وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

دورهٔ بیست و ششم
شمارهٔ ۱
مهر ۱۳۹۵
۴۸ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

- ملکهٔ علوم
- مثلث خیام و تعداد کوتاه‌ترین مسیرها
- اعداد تاکسی و اعداد خوش‌اقبال!
- ریاضیات در چند دقیقه
- معادلهٔ حرکت از دیدگاه فیزیکی و ریاضی
- پای تخته

حمیدرضا امیری

ملکهٔ علوم

با شروع سال تحصیلی حس خوبی داریم و دوباره خودمان را در کنار شما و همراه با شما احساس می‌کنیم.

امسال در متوسطهٔ دوم، دانش‌آموزانِ سال‌های سوم و چهارم دبیرستان میزبان دانش‌آموزان سال دهم هستند که اولین گروه دانش‌آموزانی محسوب می‌شوند که به متوسطهٔ دوم می‌رسند.

سردبیر، مدیر داخلی و اعضای هیئت تحریریه مجلهٔ ریاضی «رشد برهان متوسطهٔ ۲» به همهٔ شما دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان فهیم و سخت‌کوش شروع سال تحصیلی را تبریک می‌گویند و به‌خصوص ورود دانش‌آموزان سال دهم را به دورهٔ تحصیلی متوسطهٔ دوم گرامی می‌دارند.

ما سعی می‌کنیم در این مجله و در راستای اهداف آموزشی و پرورشی کتاب‌های درسیِ ریاضی، شما را هرچه بیشتر، عمیق‌تر و باانگیزه‌تر با این علم که به ملکهٔ علوم معروف است، آشنا کنیم. در واقع شما ان‌شاءالله مجلهٔ ریاضی برهان را به‌عنوان مکملی برای کتاب درسیِ خود، منبعی برای اطلاعات به‌روز در ریاضیات، مخزنی برای سؤالات استاندارد به منظور ارزشیابی، محلی برای بازی و سرگرمی‌های ریاضی، و جایی برای چاپ نظرات، پیشنهادات، انتقادات و نوشته‌های خوبِ خودتان خواهید یافت. از همین شماره ارتباط خودتان را با ما برقرار کنید و از طریق ارسال نامه به نشانی مجله یا نشانی پیام‌نگار که هر دو در مجله درج شده‌اند، نوشته‌ها، پیشنهادات، خاطرات کلاس درس ریاضی و... خود را برای ما بفرستید تا با نام خودتان چاپ کنیم.

مجله ریاضی برهان متوسطهٔ ۲ هر ماه و به تعداد هشت شماره در اختیار شما قرار خواهد گرفت. در هر شماره شما شاهد مطالب متنوعی چون: مطالب کمک‌درسی و کمک‌آموزشی، مسائلی برای حل (همراه با حل تشریحی)، تاریخ ریاضی، مسابقات ریاضی یا مسائل مسابقه‌ای، بازی‌ها، لطیفه‌ها و سرگرمی‌های ریاضی، گزارش‌ها، میزگردها و مصاحبه‌های متنوع، آموزش ترجمهٔ متون ریاضی، پاسخ به نامه‌ها و... خواهید بود. توصیه می‌کنم در نوشتن مطالب و حل مسائل و ان‌شاءالله ارسال مقاله‌های خود، از دبیران دلسوزتان یاری بگیرید و از راهنمایی‌های ایشان استفاده کنید.

همواره موفق و مؤید و شاداب باشید.

آموزشی

هوشنگ شرقی

۱

استدلال استقرایی و استقرای ریاضی

الف) سکهٔ سنگین‌تر، کدام است؟!

معماهای مربوط به سکه‌ها و پیدا کردن سکهٔ سنگین‌تر (یا سبک‌تر) در میان تعداد معینی سکه، از قدیمی‌ترین معماها با ماهیت ریاضی هستند و قدمت آن‌ها به حداقل پنج قرن پیش برمی‌گردد. با یک نمونهٔ بسیار ساده شروع می‌کنم که خودم آن را در دوران دبیرستان شنیده بودم:

- هشت سکهٔ مشابه داریم که یکی از آن‌ها کمی از بقیه سنگین‌تر است. چگونه می‌توانیم با دوبار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، این سکه را مشخص کنیم؟

توصیه می‌کنم در این مورد و موارد بعدی، ابتدا خودتان خوب روی مسئله تمرکز کنید و بکوشید آن را خوب بفهمید و تجزیه و تحلیل کنید. تلاش کنید خودتان آن را حل کنید و بعد به راه‌حل مراجعه کنید. اگر کمی به مسئله اندیشیده باشید، راه‌حل آن را ساده می‌یابید: شش‌تا از سکه‌ها را به دو بخش سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و هر سه سکه را در یک کفه قرار می‌دهیم. اگر دو کفه برابر باشند، سکهٔ سنگین بین دو سکهٔ دیگر است و با قرار دادن دو سکه در دو کفهٔ ترازو در مرحلهٔ دوم، سکهٔ سنگین مشخص می‌شود. اما اگر یکی از دو کفه پایین بیاید، سکهٔ سنگین بین سه سکهٔ این کفه است. حال کافی است دوتا از این سه سکه را در دو کفهٔ ترازو بگذاریم. اگر دو کفه برابر شوند، سکهٔ سنگین، سکهٔ سوم است و اگر یکی از دو کفه پایین آمد، سکهٔ سنگین در همان کفه است.

حال به یک نمونهٔ دیگر توجه کنید:

- نه سکهٔ مشابه داریم که یکی از آن‌ها کمی از بقیه سنگین‌تر است. چگونه می‌توانیم با دوبار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، سکهٔ سنگین‌تر را مشخص کنیم؟ (باز هم قبل از مراجعه به راه‌حل، خوب فکر کنید!)

***

بله، باز هم کار چندان دشواری نیست! کافی است سکه‌ها را به سه دستهٔ سه‌تایی تقسیم کنید. دو دستهٔ سه‌تایی را در دو کفهٔ ترازو بگذارید. اگر برابر بودند، سکهٔ سنگین‌تر در میان سه سکهٔ سوم است و اگر یکی از دو کفه پایین آمد، سکهٔ سنگین‌تر در آن کفه است. پس با یک‌بار استفاده از ترازو، سه سکه مشخص می‌شود که سکهٔ سنگین بین آن‌ها است. حال مشابه آنچه در مسئلهٔ قبل دیدیم، به سادگی با یک‌بار دیگر استفاده از ترازو می‌توانیم سکهٔ سنگین‌تر را مشخص کنیم.

حالا به این نمونه توجه کنید:

- ۲۷ سکهٔ مشابه داریم. چگونه می‌توانیم با سه‌بار استفاده از ترازوی دو کفه‌ای، یکی از آن‌ها را که از بقیه سنگین‌تر است، مشخص کنیم؟

***

احتمالاً ایدهٔ حل مسئله را از مسئلهٔ قبلی توانسته‌اید استخراج کنید! ۲۷ سکه را به سه دستهٔ نه‌تایی تقسیم می‌کنیم. دو دسته را در دو کفهٔ ترازو می‌گذاریم و با هم مقایسه می‌کنیم. اگر دو کفه برابر بودند، سکهٔ سنگین‌تر در نه‌تای سوم است و اگر یکی از دو کفه پایین آمد، سکهٔ سنگین‌تر بین نه سکهٔ آن کفه است. پس با یک‌بار استفاده از

ترازو، نه سکه‌ای که سکهٔ سنگین در میان آن‌هاست، معلوم می‌شوند. حال با توجه به مسـئلهٔ قبل، با دوبار اسـتفاده از ترازو می‌توانیم سکهٔ سنگین را از میان این نه سکه جدا کنیم. پس در مجموع کافی است سه‌بار از ترازو استفاده کنیم!

حالا دیگر احتمالاً به سادگی می‌توانید به این پرسش پاسخ دهید:

● ۸۱ سـکهٔ مشـابه داریم که یکی از آن‌ها از بقیه سـنگین‌تر است. چگونه می‌توانیم با چهار بار اسـتفاده از ترازوی دوکفه‌ای، سـکهٔ سـنگین‌تر را مشـخص کنیم؟ اگر ۲۴۳ سکه داشته باشیم، کافی اسـت چند بار از ترازوی دو کفه‌ای اسـتفاده کنیم؟ اگر ۳^n سـکه داشته باشیم چطور؟

***

فرایندی که در این مسئله دیدیم، اصطلاحاً فرایندی «استقرایی» اسـت. در این فرایند ما یک «الگو» یا نظم را مشـاهده می‌کنیم و آن را «تعمیم» می‌دهیم. مثلاً دیدیم که اگر $۳^۱$ یک سـکه داشته باشیم، با یک بار اسـتفاده از ترازوی دو کفه‌ای می‌توانیم سکهٔ سنگین‌تری را که بین آن‌هاست، مشخص کنیم. اگر $۳^۲$ سکه داشتیم، با دو بار و اگر $۳^۳$=۲۷ سـکه داشـتیم، با سـه بار و در مورد $۳^۴$=۸۱ سکه با چهار بار اسـتفاده از ترازوی دو کفه‌ای به مقصود خود می‌رسـیم. پس نتیجه می‌گیریم که «به‌همین ترتیب» اگر ۳^n سـکه داشـته باشیم، با n بار اسـتفاده از ترازوی دو کفه‌ای می‌توانیم سـکهٔ سنگین‌تر را مشخص کنیم.

نکته‌ای که در این فرایند به‌خوبی قابل درک است و حتماً شما هم متوجه آن شده‌اید، این است که در هر مرحله از یافتن الگو، از نتیجهٔ مرحلهٔ قبل استفاده می‌شود. یعنی مثلاً وقتی ۸۱ سکه داشتید، آن‌ها را به سه دستهٔ ۲۷تایی تقسیم کردید و با یک‌بار استفاده از ترازو، ۲۷ سکه‌ای را که سکهٔ سنگین‌تر در میان آن‌ها بود، پیدا کردید و با توجه به نتیجه‌ای که در مورد ۲۷ سکه می‌دانستید، توانستید نتیجه بگیرید که چهار بار استفاده از ترازو کافی است.

این فرایند در مسائل زیادی از ریاضیات مشاهده می‌شود. به‌همین دلیل استقرا را «رسیدن از جزء به کل» نامیده‌اند؛ یعنی مشاهدهٔ نظم در یک جزء (مجموعهٔ کوچک) و تعمیم آن به کل (همهٔ اعضا).

***

اکنون بیایید با هم به یک جزیرهٔ گمنام و عجیب و غریب برویم!

ب) جزیرهٔ گُنگ‌ها!

در یک جزیرهٔ دوردسـت، هیچ‌کس نمی‌تواند سخن بگوید و هیچ نوع ارتباط کلامی و یا اشـاره‌ای بین هیچ دو شـهروندی وجود ندارد. همچنین هیچ وسیله‌ای که افراد خودشان را در آن ببینند (مانند آینه و اجسام شفاف دیگر) وجود ندارد. تنها و تنها رئیس این قبیله می‌تواند بـا زبان مخصوص خودش با همه صحبت کند. او هر روز صبح یک‌بار

همهٔ دستوراتش را به همه که در یکجا جمع می‌شوند و او و یکدیگر را می‌بینند، ابلاغ می‌کند.

یک روز صبح رئیس قبیله رو به همه گفت: «در جمع شما عده‌ای هسـتند که روی پیشانی‌شان علامتی هست! آن‌ها هرچه زودتر بروند و خودکشی کنند!»

البته این دسـتوری غیرمنطقی است! ولی خب این جزیرهٔ فرضی هم عجیب است، همان‌طور که نداشتن ارتباط کلامی و اشاره‌ای و نبود آینه و وسایل مشابه هم به قدر کافی عجیب است! اما به هر حال افراد ایـن قبیله مطیع بی‌چون و چرای رئیس خود بودند و یک ماه (سـی روز) بعد عده‌ای رفتند و خودکشـی کردند. آن‌ها چند نفر بودند؟ چرا یـک ماه بعد این کار را کردند؟ و از همه مهم‌تر، از کجا متوجه وجود علامت روی پیشانی‌شان شدند؟ این‌بار باید بیشتر روی مسئله متمرکز شوید و خوب فکر کنید!

***

تصور اینکه عده‌ای بدون داشتن هرگونه وسیلهٔ ارتباطی و کلامی و بدون داشتن آینه (و ابزار مشابه آن) بتوانند فقط با نگاه کردن، به وجود علامتی روی پیشانی خود پی ببرند کاملاً عجیب است! اما غیرممکن نیسـت. بیاید باز هم به مسـئلهٔ نگاهی استقرایی داشته باشیم. یعنی مسئله را از جزء شروع کنیم و به کل برسیم.

فـرض کنید فقط یک نفر در میان افراد قبیله روی پیشـانی‌اش علامت داشته باشد. چه اتفاقی می‌افتد؟ او می‌بیند که همهٔ افراد قبیله پاک هستند و علامتی ندارند، پس چه نتیجه‌ای می‌گیرد؟ واضح است که فوراً می‌فهمد که خودش بر پیشانی علامت دارد و در نتیجه همان روز اول خودکشی می‌کند.

حالا فرض کنید دو نفر بر پیشـانی علامت داشـته باشـند. چه می‌شـود؟ روز اول هر یک از این دو نفر می‌بیند که همهٔ افراد به جز یک نفر، روی پیشـانی علامت ندارند. پس طبق بحث قبلی، استنتاج

می‌کند که اگر خودش علامت نداشــته باشد، نفر دیگر باید همان روز اول خودکشی کند. پس هر کدام یک روز صبر می‌کنند. وقتی در روز دوم یکدیگر را می‌بینند، فوراً می‌فهمند که هر دو علامت دارند! و آن روز باید خودکشی کنند. (البته بقیهٔ افراد در روز اول می‌بینند که دو نفر علامت دارند، پس بیشتر صبر می‌کنند.)

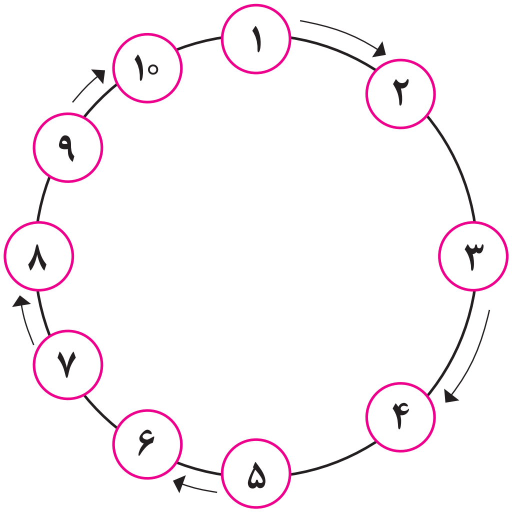
حالا اگر ســه نفر دارای علامت باشند چه می‌شود؟ هر یک از این ســه نفر دو نفر را دارای علامت و بقیه را بدون علامت می‌بینند. پس هــر کدام (طبق بحث قبلــی) دو روز صبر می‌کنند تا اگر فقط آن دو نفر علامت داشــتند، روز دوم خودکشــی کنند. اما وقتی در روز سوم یکدیگر را می‌بینند، مطمئن می‌شوند که خودشان هم علامت دارند و در نتیجه در روز سوم خودکشی می‌کنند.

حالا حتماً می‌توانید بگویید که چرا اگر چهار نفر علامت داشــته باشــند، روز چهارم همه با هم خودکشــی می‌کنند و به‌همین ترتیب اگر پنج نفر علامت داشته باشند... و در حالت کلی، اگر n نفر علامت داشته باشند، روز nام خودکشی می‌کنند. پس وقتی عده‌ای روز سی‌ام خودکشی کرده‌اند، حتماً ۳۰ نفر بوده‌اند.

***

اکنون که با فرایندهای اســتقرایی آشــنا شــده‌اید، این مسئله را خودتان حل کنید:

- فرض کنید عده‌ای تیرانداز دور یک دایرهٔ بزرگ ایستاده‌اند و با یک فرمان شــروع، همه در یک جهــت (مثلاً جهت حرکت عقربه‌های ســاعت) به‌ترتیب به نفر بعدی شلیک می‌کنند و پس از یک دور، این کار را ادامه می‌دهند تا وقتی که فقط یک نفر زنده بماند. مثلاً اگر آن‌ها ۱۰ نفر باشند، مطابق نمودار مقابل ابتدا ۱ به ۲، ۳ به ۴، ۵ به ۶، ۷ به ۸ و ۹ به ۱۰ شلیک می‌کند و در نتیجه نفرات ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ زنده می‌مانند. ســپس ۱ به ۳، ۵ به ۷ و ۹ به ۱ شــلیک می‌کند و بعد ۵ به ۹ شلیک می‌کند و در نهایت ۵ زنده می‌ماند.



حالا همین مسئله را برای وقتی که عدهٔ تیراندازان ۲ نفر، ۳ نفر، ۴ نفر و... و ۲۰ نفر باشد حل کنید و جدول زیر را کامل کنید:

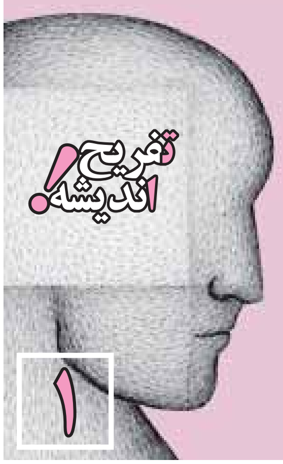
عدهٔ نفرات	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...	۲۰
شمارهٔ آخرین نفر که زنده مانده است	۱	۳	۱	۳	۵	...	...	...	...	...	...

در کدام حالت‌ها، اولین نفری که شلیک کرده، همان کسی است که زنده مانده است؟ (یعنی نفر شمارهٔ ۱ زنده مانده است.) آیا می‌توانید یک حدس استقرایی بزنید؟

***

پرسشــی که در انتها مطرح می‌کنیم و البته بســیار اهمیت دارد این است که: «آیا حدس‌های استقرایی همواره معتبر هستند؟» یعنی آیا الگوهایی که کشــف می‌کنیم و تعمیم‌هایی که می‌دهیم، همیشه درست هستند و ما را به نتایج درستی می‌رسانند؟

پاسخ به این پرسش را به شمارهٔ بعد موکول می‌کنیم.



به‌جای علامت‌های ســؤال چه اعدادی قرار می‌گیرند؟

۱۰، ۷، ۲۱، ۲۴، ۸، ۵، ۱۵،
۳۳، ۳۶، ؟، ؟، ؟، ۳۰

پاسخ‌ها در صفحه ۴۸ درج شده است.

ابوریحان بیرونی

- **کارگردان:** محمدرضا اصلانی
- **تحقیق و تنظیم:** محمدرضا اصلانی
- **فیلم‌بردار:** نقی معصومی
- **تدوین تصویر:** همایون پایور
- **صدابردار:** احمد خان‌زادی
- **تدوین صدا:** روح‌الله امامی
- **تهیه کننده:** ادارهٔ کل سینمایی ایران

احسان یارمحمدی

ابوریحان بیرونی یکی از بزرگ‌ترین و نام‌دارترین ریاضی‌دانان، دانشمندان و پژوهشگران ایران‌زمین و جهان است. در این مقاله قصد داریم با معرفی فیلم ابوریحان بیرونی، ساختهٔ کارگردان توانمند و باسابقهٔ سینمای ایران، **محمدرضا اصلانی**، شما را با گوشه‌ای از زندگی و کارهای علمی این دانشمند بی‌بدیل ایران بزرگ آشنا سازیم. اما قبل از پرداختن به این فیلم و موضوع آن و به منظور آشنایی بیشتر و بهتر شما با موضوع فیلم مزبور و شخصیت ابوریحان بیرونی، با بهره‌گیری از مطالبی دربارهٔ ابوریحان بیرونی، به نقل از کتاب «زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی»، به قلم زنده‌یاد استاد **ابوالقاسم قربانی**، و نیز ارائهٔ چند توضیح و تصویر تاریخی ـ جهانی از ابوریحان بیرونی، شما را در این زمینه یاری می‌رسانیم.

ابوریحان محمد بن احمد بیرونی یکی از نوابغ روزگار و نمونهٔ کامل هوشمندی، زیرکی و شدت عمل ایرانی و از جمله بزرگ‌ترین دانشمندان دورهٔ اسلامی است که بدون تردید، عمق و اصالت آثارش در میان دانشمندان آن دوره بی‌نظیر است. وی نه فقط یکی از بزرگ‌ترین مفاخر ایران، بلکه یکی از بزرگ‌ترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است و با ملاحظهٔ جمیع جهات می‌توان به تحقیق او را از زمرهٔ دانشمندان بزرگی

دانســت که تاکنون پا به عرصهٔ وجود گذاشته‌اند. بیرونی ریاضی‌دانی بود زبردست و مبتکر که علوم هیئت، نجوم و فیزیک عصر خود را به حدّ کمال می‌دانســت و در تاریخ، جغرافیا، گاه‌شماری و زبان‌شناسی تبحر داشت. وی تقریباً در همهٔ علوم متداول زمان خود، به اســتثنای کیمیا، به تحقیــق می‌پرداخت. گذشــته از این‌ها، ســیّاح زیرک و نکته‌ســنجی بود که ســخن و عقاید ملل را می‌نگریست و با بی‌طرفی و بدون تعصّب دربارهٔ آن‌ها قضاوت می‌کرد.

بیرونی از خانواده‌ای ایرانی و به احتمال قریب به یقین شــیعی مذهب، در سوم ماه ذیحجهٔ ســال ۳۶۲ هجری قمری مطابق با چهارم ســپتامبر ســال ۹۷۳ میلادی در «بیرون» خوارزم (ناحیهٔ مصب آمودریا در ساحل جنوبی دریاچهٔ آرال) پا به عرصهٔ وجود گذاشــت. وی اوایل عمر خود را در موطنش گذراند و به خوارزمشــاهیان معروف به آل عراق که در «کاث» فرمانروا بودند، پیوســت و نزد استادانی مانند ریاضی‌دان بزرگ آن عصر **ابونصر عراق**، به فراگرفتن علوم ریاضی و جزء آن سرگرم بود. از همان آغاز جوانی به تحقیق و تألیف می‌پرداخت و با دانشمندان دیگر مانند **ابوعلی ســینا** و غیره مکاتبهٔ علمی داشــت. خود او نوشته اســت، هنگامی که ۱۸ ساله بوده به رصد می‌پرداخته است.

ابوریحــان بیرونی بدون تردید در ســال‌های ۳۸۴ و ۳۸۵، یعنی هنگامی که ۲۲ یا ۲۳ ســال قمری داشــت، هنــوز در خوارزم بود. چه خود نوشــته اســت که در آن سال‌ها در ساحل غربی رود «جیحون» (آمودریا) و جنوب شهر خوارزم به رصد می‌پرداخته است. ابوریحان بیرونی در سال ۳۸۵ هجری قمری یا کمی پس از آن تاریخ، بعد از انقــراض خاندان آل‌عراق به‌دســت **مأمون بن محمد**، والــی جرجانیه، و قتــل **ابوعبدالله محمــد بن احمد**، آخرین حکمــران آل‌عراق، به ناچاری جلای وطن کرد و تا چند ســال نتوانست در یکجا بماند و از این شهر به آن شــهر می‌رفت. به احتمال قوی در همین ســال‌ها بود کــه ابوریحان بیرونی به ری رفــت، و چنانچه که خود در مقدمهٔ کتاب «**مقالید علم الهیئة**» نوشــته، در آنجا با **ابومحمود خجندی** و **کوشــیار گیلی** ملاقات کرده است.

ســلطان **محمــود غزنوی** در مراجعت بــه غزنه در

سجستان (افغانستان) در بهار سال ۴۰۸ هجری قمری، ابوریحــان بیرونی و عده‌ای از علمایی را که در جرجانیه بودند، همراه خود به غزنه بــرد. ابوریحان بیرونی از آن پس در غزنه مســتقر شد و شاید شغل رسمی منجمی دربار ســلطان محمود را به‌عهده داشــت و در بیشــتر لشکرکشــی‌های محمود غزنوی به هنــد در ملازمت او بود. ابوریحان بیرونی از مسافرت به هند استفاده کرد و با علما و حکمای آن ســرزمین مصاحبت داشت و علوم اســلامی و یونانی را به آنان می‌آموخت. در عین حال به فرا گرفتن زبان سانسکریت و بعضی از لهجه‌های محلی هند و معارف هندیان و استقصاء[1] در افکار و فلسفهٔ آنان

همت گماشت و گنجینه‌ای سرشار از اطلاعات گران‌بها اندوخت و بدین‌گونه مواد اولیهٔ اثر مشهور خود، موسوم به «**تحقیق ماللهند**» را فراهم آورد.

ابوریحـان بیرونـی چنان‌که گفتیم مذهب شـیعه داشـت و مـردی آزاد فکر و عـاری از تعصب بـود. اما سلطان محمود غزنوی سخت در تسنن متعصب بود و در استیصال شـیعه، معتزله، اسماعیلیه و قرامطه اهتمامی تمام داشـت. بدیهی اسـت که در این شرایط ابوریحان همـواره از جـان خود بیمناک بود. سـلطان محمود در سـال ۴۲۱ هجری قمری درگذشـت. در زمان سلطان **مسـعود غزنوی** (۴۳۳ـ ۴۲۱) ـ فرزند سلطان محمود ـ بیرونـی آسـایش‌خاطر یافت و سـومین اثر مشـهور خود «**قانون مسـعودی**» را کـه دایرةالمعارف نجوم و هیئت آن زمان اسـت، در سال ۴۲۱ به سلطان مسعود هدیـه کـرد. در زمـان سـلطنت **مودودبن مسـعود** (۴۴۰-۴۳۳) نیز بیرونی مورد عنایت سلطان بود و کتاب «**الجماهـر فی معرفةالجواهـر**» از آثار او در این عهد اسـت. ابوریحـان بیرونـی در آخرین اثر خـود، یعنی «**الصیدله فی الطب**» که دربارهٔ داروهای طبی اسـت، اظهار داشـته است که سن او هنگام نوشتن آن کتاب از ۸۰ متجاوز بوده است. بنابراین سال درگذشت بیرونی را که معمولاً سـال ۴۴۰ هجری قمری ذکر می‌کنند، باید کمی بعد از سال ۴۴۲ دانست.

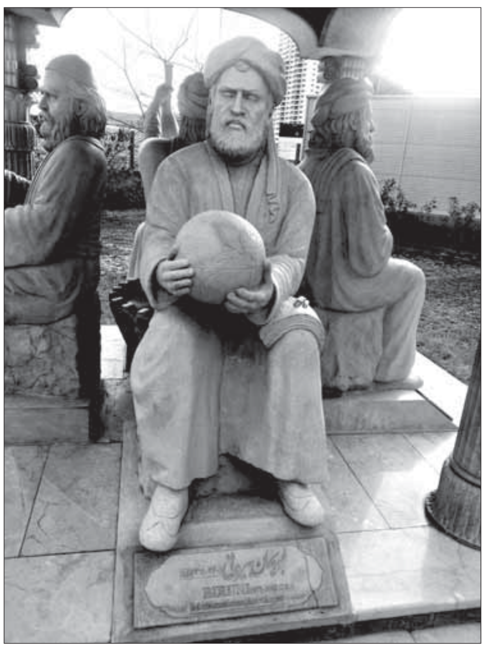
دربارهٔ ابوریحان بیرونی و ویژگی‌های او نوشته‌اندکه:

- آن‌گاه کـه بیرونی کتاب قانون مسـعودی را تصنیف کرد، سـلطان او را پیلواری سیم جایزه فرستاد و وی آن مـال را به خزانه بازگردانیـد و گفت: «من از آن بی‌نیازم. چه عمری در قناعت گذرانده‌ام و دیگر مرا با ترک خوی و عادت سزاوار نیست...»
- دست و چشـم او هیچ‌گاه از عمل بازنماند و دائم در کار بـود، مگر بـه روز نوروز و مهـرگان یا برای تهیهٔ احتیاجات معاش. او گندم‌گون و بطین بود و محاسنی انبوه داشت...
- فقیه **ابوالحسن علی** گوید: آن‌گاه که نفس در سینهٔ او به شـماره افتاده بود، بر بالین وی حاضر آمدم. در آن حال از من پرسید: **حساب جدّات فاسده** را که وقتی مرا گفتی، بازگوی که چگونه بود. گفتم: اکنون چه جای این سـؤال است! گفت: ای مرد کدام‌یک از این دو بهتر؟ این مسـئله بدانم و بمیرم یا نادانسته و جاهل درگذرم؟! و من آن مسئله بازگفتم، فراگرفت و از نزد وی بازگشتم. هنوز قسمتی از راه نپیموده بودم که شیون از خانهٔ او برخاست.

***

در ژوئـن سـال ۲۰۰۹، دولت جمهوری اسـلامی ایـران به‌عنوان نشـانی از پیشـرفت صلح‌آمیز علم در ایران، سـازه‌ای چهارطاقی را که ترکیبی از سبک‌های معماری و تزئینات دوره‌های هخامنشی و اسلامی است، به دفتر سـازمان ملل متحد در وین اتریش هدیه داد. این چهارطاقی شـامل چهار تندیس از چهار دانشمند و اندیشـمند بزرگ ایران به نام‌های **خیام نیشابوری**، **زکریـای رازی**، **ابوعلی سـینا** و **ابوریحان بیرونی** است که هم‌اکنون در محوطهٔ دفتر سازمان ملل متحد در ویـن اتریش و در سـمت راسـت ورودی اصلی آن قرار دارد.

در ژوئن سال ۲۰۰۹ دولت جمهوری اسلامی ایران به‌عنوان نشانی از پیشرفت صلح‌آمیز علم در ایران، سازه‌ای چهارطاقی را که ترکیبی از سبک‌های معماری و تزئینات دوره‌های هخامنشی و اسلامی است، به دفتر سازمان ملل متحد در وین اتریش هدیه داد



در تقویـم ایران روز ۱۳ شـهریور روز بزرگداشـت ابوریحان بیرونی نامیده شده و هر سال به پاس احترام به بیرونی و جایگاه برجستهٔ علمی او، در گوشه و کنار جهان مراسم نکوداشتی برگزار می‌شـود. یکی از بزرگ‌ترین و مشـهورترین این مراسم، همایشـی بود که به مناسبت هزارمین سال تولد ابوریحان بیرونی (۱۳۵۲/۰۶/۱۳) در مهرماه سـال ۱۳۵۲ خورشـیدی در تهران و با حضور و استقبال پرشور شرکت‌کنندگان داخلی و خارجی برگزار شد. مجموعه مقالات ارزشمندی که در این همایش ارائه

شــد، در قالب کتابی شــامل ۱۱۰۰ صفحه و مشتمل بر دو جلــد با عنوان «**یادنامهٔ بیرونی**» که دربرگیرندهٔ ۲۸ مقاله و سخنرانی به زبان فارسی و ۳۰ مقاله به زبان‌های انگلیسی و فرانسه بود، به زیور طبع آراسته شد.

در ایــن همایش از تمبر زیر که مزیــن به تصویری از ابوریحان بیرونی بود، رونمایی شــد و در شــمارگان بالا در اختیار علاقه‌منــدان و عموم قرار گرفت.(تصویر تمبر مزبور قبلاً توسط وزارت فرهنگ و هنر ســابق به عنوان تصویر مورد تأیید آن وزارتخانه برای ابوریحان بیرونــی پذیرفته و مورد تأیید قرار گرفته بود.)

فیلم ابوریحان بیرونی شامل هشت عنوان به شرح زیر است که در هر یک از آن‌ها مطالبی از زبان راوی فیلم یا کارشناس مدعو بیان می‌شود.

- دیباچه
- ابوریحان بیرونی
- باب نخست: در ریاضی
- باب دوم: در نجوم
- باب سوم: در جهان‌شناسی
- باب چهارم: در تاریخ
- باب پنجم: در ارزش ابوریحان
- باب ششم: در زندگی

در ادامــه به ارائهٔ بخش‌هایی از این فیلم برای شــما ریاضی‌آموزان می‌پردازیم و به شما پیشنهاد می‌کنیم که با مطالعهٔ کامل این مقاله و منابع معتبر دربارهٔ ابوریحان بیرونی، به تماشــای این فیلم که شــاید نخستین فیلم مستند تاریخ سینمای ایران دربارهٔ او باشد، بنشینید.

دیباچه

جسم چه چیز است؟ آن چیز است که یافت شود به بِسودن[2] و قائم بودن به تن خویش.

ســطح چیست؟ جسم ناچارهٔ بی‌نهایت نبوَد به همه ســوها، و در نهایت او ســطح است و سطح طول است و عرض بس.

خط چیست؟ اگر بســیط را نهایت باشد، آن نهایت ناچارهٔ خطی باشد و آن خط طولی باشد بی‌عرض.

نقطه چیســت؟ چون خط را نهایت باشد، نهایت او نقطه بُوَد و بدان که نقطه را نه طول است و نه عرض و نه عمق. او نهایت همهٔ نهایت‌هاست.

ابوریحان بیرونی

باری بر شناختن ابوریحان کافی است بدانیم که در هزار ســال پیش بنای علوم طبیعی را بر ریاضی نهاد و قرن‌هــا پیش از **بیکِن** برای حل معضلات علمی و فنی به اســتقرا متوسل شد و صدها سال قبل از **کوپرنیک**[3] و **گالیله**[4] در عقیدهٔ متحرک بودن زمین اصرار ورزید.

باب نخست: در ریاضی

ابوریحــان را بایــد با افــکار ریاضی‌اش شــناخت. یونانی‌ها نمی‌توانستند کره را تسطیح بکنند روی سطح و ابوریحــان خودش فکر خاصــی در این موضوع دارد و می‌گوید به فکرم رسیدکه یک استوانه‌ای وهمی به حول معدل‌النهار و منطَقةالبروج عبور بدهم. پس از اینکه این استوانه را از هم باز بکنم، می‌بینم که آن کواکبی که این اســتوانه او را فراگرفته کــه حول و هوش معدل بوده‌اند و منطقهٔ صحیح در اینجا تصویر شده، مربعاتی به‌دست می‌آید که خطوط مســتقیم در آن نمایشگر نصف‌النهار اســت، خطوط دیگری نمایشگر مدارات. بعداً **مرکاتور**[5] این تسطیح را تکمیل کرد و امروز به نام تسطیح مرکاتور است. خلاصه اصل فکر از ابوریحان است.

باب دوم: در نجوم

اسطرلاب یک اســباب علمی رصدی است و شاید بزرگ‌تریــن اختراع بشــر در ایــن علوم باشــد. هرچه هست، اسطرلاب مانند «**تئودلیت**»[6]، «**سِکستانت**»[7] و «**تاکومتر**»[8] فرنگی اســت. بیرونی اسطرلاب را کامل کــرد که از آن برای تعیین مســافات و فواصل اجســام ســماوی و همچنین تعیین فواصل و ارتفاع اجســام در سطح زمین استفاده می‌شــد. البته منجم‌های احکامی طالع‌بین و غیب‌گو هم از اسطرلاب استفاده می‌کنند. ...

... قســم دیگری از شعب علم نجوم عبارت است از احکام نجوم، یعنی اســتدلال کــردن از اوضاع و احوال ســتارگان بر اوضاع و احوال اشخاص و حوادث زمینی. این شــعبه از علم نجوم اصلاً مورد توجه ابوریحان نبود، با اینکه از مبادی و مبانی این علم از همه‌کس اســتادتر بود.

در تقویم ایران روز ۱۳ شهریور روز بزرگداشت ابوریحان بیرونی نامیده شده و هر سال به‌پاس احترام و جایگاه برجستهٔ علمی او، در گوشه و کنار جهان مراسم نکوداشتی برگزار می‌شود

پی‌نوشت‌ها

۱. استقصاء به معنای بررسی و مطالعه کردن می‌باشد.
۲. معنای بِسودن در فرهنگ عمید چنین آمده اســت: دست مالیدن [به چیزی]، دست زدن به چیزی.
۳. نیــکلاس کــوپــرنـیــک (۱۵۴۳ـ۱۴۷۳)، ستاره‌شناس و ریاضی‌دان لهستانی.
۴. گالیلو گالیله (۱۶۴۲ـ۱۵۶۴)، ستاره‌شناس،فیزیک‌دان، مهـنـدس، فـیلسـوف و ریاضی‌دان ایتالیایی.
۵. گِـراردوس مِـرکــاتــور (۱۵۹۴ـ۱۵۱۲)، ریـاضی‌دان، طراح نقشــه و فیلســوف آلمانی.
۶. دوربــیــن تـئودولـیــت یــا دوربیــن زاویه‌ســنج طول‌یــاب نوعــی دوربین مهندســی است که بیشتر بیــن مهندســان عمران و معماری برای اندازه‌گیری زاویه‌هــای افقی و عمودی در شبکه‌های مثلث‌بندی شده کاربرد دارد.
۷. سِکستانت یا جایاب نوعی ابــزار برای مســیریابی به کمــک ستاره‌هاســت که برای ناوبری در دریانوردی کاربرد دارد.
۸. تاکومتر یا دورسنج موتور خودرو.

هوشنگ شرقی

میزگرد با گروه‌نویسندگان کتاب ریاضی پایهٔ دهم (رشتهٔ ریاضی و تجربی)

دانش‌آموزان کتاب درسی را محور قرار دهند!

اشاره

صبح روز چهارشنبه دوم تیرماه امسال فرصتی مغتنم برای گفت‌وگویی نزدیک با جمعی از نویسندگان کتاب درسی ریاضی پایهٔ دهم به‌دست آمد، تا هم دیدگاه‌های آن‌ها در تألیف کتاب درسی برای شما دانش‌آموزان آشکار شود، و هم توصیه‌های آن‌ها را برای درک بهتر و همراهی مناسب‌تر شما با کتاب درسی، بشنوید و به آن‌ها عمل کنید. از میان نویسندگان کتاب، آقایان دکتر ابراهیم ریحانی (مدیر واحد ریاضی)، حمیدرضا امیری(کارشناس مسؤل واحد ریاضی دفتر تألیف)، محمود داورزنی و سید محمدرضا سیدصالحی، و به نمایندگی از «مجلهٔ برهان» و هوشنگ شرقی در این نشست حاضر بودند.

■ **شرقی: ابتدا از آقای دکتر ریحانی، مدیریت محترم گروه تألیف کتاب ریاضی پایهٔ دهم می‌خواهم که معرفی مختصری از نویسندگان کتاب، تخصص‌های آن‌ها و نیز اهداف موضوعی آن داشته باشند.**

□ **ریحانی:** بسم‌الله الرحمن الرحیم. ابتدا گروه تألیف را که هشت نفر هستند، معرفی می‌کنم. پیشکسوت ما آقای دکتر **بیژن‌زاده** هستند، ایشان استاد تمام رشتهٔ ریاضی‌اند و تخصصشان جبر است. از کارشناسان فرهیختهٔ سازمان و عضو «شورای برنامه‌ریزی ریاضی» و از مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی بوده‌اند و در دانشگاه تربیت معلم (خوارزمی) نیز تدریس می‌کردند.

آقای امیری، کارشناس مسئول واحد ریاضی، از دبیران باسابقهٔ ریاضی و مؤلف کتاب‌های کمک‌آموزشی و کمک‌درسی بسیار بوده‌اند و اکنون هم سردبیر مجلهٔ ریاضی برهان متوسطه هستند.

آقای سیدصالحی دانشجوی دکترای ریاضی و کارشناس متوسطهٔ ۲ ما هستند. ایشان سابقهٔ دبیری ریاضی در مدارس را دارند و هر دو ویژگی ریاضی‌دان بودن و معلمی را با هم دارند.

آقای دکتر **بهرامی** متخصص آمار و استاد دانشگاه شهید بهشتی هستند و در امر تدوین برنامهٔ درسی ملی هم با ما همکاری دارند و آشنایی ایشان با برنامهٔ درسی ملی نیز به ما کمک زیادی در غنای بیشتر کتاب درسی کرده است.

آقای دکتر **قربانی**، دکترای ریاضی و استاد دانشگاه شهید رجایی هستند و سابقهٔ چند سال معلمی ریاضی را نیز دارند. ایشان یکی از مؤلفان کتاب‌های پنجم و ششم نیز هستند و این موضوع به شناخت ایشان از پایه‌های ریاضی دانش‌آموزان کمک می‌کند و به تألیف بهتر کتاب منجر می‌شود.

آقای دکتر **حیدری**، متخصص آموزش ریاضی و معلم رسمی آموزش‌وپرورش‌اند. نفر هفتم هم آقای **داورزنی**، دانشجوی دکترا هستند. گرایش ایشان در دورهٔ دکترا «رمزنگاری» (از شاخه‌های ترکیبیات) است.

□ **امیری:** این را هم اضافه کنید که از اعضای هیئت تحریریهٔ مجله برهان، سه نفر عضو تیم تألیف کتاب‌های درسی هستند: من، آقای ریحانی و آقای داورزنی.

□ **ریحانی:** بله و آقای داورزنی هم معلم ریاضی هستند و رسماً در آموزش‌وپرورش مشغول به‌کارند. نفر آخر هم خودم هستم که تخصصم آموزش ریاضی است، ولی در سطوح متفاوت از راهنمایی و دبیرستان تا دانشگاه (دوره‌های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا) به امر آموزش و پژوهش مشغولم و در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی هم تدریس می‌کنم.

تألیف کتاب از شهریور ۱۳۹۴ شروع شد و تلاش و همت ما این بود که کار براساس خرد جمعی انجام شود و نه‌تنها از توان همهٔ اعضای گروه، بلکه تا حد ممکن از ظرفیت موجود در کشور نیز بهره گرفته شود.

چه بسا در مورد یک فصل پیش آمد که پنج بار بازنویسی و ویرایش شد تا به نسخهٔ نهایی رسید

اگرچه کار اولیهٔ تألیف به ظاهر در خارج از دفتر انجام می‌شد و هر کس مسئول تدوین یک فصل بود، اما همهٔ کارها حتماً در جلسهٔ تیم تألیف مطرح و ویرایش می‌شد؛ به‌طوری که هیچ‌کس نمی‌تواند بگوید که مثلاً این فصل را به‌تنهایی تألیف کرده است.

امیری: ایده‌های تألیف از همین جلسات گرفته می‌شد و وقتی با ارائهٔ این راهکارها کسی یک فصل را می‌نوشت، کارش دوباره در جلسه مطرح می‌شد و نقص‌های آن توسط جمع برطرف می‌شد. چه بسا در مورد یک فصل پیش‌آمد که پنج‌بار بازنویسی و ویرایش شد تا به نسخهٔ نهایی رسید.

ریحانی: بله به‌طور میانگین در سال گذشته برای هر کتاب حدود ۶۰ جلسه برگزار شد. به‌جز این، ما از امکانات دیگری نیز استفاده کردیم. از جمله در سایت دفتر تألیف، هم‌زمان با تألیف کتاب، نسخه‌های اول، دوم و... فصل‌های کتاب را قرار می‌دادیم و نظرات معلمان، پژوهشگران و استادان سراسر کشور را دریافت می‌کردیم و از آن‌ها در تصحیح و ویرایش کتاب بهره می‌بردیم. به‌علاوه، امسال در دفتر تألیف سامانه‌ای هم با عنوان «اعتبارسنجی کتاب‌های درسی» راه‌اندازی شد که از جمعی از همکاران از استان‌های متفاوت خواسته شده بود که به‌طور رسمی و از طریق اتوماسیون نظراتشان را در مورد بخش‌های مختلف کتاب به ما انتقال دهند. گروه دیگری هم تحت عنوان «مشاوران تخصصی کتاب» داشتیم که در هر فصل لااقل یک نفر متخصص پشتیبان نظر مشورتی خود را برای بهبود مطالب کتاب ارائه می‌داد.

یک گروه دیگر هم «آموزشگران ریاضی» بودند که هم در جلسات خودشان کتاب را نقد و بررسی می‌کردند و هم از طریق شبکه‌های مجازی با معلمان ریاضی سراسر کشور در ارتباط بودند و نقدهای آن‌ها را دریافت و به ما منتقل می‌کردند. این‌ها ابزارهایی بودند که برای بهبود کتاب قبل از چاپ مورد استفاده قرار می‌گرفتند. البته ادعا نمی‌کنیم که با همهٔ این‌ها کار ما بدون نقص و کامل بوده، ولی قطعاً نسبت به گذشته به مراتب بهتر شده است.

می‌خواستم دربارهٔ محتوای کتاب بپرسم و تفاوت آن با کتاب‌های قبلی. به‌نظر می‌آید که کتاب فعالیت محورتر شده است. برای آشنایی بیشتر دانش‌آموزان بفرمایید فعالیت، کار در کلاس، و تمرین به چه مفهومی است و فایدهٔ هر کدام چیست؟

ریحانی: ساختار کتاب از همین سه بخش، یعنی فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. در کتاب‌های قبلی عمدتاً این‌طور بود که درس توضیح داده می‌شد، اما لزوماً فعالیتی خاص از دانش‌آموز خواسته نمی‌شد. مثلاً متنی بود با مثال‌هایی که برای توضیح متن آورده شده بودند و شکل گزاره‌ای هم داشتند. تعریف جامع و مانعی آورده می‌شد و بعد مثالی برای درک بهتر آن تعریف می‌آمد. اما در کتاب‌های متوسطهٔ ۲ که در ادامهٔ کتاب‌های متوسطهٔ ۱ هستند، این تفاوت وجود دارد که برای درک مفهوم، خود دانش‌آموز باید درگیر موضوع شود و لازم است کاری انجام دهد: چیزی را بخواند، چیزی را توضیح دهد، در مورد چیزی بحث کند، چیزی را تکمیل کند، در مورد راه‌حلی قضاوت کند و نظایر این‌ها. یعنی مستلزم گفت‌وگوی کلاسی و پیدا کردن ارتباط‌هاست.

البته در این میان معلم نیز نقش خاصی دارد. در فعالیت لازم است با مشارکت معلم و دانش‌آموز، مفهومی خاص آموخته شود. در کار در کلاس، آن مفهوم تثبیت می‌شود و گاهی ممکن است تکمیل و یا تعمیم داده شود. همین‌جا این را هم تأکید کنم که


امیری


دکتر ریحانی

قبل از پایان کارهای کتاب ـ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها ـ به سراغ کتاب‌های کمک‌آموزشی و چیزهای دیگر نروید

مبادا قبل از پایان کارهای کتاب ـ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها ـ به سراغ کتاب‌های کمک‌آموزشی و چیزهای دیگر بروند. بعد از پایان کارهای کتاب، اگر وقت دیگری باقی بود ـ که گمان نمی‌کنم باقی بماند ـ آن وقت می‌توانند به سراغ کتاب‌های کار و یا مشابه آن‌ها بروند.

◻ **امیری:** من یک توضیح تکمیلی در مورد فعالیت‌ها بدهم. دانش‌آموزانی که با این کتاب دهم سروکار دارند، همان دانش‌آموزانی هستند که قبلاً کتاب نهم را که با همین شیوه نوشته شده است، گذرانده‌اند و با روش ما آشنایی دارند. اما تصمیم ما این است که در دورهٔ متوسطهٔ ۲ با یک شیب ملایم، مقداری متن و مثال بیشتر وارد کتاب کنیم. مفهوم اصلی با یک فعالیت شروع می‌شود، اما در این کتاب‌ها چیز تازه‌ای به‌عنوان مثال‌های حل شده اضافه شده است. درخصوص مطلبی هم که آقای دکتر در زمینهٔ کتاب‌های کمک‌آموزشی گفتند، من از دانش‌آموزان تقاضا می‌کنم که در کلاس‌های درس از دبیران بخواهند که فعالیت و کار در کلاس‌ها حتماً انجام شوند و خودشان هم تمرین‌ها را در منزل انجام دهند.

سیدصالحی

دانش‌آموزان در زمان حل تمرین‌ها متوجه می‌شوند که تأثیر فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها ـ که به‌صورت گروهی و با نظارت و راهنمایی معلم انجام می‌شود ـ در یادگیری بحث و توانمندی آن‌ها در حل تمرین‌ها چقدر مؤثر بوده است.

◻ **داورزنی:** یک نکته هم من اضافه کنم. در کتاب مثال‌های کاربردی زیادی آمده‌اند. در هر فصل لااقل دو سه مثال کاربردی، (یعنی مثال‌هایی که به عینه در زندگی روزمره، در صنعت یا اقتصاد و... کاربرد دارند)، آمده است. یک سؤال همیشگی دانش‌آموزان این است که ریاضیات به چه کار ما می‌آید و اصلاً کاربرد آن در زندگی و حل مشکلات آن چیست. این مثال‌ها می‌تواند به این‌گونه پرسش‌ها تاحدی پاسخ بدهد.

◻ **ریحانی:** در آموزش ریاضی، یک بعد این است که محتوای آموزشی بیان شود (دانش ریاضی) که این در گذشته بسیار مورد توجه قرار می‌گرفت؛ اینکه دانش‌آموز بتواند عملیات ریاضی انجام دهد، مشتق بگیرد، انتگرال بگیرد و... اما بعد مهم‌تر که کمتر مورد توجه قرار گرفته، تقویت تفکر ریاضی دانش‌آموز است. بنابراین طرح یک موضوع صرفاً به این دلیل که سال‌ها در کتاب درسی بوده است، موضوعیتی ندارد و بر این اساس سیاست دفتر تألیف این است که بعضی از موضوعات درسی که سابقاً در دورهٔ پیش‌دانشگاهی تدریس می‌شدند، به دانشگاه منتقل شوند و در مقابل به عمق بخشیدن به محتوای درس براساس توسعهٔ تفکر ریاضی توجه بیشتری شود. مثال‌های کاربردی می‌تواند به تقویت تفکر ریاضی منجر شود.

◻ **سیدصالحی:** توضیحی هم من در مورد فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها بدهم. دانش‌آموز باید بداند که هدف فعالیت‌ها این است که پس از انجام آن‌ها به یک مفهوم برسد، نه اینکه صرفاً یک فعالیت به‌عنوان یک کار دانش‌آموزی انجام شود. پس از انجام فعالیت، دانش‌آموز ـ صرف‌نظر از آنکه پاسخ‌ها را درست داده است یا نه ـ باید از خود بپرسد که من چه کاری انجام دادم و به چه مفاهیم و نتایجی دست پیدا کردم.

◼ **با مشکل کمبود وقت چه باید کرد؟ بازخورد معلمان از این شیوه در مورد کتاب‌های قبلی چه بوده است؟**

◻ **سیدصالحی:** ببینید این شیوه و این فعالیت و کار در کلاس چیزی نیست که ابداع خود ما بوده باشد. هر معلمی هم ممکن است به تجربه دریافته باشد که برای تفهیم یک موضوع جدید ممکن است انجام یک فعالیت و یا طرح چند سؤال و بحث در اطراف آن، مؤثرتر از ارائهٔ مستقیم آن باشد. البته محدودیت‌ها، از جمله محدودیت زمان هم هست. بازخوردی که ما گرفتیم از هر دو نوع بوده است: بعضی‌ها گفته‌اند کار به خوبی انجام شده است، اما مواردی هم بود که از کمبود وقت گلایه داشتند، بستگی به سطح کلاس و امکانات موجود هم دارد.

◼ **در گذشته این‌طور بود که بسیاری از مباحث در دورهٔ راهنمایی تحصیلی به‌طور کامل گفته می‌شدند، مثل عبارت‌های جبری، معادله‌ها و دستگاه‌های معادلات و حتی قضایای هندسی متعدد، و بعد در دورهٔ دبیرستان همهٔ این بحث‌ها دوباره از صفر تکرار می‌شدند. ولی در کتاب‌های جدید گویا این‌طور نیست و وابستگی به بحث‌های پیشین بیشتر است. در این مورد توضیح دهید تا دانش‌آموزان ـ و البته معلمان ـ بدانند که تا چه حد باید به اطلاعات دورهٔ متوسطهٔ ۱ تکیه کنند.**

◻ **امیری:** در کتاب‌های جدید، یعنی دورهٔ متوسطهٔ ۲، این ارتباط بیشتر است. مثلاً در کتاب نهم در مورد توان و ریشه مطالبی

دانش‌آموزان باید مطالب قبلی
(از متوسطهٔ اول) را بدانند و در صورت لزوم آن‌ها را مطالعه کنند

داشتیم، تکمیل این مباحث در کتاب دهم آمده است. دانش‌آموزان باید مطالب قبلی را بدانند و در صورت لزوم آن‌ها را مطالعه کنند. اما اگر موضوع جدیدی مطرح شده که به پیش‌نیازهایی از کتاب‌های قبل نیاز داشته باشد، معمولاً یک یادآوری مختصر شده است.

■ در مورد ایجاد پیش‌نیاز برای درس‌های دیگر، مثل فیزیک و شیمی چطور؟ آیا هماهنگی‌های لازم با گروه‌های درسی دیگر شده است تا مباحث ریاضی مورد نیاز آن‌ها ــ مانند بردار و مثلثات ــ به موقع در کتاب‌های ریاضی بیایند؟

□ **سیدصالحی:** ارتباط‌های بسیار خوبی با سایر گروه‌ها وجود دارد. برای مثال، با هماهنگی با گروه فیزیک و به‌خاطر نیاز آن‌ها به مبحث مثلثات، قرار شد که بحث مثلثات در کتاب درسی جابه‌جا شود. در مورد بردار هم ما در دورهٔ متوسطهٔ ۱ تعاریف و بحث‌های مقدماتی آن را که پیش‌نیاز بحث‌های گروه فیزیک است، آورده‌ایم.

داورزنی

شرقی

■ قدری هم دربارهٔ آمار و احتمال و آنالیز ترکیبی و جایگاه آن‌ها در کتاب‌های جدید بفرمایید.

□ **امیری:** بچه‌ها از همان دورهٔ ابتدایی با آمار آشنا می‌شوند و تا کلاس نهم تقریباً هر سال مباحثی در ارتباط با آن دارند. فقط در کلاس نهم احتمال داشته‌اند و آمار نداشته‌اند. این بود که برای حفظ ارتباط و نیز به‌دلیل اینکه این کتاب برای هر دو رشتهٔ ریاضی و تجربی است و دانش‌آموزان تجربی به آمار برای مباحث زیست‌شناسی نیاز دارند، پس باید این بحث در کتاب دهم می‌آمد. آنالیز ترکیبی با توجه به اینکه پیش‌نیاز احتمال است، باید در کتاب به آن پرداخته می‌شد. اما در آینده ما در سال دوازدهم کتابی با عنوان ریاضیات گسسته داریم که در آن به آنالیز ترکیبی و ترکیبیات بیشتر می‌پردازیم.

□ **سیدصالحی:** البته ترکیبیات کاربردهایی خیلی بیش از آنچه که در بحث احتمال مطرح است، دارد و در آینده می‌توان روی این موارد بیشتر کار کرد.

□ **داورزنی:** در کتاب آمار و مدل‌سازی که در حال حاضر تدریس می‌شود، بحث‌های آمار دو بخش دارند: در بخش نخست مقدماتی از آمار، شامل تعریف‌های اولیه، متغیرهای تصادفی و... می‌آید و در بخش بعدی به نمودارها و محاسبات (شاخص‌های مرکزی و پراکندگی) پرداخته می‌شود. آماری که در کتاب ریاضی دهم آمده است، تقریباً همان مباحث مقدماتی را شامل می‌شود.

■ سخن پایانی را بفرمایید.

□ **امیری:** صحبت پایانی من این است که دانش‌آموزان کتاب درسی را محور قرار دهند. تأکید می‌کنم که روی مثال‌ها، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها کار و بحث بسیاری شده است. دانش‌آموزان حتماً به این‌ها توجه کنند و بعد از کتاب، به سراغ کتاب‌های تکمیلی استاندارد که توسط «کتاب‌نامهٔ رشد» معرفی می‌شوند، بروند.

□ **ریحانی:** من در پایان می‌خواهم به بعضی چالش‌های فرارویمان اشاره کنم: ابتدا مسئلهٔ انتخاب مؤلفان بود. ما باید مؤلفانی را انتخاب می‌کردیم که هم به موضوع اشراف، با مقولهٔ آموزش آشنایی، و با محیط آموزشی ارتباط داشته باشند و این البته کار دشواری است. چالش دوم مسئلهٔ زمان بود. زمان محدودی برای تألیف کتاب در اختیار ما قرار داشت. مسئلهٔ بعدی، مشکلات آماده‌سازی کتاب از بعد نرم‌افزاری و سخت‌افزاری بود. نکتهٔ جالب و شایان ذکر این است که بعضی از مؤلفان کمک‌های بسیاری در زمینهٔ طراحی تصاویر، ایده‌های صفحه‌آرایی و... به ما دادند که باید از آنان قدردانی شود. چالش دیگر این بود که فرصت اجرای آزمایشی کتاب برای ما فراهم نبود. البته بعضی از معلمان همکار زحمت کشیدند و در بعضی کلاس‌ها بخش‌هایی از کتاب را به‌صورت آزمایشی تدریس کردند و نتیجه را به ما ارائه دادند که باید از آنان هم قدردانی کنم.

■ سپاس فراوان از وقتی که در اختیار مجله گذاشتید.

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

و اما در سال تحصیلی گذشته آقایان محمد *طبیعی* و محمود *ندایی‌لمر* با بیشترین حل مسئله پیشتاز پاسخ‌گویی به مسائل پای تخته بودند که هدیهٔ نفیسی برای ایشان از طرف مجلهٔ برهان ارسال خواهد شد.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۱۱. اگر همهٔ اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت‌سر هم بنویسیم، چند رقم زوج و چند رقم فرد نوشته خواهد شد؟

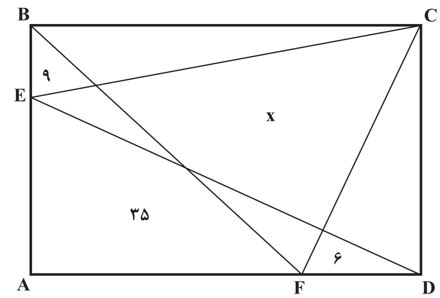
۲۱۲. مکعبی به ضلع $\frac{۲}{۳}$m را روی مکعبی به ضلع ۱m قرار داده‌ایم و سطح بیرونی حجم حاصل را رنگ کرده‌ایم. سطح رنگ شده چه مساحتی دارد؟

۲۱۳. رقم یک در عدد $۲^{۲۰۰۹}$ چندبار ظاهر می‌شود؟

۲۱۴. شش سخنران در سمیناری سخنرانی خواهند کرد. می‌خواستیم ترتیب سخنرانی‌ها را طوری انتخاب کنیم که سخنران A قبل از سخنران B و سخنران B قبل از سخنران C صحبت کنند. چند جور می‌توان برنامهٔ سخنرانی‌ها را تنظیم کرد؟

۲۱۵. در شکل پاره‌خط‌های DE، CE، BF و CF مستطیل را به ناحیه‌های کوچک‌تر افراز کرده‌اند

که مساحت سه‌تا از ناحیه‌ها در شکل مشخص شده است. مساحت ناحیه‌ای را که با حرف x مشخص شده است، بیابید.



۲۱۶. در چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، حاصل‌ضرب هر دو عدد مجاور زوج است؟

۲۱۷. عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$ مفروض است. ثابت کنید این عدد مضرب ۷ است اگر و تنها اگر عدد $\overline{abcd}-2\times e$ مضرب ۷ باشد.

۲۱۸. همهٔ اعداد حقیقی x را بیابید، به‌طوری که: $\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]=4$. ([x] همان جزءصحیح x است.)

۲۱۹. ثابت کنید:

$$\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}+\dots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۲۲۰. روی ۲۰۰۹ کارت اعداد طبیعی متفاوتی نوشته شده‌اند، به‌طوری که مجموع آن‌ها برابر است با: ۲۰۲۰۰۴۹. عدد وسط چه عددی است؟

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۱۸۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $n!\geq 2^{n-1}$.

نامساوی را به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. برای n=۱ حکم برقرار است ($2^0\geq 1!$). فرض کنید حکم برای n=k برقرار باشد، یعنی: $k!\geq 2^{k-1}$. دو طرف نامساوی را در ۲ ضرب کنید. داریم: $2k!\geq 2^k$. از طرف دیگر: $(k+1)!\geq 2k!$. در نتیجه: $(k+1)!\geq 2^k$. پس حکم برای n=k+۱ نیز برقرار است.

۱۸۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $2^{2^n}-1$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

دو روش برای اثبات وجود دارد: روش اول استقرا است که آن‌را به خواننده واگذار می‌کنیم. روش دوم به کمک هم‌نهشتی است.

$$2^{2^n}-1\overset{3}{\equiv}(-1)^{2^n}-1\overset{3}{\equiv}1-1\overset{3}{\equiv}0\Rightarrow 3\,\big|\,2^{2^n}-1$$

۱۸۳. r عددی حقیقی است، به‌طوری که $r+\frac{1}{r}$ عددی صحیح است. ثابت کنید $r^n+\frac{1}{r^n}$ به ازای هر $n\in N$ عددی صحیح است.

با استقرای قوی حکم را ثابت می‌کنیم. حکم برای n=۱ برقرار است. همچنین، با توجه به تساوی $(r+\frac{1}{r})^2=r^2+\frac{1}{r^2}+2$، نتیجه می‌شود حکم برای n=۲ نیز برقرار است. حال فرض کنید حکم برای همهٔ مقادیر کوچک‌تر از k برقرار باشد. از تساوی زیر حکم برای n=k به‌دست می‌آید:

$$r^k+\frac{1}{r^k}=(r^{k-1}+\frac{1}{r^{k-1}})(r+\frac{1}{r})-(r^{k-2}+\frac{1}{r^{k-2}})$$

۱۸۴. n خط راست، صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

با استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم تعداد ناحیه‌ها برابر است با: $S_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$. حکم برای n=۱ برقرار است و با رسم یک خط راست دو ناحیه پدید می‌آید. فرض کنید حکم برای n=k برقرار باشد. خط (k+۱)-ام، k خط قبلی را در k نقطهٔ تقاطع جدید قطع می‌کند و خود به k+۱ قسمت تقسیم می‌شود. دو ناحیه‌ای که در دو طرف هر کدام از این قسمت‌ها قرار دارند، قبل از رسم خط (k+۱)-ام یک ناحیه بوده‌اند. در نتیجه: $S_{k+1}=S_k+(k+1)$. چون: $S_k=1+\frac{k(k+1)}{2}$، رابطهٔ $S_{k+1}=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ به‌دست می‌آید.

۱۸۵. ثابت کنید در بسط عبارت $(1+x+x^2)^n$، حداقل یکی از ضرایب زوج است.

این مسئله برای اعداد طبیعی بزرگ‌تر از

یک برقرار است. حکم را با استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. برای n=۲ حکم برقرار است، چون:

$$(1+x+x^2)^2 = 1+2x+3x^2+2x^3+x^4.$$

فرض کنید حکم برای n=k برقرار باشد و

$$(1+x+x^2)^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2k}x^{2k}$$

که در آن ضرایب a_1 و a_{2k} برابر یک هستند. با فرض x=۱، نتیجه می‌شود مجموع ضرایب برابر است با: 3^k. در نتیجه ضرایب a_1 تا a_{2k-1} نمی‌توانند همگی زوج باشند. از تساوی:

$$(1+x+x^2)^{k+1} = (1+x+x^2)(1+a_1x+...+a_{2k-1}x^{2k-1}+x^{2k})$$

نتیجه می‌شود: اگر a_1 فرد باشد، آن‌گاه ضریب x در بسط $(1+x+x^2)^{k+1}$ زوج است. پس فرض کنید a_1 زوج است. اگر a_2 فرد باشد، ضریب x^2 در بسط $(1+x+x^2)^{k+1}$ که برابر است با $1+a_1+a_2$، عددی زوج خواهد شد و حکم برقرار است. پس فرض کنید a_2 زوج است. حال در ضرایب ...,a_1,a_2,a_3، اولین ضریب فرد را در نظر بگیرید. فرض کنید a_i فرد باشد $(i\geq 3)$. چون ضریب x^i در بسط $(1+x+x^2)^{k+1}$ برابر است با: $a_{i-2}+a_{i-1}+a_i$. در نتیجه این ضریب زوج خواهد بود و حکم برای k+۱ نیز برقرار است.

۱۸۶. با فرض a,b,c >۰ ثابت کنید:

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq 9a^2b^2c^2$$

با ساده کردن نامساوی، به نامساوی $a^4bc+ab^4c+abc^4+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq 6a^2b^2c^2$ می‌رسیم. حال از نامساوی $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ استفاده می‌کنیم. داریم: $a^4bc+b^3c^3\geq 2a^2b^2c^2$ و به‌طور مشابه: $ab^4c+a^3b^3\geq 2a^2b^2c^2$ و: $abc^4+a^3b^3\geq 2a^2b^2c^2$. با جمع این سه نامساوی حکم به‌دست می‌آید.

۱۸۷. با فرض a,b,c≥۰ ثابت کنید:

$$\sqrt{3(a+b+c)}\geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

دو طرف نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم و ساده می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$2(a+b+c)\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

مشابه سؤال قبل، با جمع سه نامساوی $a+b\geq 2\sqrt{ab}$، $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ و $c+a\geq 2\sqrt{ca}$ به حکم می‌رسیم.

۱۸۸. a، b و c سه عدد طبیعی هستند، به‌طوری‌که $a^2+b^2=c^2$. ثابت کنید ab مضرب ۳ است.

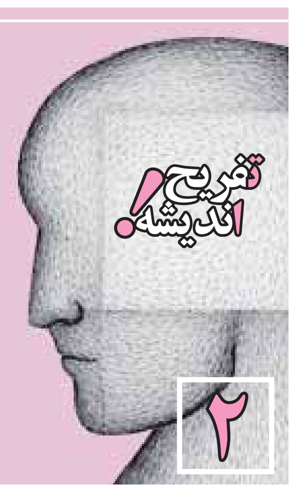
(برهان خلف). فرض کنید a و b هیچ‌کدام مضرب ۳ نیستند، پس: a=۳k±۱ و b=۳k´±۱. مربع این دو عدد به فرم ۳m+۱ خواهد بود. در نتیجه: $a^2+b^2=3m_1+1+3m_2+1$. یعنی c^2 باید به فرم ۳m+۲ باشد که تناقض است. (مربع هر عدد صحیح یا به فرم ۳k است یا ۳k+۱).

۱۸۹. ثابت کنید $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ (n≥۲) هیچ‌وقت صحیح نیست.

اگر کسرها را جمع کنیم، مخرج حاصل جمع کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱ تا n خواهد بود که عددی زوج است. از طرف دیگر، در صورت، n جمله خواهیم داشت که فقط یکی از آن‌ها فرد است. این جملهٔ فرد مربوط به کسری است که در مخرج، بزرگ‌ترین توان ۲ را دارد. در نتیجه، حاصل، کسری است با صورت فرد و مخرج زوج و نمی‌تواند صحیح باشد.

۱۹۰. اگر p و p^2+2 هر دو اول باشند، ثابت کنید p^3+2 نیز اول است.

اگر p>۳، آن‌گاه: p=۳k±۱. در نتیجه p^2 به فرم ۳m+۱ خواهد بود. پس p^2+2 مضرب سه خواهد شد که تناقض است. پس: p=۲ یا p=۳. با بررسی این دو، نتیجه خواهد شد که تنها p=۳ صحیح است و در این حالت p^3+2 برابر است با ۲۹ که عددی اول است.



از یک خواهر و برادر پرسیدند کدام‌یک مسن‌تر است. برادر گفت: من مسن‌تر هستم و خواهر گفت: من جوان‌ترم. اگر بدانیم لااقل یکی از آن‌ها دروغ گفته، چه کسی مسن‌تر است؟

هوشنگ شرقی

ایستگاه اول

برای شروع چطور است که با چند معمای عددی آغاز کنیم؟ برای تفریح اندیشه بد نیست! پس این شما و این هم معماهای عددی این شماره:

۱

آیـا می‌توانیـد عـددی ۱۰ رقمی بنویسـید کـه از چپ به راسـت، رقم نخست آن مساوی تعداد صفرهای عدد، رقم دوم مساوی تعداد یک‌های آن، رقم سـوم مساوی تعداد ۲های آن و... و رقم دهم معرف تعداد نه‌های آن باشد؟

۲

آیا می‌توانیـد عددی پنـج رقمی بگویید که اگر یک رقم ۱ به سـمت راسـت آن اضافه کنیم، عدد شـش‌رقمی حاصل، سه برابر عدد شش‌رقمی باشد که از اضافه کردن همین رقم به سمت چپ عدد، حاصل می‌شود؟

۳

آیـا می‌توانیـد بگوییـد که بـه جای علامت‌های سـؤال، به‌ترتیـب چه اعدادی باید قرار بگیرند؟

؟، ؟، ؟، ؟، ۹، ۰، ۶، ۳، ۲، ۴، ۵

۴

آیا می‌توانید عددی چهاررقمی بگویید که مربع آن عددی باشد که چهار رقم سمت راست آن، همان عدد چهاررقمی باشد؟

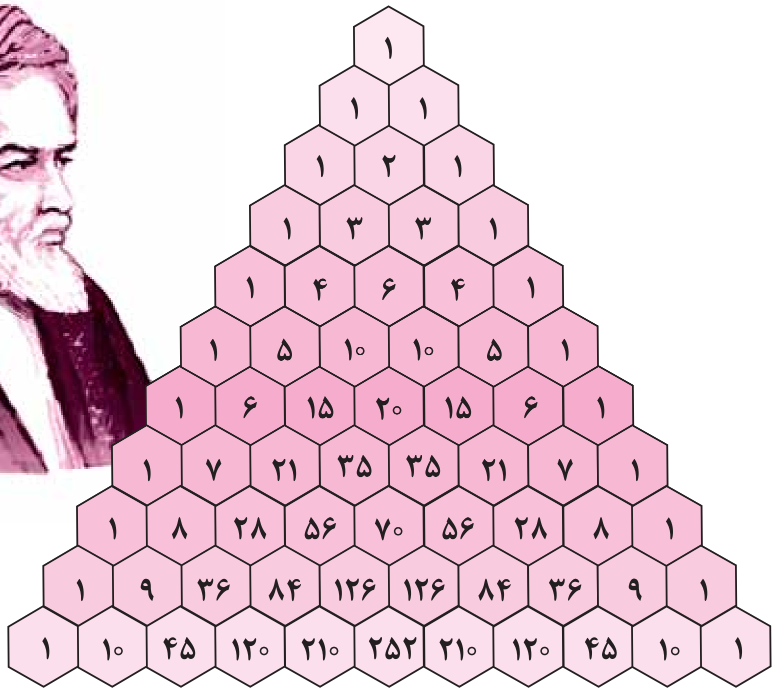
۵

آیا می‌توانید با ارقام ۱، ۲، ۳ و... و ۸ و ۹ کسری بنویسید که مساوی $\frac{1}{3}$ باشد؟ یعنی صورت و مخرج کسر شامل دو عدد باشد که این دو عدد هر ۹ رقم را شامل شوند؟

۶

مادری به دخترش که کوچک‌ترین فرزندش بود گفت: وقتی من به سن تو بودم، برادر بزرگت را به‌دنیـا آوردم و بعد از آن چهار برادر دیگرت و تـو را به فاصله‌های چهار سـاله به‌دنیا آوردم. اکنون که ۵۸ سال دارم، شش فرزند دارم. دختر چند سال دارد؟

عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شیراز

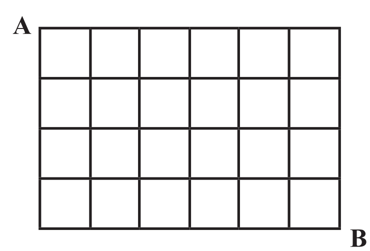


مثلث خیام و تعداد کوتاه‌ترین مسیرها

اشاره

مثلث خیام یکی از زیباترین آرایه‌های عددی است که در تاریخ ریاضیات همواره مورد توجه واقع شده است و ابزاری ساده برای گره‌گشایی از بسیاری مسائل پیچیده به‌شمار می‌آید. از سوی دیگر، جایگاه و کاربرد اصلی عناصر این مثلث در مسائل شمارشی است. در این مقاله به شرح روشی ساده برای محاسبهٔ تعداد کوتاه‌ترین مسیرها به کمک این مثلث خواهیم پرداخت.

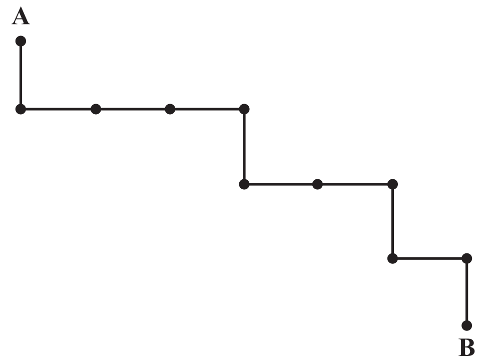
تعریف: شکل ۱ شبکه‌ای از جاده‌ها را نشان می‌دهد که می‌توان از آن‌ها گذشت و از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفت. کوتاه‌ترین مسیر از A به B مسیری تعریف می‌شود که در آن فقط می‌توان به راست یا به پایین رفت.



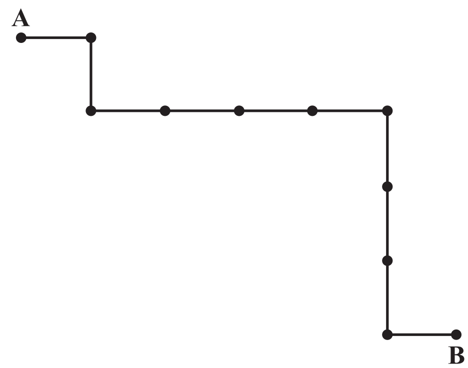
شکل ۱

مسئله: با توجه به تعریف فوق و شکل ۱ تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از نقطهٔ A به نقطهٔ B را بیابید.

پاسخ: محل تقاطع هر خیابان افقی (خط افقی) و هر خیابان عمودی (خط عمودی) را یک چهارراه تلقی می‌کنیم و فاصلهٔ بین این دو چهارراه متوالی را یک «بلوک» می‌نامیم. در شکل ۱ هر سطر دارای ۶ بلوک و هر ستون دارای ۴ بلوک است. در صورتی که شخصی بخواهد از A به مقصد B حرکت کند، می‌تواند مسیرهای ترکیبی از چند حرکت به سمت راست (شرق) یا به سمت پایین (جنوب) را برگزینند. به دو نمونه از این مسیرها توجه کنید (شکل‌های ۲ و ۳):



شکل ۲



شکل ۳

شکل‌های ۲ و ۳ دو مسیر متفاوت از A به B را نشان می‌دهند. هر مســیر از ۱۰ حرکت تشکیل می‌شود که ۴ تا از آن‌ها به پایین (D) و ۶تای آن‌ها به راست (R) است. در واقع مسیر شکل ۲ عبارت است از:

DRRRDRRDRD

و مسیر شکل ۳ عبارت است از:

RDRRRRDDDR

در نام‌گذاری‌های بالا هر R نمایشگر یک حرکت به سمت راست و هر D نمایشــگر یک حرکت به سمت پایین (جنوب) است. بنابراین مســئله برمی‌گردد به اینکه به چند طریق می‌توان ۴ مکان (برای قرار دادن Dها) از ۱۰ مکان انتخاب کرد که همان ترکیب $\binom{۱۰}{۴}$ است.

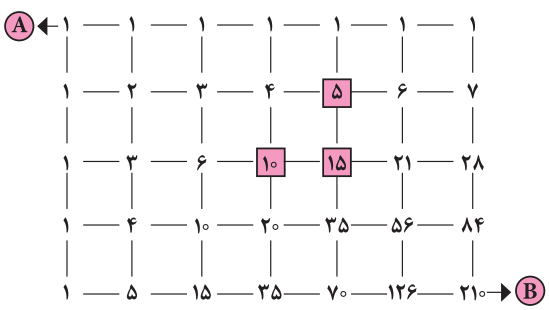
جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در شــکل ۱، ۵ خیابــان افقــی و ۷ خیابان عمودی رســم شــده بود که تعــداد کوتاه‌ترین مســیرها از A به B برابر شــد با: $\binom{۵+۷-۲}{۵-۱}$. به‌طور کلی در یک مســیر با m خط افقی و n خط عمودی، تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از A به B عبارت‌اند از: $\binom{m+n-۲}{n-۱}$ یا $\binom{m+n-۲}{m-۱}$.

استفاده از عناصر مثلث خیام برای پاسخ به مسئله

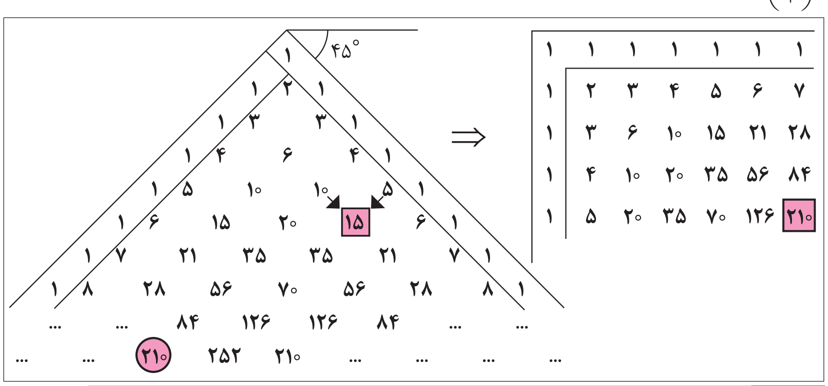
حال به پاسخ همین مسئله به روشی متفاوت می‌پردازیم. از نقطهٔ A شروع می‌کنیم. برای رفتن به نقطهٔ بعدی سمت راست A یا پایین A فقط یک راه داریم که نقاط آن را با عدد ۱ برچسب می‌زنیم. با این تفسیر ساده، برچسب تمام رأس‌های واقع در لبهٔ بالایی و لبه کناری (نقاط مرزی) عدد ۱ خواهد شد. و اما برچسب دیگر نقاط داخل مسیر (چهارراه‌ها) چگونه است؟ به یک چهارراه (نقطه) چگونه می‌توان وارد شد؟

دسترسی به هر نقطه داخل مسیر (شبکه) تنها از بالا یا از سمت چپ ممکن اســت. به روشــنی می‌توان دید که مجموع تعداد راه‌های یگانهٔ دسترســی به هر نقطه (چهارراه) عبارت اســت از مجموع تعداد راه‌های مُنتهی به نقطهٔ بالایی بــه علاوهٔ مجموع تعداد راه‌های واصل به نقطهٔ سمت چپ نقطهٔ موردنظر. لذا برچسب هر نقطه داخل شبکه مجموعی است از برچسب دو نقطهٔ واقع در بالا و سمت چپ آن. با این توضیح شــکل ۴ حاصل می‌شود. (مثلاً تقاطع ۱۵ از جمع عدد بالایی (۵) و سمت چپ (۱۰) به‌دست آمده است.)



شکل ۴

یعنی تعداد کوتاه‌ترین مســیرها از A به B برابر ۲۱۰ می‌شود که همان $\binom{۱۰}{۴}$ اســت که از روش قبلی به‌دســت آوردیم. نگاه کنید! در کمال خوش‌وقتی برچسب‌ها همان اعداد مثلث خیام هستند که گویا با ۴۵ درجه دوران (مخالف حرکت عقربه‌های ســاعت) مربع خیام را ساخته‌اند! (به شکل ۵ توجه کنید!)

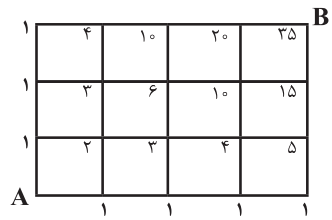


شکل ۵ تبدیل مثلث خیام به مربع خیام! (دوران ۴۵ درجه)

در ادامه به بررسی چند مثال دیگر خواهیم پرداخت:

مثال ۱. تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از A به B در شکل ۶ را از دو روش مثلث خیام و اصول شمارش محاسبه می‌کنیم.

روش اول: عدد هر تقاطع از جمع دو عدد تقاطع‌های پایین و راست حاصل شده است. جمعاً ۳۵ مسیر متفاوت از A به B وجود دارد.



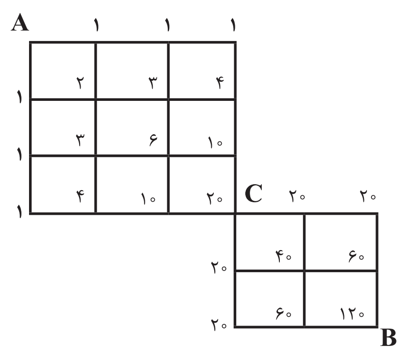
شکل ۶

روش دوم: برای رفتن از A به B باید ۴ بلوک به شرق (E) و ۳ بلوک به شـمال (N) طی کنیم. بنابراین تعداد مسیرهای ممکن از A به B متناظر است با یک تبدیل ۷ شی: EEEENNN

و بنابراین تعداد مسیرها برابر است با: $\frac{۷!}{۴!۳!}$ که ۳۵ می‌شود.

مثال ۲. مجموع تعداد کوتاه‌ترین مسیرها را برای سفر از A به B با هر دو روش حساب کنید. (فقط حرکت به سمت E و S مجاز است.)

روش اول: بـه روش خیـام، عدد هر تقاطع از جمـع اعداد تقاطع بالا و چپ به‌دسـت می‌آید و ۱۲۰ مسـیر متفاوت از A به B وجود دارد.



شکل ۷

روش دوم: برای رفتن از A به C باید ۳ بلوک E و ۳ بلوک S را طی کنیم. لذا تعداد مسـیرهای رفتن از A به C متناظر است با تبدیل ۶ شـی: EEESSS و برابر است با: $۲۰ = \frac{۶!}{۳!۳!}$. برای رفتن از فقط C به B نیز باید ۲ بلوک در جهت E و ۲ بلوک در جهت S طی شود که برابر است با یک تبدیل ۴ شی: EESS و برابر است با: $۶ = \frac{۴!}{۲!۲!}$.

طبق اصل ضرب داریم:

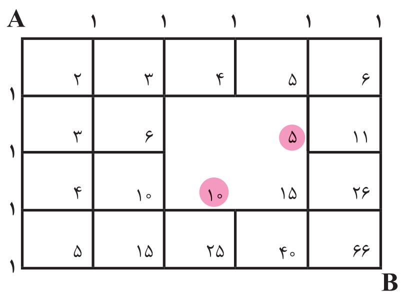
(تعداد مسیرهای از B به C)×(تعداد مسیرهای از A به C) =

تعداد مسیرهای از A به B

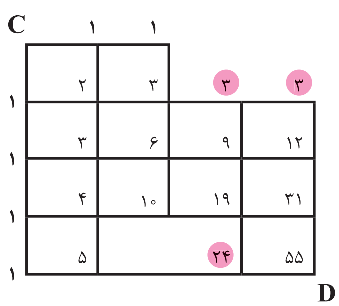
در نتیجه: ۱۲۰=۶×۲۰

وجود حفره در مسیر

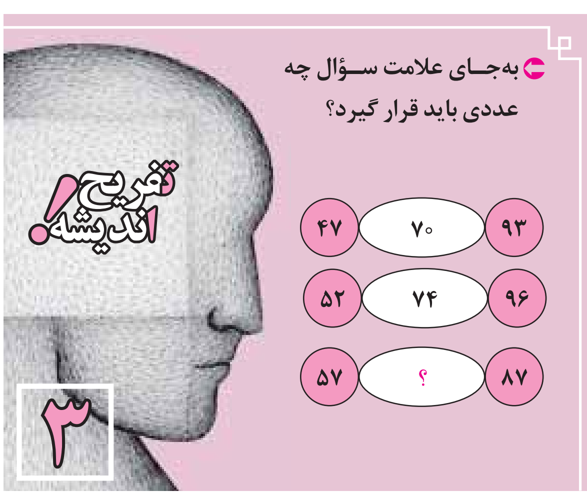
هرگاه داخل مسـیر، حفره وجود داشته باشـد (وجود میدان در شـهر) آشکارا سـاده‌تر بودن روش مثلث خیام را می‌توان دید: (ارقام نوشته شـده در شکل به روشـنی گویای چگونگی محاسبات است.) بنابراین تعداد مسیر از A به B (شکل الف ـ ۸) برابر ۶۶ و تعداد مسیر از C به D (شکل ب ـ ۸) برابر ۵۵ است. آموزنده است به برچسب‌های نقاط مرزی میدان (حفره‌ها) توجه داشته باشید!



شکل ۸ ــ الف



شکل ۸ ــ ب



آموزشی

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اصطلاحات و لغات مهم

1. Prove	اثبات کردن
2. Absolute value	قدرمطلق
3. If and only if	اگر و فقط اگر
4. Calculus	حسابان
5. Equivalence	هم‌ارزی
6. Statement	گزاره
7. Trivially	به‌وضوح، بدیهی
8. Imply	نشان دادن، صدق کردن
9. True	درست
10. Assume	فرض کردن

There are at least two special ways to prove that a number is equal to zero, and both of them use the absolute value of a number. (See the front material of the book for the definition of absolute value.)

METHOD 1. To prove that $a=0$ we can prove that $|a|=0$. (This is true because by definition of absolute value of a number $|a|=0$ if and only if $a=0$.)

METHOD 2. Let a be a real number. Then $a=0$ if and only if $|a|<\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$.

The second method is often used in calculus and analysis.

EXAMPLE. Let a be a real number. Then $|a|=0$ if and only if $|a|<\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$.

Proof. As this is an equivalence statement, the proof has two parts.

Part 1. If $|a|=0$, then $|a|\leq\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$.

This implication is trivially true. Indeed, if $|a|=0$, then $|a|$ is smaller then any positive number.

Part 2. If $|a|<\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$, then $|a|=0$.

We will prove this statement by using its contrapositive.

Let us assume that $|a|\neq 0$. Dose this imply that there is at least one positive real number ε_0 such that $|a|$ is not smaller than ε_0? Consider $\varepsilon_0=|a|/2$. Then $0<\varepsilon_0<|a|$.

As the contrapositive of the original statement is true, the original statement is true as well. ■

برای اثبات اینکه یک عدد مساوی با صفر است، لااقل دو روش خاص وجود دارد که در هر دو روش از قدرمطلقِ عدد استفاده می‌شود. (تعریف قدرمطلق را در ابتدای کتاب درسی ملاحظه کنید.)

روش ۱. برای اثبات اینکه a=۰، می‌توانیم ثابت کنیم: |a|=۰. (این درست است، زیرا با توجه به تعریف قدرمطلقِ یک عدد، |a|=۰ اگر و تنها اگر a=۰.)

روش ۲. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت a=۰ اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی ε>۰ ، |a|<ε.

روش دوم معمولاً در حساب دیفرانسیل و آنالیز به‌کار برده می‌شود.

مثال: فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت |a|=۰ اگر و فقط اگر برای هر عدد حقیقی مانند ε>۰ ، |a|<ε.

اثبات: چون این یک گزارهٔ هم‌ارزی است، اثبات شامل دو قسمت است:

قسمت ۱. اگر |a|=۰، در این صورت برای هر عدد حقیقی مانند ε>۰ ، |a|<ε. این استدلال به‌وضوح درست است. در واقع، اگر |a|=۰، در این صورت |a| از هر عدد مثبتی کوچک‌تر است.

قسمت ۲. اگر برای هر عدد حقیقی مانند ε>۰ داشته باشیم: |a|<ε، در این صورت |a|=۰.

ما این گزاره را با استفاده از برهان خلف اثبات خواهیم کرد.

فرض کنیم: |a|≠۰، آیا این نشان نمی‌دهد که لااقل یک عدد مثبت چون ε_0 وجود دارد به قسمی که |a| از آن کوچک‌تر نیست؟ $\varepsilon_0=\frac{|a|}{۲}$ را در نظر بگیرید، در این صورت $۰<\varepsilon_0<|a|$

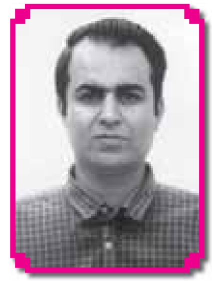
پس خلاف فرض اولیه درست است و بنابراین گزارهٔ اصلی درست است.

ترجمه برای دانش‌آموزان

EXERCISES

Prove the following statements.

1. Let x and y be two real numbers. $(x-y)^5+(x-y)^3=0$ if and only if $x=y$.
2. Let x and y be two real numbers. The two sequences. $\{x^n\}_n^\infty=2$ and $\{y^n\}_n^\infty=2$ are equal if and only if $x=y$.
3. Let a, b, and c be three counting numbers. If a divides b, b divides c, and c divides a, then $a=b=c$.
4. Let a, b, and c be three counting numbers. Then $GCD(ac,bc) = cGCD(a,b)$.
5. Let a and b two relatively prime integers. If there exists an m such that $(a/b)^m$ is an integer, then $b=1$.



تهیه و تنظیم:
علیرضا پوئید
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شیراز

اعداد تاکسی و اعداد خوش اقبال!

اولین عدد تاکسی، کوچک‌ترین عددی است که به یک طریق می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌جمع مکعبات دو عدد مثبت نوشت. اولین عدد تاکسی عدد ۲ است.

$\mathrm{Ta}(۱) = ۲$

$= ۱^۳+۱^۳$

دومین عدد تاکسی، کوچک‌ترین عددی است که به دو طریق مختلف می‌توان آن را به‌صورت حاصل جمع مکعبات دو عدد مثبت نوشت. دومین عدد تاکسی عدد ۱۷۲۹ است که در سال ۱۶۵۷ توسط **فرانسیل دِ بسی**[۱] کشف شد:

$\mathrm{Ta}(۲) = ۱۷۲۹$

$= ۱^۳+۱۲^۳$

$= ۹^۳+۱۰^۳$

سومین عدد تاکسی، کوچک‌ترین عددی است که به سه طریق مختلف می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌جمع مکعبات دو عدد مثبت نوشت. سومین عددتاکسی عدد ۸۷۵۳۹۳۱۹ است که در سال ۱۹۵۷ توسط **جان لیچ**[۲] کشف شد:

$\mathrm{Ta}(۳) = ۸۷۵۳۹۳۱۹$

$= ۱۶۷^۳+۴۳۶^۳$

$= ۲۲۸^۳+۴۲۳^۳$

$= ۲۵۵^۳+۴۱۴^۳$

چهارمین عدد تاکسی، کوچک‌ترین عددی است که به چهار طریق مختلف می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌جمع مکعبات دو عدد مثبت نوشت. چهارمین عدد تاکسی عدد ۶۹۶۳۴۷۲۳۰۹۲۴۸ است که در سال ۱۹۹۱ توسط **روزنستیل**[۳] کشف شد:

$\mathrm{Ta}(۴) = ۶۹۶۳۴۷۲۳۰۹۲۴۸$

$= ۲۴۲۱^۳+۱۹۰۸۳^۳$

$= ۵۴۳۶^۳+۱۸۹۴۸^۳$

$= ۱۰۲۰۰^۳+۱۸۰۷۲^۳$

$= ۱۳۳۲۲^۳+۱۶۶۳۰^۳$

پنجمین عدد تاکسی، کوچک‌ترین عددی است که به پنج طریق مختلف می‌توان آن را به‌صورت حاصل‌جمع

مکعبات دو عدد مثبت نوشت. پنجمین عدد تاکسی عدد ۴۸۹۸۸۶۵۹۲۷۶۹۶۲۴۹۶ اســت کــه در ســال ۱۹۹۴ توسط **داردیس**[۴] کشف شد.

$$
\begin{aligned}
Ta(۵) &= ۴۸۹۸۸۶۵۹۲۷۶۹۶۲۴۹۶\\
&= ۳۸۷۸۷^{۳}+۳۶۵۷۵۷^{۳}\\
&= ۱۰۷۸۳۹^{۳}+۳۶۲۷۵۳^{۳}\\
&= ۲۰۵۲۹۲^{۳}+۳۴۲۹۵۲^{۳}\\
&= ۲۲۱۴۲۴^{۳}+۳۳۶۵۸۸^{۳}\\
&= ۲۳۱۵۱۸^{۳}+۳۳۱۹۵۴^{۳}
\end{aligned}
$$

علــت نام‌گذاری اعدادی که چنیــن خاصیتی دارند، دومین عدد یعنی ۱۷۲۹ اســت که داســتانی از قرار زیر دارد:

زمانی که ریاضی‌دان انگلیسی، **هاردی** برای عیادت ریاضی‌دان شهیر هند، **رامانوجان**، به بیمارستان رفته بود، به این موضوع اشــاره کرد که شمارهٔ تاکسی که به‌وسیلهٔ آن به بیمارستان آمده، عدد بی‌ربط و بی‌خاصیت ۱۷۲۹ بوده اســت. رامانوجان بلافاصله ضمن رد ادعای هاردی به او یادآور شــد که اتفاقاً ۱۷۲۹ عدد بسیار جالبی است. البتــه اولین مطلب موجود در مورد خاصیت عدد ۱۷۲۹ به کارهای **بســی**، ریاضی‌دان فرانسوی قرن هفدهم، باز می‌گردد.

- دو عدد ۱۷ و ۲۹ هر کدام عدد اول هستند.
- جمع چهــار رقم (۹+۲+۷+۱) تشــکیل‌دهندهٔ آن می‌شود ۱۹ که اول است.
- جمــع دو عــدد اولیــه (۸=۷+۱) و دو عدد آخری (۱۱=۹+۲) می‌شود ۸۱۱ که باز هم عدد اول است.
- دو عدد ابتدایی (۱ و ۷) اگر جمع شــوند و کنار دو رقم آخری قرار بگیرند، عدد ۸۲۹ می‌شــود که باز هم عدد اول است.
- دو عدد اولیه و دو عدد آخری اگر از هم کم شــوند (۶=۱-۷ و ۷=۲-۹)، عدد ۶۷ ســاخته می‌شود که باز هم عدد اول است.
- عکس ۱۹ عدد ۹۱ اســت. اگر ۱۹ ضربدر ۱۹ شود، نتیجه برابر ۱۷۲۹ می‌شــود. این هم یکی دیگر از اختصاصات ۱۷۲۹ اســت کــه در هر عددی دیده نمی‌شود.

اولیــن عدد تاکســی ۱ رقمی، دومین عدد تاکســی ۴ رقمی، ســومین عدد تاکســی ۸ رقمی، چهارمین عدد تاکســی ۱۳ رقمی، پنجمیــن عدد تاکســی ۱۷ رقمی، ششمین عدد تاکسی ۲۳ رقمی، و هفتمین عدد تاکسی ۲۹ رقمی است.

؟ سؤال: به‌نظر شما تاکنون چند عدد تاکسی کشف شده و بزرگ‌ترین عدد تاکسی چند رقمی است؟

عدد خوش‌اقبال

در نظریهٔ اعداد، «عدد خوش‌اقبال»[۵] عددی طبیعی اســت که با یک غربال معین به‌دست می‌آید. این غربال شــبیه غربال اراتســتن اســت (که اعداد اول را به‌دست می‌دهد)، اما تفاوت‌هایی هم با آن دارد. برای مثال، اعداد طبیعی:

۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-
۱۷-۱۸-۱۹-۲۰-۲۱-۲۲-۲۳-۲۴-۲۵

را در نظر بگیرید. نخســتین عدد اول، عدد ۲ است، پس تمــام اعداد ردیــف دوم (اعداد زوج) را از این فهرســت حذف کنید:

۱-□-۳-□-۵-□-۷-□-۹-□-۱۱-□-۱۳-□-۱۵-□-
۱۷-□-۱۹-□-۲۱-□-۲۳-□-۲۵

عدد ۳ در این فهرســت نخســتین عدد اول و عدد دومی است که باقی می‌ماند. حال تمام اعداد ردیف سوم را از فهرست اعداد باقی‌مانده حذف کنید:

۱-□-۳-□-∆-□-۷-□-۹-□-∆-□-۱۳-□-۱۵-□-
∆-□-۱۹-□-۲۱-□-∆-□-۲۵

عدد اول بعدی که از حذف شدن نجات پیدا می‌کند، عدد ۷ است. تمام اعداد ردیف هفتم با شروع از ۱۹ حذف خواهند شد:

۱-□-۳-□-∆-□-۷-□-۹-□-∆-□-۱۳-□-۱۵-□-
∆-□-◊-□-۲۱-□-∆-□-۲۵

اگــر همین الگو را ادامه دهید (یعنی در مرحلهٔ بعد اعداد ردیف سیزدهم حذف خواهند شد)، در این صورت اعداد خوش‌شانس عبارت خواهند بود از:

۱,۳,۷,۹,۱۳,۱۵,۲۱,۲۵,۳۱,۳۳,۳۷,۴۳,۴۹,۵۱,۶۳,۶۷,
۶۹,۷۳,۷۵,۷۹,۸۷,۹۳,۹۹, ...

جالب است بدانید (سال) ۱۳۹۵ یک عدد خوش‌اقبال اســت. اصطــلاح عدد خوش‌اقبــال در ســال ۱۹۵۶ در مقاله‌ای توســط **گاردینــر، لازاروس، متروپلیس، و اولام**[۶] معرفی شد.

جالب است بدانید (سال) ۱۳۹۵ یک عدد خوش‌اقبال است

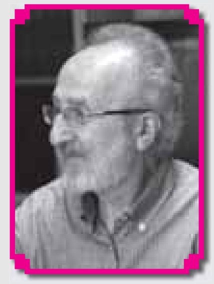
*** پی‌نوشت**

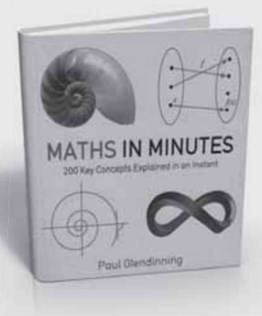
1. Frénicle de Bessy
2. Johan Leech
3. Rosenstiel
4. J. A. Dardis
5. Lucky number
6. Gardiner, Lazarus, Metropolis & Ulam

*** منبع**

http://en.wikipedia.org/wiki/Lucky_number

تألیف: **پال گلندینینگ**
مترجم: **غلامرضا یاسی‌پور**





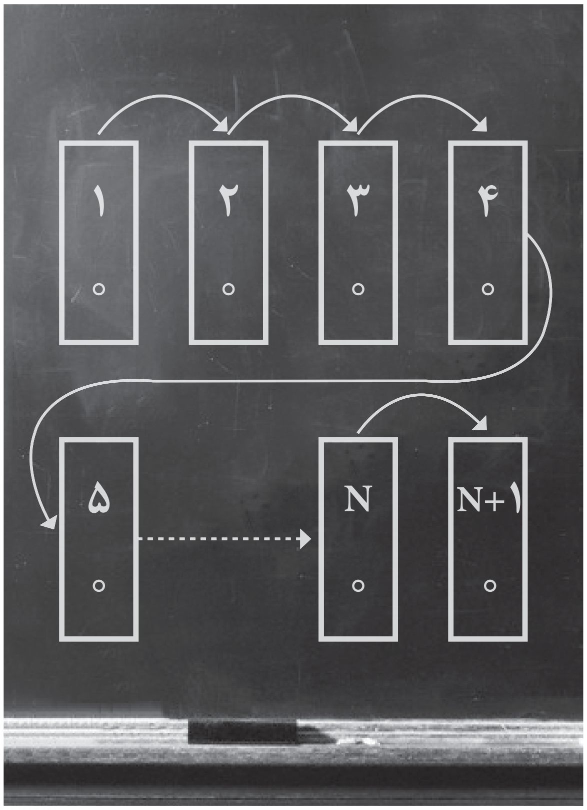
اصلیّت و شمارش‌پذیری

«اصلیّت» (cardinality) یک مجموعهٔ متناهی مثل A که با |A| نوشته می‌شود، تعداد اعضای متمایز آن است. دو مجموعهٔ متناهی یا نامتناهی را دارای یک اصلیت می‌گوییم، اگر اعضای آن‌ها را بتوان در «تناظر یک‌به‌یک» (one to-one correspondence) قرار داد. این بدان معنی است که هر عضو هر مجموعه را می‌توان دقیقاً با یک عضو مجموعهٔ دیگری جفت کرد.

«مجموعه‌های شمارا» (countable sets) مجموعه‌هایی هستند که اعضای آن‌ها را بتوان با اعداد طبیعی برچسب زد. این به‌طور شهودی یعنی اینکه اعضای مجموعه را می‌توان فهرست کرد، هر چند که این فهرست نامتناهی باشد. از لحاظ ریاضی، این مطلب به این معنی است که مجموعه را می‌توان در تناظری یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی قرار داد.

این کار پیامدهای شگفت‌انگیزی دارد. به‌عنوان نمونه، یک زیرمجموعهٔ اکید یک مجموعهٔ شمارا می‌تواند دارای همان اصلیت خود آن مجموعه باشد. بنابراین، مجموعهٔ جمیع اعداد زوج دارای همان اصلیت مجموعهٔ اعداد مربع است که همان اصلیتی را دارد که اعداد طبیعی دارند. گفته می‌شود که جمیع آن‌ها «*شمارا ـ نامتناهی*» (countably infinite) هستند.

هتل هیلبرت



«هتل هیلبرت» تمثیلی است که توسط **دیوید هیلبرت** (David Hilbert) ریاضی‌دان، به‌خاطر مجسم کردن مفهوم شگفت نامتناهی‌های شمارا، اختراع شده است. این هتل موهومی مجموعهٔ نامتناهی شمارایی از اتاق‌هایی دارد که با اعداد ۱، ۲، ۳ و... شماره‌گذاری شده‌اند و زمانی که دیرهنگام یک متقاضیِ اتاق وارد می‌شود، کاملاً اشغال شده است.

متصدیِ پذیرش پس از اندکی اندیشه از میکروفن متصل به اتاق‌ها از هر یک از مهمان‌ها خواهش می‌کند که به‌ترتیب شمارهٔ اتاق‌ها به اتاق پهلویی نقل مکان کنند. بنابراین، فردی که اتاق شمارهٔ ۱ را گرفته به اتاق شمارهٔ ۲ می‌رود، شخص اتاق شمارهٔ ۲ به اتاق شمارهٔ ۳، و به‌همین ترتیب، همه نقل مکان می‌کنند. یعنی برای هر یک از مهمان‌های شمارا نامتناهی واقع در اتاق N، همواره اتاق شمارهٔ N+۱ای موجود است تا به آن نقل مکان کند. در این صورت، زمانی که همهٔ مهمان‌ها نقل مکان کرده باشند، اتاق شمارهٔ ۱ برای اسکان مهمان جدید خالی شده است.

هتل هیلبرت نشان می‌دهد که نتیجهٔ افزودن یک عضو به یک مجموعهٔ شمارا نامتناهی، همچنان مجموعه‌ای شمارا نامتناهی است. بنابراین باید نامتناهی‌های شمارای مختلفی موجود باشند.

شمارش اعداد گویا

اگرچه جمیع مجموعه‌های نامتناهی شمارا نیستند، لیکن بعضی از مجموعه‌های بسیار بزرگ شمارا هستند. این مجموعه‌ها شامل اعداد گویا هستند؛ یعنی اعدادی که از نسبت دو عدد صحیح $\frac{a}{b}$ ساخته شده‌اند. این موضوع را می‌توان تنها با بررسی اعداد گویای بین ۰ و ۱ به اثبات رساند.

اگر اعداد گویای بین ۰ و ۱ شمارا باشند، در این صورت باید بتوانیم آن‌ها را در ترتیبی قرار دهیم که فهرستی کامل ـ اگرچه نامتناهی ـ به‌وجود آورد. در این مورد ترتیب طبیعی صعودی اندازه به‌کار نمی‌آید؛ زیرا بین هر دو عدد گویا همواره می‌توان عدد دیگری یافت. بنابراین نمی‌توانیم حتی اعضای اول و دوم چنین فهرستی را بنویسیم. اما آیا راه دیگری برای فهرست کردن این اعداد وجود دارد؟

یک راه‌حل، همان‌گونه که در شکل نشان داده‌ایم، این است که اعداد را ابتدا توسط مخرجشان، یعنی b، و سپس توسط صورتشان، یعنی a، مرتب کنیم. البته در این رهیافت پاره‌ای تکرار وجود دارد، اما هر عدد گویای بین ۰ و ۱ دست‌کم یک‌بار در فهرستمان ظاهر می‌شود.

۱/۲

۱/۳ , ۲/۳ ,

۱/۴ , ۲/۴ , ۳/۴ ,

۱/۵ , ۲/۵ , ۳/۵ , ۴/۵ ,

۱/۶ , ۲/۶ , ۳/۶ , ۴/۶ , ۵/۶

– –

۱/n , ۲/n , ۳/n , ۴/n , ..., (n-۲)/n , (n-۱)/n

معادلۀ حرکت از دیدگاه فیزیک و ریاضی

امیر حلیمی
دبیر ریاضی
استان آذربایجان‌شرقی

مسئلۀ فیزیکی

معادلۀ حرکت متحرکی با شتاب ثابت را که نمودار آن در شکل زیر ارائه شده است، به‌دست آورید.

$$T_۱ = ۰s \rightarrow x_۱ = -۱۵m$$

$$T_۲ = ۵s \rightarrow x_۲ = -۲۰m$$

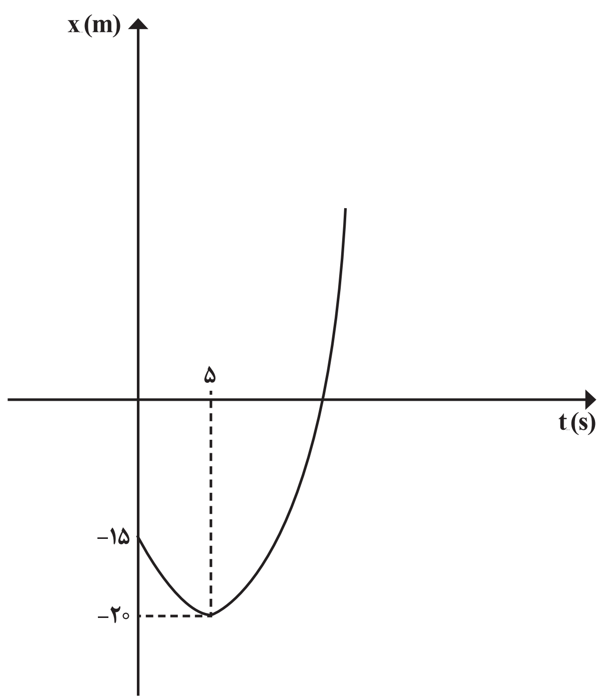
$$\Delta t = ۵s,\ \Delta x = -۲۰-(-۱۵) = -۵m$$

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{v_۱ + v_۲}{۲} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \times t$$

$$\rightarrow -۵ = \frac{v_۱ + ۰}{۲} \times ۵ \rightarrow v_۱ = -۲\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۰-(-۲)}{۵-۰} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴\frac{m}{s^۲}$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۵}t^۲ + (-۲)t + (-۱۵)$$



حل این مسئله به کمک روابط ریاضی

هدف پیدا کردن معادلۀ سهمی در ریاضیات است که معادلۀ آن عبارت است از: $y=ax^۲+bx+c$. با توجه به شکل، منحنی از نقطۀ (۵،-۲۰) می‌گذرد و از اینجا یک معادله به‌دست می‌آید و چون نقطۀ (۵،-۲۰) نقطۀ مینی‌مم سهمی است، معادلۀ دوم نیز به‌دست می‌آید و c همان عرض از مبدأ است که با توجه به شکل ۱۵- به‌دست آمده است.

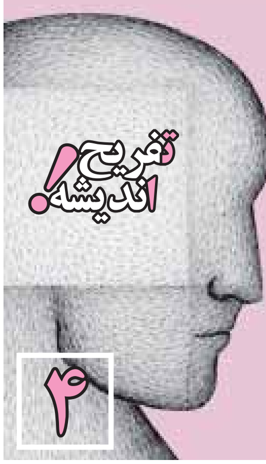
$$\rightarrow -۲۰ = ۲۵a + ۵b - ۱۵ \rightarrow ۵a + b = -۱ \quad (۱)$$

$$x_{min} = \frac{-b}{۲a} \rightarrow ۵ = \frac{-b}{۲a} \rightarrow ۱۰a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$\begin{cases} ۵a + b = -۱ \\ ۱۰a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{a=\frac{۱}{۵},\, b=-۲} y = \frac{۱}{۵}x^۲ - ۲x - ۱۵$$

به‌جای x متغیر t و به‌جای y متغیر x را قرار می‌دهیم و در نهایت جواب‌ها یکسان هستند.

$$x = \frac{۱}{۵}t^۲ - ۲t - ۱۵$$



به آیا می‌توانید عددهای حسابی a، b، c، d، e و f را به‌گونه‌ای مشخص کنید که هر شش معادلۀ زیر را برقرار سازند؟

$$\begin{cases} (a+۱)b = ۱۶ \\ (b+۱)^۲ - a^۲ = ۱۶ \\ b^۲ + e = ۱۶ \\ c^۲ - (a-d)(b+c) = ۱۶ \\ c + d + f = ۱۶ \\ \frac{c}{a}(f-d) = ۱۶ \end{cases}$$

داستان ریاضی‌دان حواس‌پرت و خواهران دوقلو!

مســئلهٔ ۱. استاد **پرهام**، ریاضی‌دان بزرگی بود، اما مثل خیلی از دانشمندان، در عین حال حواس‌پرت و کمی گیج بود! او با دو خواهر دوقلو به نام‌های **شــهرزاد** و **مهرزاد** آشنا شـد. آن‌ها در ظاهر کاملاً شــبیه هم (دوقلوی همســان) بودند و غیرقابل تشخیص، اما شهرزاد همیشه راست می‌گفت و مهرزاد همواره دروغ می‌گفت!

ریاضی‌دان ما از یکی از این دو خواهر خوشش آمد و با او ازدواج کرد، اما متأســفانه اســم کوچک او را فراموش کرد! (البته می‌دانست که اســم او شــهرزاد یا مهرزاد اســت.) خواهر دیگر تا دو ســال بعد ازدواج نکرد. استاد پرهام کمی بعد از ازدواجش، برای شرکت در یک کنفرانس منطق به جایی رفت و چند روز بعد برگشــت و آن‌گاه یکی از دو خواهــر را در یک مهمانی شـام دیـد، و البته هیچ ایده‌ای برای اینکه بفهمد که او همســرش است یا نه، نداشت. اما کمی فکر کرد و لبخندی زد! او با خودش گفت: من می‌توانم فقط با یک ســؤال سادهٔ سه کلمه‌ای که جواب آن هم فقط بله یا خیر باشد، بفهمم که او همسرم است یا خیر.

این چه سؤالی بود؟

ایستگاه دوم

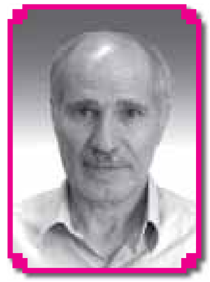
مسئلهٔ ۲. چند روز بعد دوباره پرهام یکی از دو خواهر را در یک مهمانی شــام دید و باز هم نفهمید که او همسرش است یا خواهرزنش. با خــود فکر کرد: «حالا وقت آن اســت که این‌بار اسم کوچک همســرم را بفهمم و این کار هم با یک پرسش سه کلمه‌ای با پاسخ بله یا خیر ممکن است!» این‌چه سؤالی بود؟

مسئلهٔ ۳. فرض کنید که در مســئلهٔ ۲ پرهام می‌خواســت هــر دو موضــوع را بفهمد: یعنی هویــت خانمی را که ملاقــات کرده بود و نیز اســم کوچک همســرش را. او باز هم یک سؤال با پاسخ بله یا خیر می‌خواست، اما این‌بار بدون محدودیت تعداد کلمات پرسش شده، تا کارش انجام شــود. آیا می‌توانید چنین سؤالی را بیابید؟

1

دکتر عین‌الله پاشا
استاد آمار و ریاضی دانشگاه خوارزمی
(تربیت معلم)

به استقبال سرشماری ۱۳۹۵ برویم!



سرشماری

مقدمه

دادهٔ بهتر، زندگی بهتر
شعار سازمان ملل متحد
به مناسبت روز جهانی آمار

جامعه‌ها زنده‌اند. آن‌ها نیز دستخوش تغییرات‌اند. آگاهی از این تغییرات می‌تواند نشانی از این واقعیت باشد که جامعه رو به سلامتی می‌رود یا رو به بیماری. از این تغییرات می‌توان دریافت که آیا جامعه مطابق آنچه که برای آن برنامه‌ریزی شده است، پیش می‌رود یا آنکه مسیر جامعه با مسیر برنامه‌ها اختلاف دارد. در هر حال، مشاهدهٔ هر یک از این رویدادها و پدیده‌ها، گردانندگان جامعه را وا می‌دارد تا تصمیم‌های مقتضی اتخاذ کنند. آنچه که می‌تواند ما را در آگاهی از این تغییرات یاری رساند، سرشماری است. سرشماری برای رسیدن به این منزلت، راهی بسیار طولانی و پرنشیب و فراز طی کرده است.

در ایران در ۵۵ سال گذشته، هفت سرشماری به‌صورت هدفمند و مطابق با اصول برگزار شده است. پس از برگزاری هر سرشماری و مطالعهٔ جزئیات و نتایج آن، به‌ویژه بررسی مراحل اجرای آن، نکاتی حاصل شد که برپایهٔ آن سرشماری‌های بعدی بهتر و اصولی‌تر به اجرا درآمدند.

در این مقاله ابتدا به تاریخ سرشماری در جهان می‌پردازیم. سپس به سرشماری‌های موردی و پراکنده‌ای که در ایران و منحصراً از تهران در دورهٔ ناصری و پهلوی اول انجام شد، می‌پردازیم. سرانجام به موضوع سرشماری منظم و قانونمند از کشور که از سال ۱۳۳۵ شروع و تاکنون به‌طور منظم ادامه داشته است، می‌پردازیم. در پایان نتایج حاصل از سرشماری ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۰ را به‌طور خلاصه برای اطلاع بیشتر از کارکرد سرشماری و انجام برخی مقایسه‌ها می‌آوریم.

گذشتهٔ سرشماری در جهان

همان‌طور که در مقدمه گفته شد، سرشماری راهی دراز طی کرده است تا به‌صورت مدرن و امروزی جزو ضروریات هر جامعه شود. در متون تاریخی نشانه‌های اولیه از سرشماری را حدود ۴۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، در تمدن‌های بابلی ـ ایلامی می‌توان دید. همچنین در چین، مصر، یونان، ایران و روم حدود سال‌های ۳۰۰ تا ۲۰۰ قبل از میلاد مسیح سرشماری‌هایی گزارش شده‌اند. در دوران هخامنشیان تعداد سربازانی که به جنگ می‌رفتند و یا آن تعدادی که از جنگ برمی‌گشتند، مورد توجه پادشاهان و فرمانروایان بود و لذا برای شمارش آن‌ها تدابیری می‌اندیشیدند.

مثلاً در جنگی که **خشایارشا** با یونان در پیش داشت، حدود یک‌ونیم میلیون سرباز بسیج شده بود. شمردن این تعداد سرباز به روش معمول، درست قبل از آغاز حمله، به علت وقت‌گیر بودن آن، کار عاقلانه‌ای نبود. برای حل مسئله دستور داده شد تا ۱۰ هزار سرباز در جایی فشرده قرار گیرند و با کشیدن خطی به دور آن‌ها و سپس بالا آوردن دیواری تا کمر یک سرباز، دستور دادند تا سربازان به تناوب داخل این پیمانه بروند و خارج شوند. تعداد دفعاتی که این پیمانه پر و خالی می‌شد، تعداد سربازان اعزامی را معلوم می‌کرد. برای دانستن تعداد کسانی که از جنگ برنمی‌گشتند، قبلاً دستور داده شده بود که هر سربازی سنگی در گودالی بیندازد و پس از بازگشت از جنگ، هر سرباز سنگی از همان گودال بردارد. تعداد

سنگ‌های باقی‌مانده، تعداد تلفات جنگ را معین می‌کرد.

این‌ها از آن دست مثال‌های تاریخی‌اند که می‌توانند سرمنشأ سرشماری به حساب آیند. اهداف این سرشماری‌ها فقط تعداد سربازان اعزامی (و در نتیجه میزان تدارکات آن‌ها) و تعداد سربازان بازگشتی بود. با تحلیل این ارقام می‌توانستند نقشه‌های نظامی خود را ارزیابی کنند و به نقاط قوت یا ضعف آن‌ها پی ببرند.

نکتهٔ دیگری که در این اقدام نظامی مهم بود، اطمینان یافتن از فراهم شدن چنین نیروی عظیمی بود. باید استعداد جامعه برای تحویل این تعداد جنگجو ارزیابی می‌شد. از این‌رو حکمرانان هر از چندگاهی افراد بین ۲۰ تا ۵۰ ساله را در قلمرو خود شمارش می‌کردند. البته در کنار تدارکات نیروی انسانی جنگ، تدارکات آذوقه و سایر وسایل نیز اهمیت داشت و جامعه باید می‌توانست از عهدهٔ آن نیز برآید. برای اطمینان یافتن از این موضوع، از دارایی‌های مردم، عموماً محصولات کشاورزی و دام نیز سرشماری به‌عمل می‌آمد. البته حاکمان می‌دانستند که نباید همه‌چیز را به وقت آخر موکول کنند، از این‌رو از قبل تدارک لازم را به‌عمل می‌آوردند. به این دلیل و هم به‌دلیل تأمین مخارج جاری حکومت، دارایی‌های مردم معلوم و سپس از آن‌ها به تناسب دارایی، مالیات اخذ می‌شد.

در اغلب موارد در جمع‌آوری مالیات چنان شدت عملی به خرج داده می‌شد و مأموران با سنگدلی و افزون بر ظرفیت مردم، از آن‌ها مالیات اخذ می‌کردند که در تاریخ دوره‌های گذشته، مالیات داستانی غم‌انگیز در زندگی مردم داشته است.[1]»

با این مقدمهٔ کوتاه معلوم می‌شود که انگیزهٔ اساسی و اولیهٔ سرشماری، حکومت‌داری و اهداف نظامی بوده است. تا به اینجا مردم باید هزینه‌های انسانی و مالی جنگ را تقبل می‌کردند و حکمرانان حکومت می‌کردند. پیشرفت کشور، بهبود شرایط زندگی مردم و مسائل رفاهی، بهداشتی و فرهنگی جایی در برنامه‌های آن‌ها نداشت.

در قرون وسطا نیز در اروپا سرشماری انجام می‌شد. سرشماری این دوره هم نشان‌دهندهٔ خصوصیت‌های همین دوره است، تعداد اشراف و روحانیون را معین می‌کردند و هیچ‌توجهی به سایر افراد جامعه نداشتند.[2] البته از همین‌جاست که پای اروپا در سرشماری‌ها باز می‌شود. نکتهٔ مهم که تا این زمان جلب توجه می‌کند این است که سرشماری قبل از آن، موضوعی دستوری و بنابر اراده و خواست حکمرانان و به منظور برآوردن نیازهای مالی و لشکری بود. اگر تدبیری و نوآوری در آن بود، تماماً در نحوهٔ جمع‌آوری اطلاعات خلاصه می‌شد. قبلاً به دو نمونه اشاره شد (تعداد سربازان قبل و بعد از جنگ). نمونهٔ دیگر این بود که برای تعیین میزان محصولات کشاورزی، تعداد گاوهای نری را که برای شخم‌زدن در هر جایی نگهداری می‌کردند، می‌شمردند. معلوم بود که هر گاو چه مقدار زمینی را شخم می‌زند. در نتیجه، تعداد آن‌ها میزان زمین‌های کشاورزی زیرکشت و در نتیجه میزان محصول را معین می‌کرد. با معلوم شدن میزان محصول، سهم کشاورز برای پرداخت مالیات تعیین می‌شد.

کم‌کم موضوع سرشماری از یک امر صرفاً حکومتی به حیطهٔ کار اندیشمندان و متفکران جامعه کشانده شد. از اینجا بر گستردگی، کارایی، اهمیت و ضرورت اجرای آن افزوده شد، به قسمی که در حال حاضر سرشماری یکی از پروژه‌های ضروری، مستمر و در عین حال پرهزینهٔ هر دولتی است. در قرن یازدهم میلادی، در انگلستان شروع به ثبت اطلاعات حاصل از جامعه کردند و به این منظور مؤسسه‌ای به‌نام «دامزدی بوک» در سال ۱۰۸۵ ایجاد شد. اطلاعات این مؤسسه مبنایی برای مالیات و سربازگیری بود. در سال ۱۶۶۲، مجمع سلطنتی لندن رساله‌ای دربارهٔ تحقیقات جمعیت انگلستان که **کرانت** تألیف کرده بود، منتشر کرد. از این قبیل رساله‌های تحقیقاتی دربارهٔ جمعیت در سایر کشورهای اروپایی نیز منتشر شد و افرادی به تعلیم مسائل جمعیت‌شناسی پرداختند. این‌ها نقطهٔ آغاز سرشماری علمی و با اهداف متعالی بودند.

اولین سرشماری علمی مبتنی بر دستاوردهای دانشمندان و توصیه‌های آن‌ها (نه فرمان حکمرانان و ارادهٔ آن‌ها) در قرن

هجدهم و به سال ۱۷۴۹ در سوئد انجام شد و به‌تدریج سایر کشورهای جهان به این جریان پیوستند. ایران در اواسط قرن بیستم و سال ۱۹۵۶ میلادی (۱۳۳۵ هجری شمسی) اولین سرشماری مدرن و کامل خود را به معنای امروزی انجام داد.

از آنجا که جامعه پیوسته تغییر می‌کند، لازم است اطلاعات حاصل از سرشماری هر از چندگاهی روزآمد شود. سازمان ملل توصیه کرد هر ۱۰ سال یک‌بار سرشماری انجام شود. در ایران تا سال ۱۳۸۵ سرشماری‌ها از همین قاعده پیروی کرد و از آن سال به بعد به علت تغییرات شدید در جامعه، مصوب شد که هر ۵ سال یک‌بار سرشماری برگزار شود. به این ترتیب در سال ۱۳۹۰ یک سرشماری انجام شد و در سال ۱۳۹۵ نیز سرشماری خواهیم داشت.

با استفاده از روش‌های برآورد آماری و ایده‌های هوشمندانه، دانشمندان سعی کردند جمعیت جهان را در دورهٔ تمدن‌های باستانی که حتی به‌ندرت آمار و ارقامی از جمعیت شهرهای بزرگ در دست است، تخمین بزنند. از جمله کسانی که به این مهم اقدام کرد، **جان. د. دوراند**، جامعه‌شناس و اقتصاددان آمریکایی است که جمعیت جهان را در ۸۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، پنج میلیون (تقریباً نصف جمعیت تهران کنونی) تخمین زد. پس از ۸۰۰۰ سال و در سال اول میلاد مسیح، جمعیت جهان برابر ۳۰۰ میلیون نفر برآورد شد. یعنی در یک دورهٔ ۸۰۰۰ ساله جمعیت جهان ۶۰ برابر شد. از این جمعیت ۳۰۰ میلیونی، ۵۰ میلیون آن جمعیت چین آن روزگار بود. به‌نظر می‌رسد جوامع پرجمعیت کنونی از دیرباز دارای جمعیت زیاد بوده‌اند. براساس این اطلاعات جمعیت چین $\frac{1}{6}$ جمعیت جهان بود. در حال حاضر $\frac{1}{6}$ جمعیت ۹ میلیاردی جهان، ۱/۵ میلیارد می‌شود. جمعیت فعلی چین تقریباً $\frac{2}{3}$ این تعداد است.[3]

جمعیت مطلوب

در زمان‌های دور، بیماری‌ها، قحطی، جنگ و برخی عوامل طبیعی از قبیل سیل و زلزله سبب مرگ و میر وسیع در جامعه می‌شدند[4] و در نتیجه جمعیت تعدیل می‌شد. در حال حاضر به علت پیشرفت علم، صنعت و سیاست و بالا رفتن سطح آگاهی مردم، این قبیل تعدیل‌ها پذیرفتنی نیستند. از طرف دیگر، جامعه باید دارای جمعیت محدود باشد. از این‌رو مهندسی جمعیت و برنامه‌ریزی برای آن از اهداف اساسی و مهم دولت‌هاست.

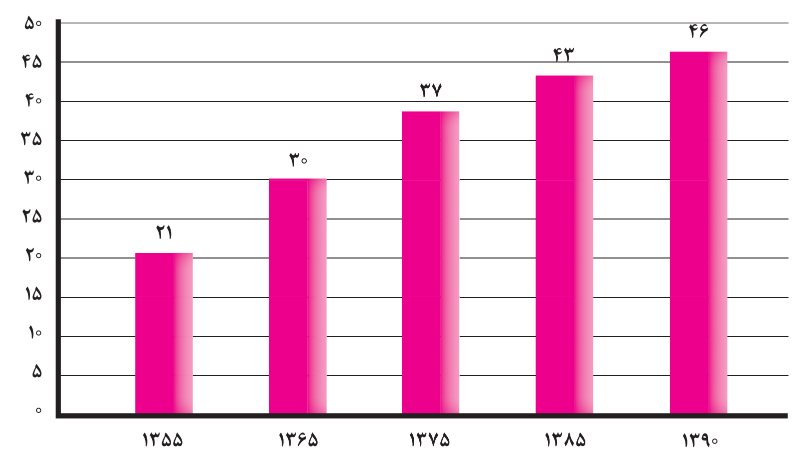
می‌توان با استفاده از قوانین آماری و نتایج حاصل از سرشماری‌ها، نرخ رشد جمعیت را به‌دست آورد و با استمداد از ریاضیات، نشان داد که رشد جمعیت از تصاعد هندسی تبعیت می‌کند. به این معنی که اگر امسال جمعیت کشور p_0 و رشد آن q باشد، پس از مدت زمان t، جمعیت کشور از دستور:

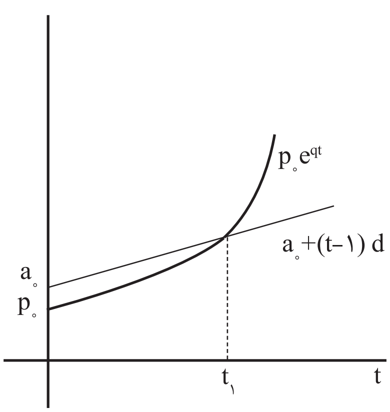
$p_t=p_0e^{qt}$,

به‌دست می‌آید. اندیشمندان معتقدند که رشد محصولات کشاورزی از نوع تصاعد حسابی است. به‌عبارت دیگر، اگر میزان محصول امسال a_0 و رشد سالانهٔ آن d باشد، پس از t سال میزان محصول چنین محاسبه می‌شود:

$a_t=a_0+(t-1)d$,

سرعت رشد تصاعد هندسی بسیار سریع‌تر از رشد تصاعد حسابی است. نمودارهای زیر این نکته را نشان می‌دهند:





شکل۱ نمودار تصاعد هندسی و حسابی

در واقع تصاعد حسابی به‌صورت خطی و تصاعد هندسی به‌صورت نمایی رشد می‌کند.

این نکات مقدماتی بیان‌کنندهٔ این واقعیت است که سرانجام غذای کافی برای جمعیت موجود نخواهد بود، مگر آنکه از قبل تمهیداتی برای کنترل جمعیت و یا برای یافتن منابع غذایی جدید به‌عمل آمده باشد. به‌علاوه، هر جمعیتی با هر میزان محصول نمی‌تواند مطلوب باشد. از این‌رو برخی از اندیشمندان اجتماعی، از جمعیت مطلوب سخن به میان آورده‌اند و همراه آن، مفاهیم جدیدی معرفی کرده‌اند. یکی از این مفاهیم، مدت زمانی است که طول می‌کشد تا جمعیت دو برابر شود. این زمان را می‌توان به‌سادگی با حل معادلهٔ زیر به‌دست آورد:

$p_{\circ} e^{qt}=2p_{\circ}$

و آن را به‌صورت $t=\frac{1}{q}\ln 2$ نوشت. این دستور نشان می‌دهد که صرف‌نظر از ضریب ln۲، هرقدر نرخ رشد جمعیت بیشتر باشد، جمعیت زودتر (به نسبت عکس نرخ) دو برابر می‌شود. پس اگر بخواهیم مثلاً هر ۳۰ سال جمعیت دو برابر شود، باید نرخ رشد جمعیت برابر $\frac{1}{30}\ln 2$ باشد. البته جمعیت را به دنبال فرمول کشیدن کار دشواری است. معمولاً باید به دنبال جمعیت رفت، ولی حتی‌الامکان باید مهار آن را در دست داشت. جوامع کار خود را انجام می‌دهند و خیلی هم پیرو دستورات نیستند. آن‌ها از پندارهایی که در فرهنگ جامعه ریشه دوانده‌اند، خواسته یا ناخواسته، پیروی می‌کنند. به‌علاوه امکانات و شرایط نیز در این بین مؤثرند. این پندارهای اجتماعی ممکن است ریشه‌های مذهبی، فلسفی و یا حتی خود ساخته داشته باشند؛ مثل:

- در یونان باستان جمعیت مطلوب باید با محدودیت‌هایی که با تشویق و یا تنبیه همراه است، حاصل شود.
- هندی‌ها، معتقدند که روستا با جمعیت کم فاجعه است، بنابراین درصدد رشد جمعیت روستایی بودند.
- رومی‌های باستان، فرزند بیشتر را به معنای سرباز بیشتر و در نتیجه فتوحات و ثروت بیشتر برای کشور می‌دانستند.
- یهودی‌ها معتقدند که رشد جمعیت برنامه خداست، در آن نباید تغییر ایجاد کرد.

به هر حال با مراجعه به منابع می‌توان نظر سایر ادیان و نظر برخی از مکتب‌های اجتماعی و صاحب‌نظران را دربارهٔ رشد جمعیت، و فواید و مضرات آن جست‌وجو کرد. مثلاً اقتصاددانان جدید مسئلهٔ جمعیت را تنها مرتبط با غذا نمی‌دانند، بلکه کیفیت رشد فرزندان را نیز در نظر دارند.

با این مطالب، دورنمایی از مسائلی که پاسخ آن‌ها در سرشماری نهفته است، آشکار می‌شود. هر بخشی از اطلاعات که از جامعه به‌دست می‌آید (البته اطلاعات واقعی)، می‌تواند با تحلیل مناسب، در بهبود شرایط جامعه مفید واقع شود. دسترسی به اطلاعات واقعی همکاری تک‌تک افراد جامعه را می‌طلبد. درست است که پندارهای باقی‌مانده از زمان‌های دور سابقهٔ ذهنی خوبی به یادگار نگذاشته‌اند، ولی در دنیای فعلی، این اطلاعات در سرنوشت تک‌تک افراد جامعه مؤثر است. بنابراین چه بهتر که در دادن اطلاعات و درک صحیح سؤال‌ها و پاسخ دقیق به آن‌ها، مبنایی برای تصمیم‌گیری‌های درست و مفید فراهم آوریم.

در اینجا بد نیست این مثال را یادآوری کنیم که می‌گوید: «اگر تشنه‌ای از شما طلب آب کند و شما نصف لیوان آب به او بدهید، به همان اندازه از تشنگی او کاسته‌اید. ولی اگر به او یک پارچ بزرگ آب شور بدهید، نه‌تنها از تشنگی او کم نکرده‌اید، بلکه تشنگی او را تشدید کرده‌اید!» پاسخ درست مانند آب و پاسخ مبهم مانند آب شور است.

پی‌نوشت‌ها

۱. می‌گویند وقتی مأمور مالیاتی فرش زیرپای خانواده‌ای را لوله کرد و برد، بعد از باز کردن فرش در مرکز، دیدند که نوزاد خانواده را نیز میان فرش لوله کرده و آورده‌اند. یا وقتی مأموران مالیاتی می‌آمدند، مردم روستا را تخلیه می‌کردند و به کوه‌های اطراف پناه می‌بردند.

۲. معمولاً در دوره‌های اخیر، در موسم سرشماری همهٔ دستگاه‌ها و ارگان‌ها در این جهت به فراخور حال و روز خود فعال می‌شوند. روزنامه‌ها مقالات توصیفی ـ تشریحی می‌نویسند و امر سرشماری را تبلیغ می‌کنند. یک روزنامه کاریکاتوری کشیده بود که در آن دو نفر صحبت می‌کردند. یکی می‌گفت: «خب سرشماری هم شروع شد.» دیگری می‌گفت: «آره می‌خواهند یک‌بار هم که شده ما را به‌حساب بیاورند.»

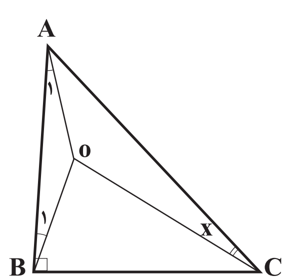
۳. با مراجعه به سایت «World Meter» می‌توان جمعیت هر کشوری را همراه با برخی از اطلاعات مفید اولیه به‌صورت Online مشاهده کرد.

۴. در قرن هفدهم نیمی از جمعیت اروپا بر اثر مرگ سیاه (طاعون) مردند.

پرسش‌های بیکارجو!

۱

در شکل زیر، ABC مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و: $\hat{A}_1=\hat{B}_1=15^{\circ}$. اندازهٔ $O\hat{C}A$ چند درجه است؟



الف) ۲۰ ب) ۲۲/۵ ج) ۲۵ د) ۳۰ هـ) ۱۵

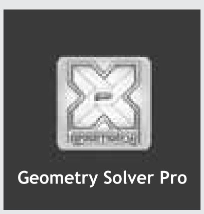
آموزشی

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

نرم‌افزار Geometry Solver Pro مخصوص هندسه و مثلثات روی سیستم‌عامل اندروید

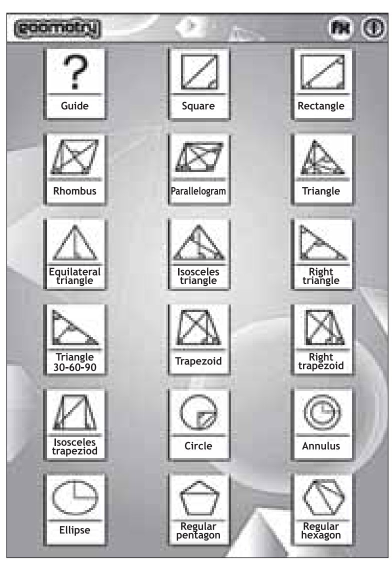
مقدمه

بی‌شک یکی از دردسرهای همهٔ کسانی که در کار خود با هندسه سروکار دارند، فراموش کردن فرمول‌های هندسه و مثلثات است؛ خواه این کار کاری عملی باشد یا آموزشی. نرم‌افزار «Geometry Solver Pro» این مشکل را حل کرده و همهٔ فرمول‌های هندسه و مثلثات را در حجمی اندک گردآوری کرده است. اما این فقط در حد یک گردآوری نیست، بلکه نرم‌افزار همهٔ محاسبات مورد نیاز را هم انجام می‌دهد و یک کارگاه واقعی هندسه و مثلثات را در اختیار کاربر قرار می‌دهد. جالب این است که راه‌حل را نیز به نمایش می‌گذارد. بنابراین لازم است همهٔ دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه و معلمان ریاضی این نرم‌افزار را روی گوشی یا تبلت خود نصب کنند و با آن از هندسه و مثلثات لذت ببرند.



تصویر ۱

با باز کردن نرم‌افزار تصویر ۲ نمایان خواهد شد که در آن همهٔ شکل‌های هندسی (مسطح و فضایی) وجود دارد. البته آخرین شکل بحث مثلثات است که به آن خواهیم پرداخت. اولین شکل، راهنما (Guide) است که با انتخاب آن با روش کار نرم‌افزار آشنا خواهید شد. کار با همهٔ شکل‌ها در بیشتر موارد شبیه هم است و به‌عنوان ساده‌ترین مورد، مربع (Square) را معرفی می‌کنیم.



تصویر ۲

مربع

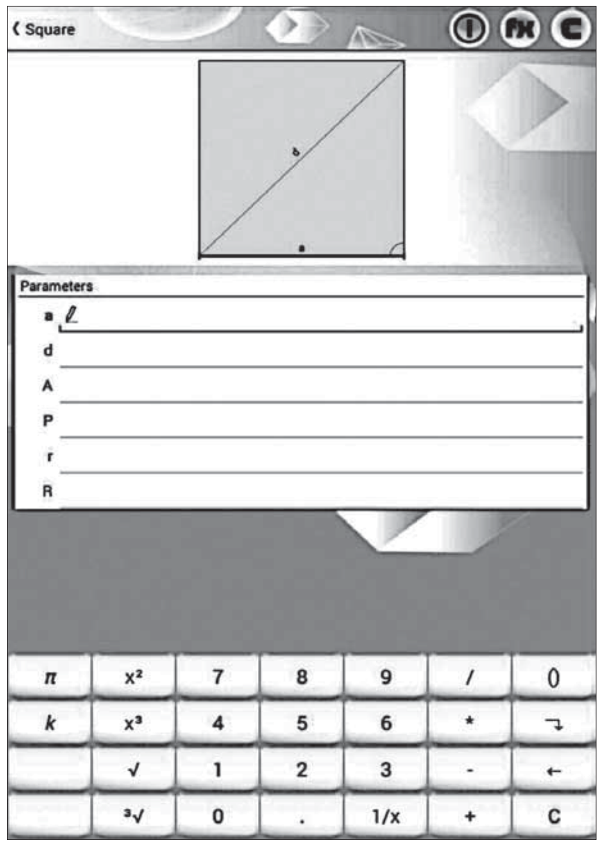
با انتخاب «Square» تصویر ۳ نمایان می‌شود. در این تصویر شش پارامتر وجود دارد که به ترتیب بیان شده‌اند:

a → ضلع (side)
d → قطر (diagonal)
A → مساحت (Area)
P → محیط (Perimeter)
r → شعاع دایرهٔ محیطی (Inradius)
R → شعاع دایرهٔ محاطی (Circumradius)

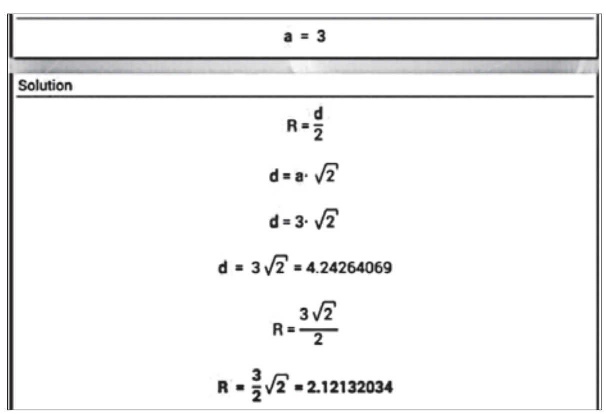
می‌توان به هر یک از این شش پارامتر مقدار داد که در این صورت نرم‌افزار سایر پارامترها را حساب می‌کند. برای مثال، در تصویر ۳ مقدار a=۲ را انتخاب کرده‌ایم. حال

اگر بخواهیم جواب را به‌صورت تشــریحی ببینیم، کافی اســت جواب موردنظر را انتخاب کنیم. مثلاً می‌خواهیم روش محاســبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی را ببینیم. به این منظور حالت R را انتخاب می‌کنیم که جواب تصویر ۴ است.

نکته: با انتخاب هر مورد، پارامتر موردنظر در شــکل اصلی به‌صورت پررنگ درمی‌آید.



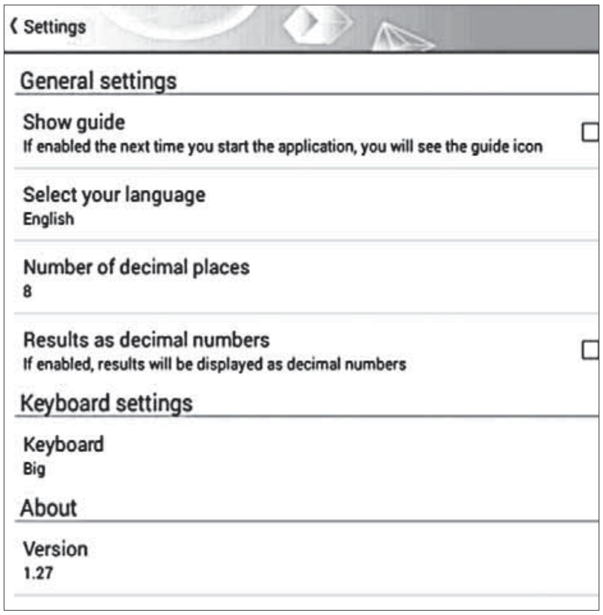
تصویر ۳



تصویر ۴

تنظیم‌ها و صفحه کلید

بــا باز کردن برنامه و ظاهر شــدن تصویر ۲ می‌تــوان برنامه را به‌صــورت دلخواه تنظیم کرد. به ایــن منظور کلید «Tuchmenu» را در پایین صفحهٔ گوشــی یا تبلت بزنیــد تا صفحهٔ تنظیم‌ها ظاهر شود (تصویر ۵).

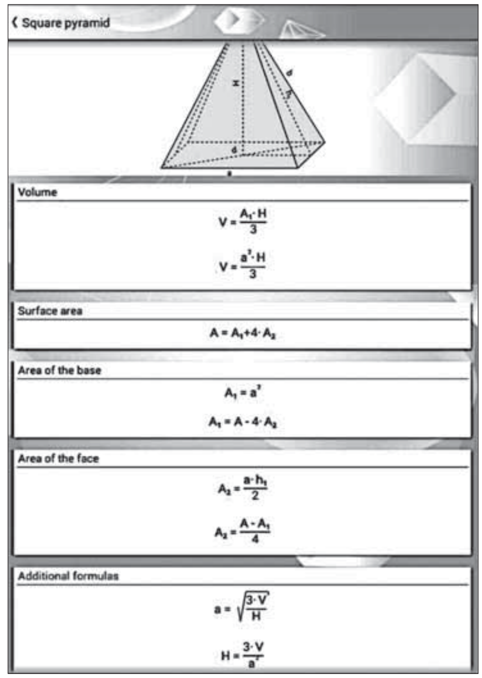


تصویر ۵

در اولیــن گزینــه یعنــی «Show Guide» این امــکان وجود دارد کــه راهنمای نرم‌افــزار را از تصویر ۲ حذف کــرد که این کار بعــد از مطالعهٔ راهنما مفید اســت. در دومین گزینــه زبان نرم‌افزار انتخــاب می‌شــود. اما در گزینهٔ ســوم تعداد ارقــام جواب‌ها تعیین می‌شــود و این در صورتی اســت کــه گزینهٔ ۴ را به‌عنــوان حالت اعشــاری انتخاب کنید. در غیر این‌صورت جواب‌ها به شکل نمادین هســتند. با توجه به اندازهٔ صفحهٔ نمایش گوشی یا تبلت می‌توان در «keyboard Setting» صفحهٔ کلید بزرگ یا کوچک را انتخاب کرد که در تصویر ۳ صفحه کلید بزرگ است.

نکته: برای پــاک کردن همهٔ پارامترها در بالای صفحه حالت C را انتخاب می‌کنیــم. در صورتی‌که حالت FX را انتخاب کنیم، همهٔ روابط موردنیاز برای شــیء انتخاب شــده به‌طور کامل ارائه می‌شــود. برای مثال، همهٔ روابط مورد نیاز برای هرم با قاعدهٔ مربع (Square Piramide) را در تصویر ۶ می‌بینیم.

همچنیــن اگر حالت I را در بــالای صفحه انتخاب کنیم، نرم‌افزار معنای همهٔ پارامترها را به زبان انگلیسی بیان می‌کند.



تصویر ۶

حل مسئله: کاربرد این نرم‌افزار فقط برای محاسبه‌های کوچک نیست، بلکه برای حل مسئله‌های بزرگ‌تر هم که به کارهای بیشتری نیاز دارد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدیهی است که هر اندازه توانایی ما در استفاده از نرم‌افزار بیشتر باشد، این مورد بهتر انجام می‌شود. در ادامه دو مورد از این مسئله‌ها را مطرح می‌کنیم.

پروژهٔ وجود مثلث

می‌دانیم که اعداد ۳، ۴ و ۵ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. می‌خواهیم بررسی کنیم، اگر اضلاع ۳ و ۴ را ثابت نگه داریم، اندازهٔ ضلع سوم در چه بازه‌ای تغییر می‌کند.

بـه این منظـور ابتـدا «Triangle» را انتخاب می‌کنیم. سپس جواب‌های نرم‌افزار را در یک جدول نظام‌دار مرتب می‌کنیم و به کمک آن وجود مثلث را بررسی می‌کنیم.

c	۰/۹	۱	۱/۱	۲	۳	۴	۵	۶	۶/۹	۷
نتیجه	×	×	+	+	+	+	+	+	+	×

در صورتی‌که نرم‌افزار سایر پارامترها را حساب کند، به این معنی است که چنین مثلثی وجود دارد. با مشاهدهٔ اعداد جدول مشاهده می‌کنیم که ضلع سوم در بازهٔ (۱,۷) تغییر می‌کند و این همان رابطهٔ معروف $|a-b|<c<a+b$ است.

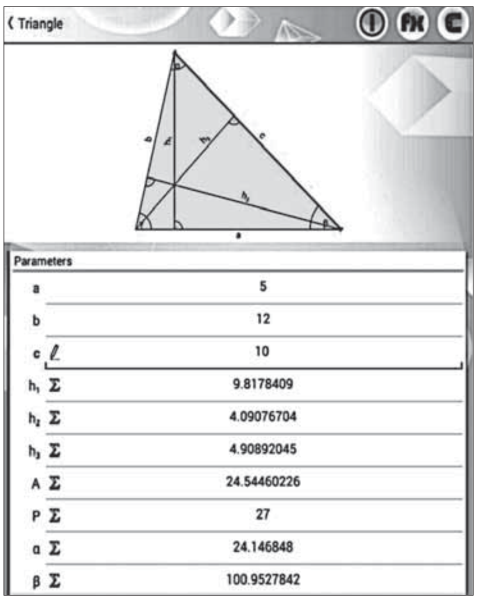
پروژهٔ بیشترین مساحت

فرض کنیم اندازه‌های دو ضلع مثلثی ۵ و ۱۲ باشد. بیشترین مساحت مثلث چقدر و ضلع سوم آن چه اندازه است؟

همانند تصویر ۷، مقدار $b=12$ و $a=5$ را ثابت فرض می‌کنیم و مقدار c را تغییر می‌دهیم و در صورت وجود مثلث مقدار c و مساحت را در جدول نظام‌داری که براساس مقدار c مرتب شده است، قرار می‌دهیم.

c	۶	۷	۷/۱	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۶/۹	۱۷
مساحت	×	×	۴/۵۸	۱۴/۵۲	۲۰/۳۹	۲۴/۵۴	۲۷/۴	۲۹/۳	۳۰	۲۹/۲	۲۶/۳	۲۰/۶	۷/۰۸	×

با مشاهدهٔ عددهای جدول به این نتیجه می‌رسیم که مقدار c در بازهٔ (۷,۱۷) تغییر می‌کند و بیشترین مساحت به ازای $c=13$ به‌دست می‌آید که مثلث قائم‌الزاویه است.

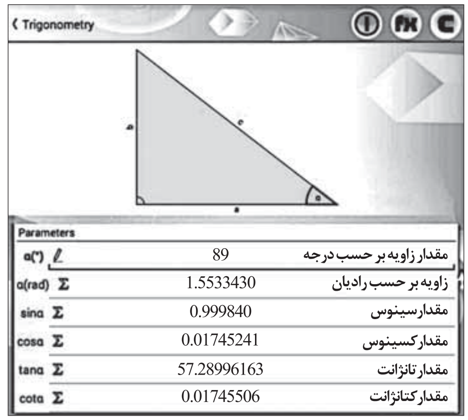


تصویر ۷

کارگاه مثلثات

آخرین گزینه در صفحهٔ اصلی (تصویر ۲) «Trigonometry» (مثلثات) است که با انتخاب آن تصویر ۸ ظاهر می‌شود که در آن شش پارامتر در مورد مثلث وجود دارد. در این حالت با دادن مقدار به هر پارامتر، سایر پارامترها محاسبه می‌شوند. به‌عبارت دیگر، این قسمت یک کارگاه فوق‌العاده برای مثلثات است. اکنون چند تمرین را با کمک آن انجام می‌دهیم.

تمرین ۱. آیا زاویه‌ای وجود دارد که تانژانت آن برابر ۱۰۰۰ است؟ $(\tan(\alpha)=1000 \Rightarrow \alpha=?)$ برای رسیدن به جواب کافی است که مقدار ردیف پنجم را ۱۰۰۰ قرار دهیم. در این صورت می‌بینیم که سایر پارامترها حساب شده‌اند و مقدار زاویه در حدود ۸۹/۹۴۲۷۰۴ درجه است.



تصویر ۸

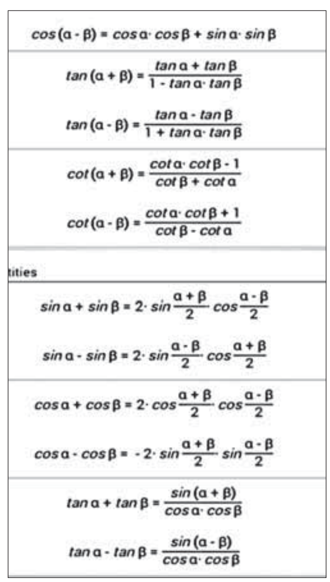
تمرین ۲. با محاسبه نشان دهید که با نزدیک شدن زاویه به ۹۰ درجه، مقدار تانژانت به بی‌نهایت نزدیک می‌شود.

θ	۸۹	۸۹/۹	۸۹/۹۹	۸۹/۹۹۹	۸۹/۹۹۹۹	۸۹/۹۹۹۹۹	۸۹/۹۹۹۹۹۹
tan(θ)	۵۷/۲۸	۵۷۲/۹۵	۵۷۲۹/۵۷	۵۷۲۹۵/۷	۵۷۲۹۵۷/۷	۵۷۲۹۵۷۷/۹	۵۷۲۹۵۷۷۹/۰۸

با مشاهدهٔ اعداد جدول نتیجه می‌گیریم که با نزدیک‌شدن زاویه به ۹۰ درجه، مقدار تانژانت به سرعت افزایش می‌یابد و به بی‌نهایت نزدیک می‌شود.

همهٔ فرمول‌های مثلثات

یکی از دردسرهای بیشتر دانش‌آموزان فراموشی رابطه‌ها و فرمول‌های مثلثات است. خوش‌بختانه در این قسمت همهٔ فرمول‌های مثلثات گردآوری شده‌اند و به آسانی قابل دسترسی هستند. این قسمت وقتی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند که شما مجبور باشید برای پیدا کردن یک فرمول به چند کتاب مراجعه کنید (تصویر ۹).



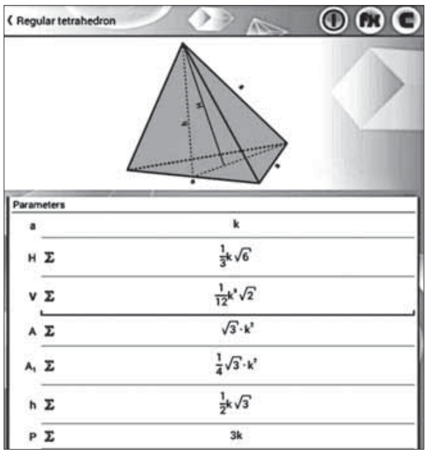
تصویر ۹

یار کمکی

در حل بعضی از مسئله‌ها، به‌ویژه مسئله‌های هندسهٔ فضایی، رسم شکل برای برخی دانش‌آموزان سخت است و همین باعث می‌شود که قید حل مسئله را بزنند. در چنین مواردی این نرم‌افزار به کمک دانش‌آموزان می‌آید تا با تجزیه و تحلیل بیشتر مسئله را بفهمند و حل کنند.

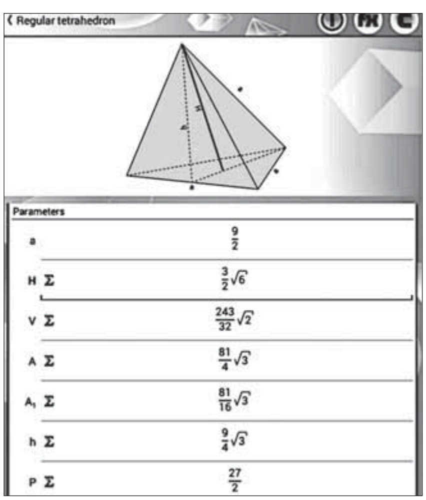
مسئله: یک چهار وجهی را که همهٔ وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع k هستند در نظر بگیرید. حجم آن را برحسب k به‌دست آورید. اگر k= ۴/۵ حجم چهار وجهی چقدر می‌شود؟ (هندسه سال دوم، شکل‌های فضایی، صفحهٔ ۱۳۵، شمارهٔ ۵).

با توجه به شکل‌ها حالت «Regular tetrahedron» را انتخاب می‌کنیم. برای محاسبهٔ حجم مقدار a را k قرار می‌دهیم تا نرم‌افزار همهٔ پارامترها را برحسب k حساب کند (تصویر ۱۰). اما این پایان کار نیست و ما می‌توانیم همهٔ پارامترها را روی شکل ببینیم تا روش حل مسئله را بیابیم.



تصویر ۱۰

اما اگر مقدار a را ۴/۵ قرار دهیم، نرم‌افزار جواب عددی همهٔ پارامترها را حساب می‌کند. در اینجا اگر روی هر پارامتر کلیک کنیم، شیء موردنظر روی شکل مشخص و راه‌حل معلوم می‌شود (تصویر ۱۱).



تصویر ۱۱

یکی دیگر از مزایای این نرم‌افزار آشنایی با اصطلاحات و اشیای ریاضی به زبان انگلیسی و سایر زبان‌های معروف از جمله آلمانی، فرانسوی و... است.

حمیدرضا امیری

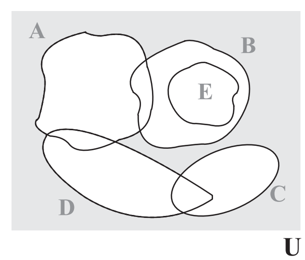
مجموعهٔ مرجع و متمم یک مجموعه

اشاره

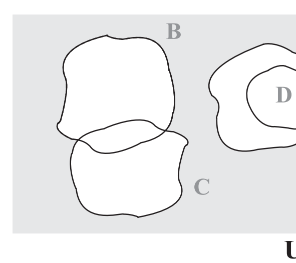
در کتاب ریاضی پایهٔ نهم با مفاهیمی چون مجموعه و زیرمجموعه آشنا می‌شوید و در کتاب ریاضی پایهٔ دهم و در ادامهٔ بحثِ مجموعه‌ها، مجموعهٔ مرجع، متمم یک مجموعه و مجموعه‌های متناهی و نامتناهی معرفی می‌شوند. برای درک بیشتر و عمیق‌تر این مفاهیم، مسائل و نکاتی را با هم بررسی می‌کنیم:

با توجه به معرفی و توضیحات کتاب درسی دربارهٔ مجموعهٔ مرجع و نمودارهای ون که در زیر رسم شده‌اند، مشخص کنید در کدام حالت مجموعهٔ U نمی‌تواند به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر گرفته شود؟

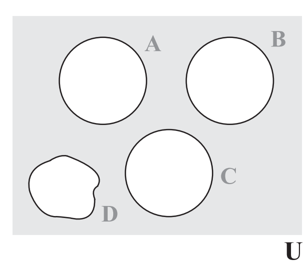
الف)



ب)



ج)



از آنجا که در نمودار (ب) بخشی از مجموعهٔ A در U قرار نگرفته است، و یا به عبارت دیگر، اعضایی در A وجود دارند که در U وجود ندارند، پس $A \not\subseteq U$. بنابراین U نمی‌تواند مجموعهٔ مرجع باشد. حال فرض کنیم:

$A=\{۱,۲\}$
$B=\{۲,۳,۴\}$
$C=\{۲,۳,۵,۷\}$
$D=\{۱,۲,۳,۵,۷,۴\}$
$E=\{۱۱,۱۲,۱۰\}$

در این صورت مجموعهٔ مرجع برای این پنج مجموعه، کدام مجموعه می‌تواند باشد؟

الف) $U_۱=\{۱,۲,۳,...,۱۲\}$
ب) $U_۲=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۱۰,۱۱,۱۲\}$
ج) $U_۳=\{۰,۱,۲,...,۱۲\}$
د) $U_۴=N$
هـ) $U_۵=\{۱,۲,۳,...,۱۳\}$
و) $U_۶=Z$

چون هر پنج مجموعهٔ داده شده، یعنی A ، B ، C ، D و E در همهٔ حالت‌ها زیرمجموعهٔ $U_۱$ و $U_۲$ و $U_۳$ و ... و $U_۶$ هستند، لذا در تمام حالت‌ها مجموعه‌های معرفی شده می‌توانند برای این پنج مجموعه به‌عنوان مجموعهٔ مرجع معرفی شوند.

ولی به‌نظر می‌رسد در حالت (ب)، یعنی: $U_۲=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۱۰,۱۱,۱۲\}$، با کمترین تعداد عضو نسبت به بقیهٔ حالت‌ها منظور ما برآورده می‌شود.

در واقع ما $U_۲$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع برای مجموعه‌های A، B، C، D و E در نظر می‌گیریم. پس می‌توان گفت: بین همهٔ مجموعه‌هایی که شامل مجموعه‌هایی چون $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n هستند، بهتر است مجموعه‌ای را به‌عنوانِ مجموعهٔ مرجع برای این $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n در نظر بگیریم که دارای حداقلِ عضو باشد.

متمم یک مجموعه

اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد و مجموعهٔ U به‌عنوان مجموعهٔ مرجع برای A تعریف شده باشد، متمم مجموعهٔ A یعنی A' مجموعه‌ای است که دو ویژگی دارد: اول اینکه: $A\cap A'=\varnothing$ و دوم اینکه: $A\cup A'=U$.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر متمم مجموعهٔ A را نسبت به مجموعهٔ مرجعِ معرفی شده به‌دست آورید:

الف) $\begin{cases} U = N \\ A = \{۲, ۴, ۶, ...\} \\ A' = ... \end{cases}$

ب) $\begin{cases} U = Z \\ A = W = \{۰,۱,۲,...\} \\ A' = ... \end{cases}$

ج) $\begin{cases} U = \{۱,۲,۳,...,۱۰\} \\ A = \{۲,۳,۷,۹\} \\ A' = ... \end{cases}$

د) $\begin{cases} U = [-۴,۲۰] \\ A = (-۲,۲۰) \\ A' = ... \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} U = R \\ A = (-۱۰,\sqrt{۵۰}] \\ A' = ... \end{cases}$

حل: می‌دانیم همواره: $A'=U-A$. یعنی برای به‌دست آوردن مجموعهٔ A' کافی است اعضای A را از U حذف کنیم. آنچه باقی می‌ماند همان A' است. بنابراین داریم:

الف) $A'=U-A=N-\{۲,۴,۶,...\} \Rightarrow A'=\{۱,۳,۵,...\}$

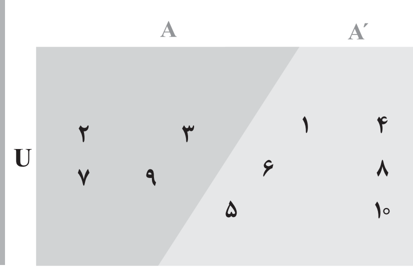
A مجموعهٔ اعداد طبیعی و زوج بوده و A' مجموعهٔ اعدادی طبیعیِ فرد به‌دست آمد؛ البته نسبت به مجموعهٔ مرجعِ $U=N$. اگر در همین قسمت الف مجموعهٔ U را به‌صورت $U=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ تعریف می‌کردیم، $A'=\{۰,۱,۳,۵,...\}$ به‌دست می‌آمد.

ب) $A'=U-A=Z-W \Rightarrow A'=\{...,-۳,-۲,-۱\}$

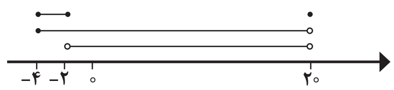
می‌توانیم A' را با استفاده از نمادهای ریاضی و به‌صورتِ $A'=\{-x|x\in N\}$ معرفی کنیم که همان قرینه‌های اعداد طبیعی هستند.

ج) $A'=U-A=\{۱,۲,...,۱۰\}-\{۲,۳,۷,۹\}$
$\Rightarrow A'=\{۱,۴,۵,۶,۸,۱۰\}$

در نمودار زیر مجموعه‌های U، A و A' را مشاهده می‌کنید.



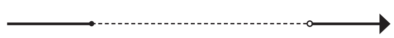
د) $A'=U-A=[-۴,۲۰]-(-۲,۲۰) \Rightarrow$
$A'=[-۴,-۲]\cup\{۲۰\}$



توجه دارید که برای محاسبهٔ A' باید تمام اعداد حقیقی از ۲- تا ۲۰ را از U برداریم که البته خود ۲- و ۲۰ برداشته نمی‌شوند.

هـ) $A' = U - A = R - (-۱۰,\sqrt{۵۰}]$
$\Rightarrow A' = (-\infty,۱۰] \cup (\sqrt{۵۰},+\infty)$

در شکل زیر و روی محور اعداد حقیقی، قسمت‌های نقطه‌چین همان مجموعهٔ A هستند که از R حذف شده‌اند.



چند نکتهٔ مهم: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه نسبت به مجموعهٔ مرجعِ U، یعنی: $A'=\{x\in U|x\notin A\}$ یا: $A'=U-A$ داریم:

الف) $U'=U-U \Rightarrow U'=\varnothing$

ب) $\varnothing'=U-\varnothing \Rightarrow \varnothing'=U$

ج) $(A')'=U-A' \Rightarrow (A')'=A$

مسئلهٔ مهم: با توجه به تعریف عمل تفاضل بین دو مجموعه و تعریف متمم ثابت کنید:
$(A-B)=(A\cap B')$
و سپس نشان دهید:
$(A-B)=(B'-A')$

حل:

$A-B=\{x\in U|x\in A,x\notin B\}$
$=\{x\in U|x\in A,x\in B'\}$

$\xlongequal{\text{تعریف اشتراک}} (A\cap B') \Rightarrow A-B=A\cap B'$ ❋

$A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A' \Rightarrow$
$(A-B)=(B'-A')$

در اثبات تساوی $A-B=B'-A'$، از خاصیت جابه‌جایی برای عمل اشتراک، یعنی: $A\cap B=B\cap A$ و از عکس رابطهٔ ❋ استفاده شد.

تمرین: با توجه به رابطهٔ ❋ طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را کامل کنید:
(مجموعهٔ مرجع را U در نظر بگیرید.)

الف) $A-A'=\cdots$
ب) $A-\varnothing=\cdots$
ج) $U-A'=\cdots$
د) $A-A=\cdots$
هـ) $A-U=\cdots$
و) $R-Q=\cdots$ (Q مجموعهٔ اعداد گویاست.)
ز) $W-W=\cdots$
ح) $R-\{۰\}=\cdots$

معادلهٔ $x^{۳}=[x]+۳$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف) ۱
ب) ۲
ج) ۳
د) صفر
هـ) بی‌شمار

مراد کریمی شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های
شهرستان شهرکرد

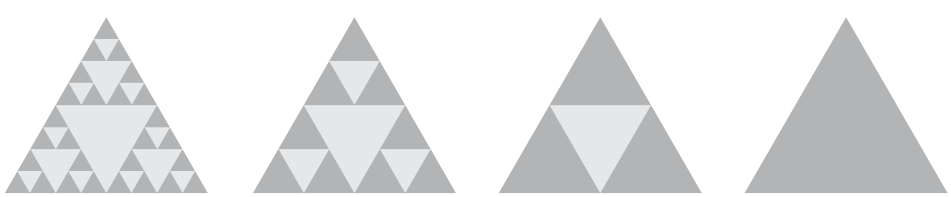
محاسبهٔ محیـط و مساحت مثلث سرپینسکی

اشاره

در فصل اول کتاب هندسهٔ ۲، دانش‌آموزان کلاس سوم ریاضی برای درک استدلال استقرایی (از جزء به کل رسیدن) با شکل‌هایی آشنا می‌شوند که به آن‌ها «خود ـ متشابه» می‌گویند؛ یعنی شکلی که یک قسمت آن با کل شکل متشابه باشد. نمونه‌ای از این‌گونه شکل‌ها مثلثی است به‌نام «مثلث سرپینسکی» که مراحل ساخت آن در کتاب درسی توضیح داده شده است. البته رسم شکل در مراحل بالاتر کمی خسته کننده، اما جالب است. دانش‌آموزان ویژگی‌های این شکل را تا چند مرحله (۴ یا ۵ مرحله) بیشتر دنبال نمی‌کنند، اما این شکل در مرحلهٔ n ام و بالاتر از آن ویژگی‌های زیباتری دارد. در این مقاله سعی می‌شود برخی از خواص این شکل در مراحل بالاتر و به‌خصوص مساحت و محیط آن بیان شود.

نحوهٔ ترسیم مثلث سرپینسکی

یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را در نظر می‌گیریم و وسط ضلع‌های آن را به هم وصل می‌کنیم. سپس سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه می‌داریم و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف می‌کنیم. این فرایند را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهیم.



مرحلهٔ صفر　　مرحلهٔ اول　　مرحلهٔ دوم　　مرحلهٔ سوم

چهار مرحلهٔ اول رسم مثلث سرپینسکی در بالا نشان داده شده است. مرحله‌های بعدی با تقسیم مثلث‌ها به مثلث‌های کوچک‌تر ادامه پیدا می‌کند. در اینجا برای درک بهتر به تفکیک مثلث‌های سفید (مثلث‌های باقی‌مانده) و مثلث‌های سیاه (مثلث‌های حذف شده) از نظر تعداد آن‌ها، طول ضلع هر یک، مساحت و محیط آن‌ها در هر مرحله می‌پردازیم.

الف) ویژگی‌های مثلث‌های سفید (مثلث‌های باقی‌مانده) در مثلث سرپینسکی:

در جدول ۱ تعداد، طول ضلع، محیط، مساحت و الگوی ساخت مثلث‌های باقی‌مانده را مشاهده می‌کنید.

■ جدول ۱

شمارهٔ مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سفید در هر مرحله (بدون احتساب مرحلهٔ قبلی)	$۱=۳^۰$	$۳=۳^۱$	$۹=۳^۲$	$۲۷=۳^۳$	...	۳^n
طول ضلع مثلث‌های سفید در هر مرحله (L_i)	$L_۰ = a = \frac{a}{۲^۰}$	$L_۱ = \frac{a}{۲} = \frac{a}{۲^۱}$	$L_۲ = \frac{a}{۴} = \frac{a}{۲^۲}$	$L_۳ = \frac{a}{۸} = \frac{a}{۲^۳}$	...	$L_n = \frac{a}{۲^n}$
محیط مثلث‌های سفید در هر مرحله (P_i) (بدون احتساب مرحلهٔ قبل)	$P_۰ = ۱(۳a)$	$P_۱ = ۳(۳\times\frac{a}{۲})$	$P_۲ = ۹(۳\times\frac{a}{۴})$	$P_۳ = ۲۷(۳\times\frac{a}{۸})$	...	$P_n = ۳^n(۳\times\frac{a}{۲^n})$
مساحت مثلث‌های سفید در هر مرحله (S_i) (بدون احتساب مرحلهٔ قبل)	$S_۰ = ۱\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\right]$	$S_۱ = ۳\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲})^۲\right]$	$S_۲ = ۹\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۴})^۲\right]$	$S_۳ = ۲۷\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۸})^۲\right]$	...	$S_n = ۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]$

توضیحات جدول

۱) در جدول ۱ حروف a، n، L_i، P_i و S_i به‌ترتیب بیانگر طول ضلع اولیه، شمارهٔ مرحله، و طول ضلع، محیط و مساحت مثلث در مرحلهٔ iام است.

۲) می‌دانیم مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

۳) می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a، اگر طول ضلع نصف شود، محیط $\frac{۱}{۲}$ و مساحت $\frac{۱}{۴}$ می‌شود.

۴) تعداد مثلث‌های سفید در مرحلهٔ iام = تعداد مثلث‌های سفید در مرحلهٔ قبلی (مرحلهٔ i−۱ام) ×۳

۵) طول ضلع مثلث‌های سفید در مرحلهٔ iام = طول ضلع مثلث‌های سفید در مرحلهٔ قبلی (مرحلهٔ i−۱ام) × $\frac{۱}{۲}$

۶) محیط هر مثلث سفید در مرحلهٔ iام = محیط مثلث سفید در مرحلهٔ قبلی (مرحلهٔ i−۱ام) × $\frac{۱}{۲}$

۷) مساحت هر مثلث سفید در مرحلهٔ iام = مساحت مثلث سفید در مرحلهٔ قبلی (مرحلهٔ i−۱ام) × $\frac{۱}{۴}$

۸) محیط همه مثلث‌های سفید در مرحلهٔ iام = تعداد مثلث‌های سفید در مرحلهٔ iام × محیط هر مثلث در مرحلهٔ iام

۹) مساحت همه مثلث‌های سفید در مرحلهٔ iام = تعداد مثلث‌های سفید در مرحلهٔ iام × مساحت هر مثلث در مرحلهٔ iام

ب) محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث‌های سفید وقتی تعداد آن‌ها زیاد و زیادتر می‌شود:

اگر فرمول‌های به‌دست آمده در مرحلهٔ nام جدول ۱ برای محیط و مساحت را به ساده‌ترین شکل ممکن درآوریم و حد آن‌ها را در بی‌نهایت (∞+) حساب کنیم، می‌توانیم محیط و مساحت مثلث سرپینسکی را وقتی تعداد آن‌ها خیلی زیاد می‌شود، محاسبه کنیم.

$$۱)\quad P_n = ۳^n(۳\times\frac{a}{۲^n}) = (\frac{۳}{۲})^n.(۳a) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۲})^n.(۳a) = (۳a).\lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۲})^n = +\infty$$

یعنی وقتی تعداد مثلث‌ها زیاد و زیادتر می‌شود، محیط آن‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$۲)\quad S_n = ۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right] = ۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{a^۲}{۲^{۲n}}\right] = ۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{a^۲}{۴^n}\right] = \frac{۳^n}{۴^n}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲) = (\frac{۳}{۴})^n(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۴})^n.(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲) = (\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲).\lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۴})^n = ۰$$

یعنی وقتی تعداد مثلث‌ها زیاد و زیادتر می‌شود، مساحت آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند.

ج) ویژگی‌های مثلث‌های سیاه (حذف شده) در مثلث سرپینسکی: در جدول ۲ تعداد، طول ضلع، محیط و مساحت و الگوی ساخت مثلث‌های سیاه (حذف شده) را مشاهده می‌کنید.

جدول ۲

شمارهٔ مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه در هر مرحله (بدون احتساب مرحلهٔ قبلی)	۰	$۱=۳^۰$	$۳=۳^۱$	$۹=۳^۲$	...	$۳^{n-۱}$
طول ضلع مثلث‌های سیاه در هر مرحله (L_i)	$L_۰=۰$	$L_۱=\frac{a}{۲}=\frac{a}{۲^۱}$	$L_۲=\frac{a}{۴}=\frac{a}{۲^۲}$	$L_۳=\frac{a}{۸}=\frac{a}{۲^۳}$	...	$L_n=\frac{a}{۲^n}$
محیط مثلث‌های سیاه در هر مرحله (P_i) (بدون احتساب مرحلهٔ قبل)	$P_۰=۰$	$P_۱=۱(۳\times\frac{a}{۲})$	$P_۲=۳(۳\times\frac{a}{۴})$	$P_۳=۹(۳\times\frac{a}{۸})$	...	$P_n=۳^{n-۱}(۳\times\frac{a}{۲^n})$
مساحت مثلث‌های سیاه در هر مرحله (S_i) (بدون احتساب مرحلهٔ قبل)	$S_۰=۰$	$S_۱=۱\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲})^۲\right]$	$S_۲=۳\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۴})^۲\right]$	$S_۳=۹\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۸})^۲\right]$	...	$S_n=۳^{n-۱}\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]$

د) روش محاسبهٔ تعداد مثلث‌های حذف شده (مثلث‌های سیاه): شیوهٔ محاسبه طول اضلاع، محیط و مساحت مثلث‌های سیاه دقیقاً همانند مثلث‌های سفید (توضیحات جدول ۱) است و فقط محاسبهٔ تعداد مثلث‌های سیاه در هر مرحله متفاوت از روش محاسبه تعداد مثلث سفید است که در زیر توضیح داده می‌شود:
تعداد مثلث‌های سیاه در مرحلهٔ صفر برابر صفر است و در مرحلهٔ nام برابر $۱+۳+۳^۲+۳^۳+...+۳^{n-۱}$ که یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ به‌شمار می‌رود و مجموع آن‌ها از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۱(۱-۳^n)}{۱-۳}=\frac{۳^n-۱}{۲}$$

هـ) محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث‌های سیاه وقتی تعداد آن‌ها زیاد و زیادتر می‌شود: اگر فرمول‌های به‌دست آمده برای محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث‌های سیاه در مرحلهٔ nام از جدول ۲ را به ساده‌ترین شکل بنویسیم و حد آن‌ها را در بی‌نهایت (∞+) محاسبه کنیم، محیط و مساحت مثلث‌های سیاه وقتی تعداد آن‌ها خیلی زیادتر می‌شود، به‌دست می‌آید:

$$۱)\quad P_n=۳^{n-۱}(۳\times\frac{a}{۲^n})=\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}(۳a)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}(۳a)$$

$$=(۳a)\,\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}=+\infty$$

$$۲)\quad S_n=۳^{n-۱}\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]=\frac{۳^{n-۱}}{۴^n}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n-۱}}{۴^n}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)=۰$$

یعنی وقتی تعداد مثلث‌های سیاه خیلی زیاد می‌شود، محیط آن‌ها به سمت (∞+) و مساحت آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند.

؟ پرسش‌های بیکارجو!

۳

a و b دو عدد دو رقمی متمایز هستند که رقم یکان آن‌ها برابر است. این دو عدد را بر ۹ تقسیم می‌کنیم. خارج‌قسمت a بر ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر ۹ و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ با خارج‌قسمت b بر ۹ برابر است. چند جفت (a,b) با این شرایط داریم؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ هـ) ۵

ایستگاه سوم

لطیفهٔ اول:

روزی یکی از دانشـجویان در کلاس درس ریاضی رو به اسـتاد کرد و خیلی جدی پرسید: استاد ببخشید، واقعاً ریاضیات در زندگی ما به چه دردی می‌خورد؟

استاد گفت: «این سؤال شـما مرا واقعاً مریض می‌کند! مثل این اسـت که شما یک نفر را برای نخسـتین‌بار به تماشای آبشار نیاگارا ببرید و او به شـما بگوید این آبشـار به چـه درد ما می‌خورد! در آن صورت شما چه می‌کنید؟ غیر از این است که او را از همان آبشار به پایین پرت می‌کنید؟

یک لطیفهٔ خوب ریاضی، برای پیشـبرد ریاضیات به مراتب از یک دوجین نوشته‌های معمولی ریاضی بهتر است.

جی. ای. لیتل وود*

لطیفهٔ دوم:

در جلسـهٔ آخر درس «بهینه‌سـازی» اسـتاد رو به دانشـجویان گفت: «یک توصیـهٔ آخـر برای شـما دارم: اصـلاً سـعی نکنیـد تکنیک‌هایـی را که در این درس آموخته‌اید، در زندگی شـخصی خودتان هم به‌کار ببرید!»

دانشـجویان با تعجب پرسـیدند: «چـرا اسـتاد؟ مگر ایـن روش‌ها به کاهش هزینه‌هـا و صرفه‌جویـی در منابـع و زمـان منجـر نمی‌شوند؟»

اسـتاد گفت: «بله همین‌طور اسـت، اما مثـلاً من خودم صبح‌ها می‌دیدم که همسـرم به دلیل رعایت نکردن بهینه‌سازی هنگام آماده کردن صبحانه، حدود نیم سـاعت زمان بـرای این‌کار می‌گذارد. برای آنکه به او یاد بدهم که چگونه در وقت صرفه‌جویی کند، یک روز به‌طور عملی این کار را خودم انجام دادم و در مدت یک ربع ساعت صبحانه را آماده کردم. نتیجه این شـد که از آن زمان تاکنون هر روز یک ربع ساعت وقت من صرف تهیهٔ صبحانه می‌شود!»

لطیفهٔ سوم:

یک دانشجوی ریاضی برای تأمین مخارج تحصیل خود در یک موزهٔ دیرین‌شناسـی اسـتخدام و به‌عنوان راهنمای بازدیدکنندگان به‌کار مشـغول شـد. مدتـی بعـد در یکـی از بازدیدهـا، یکی از بازدیدکنندگان از او پرسید: «ببخشید آقا، عمر این اسکلت دایناسور چند سال است؟»

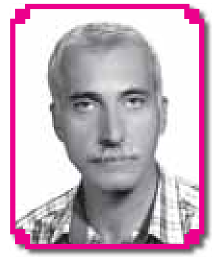
دانشجو پاسخ داد: «دو میلیون و یک سال و دو ماه و یازده روز!»

بازدیـد کننده با تعجـب گفت: «چقدر دقیـق! از کجا این‌قدر مطمئن هستید؟»

دانشـجو گفت: «وقتی من در اینجا اسـتخدام شـدم، در برگهٔ راهنمای موزه نوشـته شده بود که عمر این اسکلت دو میلیون سال است و حالا یک سال و دو ماه و یازده روز از استخدام من می‌گذرد!»

پی‌نوشت

* J. E. Little Wood (۱۹۷۷ـ۱۸۸۵) ریاضی‌دان انگلیسی و استاد دانشگاه کمبریج که کارهایش در زمینهٔ آنالیز، تئوری اعداد و معادلات دیفرانسیل شهرت دارد.



استدلال در هندسه

حسین کریمی

اشاره

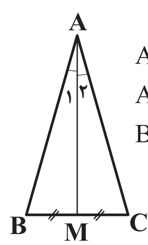
اخیـراً مطلبـی از یکی از اعضای هیئت تحریریه را مطالعه می‌کردم که با نثر بسـیار روان و زیبایش مرا به بایگانی خاطراتم برد و به‌یاد تلاش و مشـارکت دانش‌آموزان در سـال‌های پیش افتادم که صدافسـوس در این روزها کمتر و کمتر دیده می‌شود.

در سـال‌های آغازین تدریس در یکی از مدرسه‌هایِ شبانهٔ تهران مشغول تدریس هندسه بودم. دوران پرخاطره‌ای بـود. دانش‌آموزانـم مجموعه‌ای از دانش‌آموزان کاملاً ناهمگن بودند. بعضی از نظر سـنی بـزرگ و دارای فرزند بودند. بعضی‌ها پس از چند سـال دوری از مدرسـه، رو به تحصیل آورده بودند و تعدادی نیز مردودی‌های دورهٔ روزانه بودند که بـه دلیـل نگرفتن نمرهٔ قبولـی در یک یا چند درس، مجبور شـده بودند که برای گذراندن یک پایه، برای چندمین سـال متوالی سـر کلاس حاضر شـوند. بعضی از آن‌ها احاطهٔ خوبی روی مطالب هندسه داشتند و باعث ایجاد بحث‌های جالب و آموزنده‌ای در کلاس می‌شدند که بیان یکی از آن خاطرات، خالی از لطف نیست.

در شـروع یکی از جلسـات درس، دانش‌آموزی خواست که آخرین قضیهٔ جلسهٔ قبل را مجدداً اثبات کنم. ابتدا صورت قضیه و برهان آن را نوشتم:

قضیه: در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر قاعده و نیم‌ساز زاویهٔ بین دو ساق برهم منطبق‌اند.

برهـان: در مثلث متساوی‌السـاقین ABC، میانهٔ وارد بر قاعدهٔ BC را AM می‌نامیم.



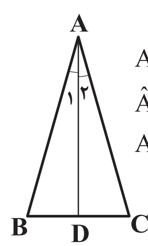
$$\left.\begin{array}{l}AB=AC\\AM=AM\\BM=MC\end{array}\right\}\overset{\text{ض‌ض‌ض}}{\Rightarrow}\ \overset{\Delta}{ABM}\cong\overset{\Delta}{AMC}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{A}_2$$

AM نیم‌ساز $\hat{A}$ هم هست: $\Rightarrow$

همان دانش‌آموز پرسـید که در سـال قبل، معلم ما به‌جای رسم میانهٔ AM، نیم‌ساز AD را رسم کرده بود. تکلیف ما چیست؟

از او خواستم که راه‌حل ارائه شده در پارسال را روی تخته بنویسد که به‌صورت زیر نوشت:

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیم‌ساز زاویهٔ روبه‌رو به قاعده را AD می‌نامیم.



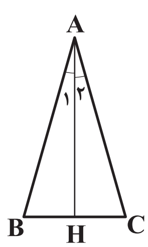
$$\left.\begin{array}{l}AB=AC\\\hat{A}_1=\hat{A}_2\\AD=AD\end{array}\right\}\overset{\text{ض‌ز‌ض}}{\Rightarrow}\ \overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ADC}\Rightarrow BD=DC$$

AD، میانهٔ وارد بر قاعدهٔ BC هم هست: $\Rightarrow$

یکی از دانش‌آموزان گفـت: فرقی نمی‌کند. در روش اول میانه را رسم کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که نیم‌ساز هست و در روش دوم، نیم‌ساز را رسم کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که نقش میانه را نیز دارد.

با تأیید گفته‌های او از بچه‌ها خواسـتم که برای اثبات قضیهٔ فوق روش دیگری به‌جز رسـم میانه و نیم‌سـاز ارائه دهند. فکر نمی‌کردم بچه‌ها پاسخ‌گو باشند، اما چند دقیقه بعد یکی از دانش‌آموزان ادعا کرد روش سوم را پیدا کرده است. از او خواستم که پای تخته بیاید.

روش سوم



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعـده را AH می‌نامیم. دو مثلـث قائم‌الزاویه ABH و ACH به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه (AB=AC و AH مشـترک) هم‌نهشـت هستند. بنابراین: BH=HC، یعنی AH میانه نیز هسـت و $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ یعنی AH نیم‌ساز زاویهٔ $\hat{A}$ هم هست.

در نتیجه میانه و نیم‌ساز در مثلث متساوی‌الساقین برهم منطبق‌اند.

فضای کلاس شـور و هیجان خاصی به خود گرفته بود و من هم احساس خوبی داشتم که سبب شد سؤال جدیدی مطرح کنم:

آیـا خاصیت فـوق (انطباق میانـه و نیم‌سـاز) در دیگر مثلث‌ها (غیرمتساوی‌الساقین) نیز دیده می‌شود؟

دانش‌آمـوزی (از بـزرگان کلاس) بلافاصلـه پاسـخ داد که: بله، در مثلـث متسـاوی‌الاضلاع هم صادق اسـت، که پاسـخ او با خندهٔ

بعضی از بچه‌ها مواجه شـــد. هم‌کلاســـی‌هایش به او گفتند که مثلث متســـاوی‌الاضلاع حالتی خاص از مثلث متساوی‌الســـاقین است و آن مثلث، غیرمتساوی‌الساقین محسوب نمی‌شود.

سکوت در کلاس حاکم شد. معلوم بود که هر یک به دنبال جواب هســـتند. از ردیف دوم کلاس یکی از بچه‌ها پرسید: می‌توانیم از مثال نقض اســـتفاده کنیم؟ همان موقع که می‌گفتم بله می‌توان اســـتفاده کرد، صدای ضعیفی شـــنیدم که یکی از بغل‌دستی‌هایش می‌پرسید: مثال نقض چیه؟

فرصت را مغتنم شمردم و مثال نقض را برای بچه‌ها یادآوری کردم و گفتم: به مثالی که نشـــان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی، نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً فرض کنید یکی از شما به تجربه دیده که بیشـــتر عددهای اولی که با آن‌ها روبه‌رو شده است، عددهای فردی بوده‌اند، مثل ۳، ۵، ۷، ۱۱ و... پس حدس زده است که همهٔ عددهای اول فرد هستند. آیا این حدس درست است؟

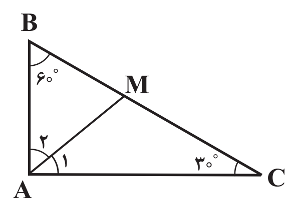
یکی از بچه‌ها گفت: نه آقا، مگر عدد ۲ اول نیست؟!

و من گفتم: احسنت! به این می‌گویند مثال نقض خوب! پس این حکم کلی درســـت نیست و نمی‌توان گفت که همهٔ عددهای اول فرد هستند.

بعد یکی دیگر از بچه‌ها دســـت بلند کرد و گفت: آقا من برای آن مسئلهٔ هندسه، مثال نقض پیدا کردم.

مثلـــث قائم‌الزاویـــهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{C}=۳۰^\circ$) را در نظـــر می‌گیریم و میانهٔ وارد بر وتر را AM می‌نامیم. می‌دانیم که میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} AM=\frac{BC}{۲}=MC\Rightarrow \hat{A}_۱=۳۰^\circ \\ AM=\frac{BC}{۲}=BM\Rightarrow \hat{A}_۲=۶۰^\circ \end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱\neq\hat{A}_۲$$

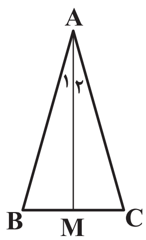


یعنی AM نیم‌ســـاز زاویهٔ A نیســـت. در نتیجه در مثال فوق که مثلث ABC غیرمتساوی‌الساقین است، میانه و نیم‌ساز برهم منطبق نیستند. پس نمی‌توان گفت در هر مثلث این خاصیت برقرار است.

از طرفی با دیدن مشـــارکت خوب بچه‌ها ذوق زده شده بودم و از طرف دیگر نگران ســـپری شدن زمان محدود جلسهٔ آموزشی بودم که یکی از بچه‌ها سؤالی را مطرح کرد که مربوط به درس همان روز بود: آقا، عکس قضیه هم برقرار است؟ از او خواستم عکس قضیه را مطرح کنـــد. یعنی جای فرض و حکم را در قضیهٔ اول عوض کند و او چنین پاسخ داد:

عکس قضیه: اگر در مثلثی میانهٔ وارد بر یک ضلع، منطبق بر نیم‌ســـاز زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

سؤال اخیر نگرانی‌ام را رفع کرد و نفس راحتی کشیدیم. فکر کردم که بهترین شرایط در کلاس فراهم شده است و می‌توانم با ادامهٔ روش قبلی، درس را هم به پیش ببرم. عکس قضیه را روی تخته نوشتم. بار دیگر سکوت در کلاس برقرار شد. بعضی‌ها منتظر بودند که من جواب بدهم و بعضی‌ها خودشان به دنبال جواب بودند که یکی از ردیف جلو دســـت بلند کرد و گفت که اثبات کرده است. از او خواستم اثباتش را بنویسد.



اثبات: مثلث ABC را که در آن AM میانه و نیم‌ساز است، در نظر می‌گیریم. به دلیل اینکه: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$، AM=AM و BM=MC، نتیجـــه می‌گیریم که دو مثلث ABM و ACM هم‌نهشت هستند. پس: AB=AC.

بلافاصله رو به بچه‌ها گفتم: بچه‌ها، در اثبات دوســـتتان، اشکالی می‌بینید یا نه؟

دانش‌آموز ردیف چهارم گفت: به چه حالتی دو مثلث هم‌نهشـــت هستند؟

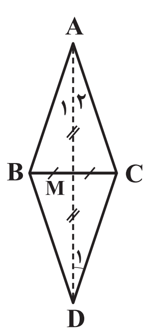
دانش‌آموز پای تخته پاسخ داد: به حالت دو ضلع و زاویهٔ ...

دانش‌آموز ردیف چهارم گفت: زاویه‌ای که بین آن دو ضلع نیست!

دانش‌آموز پای تخته گفت: حق با شماست، من اشتباه کردم. باید زاویه، بین آن دو ضلع باشد تا دو مثلث هم‌نهشت شوند.

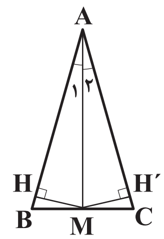
پس از نشســـتن آن دانش‌آموز، بقیه شـــروع به تلاش برای یافتن راه‌حل کردند. بعضی‌ها انفرادی و بعضی‌ها با بغل‌دستی‌شـــان مشغول بحث بودند.

گفتم: یک راهنمایـــی می‌کنم. میانه را به انـــدازهٔ خودش امتداد دهید. لحظاتی بعد دستی بالا رفت که من اثبات کردم و اثبات خود را به‌صورت زیر ارائه داد:



اثبات: در مثلث ABC، AM را که نیم‌ساز و میانه است، به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. چهارضلعـــی ABDC متوازی‌الاضلاع اســـت (زیرا قطرهـــا منصف یکدیگرند)، پـــس: AB=CD (۱). چون AB و CD موازی و AD مورب اســـت، پس: $\hat{A}_۱=\hat{D}_۱$. از طـــرف دیگـــر داریـــم: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$، بنابراین: $\hat{A}_۲=\hat{D}_۱$. یعنی در مثلث ACD داریم: AC=CD (۲).

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: AB=AC که نشان می‌دهد مثلث ABC متساوی‌الساقین است. پس از تأیید صحت درستی روش اثبات او، بچه‌ها مشغول رونویسی از روی تخته شدند. دقایقی بعد که مشغول پاک‌کردن تخته بودم تا درس را ادامه دهم، یکی از بچه‌ها گفت راه‌حل دیگری دارم که از او هم دعوت کردم، اثباتش را روی تخته بنویسد.



راه‌حل دوم: در مثلث ABC، AM را کــه نیم‌ســاز و میانــه اســت در نظر می‌گیریم و از M عمودهای MH و MH′ را به‌ترتیب بر AB و AC رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}=\hat{H}'=90^\circ\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AM=AM\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}}\overset{\Delta}{AMH}\cong\overset{\Delta}{AMH'}\Rightarrow MH=MH'$$

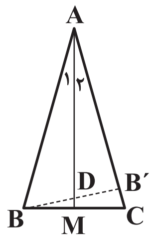
$$MH=MH',\ MB=MC,\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ$$
$$\Rightarrow \Delta MBH\cong\Delta MCH\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\Rightarrow AB=AC$$

همین که درستی اثبات را تأیید کردم و بچه‌ها مشغول نوشتن راه‌حل دوم بودند، یکی از هم‌کلاسی‌هایشــان پرسید: آیا می‌توانیم از برهان خلف نیز اســتفاده کنیم؟ زمزمهٔ دیگری شنیده شد که باز هم از بغل‌دستی می‌پرسید: برهان خلف چیه؟ پاسخ دادم: بله، ولی اجــازه بدین قبل از اثبات بــه روش برهان خلف، به منظور یادآوری برای آن‌هایی که فراموش کرده‌اند، یک‌بار دیگر برهان خلف را شرح دهم:

برهان خلف: برای اثبات یک قضیه می‌توانیم از اثبات غیرمستقیم که آن را برهان خلف می‌نامند، اســتفاده کنیــم. در واقع فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یا به‌عبارت دیگر نقیض حکم درست باشد. نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تضاد است و از آنجا نتیجه می‌گیریم فرض درست بودن نقیض حکم مردود است.

ادامــه دادم: این قضیه را با برهان خلف هم می‌توانید اثبات کنید، به این صورت:

AM را کــه میانــه و نیم‌ســاز مثلــث ABC اســت، در نظــر می‌گیریــم و فــرض می‌کنیــم: AB≠AC (فــرض خلــف). روی ضلــع بــزرگ (مثــلاً AC) نقطهٔ B′ را چنــان اختیــار می‌کنیم کــه: AB=AB′. حــال در مثلــث متساوی‌الســاقین ABB′، AD که نیم‌ساز اســت، میانه هم هست. پس: BD=B′D. چون در مثلث BB′C، D وسط BB′ و M وسط BC است، بنابراین با توجه بــه عکس قضیهٔ تالس[1] داریــم: DM||B′C یا به عبارت دیگر، AM (میانــه) به موازات AC (یــک ضلع از مثلث) رســم شــده که غیرممکن اســت. لذا فرض AB≠AC مردود است و داریم: AB=AC.



بعد از آن بچه‌ها به ساعت‌هایشــان نــگاه کردند و گفتند: خب آقا، خسته نباشید!

من گفتم: ممنون، اما هنوز به یک سؤال من جواب نداده‌اید؟

بچه‌ها با تعجب گفتند: کدام ســؤال؟! و مــن گفتم: آیا ویژگی منطبق بودن نیم‌ساز و میانه در مثلث‌های غیرمتساوی‌الساقین هم برقرار می‌شود؟

یکــی از بچه‌هــا تقریباً فریاد زد: آقا آن را کــه با مثال نقض رد کردیم! (و مثال نقض را با لحن خاصی ادا کرد.)

گفتــم: نــه بچه‌ها! مثال نقض نشــان داد که ایــن خاصیت در هــر مثلثی برقرار نیســت، اما از کجا می‌دانیــد که حتی یک مثلث غیرمتساوی‌الساقین نداریم که این خاصیت در آن برقرار باشد؟!

سکوت سنگینی کلاس را فراگرفت و من برای آنکه به اصطلاح جو را بشکنم گفتم:

چرا وحشت کردید! در واقع باید این حکم را بررسی کنید: «اگر مثلثی متساوی‌الســاقین نباشد، آن‌گاه نیم‌ساز و میانهٔ هیچ رأس آن برهم منطبق نمی‌شوند.»

و آن وقت یکی از بچه‌ها گفت: آقا معلوم است دیگر! اگر نیم‌ساز و میانه برهم منطبق شوند که مثلث متساوی‌الساقین می‌شود!

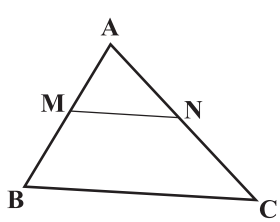
و من گفتم: آفرین! در واقع از برهان خلف استفاده کردید و... و هنوز حرفم تمام نشده بود که زنگ کلاس به صدا درآمد!

بــرای اولین‌بــار در آن کلاس بود که از به صــدا درآمدن زنگ خاتمهٔ کلاس، نه من بلکه خیلی از دانش‌آموزان نیز ناراحت شدند.

از تک‌تــک دانش‌آمــوزان آن کلاس ممنونم و شــرمندهٔ آن‌ها هســتم که متأســفانه نامشــان در خاطرم نمانده بود که از آن‌ها با نام یاد کنم.

پی‌نوشت

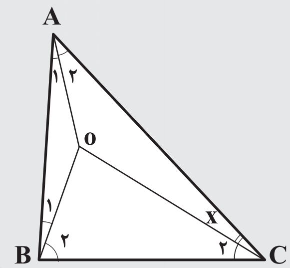
۱. عکس قضیهٔ تالس: هرگاه در مثلث ABC، M و N روی AB و AC چنان قرار داشته باشند که $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$، آن‌گاه: MN||BC.



؟ پاسخ پرسش‌های پیکارجو ؟

۱. گزینهٔ هـ. با توجه به فرض داریم:

$$\hat{A}_۱=\hat{B}_۱=۱۵^\circ \Rightarrow OA=OB=l,\ \hat{A}_۲=۳۰^\circ,\ \hat{B}_۲=۷۵^\circ$$



حال بـا توجه به قضیهٔ سـینوس‌ها در دو مثلث OAC و OBC می‌نویسیم:

$$\Delta OAC: \frac{OA}{\sin x}=\frac{OC}{\sin A_۲} \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{\sin x}{\sin ۳۰}=۲\sin x$$

$$\Delta OBC: \frac{OC}{\sin B_۲}=\frac{OB}{\sin(۴۵-x)} \Rightarrow \frac{OB}{OC}=\frac{\sin(۴۵-x)}{\sin ۷۵}$$

$$\Rightarrow ۲\sin x=\frac{\sin(۴۵-x)}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}\sin x=\sin(۴۵-x)$$

$$\Rightarrow \sin ۴۵\cos x-\cos ۴۵\sin x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}\cos x=(\sqrt{۶}+۲\sqrt{۲})\sin x$$

$$\Rightarrow \tan x=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}+۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}(۲+\sqrt{۳})}$$

$$\Rightarrow \tan x=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳} \Rightarrow x=۱۵^\circ$$

۲. گزینـهٔ الـف. می‌دانیم بـرای هـر x، $x-۱<[x]\le x$. پس داریم: $x-۱<x^۳-۳\le x$ و در نتیجـه: $۲<x^۳-x\le ۳$. با رسـم نمودار تابع $f(x)=x^۳-x$ متوجه می‌شویم که این تابع به ازای $x=۱$، مساوی صفر شـده و به ازای $x>۱$ یک تابع همواره صعودی اسـت. در نتیجـه با توجه به اینکه: $f(۲)=۶$، پس اگر: $۲<f(x)\le ۳$، آن‌گاه: $۱<x<۲$ و $[x]=۱$ و از آنجا: $x^۳=۴$ و $x=\sqrt[۳]{۴}$ تنها ریشـهٔ این معادله است.

۳. گزینهٔ ج. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a=\overline{mn}=۹q+r, ۰\le r<۹ \\ b=\overline{pn}=۹r+q, ۰\le q<۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰m+n=۹q+r \\ ۱۰p+n=۹r+q \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۰(p-m)=۸(r-q) \Rightarrow ۵(p-m)=۴(r-q)$$

و چـون: $۰<p-m<۸$ و $۰<r-q<۸$، پـس: $p-m=۴$ و $r-q=۵$ و از آنجـا بـرای r و q (با فرض $r>q$) سـه جفت جـواب قابل قبول (۶,۱)، (۷,۲) و (۸,۳) به‌دسـت می‌آید که به یافتن سه جفت جواب (۱۵,۵۵)، (۲۵,۶۵) و (۳۵,۷۵) برای (a,b) منجر می‌شود.

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ...

اشاره

دوستان سلام! باز هم «مدتی این مثنوی تأخیر شد»!
سال گذشته با تبدیل فصل‌نامهٔ برهان به ماهنامه، چنان سرگرم تهیهٔ مطالب بودیم و سرعت کار خود را افزایش دادیم که نتوانستیم پاسخ به نامه‌ها و ایمیل‌های پرمهر شما را در دستور کار خود قرار دهیم. از این شماره و از ابتدای سال تحصیلی ۹۶-۱۳۹۵ به امید خدا به‌طور مرتب پاسخ‌گوی شما در این بخش هستیم.
اما پیش از شروع پاسخ به نامه‌ها، از خوانندگان مجله که زحمت می‌کشند و برای مجلهٔ خودشان مقاله می‌فرستند، درخواست می‌کنیم به موارد زیر توجه خاص داشته باشند:

۱. مقاله‌هایتان را می‌توانید از طریق ارسال پستی به آدرس مجله و یا ارسال ایمیل به آدرس پیام‌نگار ما (Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir) و یا ارسال ایمیل به آدرس پیام‌نگار شخصی مدیرداخلی مجله (hooshang_sharghi_45@yahoo.com) به ما برسانید که ارسال از طریق پست‌های الکترونیکی به یقین آسان‌تر و سریع‌تر است و هنگام ارسال لزومی ندارد که مقاله‌تان را حتماً تایپ کنید.

۲. در انتهای مقاله حتماً (تأکید می‌کنیم) مشخصات و آدرس ایمیل و شمارهٔ تلفن تماس خود را ذکر کنید.

۳. سعی کنید حجم مقالات و مطالب ارسالی‌تان به‌صورت غیرمتعارف زیاد نباشد. مقاله با جزوهٔ کمک‌آموزشی تفاوت دارد!

۴. زبان مقاله باید ساده، گویا و متناسب با فهم متوسط دانش‌آموزان باشد. فراموش نکنید که مخاطب اصلی مجلهٔ ما «دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه» هستند.

۵. از پذیرش هرگونه مقاله که ارائه‌کنندهٔ مباحث دانشگاهی، مباحث آموزش ریاضی و یا نقد کتاب‌های درسی و ارائهٔ راهکارهایی برای دبیران ریاضی است، اکیداً معذوریم. این‌گونه مقالات را برای همکاران ما در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی ارسال فرمایید.

۶. سعی کنید با ایجاد نوآوری در بیان و سبک، مطالب خود را برای دانش‌آموزان جذاب‌تر کنید. ارائهٔ مطالب در قالب‌های خشک و تکراری، همانند جزوات کمک‌درسی، نمی‌تواند برای دانش‌آموزان جاذبه‌ای داشته باشد. باز هم تأکید می‌کنیم که: «مقاله با کتاب و جزوهٔ کمک‌درسی کاملاً متفاوت است.»

۷. به مطالب جنبی درس ریاضی، مانند معما، لطیفه، داستان، بازی و سرگرمی ریاضی به‌طور ویژه توجه کنید. این بحث‌ها به‌طور مؤثری در ترویج ریاضیات نقش‌آفرین هستند. در این مورد می‌توانید از متن‌های زبان اصلی استفاده کنید و آن‌ها را ترجمه کنید. ما از ترجمه‌های خوب و روان استقبال می‌کنیم.

۸. در نگارش مقالات خود به تغییرات محتوای کتاب‌های درسی به جدّ توجه داشته باشید. بخش‌هایی از مطالب کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ چهار ساله (به‌خصوص سال اول دبیرستان) به کتاب سال نهم در دورهٔ متوسطهٔ اول منتقل شده است. علاوه بر آن امسال تنها پایه‌های سوم و چهارم دبیرستان را داریم و پایهٔ جدید دهم وارد می‌شود. همچنین اگر اکنون قصد نوشتن مطلب دارید، توجه داشته باشید که در سال تحصیلی آینده (سال ۹۷-۱۳۹۶) فقط پایهٔ چهارم دبیرستان و پایه‌های جدید دهم و یازدهم را داریم و به سرفصل‌های درسی آن‌ها دقیقاً توجه کنید.

حال پس از این مقدمهٔ نسبتاً طولانی اکنون به پاسخ نامه‌ها و ایمیل‌های شما دوستان می‌پردازیم:

- دوست و همکار گرامی، آقای **علی‌رضا صداقت‌دوست**، دبیر ریاضی و دانشجوی دکترای هندسه از شهرستان اردبیل
مقاله‌تان با عنوان «تعداد یال‌های استوانه، صفر، بی‌نهایت یا ۳» به‌دست ما رسید. با سپاس از شما بزرگوار، باید بگوییم که با کلیت آن موافقیم، اما به تجدیدنظر و تغییرات اساسی نیاز دارد. اولاً لازم است با زبانی ساده‌تر نوشته شود که برای عموم دانش‌آموزان قابل درک باشد. اصطلاحات به‌کار رفته در آن در بعضی جاها شکل یک مقالهٔ دانشگاهی را به خود گرفته است. بهتر است در مورد مقدمات بحث، بیشتر توضیح داده شود و مثلاً «دستور اویلر» با مثال‌هایی بیان شود. در صورت انجام این تغییرات امکان چاپ مقاله‌تان در مجله فراهم می‌شود. با توجه به تجربهٔ تحصیلی‌تان می‌توانید مطالب بسیار مفیدی را برای مجله‌تان تدارک ببینید. منتظر دیگر کارهایتان می‌مانیم.

- همکار گرامی، سرکار خانم **نسرین نیکدل** و همکاران، از شهرستان رشت
دو مقالهٔ مشترکتان با عنوان‌های «تحلیل محتوای کتاب ریاضی اول دبیرستان» و «بررسی کتاب‌های جدیدالتألیف ریاضی ششم و هفتم و مقایسه با ریاضی اول راهنمایی» به دستمان رسید. با سپاس از لطفتان باید بگوییم که تحلیل و نقد کتاب‌های درسی جزو مأموریت‌های مجلهٔ ما نیست و مقاله‌تان مناسب چاپ در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» است.

- همکار گرامی، جناب آقای **علی حمیدی**، از سردرود استان همدان
مقاله‌تان با عنوان «یافتن مختصات قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط راست» به‌دست ما رسید. با تشکر از شما توصیه می‌کنیم به مطالب تازه‌تر بپردازید و از ارائهٔ مجدد مطالب و دستوراتی که در کتاب‌های کمک‌درسی و کمک‌آموزشی دیده می‌شوند و چندان هم به‌کار دانش‌آموزان نمی‌آیند، بپرهیزید. منتظر کارهای دیگرتان هستیم

- دوست و همکار محترم، آقا یا خانم **یادگارزاده**، دبیر ریاضی از شهر همدان
مطلبتان با عنوان «حل مسئله» به دستمان رسید. شکل و محتوای آن بیشتر به صفحاتی از یک کتاب درسی شباهت دارد! در حالی‌که مقالهٔ ریاضی

سبک و سیاق خود را دارد. با نگاهی به نمونهٔ مقالات چاپ شده در مجله می‌توانید با آنچه هدف ماست، بیشتر آشنا شوید. با سپاس از لطفتان منتظر کارهای قوی‌تری از شما هستیم.

● دوست عزیز، آقای **عطامحمد شهرکی**

مقالهٔ خوب و منسجم شما با عنوان «کارکردهای مفید و سازندهٔ فلسفه و منطق در حوزه‌های مختلف زندگی» به دستمان رسید. اما دوست عزیز مجلهٔ ما یک مجلهٔ ریاضی است! و چنین بحث‌هایی به مجلهٔ ما و مأموریت‌های آن ارتباطی ندارد. احتمالاً مطلبتان به حوزه‌های تخصصی دیگری از مجلات رشد مربوط می‌شود.

● همکار گرامی، سرکار خانم **سکینه علی‌محمدی**، دبیر ریاضی از شهرستان نکا، استان مازندران

مقاله‌تان با عنوان «معادلات و نامعادلات قدرمطلقی» به‌دست ما رسید. جدا از آنکه ما در برنامه‌ریزی خود در نظر داریم که به‌تدریج از مقالات شبیه مطالب کتاب‌های کمک‌درسی کمتر استفاده کنیم، باید بگوییم که مبحث «قدرمطلق» از مباحث درسی متوسطهٔ دوم به متوسطهٔ اول انتقال یافته است. لذا برای طرح چنین مطالبی باید به سراغ همکاران ما در مجله ریاضی برهان متوسطهٔ ۱ بروید. با سپاس از لطفتان منتظر مطالب دیگر شما هستیم.

● همکار محترم، جناب آقای **اسفند ملیح ملکی**، از شهرستان ملکان، استان آذربایجان‌شرقی

دو مقاله‌تان با عنوان‌های «ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری» و «تعریف قدرمطلق» به‌دست ما رسید. با سپاس از زحماتتان باید صادقانه بگوییم که تکرار مطالب کتاب‌های درسی، به سبک کتاب‌های کمک‌درسی و کتاب‌های کنکوری که در بازار کتاب فراوان‌اند، چیزی نیست که درخور مجلهٔ ریاضی برهان باشد. تلاش کنید که گره‌های دانش‌آموزان در فهم صحیح مباحث ریاضی را هدف بگیرید و برای رفع آن‌ها مقالات آموزنده‌ای بنویسید. مطالعهٔ بیشتر و تمرکز روی مقالات پیشین ما می‌تواند مفید باشد. منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

● همکار محترم و دوست عزیز، آقای **علیرضا پوئید**، از شیراز

مطالب خوبتان در قالب جدول، معما و نیز مقاله به‌دست ما می‌رسد که از بعضی از آن‌ها قبلاً در مجله استفاده کرده‌ایم. با سپاس از لطفتان انتظار کارهای بیشتر و بهتری را از شما داریم. باز هم با ما در ارتباط باشید.

● همکار عزیز، آقای **اسماعیل ادبی فیروز جایی**، دبیر ریاضی از بابل

دوست عزیز مقاله‌تان را با عنوان «تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ متناهی» دریافت کردیم. به‌نظر می‌رسد که حاوی تکراری از مطالب کتاب درسی همراه با تعدادی فرمول جانبی است که در اغلب کتاب‌های کمک‌درسی یافت می‌شوند. هدف‌های مجلهٔ ما والاتر از این‌هاست. لذا توصیه می‌شود که به چالش‌های دانش‌آموزان بیشتر توجه کنید و مطالب تازه‌تری برای ما بفرستید. برای شما و همکارانتان آرزوی توفیق می‌کنیم.

● همکار گرامی، سرکار خانم **مریم شاه‌محمدی**، از تهران

مقاله‌تان با عنوان «هندسهٔ تربیع و ارتباط آن با علوم دیگر» به دستمان رسید. قبلاً هم لطفتان شامل حال ما شده و مطالبتان در مجله به چاپ رسیده بود. این مقاله هم در یکی از شماره‌های آتی به چاپ می‌رسد. اما توصیه می‌شود که زبان مقاله‌هایتان را کمی ساده‌تر کنید و به مشکلات رایج دانش‌آموزان بیشتر بپردازید. با توانمندی‌هایی که در شما سراغ داریم، حتماً می‌توانید کارهای بسیار مفیدتری را به مجله خودتان عرضه کنید. پیروز و موفق باشید.

● دوست عزیز، آقای **علیرضا جمالی**، دانش‌آموز چهارم دبیرستان نمونهٔ آزادگان، شهرستان گلپایگان، استان اصفهان

اثباتی که برای نامساوی برنولی $(n\in N\ ,\ x\geq -1 \Rightarrow (x+1)^n\geq 1+nx)$ ارائه داده‌اید، کاملاً نادرست است! استدلالتان برای آنکه ثابت کنید: $(x+1)^n\geq 0$. البته درست است، ولی برای آنکه ثابت کنید: $(x+1)^n\geq 1+nx$، خواسته‌اید ثابت کنید: $1+nx\leq 0$ که به وضوح نادرست است. زیرا داریم: $n\in N$ و x هم می‌تواند مثبت باشد. اشتباه محرز شما آنجاست که برای نشان دادن این نابرابری نادرست به کمک استدلال بازگشتی، از دو نابرابری $x\geq -1$ (که طبق فرض درست است) و $x\leq -\frac{1}{n}$ (که با بازگشت از حکم نادرست $1+nx\leq 0$ حاصل شده است) به نامساوی مضاعف $-1\leq x\leq -\frac{1}{n}$ رسیده‌اید و از آنجا با حذف x (!) به نابرابری $-1\leq -\frac{1}{n}$ (و یا $n\geq 1$) که البته درست است، رسیده‌اید و ادعا کرده‌اید که مراحل برگشت‌پذیرند؛ حال آنکه چنین نیست. یعنی از نابرابری درست $-1\leq -\frac{1}{n}$ نمی‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x\geq -1$، $-1\leq x\leq -\frac{1}{n}$ (مثال نقض: $x=0$). توصیه می‌شود که در استدلال‌های خود خیلی بیشتر از این‌ها دقت کنید.

● دوست دانش‌آموز، آقای **مبین لطفی‌زاده دهکردی**، از شهرستان شهرکرد

مقاله‌تان با عنوان «برهان اویلر بر نامتناهی بودن اعداد اول» به‌دست ما رسید. با کمی ویرایش آن را در یکی از شماره‌های آینده درج می‌کنیم. با سپاس از لطفتان منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

با پوزش از دوستان خواننده که نامشان در این شماره نیامده و تنها به‌دلیل کمبود جا و طولانی بودن مطلب بوده است، پاسخ به سایر عزیزان را به شمارهٔ آینده موکول می‌کنیم و تا آن هنگام همهٔ شما را به خدای منان می‌سپاریم.

پاسخ ایستگاه اندیشه (اول و دوم)

ایستگاه اول

۱. عدد ۶۲۱۰۰۰۱۰۰۰. امتحان کنید!

۲. اگر عدد فوق $x=\overline{abcde}$ باشد، باید داشته باشیم:

$\overline{abcde1}=3(\overline{1abcde})$ و یا: $10x+1=3(10^5+x)$ و از آنجا: $x=42857$

۳. به‌ترتیب از چپ ۸، ۷ و ۱. عددهای حسابی ۰، ۱، ۲،... و ۹ را در زبان فارسی به‌ترتیب الفبایی از چپ به راست مرتب کرده‌ایم و جایگاه آن‌ها را در ایـن ترتیب به‌صورت عددی نوشـته‌ایم. ترتیب اعداد در فرهنگ لغت به‌صورت زیر است:

یک و هفت و هشت و... و سه و دو و چهار و پنج

۴. جواب: ۹۳۷۶

۵. $\frac{1}{3}=\frac{5823}{17469}$

۶. اگر سن دختر x باشد، مادر در این سن فرزند اولش را به‌دنیا آورده، در سن $x+4$ فرزند دوم، در سن $x+8$ سومی، در سن $x+12$ چهارمی، در سـن $x+16$ پنجمی و در سن $x+20$ دخترش را به‌دنیا آورده، بنابراین $x+x+20=58$ و در نتیجه: $x=19$

ایستگاه دوم

مسئلهٔ ۱. توجه کنید که در زمان مورد بحث، مهرزاد هنوز ازدواج نکرده است، لذا یک سـؤال مناسب می‌تواند چنین باشـد: «آیا شهرزاد ازدواج کرده اسـت؟» فرض کنید خانم مورد نظر بگویـد: «بله.» در این صورت اگر او شهرزاد باشد، پاسخ راست می‌دهد و لذا شهرزاد ازدواج کرده است و همسـر اوست. اما اگر او مهرزاد باشد، پاسـخ دروغ می‌دهد و می‌گوید شهرزاد ازدواج نکرده است.

لـذا مهرزاد مخاطب اوسـت که دروغ می‌گوید. یعنی شـهرزاد ازدواج کرده و همسر اوست. پس در هر صورت اگر مخاطب به او پاسخ بله بدهد، همسرش است و اگر پاسخ خیر بدهد، خواهر همسرش است (چرا؟)

مسئلهٔ ۲. سؤالی که حالا باید بپرسد این است که: «آیا تو ازدواج کرده‌ای؟» فرض کنید که او پاسـخ بدهد: «بله.» اگر او شـهرزاد باشـد، پاسخ او راست است و بنابراین خانم مخاطب ازدواج کرده و همان شهرزاد است. اما اگر خانم مخاطب مهرزاد باشد، در این صورت پاسخ او دروغ است و لذا خانم مخاطب ازدواج نکرده است و او با خواهر دیگر، یعنی شهرزاد، ازدواج کرده است. پس در هر دو حالت، پاسـخ بله مشـخص می‌کند که نام همسر او شهرزاد است. پاسخ خیر نیز مشخص می‌کند نام همسر او مهرزاد است. (چرا؟)

مسـئلهٔ ۳. خیر چنین سـؤالی وجود ندارد! زیرا یک سؤال با پاسخ «بله ـ خیر» تنها می‌تواند دو حالت را بررسی کند، در حالی‌که ما در اینجا با چهار حالت مختلف مواجهیم:

۱. خانم مخاطب شهرزاد و همسر اوست.
۲. خانم مخاطب شهرزاد و خواهر همسر اوست.
۴. خانم مخاطب مهرزاد و همسر اوست.
۵. خانم مخاطب مهرزاد و خواهر همسر اوست.

پاسخ‌های تفریح اندیشه

۱. عددهای ۲۷، ۹ و ۱۲: جملات به‌ترتیب تقسیم بر ۳، به اضافهٔ ۳، ضرب در ۳ و منهای ۳ می‌شوند.

۲. خواهر مسن‌تر است. چون آن‌ها در واقع یک‌چیز را می‌گویند، پس هر دو دروغ می‌گویند.

۳. جـواب ۷۲ اسـت. عدد واقع در هر بیضی، میانگیـن اعداد دایره‌های دوطرف آن است.

۴. $a=3, b=4, c=6, d=1, e=0, f=9$