از k کمتر نیست.

بچه‌ها کمی به فکر فرو می‌روند. آن‌ها می‌دانند که استدلالشان باید کلی باشد و محدود به گراف‌های خاصی که بررسی کردند، نباشد.

◆ **سهیلا:** خانم وقتی می‌گوییم ماکزیمم درجهٔ گراف برابر است با k، یعنی اینکه رأسی در گراف وجود دارد که k یال به آن رأس وصل هستند. این k یال دوبه‌دو مجاورند و در نتیجه رنگ آن‌ها باید متفاوت باشد. پس k رنگ متفاوت لازم داریم!

◆ **معلم:** بله. اثبات شما درست است. حال فکر می‌کنید k رنگ کافی هم باشد؟ به مثال‌ها رجوع کنید.

◆ **پروانه:** در K_6، عدد رنگی ۵ و ماکزیمم درجه هم ۵ است، اما در K_5، ماکزی‌مم درجه، ۴ و عدد رنگی ۵ بود. پس k رنگ همیشه کافی نیست.

◆ **معلم:** بچه‌ها قضیهٔ جالبی که وجود دارد این است که عدد رنگی یالی هر گراف با ماکزیمم درجهٔ k، برابر است با k یا k+1. این قضیه حدود ۵۰ سال است که اثبات شده است. حالا وقت آن است که «حدس **بهزاد**» را برایتان بگویم.

فرض کنید می‌خواهیم رأس‌ها و یال‌های گرافی با ماکزیمم درجهٔ k را رنگ کنیم، به‌طوری که:

۱. هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.

۲. هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نباشند.

۳. رأس و یال مجاور هم ناهم‌رنگ باشند.

به راحتی می‌توان نشان داد (تمرین) که حداقل k+1 رنگ لازم است. اما **مهدی بهزاد**[۱]، ریاضی‌دان ایرانی، در سال ۱۹۶۵ حدس زد که k+2 رنگ برای چنین رنگ‌آمیزی که آن‌را رنگ‌آمیزی کلی گراف می‌نامند، کافی است.

◆ **فاطمه:** خانم، حدس بهزاد صورت ساده‌ای دارد، اما چرا هنوز نتوانسته‌اند آن‌را ثابت کنند؟

◆ **معلم:** حدس‌های زیادی در ریاضیات هستند که صورت ساده‌ای دارند، اما اثبات آن‌ها گاهی بعد از ۱۰۰ سال پیدا می‌شود. من بحث امروز را با یک تمرین به پایان می‌برم. سعی کنید حداقل تعداد رنگ‌ها برای رنگ‌آمیزی کلی گراف‌های C_n و K_n را به‌دست آورید.

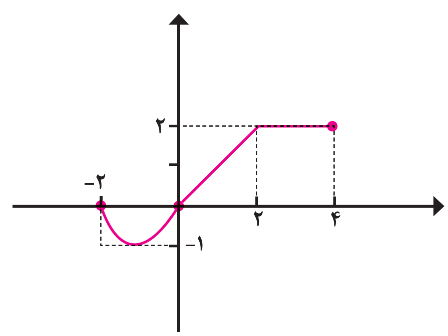
***پی‌نوشت‌ها**

۱. دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، دانش‌آموخته در رشتهٔ ریاضی در دانشگاه تهران و دانشگاه ایالتی میشیگان در آمریکا و استاد ریاضی دانشگاه‌های شیراز، صنعتی شریف و شهید بهشتی، ملقب به پدر گراف ایران و چهرهٔ ماندگار ریاضی ایران در سال ۱۳۸۲. ایشان از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان بین‌المللی معاصر ایران هستند.

حسابان

۱. برد تابع $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$ را به‌دست آورید.

۲. اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(2x-2)$ را رسم کنید.



۳. اگر داشـــته باشـــیم: $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$، تابع fofof و دامنهٔ آن‌را پیدا کنید.

۴. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\geq 0 \\ x^2-x & x\leq 0\end{cases}$ مفروض است. زوج یا فرد بودن این تابع را بررسی کنید.

۵. برد تابع $f(x)=\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}$ با دامنهٔ $[-1,6]$ شـــامل چند عدد صحیح است؟

۶. اگر تابع $f(x)=(a+1)x^4+(a+2)x^3+(a+4)x^2+3x$ با دامنهٔ R وارون‌پذیر باشد، نمودار تابع وارون f نیم‌ساز ربع اول و سوم را در چند نقطه قطع می‌کند؟

جبر و احتمال

۱. مجموعه‌های A و B را به شکل گزاره‌نما بنویسید.

$$A=\{5,55,555,\dots\},\ B=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{8},0,\frac{1}{32},0,\dots\right\}$$

۲. تعداد زیرمجموعه‌های ســه عضوی یک مجموعه، بیشــتر از تعــداد زیرمجموعه‌هــای پنج عضوی آن اســت. این مجموعه حداکثر چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد؟

۳. نمــودار رابطــهٔ $R=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2\geq 1, |x|<y\right\}$ را رسم کنید.

۴. رابطهٔ R روی مجموعهٔ $R-\{1\}$ به‌صورت $aRb \Leftrightarrow a+b-ab\leq 1$ تعریف شده است. نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۵. یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A={a,b,c,d,e,f} نوشته شده است. اگر این رابطه مجموعهٔ A را به سه دستهٔ هم‌ارزی افراز کرده باشد، حداقل و حداکثر تعداد عضوهای این رابطه را بنویسید.

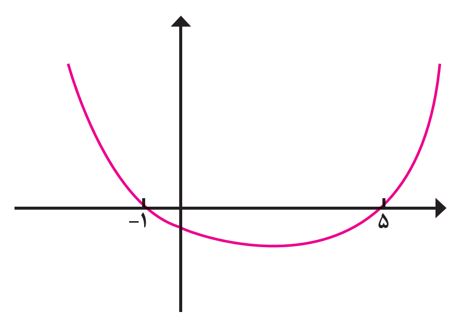
۶. به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید که: $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

ریاضی ۳

۱. نامعادلهٔ $2x-3-\frac{1}{x^2-4x}>x-4-\frac{1}{x^2-4x}$ را حل کنید.

۲. اگر $\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}$، مقدار $\cos 2x$ را به‌دست آورید.

۳. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را پیدا کنید، در صورتی‌که نمودار تابع $y=f(x+1)$ به‌صورت زیر باشد.

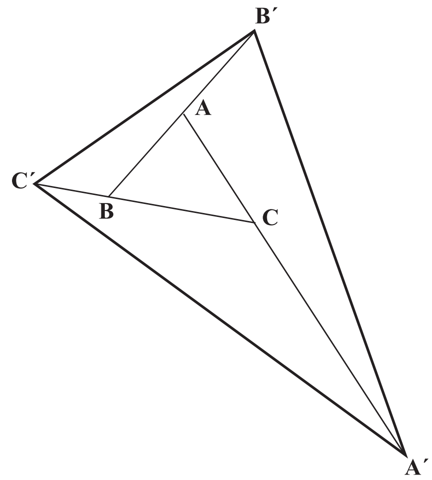


۴. اگر: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$، مقدار $g(1)$ را به‌دست آورید.

۵. اگر: $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_2(x^2+2x)$، دامنهٔ تابع fog را به‌دست آورید.

هندسهٔ دهم

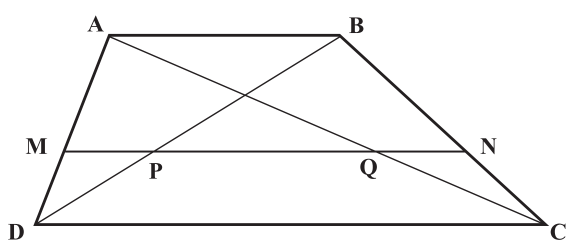
۱. در مثلث ABC، AB را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ B′ (AB′=AB)، AC را به اندازهٔ دو برابر خودش تا نقطهٔ A′ (CA′=2CA) و BC را به اندازهٔ نصف خودش تا نقطهٔ C′ $(BC'=\frac{1}{2}BC)$ امتداد داده‌ایم. مساحت مثلث A′B′C′ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۲. در مثلث ABC از نقطهٔ M روی BC دو خط موازی دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ D و AB را در E قطع کنند. ثابت کنید:

$$\frac{AE}{AB}+\frac{AD}{AC}=1$$

۳. در ذوزنقهٔ ABCD داریم: MN||AB||CD. ثابت کنید: MP=QN.

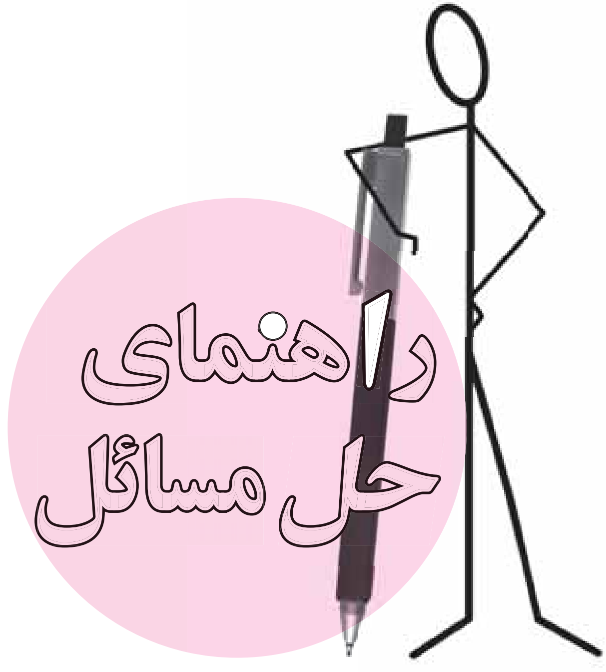


هندسهٔ ۲ (سوم ریاضی)

۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، ضلع AB ثابت و وتر AC متغیر است. مکان هندسی وسط AC را به‌دست آورید (همراه با دلیل).

۲. خط d و نقاط A و B در دو طرف آن مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از d به فاصلهٔ ثابت k باشد (بحث کنید).

۳. مثلث ABC را با داشتن طول‌های AB و AC و نیم‌ساز AD رسم کنید.

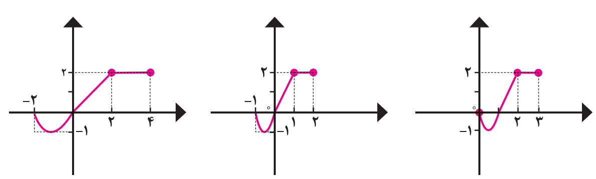


پاسخ‌نامهٔ حسابان

۱.

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3$$
$$-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$0\le \sin^2 2x\le 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\le f(x)\le 1$$
$$\Rightarrow R_f=[\frac{1}{4},1]$$

۲. برای رسم نمودار این تابع، با توجه به اینکه $y=f(2(x-1))$، کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کنیم و سپس آن‌را ۱ واحد به سمت راست انتقال دهیم:



$y=f(x)$ $\quad$ $y=f(2x)$ $\quad$ $y=f(2x-2)$

دقت کنید که می‌توانستیم ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(x-2)$ و سپس نمودار تابع $y=g(2x)$ را رسم کنیم.

۳. با توجه به اینکه $fofof=fo(fof)$، کافی است ابتدا fof را پیدا کنیم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{1-x}{1+x})=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}$$
$$=\frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x$$

و همچنین داریم:

$$D_{fof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_f\right\}$$
$$=\left\{x\in R-\{-1\} \,\middle|\, \frac{1-x}{1+x}\ne -1\right\}$$

و چون معادلهٔ $\frac{1-x}{1+x}=-1$ جوابی ندارد، پس: $D_{fof}=R-\{-1\}=D_f$. بنابراین: $fofof(x)=f(f(f(x)))=f(x)$ که در آن: $D_{fofof}=D_f=R-\{-1\}$.

۴. $D_f=R$، پس دامنهٔ f متقارن است. از طرف دیگر:

الف) اگر: $x\ge 0$، پس: $f(x)=x^2+x$ و چون: $-x\le 0$، داریم: $f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$ پس: $f(-x)=f(x)$.

ب) اگر: $x\le 0$، پس: $f(x)=x^2-x$ و چون: $-x\ge 0$، داریم: $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$ بنابراین در این حالت نیز: $f(-x)=f(x)$.

پس تابع f زوج است.

۵.

$$y=\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1})$$
$$\times\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}=\frac{9}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}$$

اگر $x_1<x_2$ باشد، پس:

$$\sqrt{x_1+10}+\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+10}+\sqrt{x_2+1}$$
$$\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x_1+10}+\sqrt{x_1+1}}>\frac{9}{\sqrt{x_2+10}+\sqrt{x_2+1}}$$
$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

بنابراین تابع f اکیداً نزولی است و چون: $D_f=[-1,6]$، پس برای $x\in D_f$ داریم:

$$-1\le x\le 6\Rightarrow f(-1)\ge f(x)\ge f(6)\Rightarrow 3\ge f(x)\ge 4-\sqrt{7}$$

پس $f(x)$ فقط می‌تواند شامل دو عدد صحیح ۲ یا ۳ باشد.

۶. اگر ضریب x^4، مخالف صفر باشد، $f(x)$ هیچ‌گاه وارون‌پذیر نخواهد بود، پس: $a+1=0$ و در نتیجه: $a=-1$. با جای‌گذاری این مقدار در $f(x)$ داریم: $f(x)=x^3+3x^2+3x$.

از سوی دیگر، نمودار f و f^{-1} نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند. پس هر جایی که نمودار وارون f، خط $y=x$ را قطع کند، تابع وارون نیز همان‌جا این خط را قطع می‌کند. بنابراین کافی است محل برخورد $f(x)$ با این خط را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y=x^3+3x^2+3x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^3+3x^2+3x=x$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2+3x+2)=0$$

$$\Rightarrow x(x+1)(x+2)=0 \Rightarrow x=0,-1,-2$$

پس در سه نقطه تابع وارون، خط $y=x$ را قطع می‌کند.

پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

۱. در مجموعهٔ A داریم:

$$a_n=\underbrace{55\ldots5}_{n\ \text{بار}}=5(\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{بار}})=\frac{5}{9}(\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{بار}})=\frac{5}{9}(10^n-1)$$

پس: $A=\left\{\frac{5}{9}(10^n-1)\middle| n\in N\right\}$.

در مجموعهٔ B، جملات با شمارهٔ زوج، صفر هستند. پس می‌توانیم آن‌ها را با دستور $1-(-1)^n$ درست کنیم. جملات با شمارهٔ فرد به‌صورت $\frac{1}{2^n}$ هستند، پس با تلفیق این دو دستور داریم:

پس: $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\times\frac{1}{2^n}$ ، $B=\left\{\frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}\middle| n\in N\right\}$.

۲.

$$\binom{n}{3}>\binom{n}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6}>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

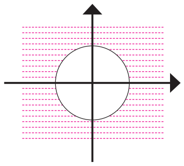
$$\Rightarrow \frac{1}{6}>\frac{(n-3)(n-4)}{120}$$

$$\Rightarrow n^2-7n+12<20 \Rightarrow n^2-7n-8<0$$

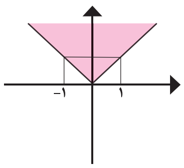
$$\Rightarrow (n+1)(n-8)<0 \Rightarrow -1<n<8$$

پس این مجموعه حداکثر هفت عضو دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی این‌گونه مجموعه‌ها، حداکثر برابر با $\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{6}=35$ است.

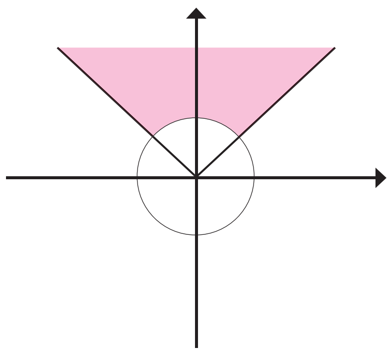
۳. نمودار مربوط به $x^2+y^2\ge1$، به‌صورت روبه‌رو است.



و نمودار مربوط به $|x|<y$ به شکل مقابل است.



بنابراین با اشتراک این دو ناحیه، نمودار رابطهٔ R به‌صورت زیر خواهد بود.



۴. رابطهٔ R روی مجموعهٔ $R-\{1\}$ به‌صورت $aRb \Leftrightarrow a+b-ab\le1$ است. پس:

$$\text{بازتابی}:\ aRa \Rightarrow a+a-a^2\le1 \Rightarrow a^2-2a+1\ge0 \Rightarrow (a-1)^2\ge0$$

$$\text{تقارنی}:\ aRb \Rightarrow a+b-ab\le1 \Rightarrow b+a-ba\le1 \Rightarrow bRa$$

$$\text{تعدی}:\begin{cases} aRb \Rightarrow a+b-ab\le1 \Rightarrow ab-a-b+1\ge0 \\ \Rightarrow a(b-1)-(b-1)\ge0 \Rightarrow (b-1)(a-1)\ge0 \\ bRc \Rightarrow b+c-bc\le1 \Rightarrow bc-b-c+1\ge0 \\ \Rightarrow b(c-1)-(c-1)\ge0 \Rightarrow (c-1)(b-1)\ge0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-1)(c-1)(b-1)^2\ge0 \Rightarrow (a-1)(c-1)\ge0$$

$$\Rightarrow ac-a-c+1\ge0 \Rightarrow a+c-ac\le1$$

پس: aRc. بنابراین R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۵. اگر سه مجموعه‌ای که توسط رابطهٔ R افراز شده، A_1، A_2 و A_3 باشند، پس: $|A_1|+|A_2|+|A_3|=6$. همچنین داریم: $|R|=|A_1|^2+|A_2|^2+|A_3|^2$ بنابراین بیشترین مقدار اندازهٔ R هنگامی به‌دست می‌آید که: $|A_3|=4$ و $|A_1|=|A_2|=1$ و در این‌صورت: $|R|=1+1+16=18$. کمترین اندازهٔ R نیز هنگامی به‌دست می‌آید که: $|A_1|=|A_2|=|A_3|=2$ و در نتیجه: $|R|=4+4+4=12$. پس: $12\le|R|\le18$.

۶.

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$
$$=[(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$$
$$=[(A\cap B)\cap(A'\cup C')]\cup[(A\cap C)\cap(A'\cup B')]$$
$$=[\underbrace{(A\cap B)\cap A'}_{\varnothing}]\cup[(A\cap B)\cap C']\cup[\underbrace{(A\cap C)\cap A'}_{\varnothing}]$$
$$\cup[(A\cap C)\cap B']=[A\cap(B-C)]\cup[A\cap(C-B)]$$
$$=A\cap[(B-C)\cup(C-B)]=A\cap(B\Delta C)$$

پاسخ‌نامهٔ ریاضی ۳

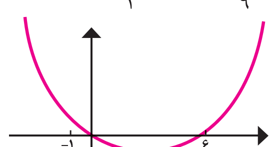
۱.
$$۲x-۳-\frac{۱}{x^۲-۴x}>x-۴-\frac{۱}{x^۲-۴x}$$
$$\Rightarrow ۲x-۳>x-۴\Rightarrow x>-۱$$

ولی ریشه‌های مخرج $x=۰,۴$ هستند، پس جواب این نامعادله $(-۱,+\infty)-\{۰,۴\}$ است.

۲.
$$\begin{cases}\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos x\cos\frac{\pi}{۳}-\sin x\sin\frac{\pi}{۳}\\ \cos(x-\frac{\pi}{۳})=\cos x\cos\frac{\pi}{۳}+\sin x\sin\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۳})+\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۲\cos x\cos\frac{\pi}{۳}$$
$$=۲\cos x\times\frac{۱}{۲}=\cos x$$

پس $\cos x=\frac{۲}{۳}$. اکنون به کمک رابطهٔ $\cos۲x=۲\cos^۲x-۱$، داریم:

$$\cos۲x=۲(\frac{۲}{۳})^۲-۱=۲(\frac{۴}{۹})-۱=\frac{۸}{۹}-۱=-\frac{۱}{۹}$$



۳. نمودار $f(x+1)$ حاصل انتقال $f(x)$ به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ است. پس نمودار $f(x)$ به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.

اکنون دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ شامل تمام مقادیر xای است که x و $f(x)$ هم‌علامت باشند. پس با توجه به نمودار $f(x)$، فقط $x\geq۶$ قابل قبول است که به ازای این مقادیر داریم: $f(x)\geq۰$. پس: $D=[۶,+\infty)$.

۴.
$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}$$
$$\Rightarrow\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$$

اکنون اگر قرینهٔ صورت را به مخرج اضافه کنیم، داریم:

$$\frac{g(x)+۱}{-۲}=\frac{x^۲+۲}{-۱}\Rightarrow g(x)=۲x^۲+۳$$
$$\Rightarrow g(۱)=۲+۳=۵$$

۵.
$$\begin{cases}D_g: x^۲+۲x>۰\Rightarrow x(x+۲)>۰\\ \Rightarrow x<-۲ \text{ یا } x>۰\Rightarrow Dg=(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)\\ D_f: ۳-x\geq۰\Rightarrow x\leq۳\Rightarrow D_f=(-\infty,۳]\end{cases}$$

بنابراین داریم:

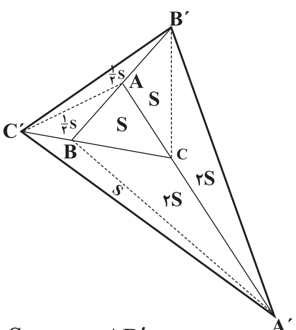
$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x\in\underbrace{(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)}_{A}\,|\,\log_۲(x^۲+۲x)\leq۳\}$$
$$\log_۲(x^۲+۲x)\leq۳\Rightarrow x^۲+۲x\leq۲^۳$$
$$\Rightarrow x^۲+۲x-۸\leq۰\Rightarrow(x+۴)(x-۲)\leq۰$$
$$\Rightarrow-۴\leq x\leq۲\Rightarrow x\in\underbrace{[-۴,۲]}_{B}$$

پس:

$$D_{fog}=A\cap B=[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

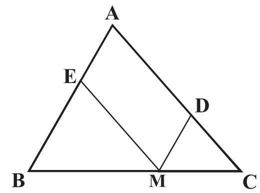
پاسخ مسائل هندسهٔ دهم

۱. اگر مساحت مثلث ABC مساوی S باشد، طبق آنچه از کتاب درسی می‌دانیم، می‌توان نوشت:



$$\frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}}=\frac{AB'}{AB}=۱\Rightarrow S_{AB'C}=S$$
$$\frac{S_{AB'C}}{S_{A'CB'}}=\frac{AC}{A'C}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{A'CB'}=۲S$$
$$\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}}=\frac{A'C}{AC}=۲\Rightarrow S_{A'BC}=۲S,$$
$$\frac{S_{A'BC}}{S_{A'BC'}}=\frac{BC}{BC'}=۲\Rightarrow S_{A'BC'}=S$$
$$\frac{S_{ABC'}}{S_{ABC}}=\frac{BC'}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{ABC'}=\frac{۱}{۲}S$$
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC'}}=\frac{AB'}{AB}=۱\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{۱}{۲}S$$
$$\Rightarrow S_{A'B'C'}=۸S$$

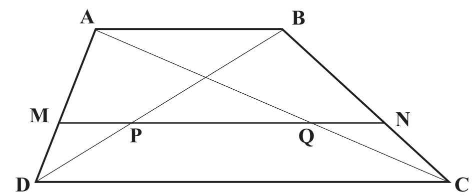
۲.
$$\Delta ABC: MD\parallel AB\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{BM}{BC}$$
$$ME\parallel AC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{MC}{BC}$$
$$\Rightarrow\frac{AD}{AC}+\frac{AE}{AB}=\frac{BM+MC}{BC}=\frac{BC}{BC}=۱$$



۳.

$$\Delta ADB : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB}=\frac{DM}{AD} \qquad (۱)$$

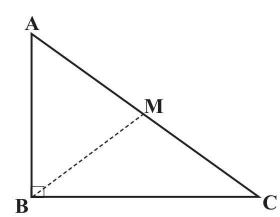
$$\Delta ACB : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB}=\frac{CN}{CB} \qquad (۲)$$



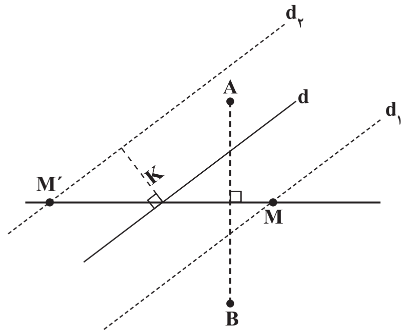
و طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم: $\frac{DM}{AD}=\frac{CN}{CB}$.
بنابراین با توجه به برابری‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت: $\frac{QN}{AB}=\frac{MP}{AB}$ و در نتیجه: MP=QN.

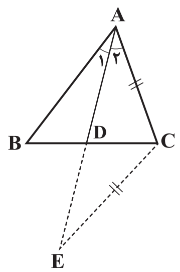
پاسخ مسائل هندسهٔ ۲

۱. می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. بنابراین: $MB=\frac{AC}{۲}=AM=MC$. پس M از A و B به یک فاصله است (با تغییر مکان C و تغییر CA و CB و ثابت بودن جای A و B). بنابراین M همواره روی عمودمنصف AB قرار دارد. یعنی مکان هندسی M عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۲. عمودمنصف AB مکان هندسی نقاطی است که از A و B به یک فاصله‌اند (خط L) و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ موازی d و به فاصلهٔ k از آن هستند. بنابراین جواب مسئله نقطهٔ برخورد L با $d_۱$ و $d_۲$ است. اگر L با $d_۱$ و $d_۲$ متقاطع باشد، مسئله دو جواب دارد و اگر: $L \parallel d_۱ \parallel d_۲$، مسئله جواب ندارد و اگر L بر $d_۱$ یا $d_۲$ منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.





۳. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. نیم‌ساز AD را امتداد می‌دهیم تا خطی را که از C موازی AB رسم شده است، در E قطع کند. در این‌صورت داریم:

$$CE \parallel AB \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{E}, \hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{E} \Rightarrow AC=CE$$

همچنین، با توجه به تشابه مثلث‌های ADB و DEC داریم:

$$\frac{AD}{DE}=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow DE=(\frac{AC}{AB})AD$$

اکنون با معلوم بودن AC و AB، $\frac{AC}{AB}=k$ معلوم است و پاره‌خط DE=kAD نیز معلوم است. در نتیجه AE=(k+۱)AD نیز قابل رسم است و از آنجا می‌توان مثلث ACE و در نتیجه مثلث ABC را رسم کرد.

طریقهٔ رسم: ابتدا پاره‌خط معلوم $AE=(\frac{AC}{AB}+۱)AD$ را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع AC و به مرکز E و همین شعاع کمان‌هایی می‌زنیم تا دو کمان یکدیگر را در C قطع کنند و مثلث ACE را بنا می‌کنیم. در ادامه، هم اندازهٔ زاویهٔ CAE در طرف دیگر AE جدا می‌کنیم و روی ضلع آن به اندازهٔ AB پیش می‌رویم تا نقطهٔ B هم به‌دست آید. حالا B را به C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود. (یا اینکه به اندازهٔ AD روی AE جدا می‌کنیم تا D مشخص شود و CD را امتداد می‌دهیم تا کمانی را که به مرکز A و به شعاع AB زده‌ایم در نقطهٔ B قطع کند.)

بحث: مسئله در صورتی جواب دارد که مثلث ACE قابل رسم باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$|AC-CE| < AE < AC+CE$$

$$۰ < (\frac{AC}{AB}+۱)AD < ۲AC$$

$$\Rightarrow AD < \frac{۲AB.AC}{AB+AC}$$