برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

ISSN: 1735-4951

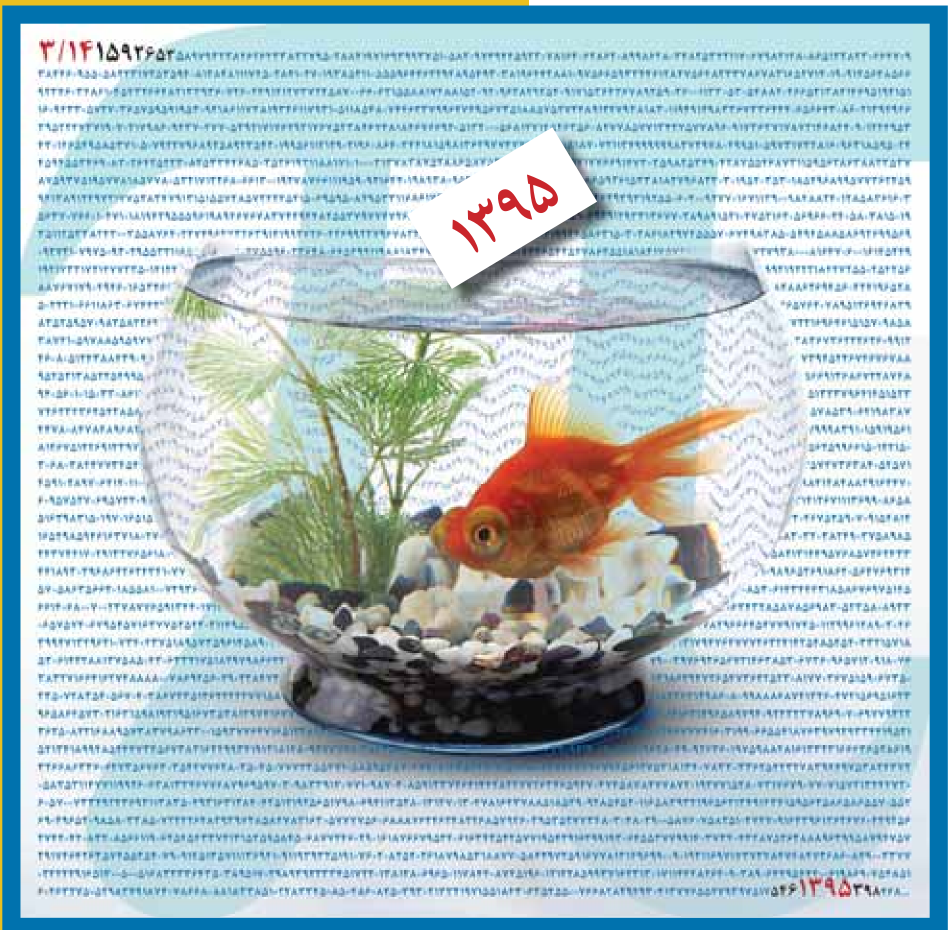
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

- دورهٔ بیست و پنجم
- شمارهٔ ۹۳
- فروردین ۱۳۹۵
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

www.roshdmag.ir

پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۰۰۶



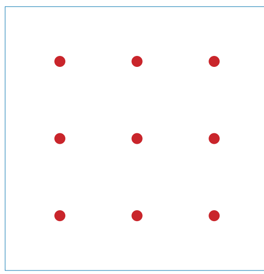
بعد از ۶۵۶۱ رقم از دنبالهٔ ارقام عدد π، به ۱۳۹۵ می‌رسیم.

یک مسابقهٔ منحصر به فرد با جایزهٔ منحصر به فرد

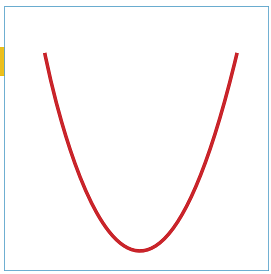
تعطیلات نوروزی فرصتی خوب برای شـرکت در یک مسابقهٔ استثنایی فراهم می‌کند؛ مسابقه‌ای که شاید نظیر آن را کمتر دیده باشید. به چهار شکل زیر خوب دقت کنید و در مورد یکی (یا چند تا) از آن‌ها یک مسئله طرح کنید و آن را با راه‌حلش برای ما بفرستید. مسئله‌هایی که غیرتکراری باشند و ایده‌هایی نو مطرح کنند، واجد دریافت جایزهٔ ما خواهند بود. از بین آن‌ها یکی را به‌عنوان بهترین مسـئله معرفی خواهیم کرد و به فرستندهٔ آن جایزه‌ای نفیس تقدیم خواهیم کرد.

لازم به ذکر اسـت که مسـئله می‌تواند در ارتباط با همهٔ شـاخه‌های ریاضی باشـد. به‌علاوه، مجاز به افزودن هرچیز دیگری به شـکل‌ها هسـتید. فقط باید مسـئله‌تان ارتباطی با شـکل اولیه داشته باشد و هرمسئله فقط در رابطه با یکی از شکل‌ها باشد. منتظر مسئله‌های ارسالی‌تان هستیم!

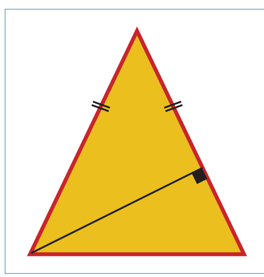
شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

۱	۳	۴	۱۰	۱۱	۲۱
۲	۵	۹	۱۲	۲۰	
۶	۸	۱۳	۱۹		
۷	۱۴	۱۸			
۱۵	۱۷				
۱۶					

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌وپنجم
- شمارهٔ پی‌درپی ۹۳
- فروردین ۱۳۹۵
- شمارهٔ ۷
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag:
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱- ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۰۵۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

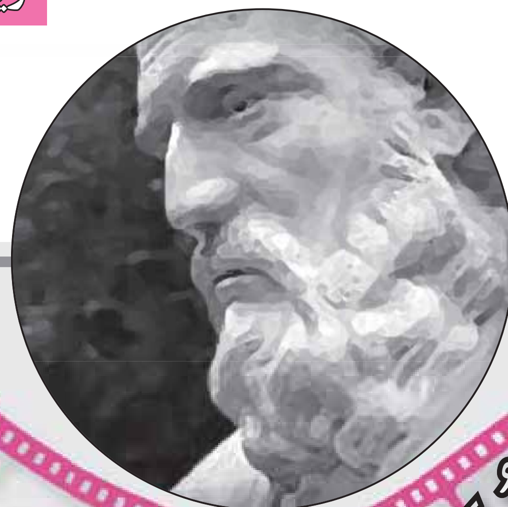
شما چه شیوه‌ای برای ایجاد تمرکز به‌کار می‌برید؟

افـراد بـه روش‌های مختلفـی قادرند در کارهـا و امور گوناگون، میزان و درصد تمرکز خودشـان را تقویت کنند و افزایـش دهند. در مورد مطالعه و یادگیری در کلاس درس نیـز هر کس به روش خودش تمرکـزش را حفظ می‌کند و سـعی در افزایش آن دارد. برای مثال، بعضی‌ها با تکرار یک موضوع به تمرکز لازم دسـت می‌یابند و بعضی‌ها با نوشتن مطالب، تمرکز لازم را کسـب می‌کنند. خلاصه اینکه روش ایجاد تمرکز در افراد، متنوع است. راستی شما چه شیوه‌ای را برای ایجاد تمرکز بیشتر به کار می‌برید؟

شـاید سـؤال کنید: اصلاً تمرکز در یادگیری، چه‌قدر و در کجا لازم اسـت؟ همان‌طور که هنگام رانندگی، صحبت کردن با تلفن همراه، باعث می‌شـود تمرکـز از بین برود و امکانِ خطا در رانندگی و تصادف بیشـتر شـود، در موضوع یادگیری و مطالعه نیـز، عواملی وجود دارند که باعث می‌شـوند، تمرکز و درصد یادگیری مؤثر کاهش یابد. شـما در بسیاری از موارد نیاز مبرمی به تمرکز دارید که به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنم:

- تمرکز در کلاس درس و هنگام تدریس معلم؛
- تمرکـز در منزل هنـگام مطالعه و مـرور موضوعات تدریس شده؛
- تمرکز هنگام حل مسائل و تمرین‌های مشخص شده؛
- تمرکز در جلسهٔ آزمون و هنگام پاسخ‌گویی به سؤالات؛
- تمرکز در تحلیل آزمون و برنامه‌ریزی برای مطالعه؛
- تمرکز هنگام گفتمان و مشاوره با پدر و مادر و مشاور.

مؤید و پیروز باشید
سردبیر



عُمَر خیام، نابغهٔ پرسشگر

- **تهیه‌کننده:** جازبیر ساند
- **تدوین نهایی:** دومنیک مک ماهن
- **ترجمهٔ انگلیسی به فارسی:** افشین مبصر
- **گروه تولید: در ایران:**
- **مدیر تولید:** حسام‌الدین نوریان
- **کارگردان و فیلم‌بردار:** بهمن کیارستمی

- **گروه تولید: در بریتانیا**
- **فیلمبردار:** ویل جِیکوب و کالین‌باتلر
- **تدوینگر:** پل گریفیث

احسان یارمحمدی

خیام نیشابوری، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس،حکیم،موسیقی‌دان، فیلسوف و شاعر نامدار ایران است که در ۲۸ اردیبهشت ۴۲۷ خورشیدی در نیشابور چشم به جهان گشود و در ۱۲ آذر ۵۱۰ خورشیدی چشم از جهان فرو بست. خیام به علت نقش ارزنده‌اش در پایه‌گذاری روشی هندسی برای حل معادلات درجهٔ سوم و نیز مطالعات وی دربارهٔ اصل پنجم **اقلیدس**، نزد جامعهٔ جهانی ریاضیات از جایگاه برجسته‌ای برخوردار است. همچنین کار ارزشمند وی در اصلاح تقویم ایران در زمان وزارت **خواجه نظام‌الملک** که وزیر اعظم سلطان **مَلِکشاه سلجوقی** بود، باعث شد مشکلات مربوط به کشت و زرع کشاورزان و نیز ایرادها و نواقص مربوط به دریافت و اخذ مالیات در آن دوره به‌صورت کامل برطرف شود. در ضمن، جنبهٔ دیگری از زندگی خیام نیشابوری که باعث مشهور شدن نام وی و برجسته شدن جایگاه او در جامعهٔ جهانی شده، اثر بی‌بدیل وی با عنوان **«رباعیات خیام»** است که توسط **اِدوارد فیتزجرالد**[1] به انگلیسی برگردان شد و در اختیار ممالک مغرب زمین قرار گرفت.

در این مقاله قصد داریم با معرفی فیلم «عُمَر خیام، نابغهٔ پرسشگر» به شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ایران زمین، به گوشه‌ای از زندگی و دستاوردهای ارزشمند این بزرگ مرد تاریخ دانش ایران اشاره کنیم. اما به‌منظور داشتن آگاهی لازم برای ورود به این فیلم و درک محتوای آن، ابتدا سه مورد را که از کتاب **«ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی»** به قلم زنده‌یاد استاد **ابوالقاسم قربانی** اخذ کرده‌ایم، تقدیم می‌کنیم تا نخست با اندیشه و منش فرهیخته‌وار و با عظمت خیام نیشابوری در آن و سپس با دو اثر او آشنا شوید و به این ترتیب، مقدمه‌ای را برای درک بهتر قسمت‌هایی از فیلم مزبور در ذهن خود پرورانده باشید.

۱. ترجمهٔ فارسی چند سطر از نوشته‌های خیام

خیام در مقدمهٔ رسالهٔ جبر خود مطالبی نوشته که از نارضایتی او و از محیط کار و زندگی‌اش حکایت دارد. در ادامه برگردان فارسی این مطالب را به نقل از کتاب **«حکیم عمر خیام به عنوان عالِم جبر»** به قلم زنده‌یاد **غلامحسین مصاحب** (۱۳۵۸-۱۲۸۹) ارائه می‌کنیم:

«و من همواره سخت اشتیاق به تحقیق استدلالی این اصناف [معادلات] و جدا کردن حالات ممکن و ممتنع هر صنف داشته‌ام، چون می‌دانستم که این امر در حل مسائل دشوار شدیداً مورد احتیاج است. لیکن تصاریف زمان همواره با پیشامدهایی همراه بود که پرداختن به این امر را به عهدهٔ تعویق می‌انداخت، و برای من فراغتی نمی‌گذاشت که

صرف تدوین این مطلب کنم و فکر خود را بر آن تمرکز سازم. زیرا گرفتار روزگاری هستیم که از اهل قلم فقط عدهٔ کمی- مبتلا بـه هزاران رنـج و محنت- باقی مانـده که پیوسـته در اندیشـهٔ آن‌انـد کـه غفلت‌های زمـان را فرصت جسته به تحقیق در علم و اسـتوار کـردن آن بپردازند. و بیشـتر عالِم‌نمایان زمان ما حق را جامهٔ باطل می‌پوشند، و گامی از حـدّ خودنمایـی و تظاهر به دانایـی فراتر نمی‌نهند. و آنچه را هم می‌دانند، جـز در راه اغراض مادی بـه کار نمی‌بندنـد. و اگر ببینند که کسی جُستن حقیقت و برگزیدن راستی را وجههٔ همت خود سـاخته، و در ترک دروغ و خودنمایی و مکر و حیله، جهد و سعی دارد، او را خوار می‌شمرند و تمسخر می‌کنند.»

۲. رسالهٔ فی‌قسمه ربع‌الدائره

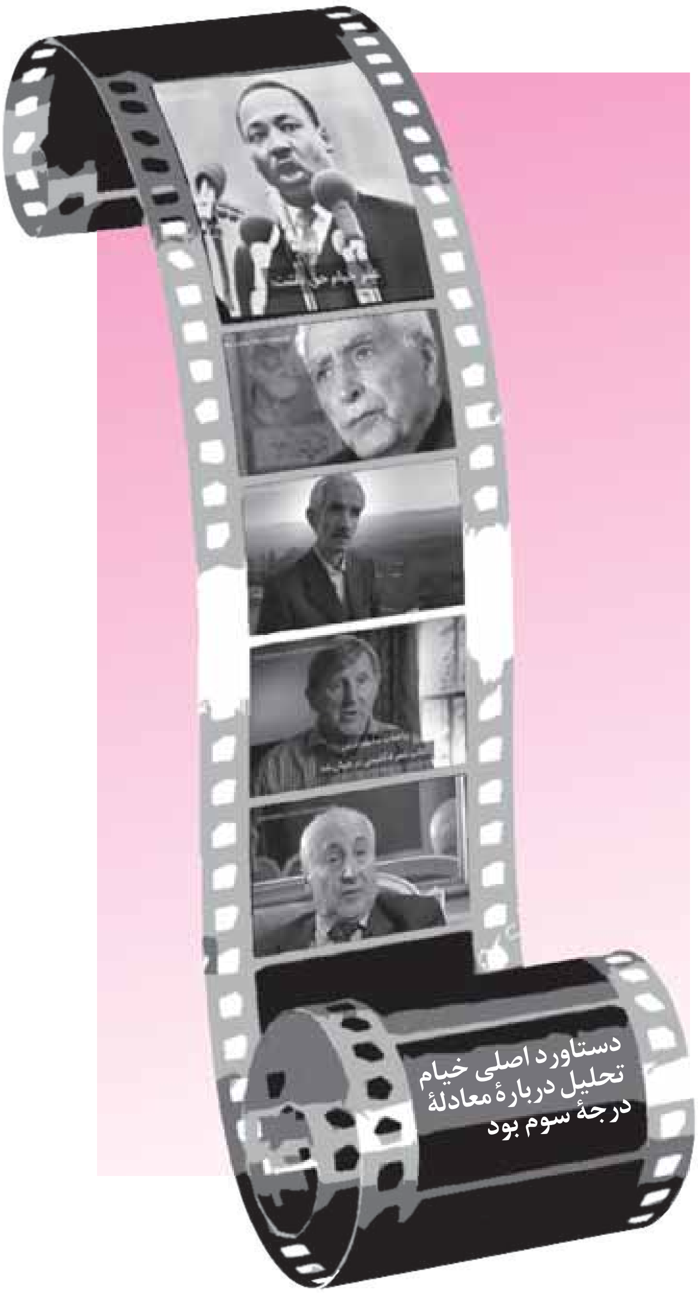
این رسـاله را خیـام پیش از رسالهٔ جبر خود نوشته و موضوع آن تحویل یک مسـئلهٔ هندسی به معادلهٔ درجه سـوم و حل آن به‌وسیلهٔ مقاطع مخروطی است. به‌همین مناسـبت مرحوم دکتر مصاحب این رسـاله را که عنوان ندارد، «**رسـالهٔ در تحلیل یک مسئله**» نامیده است. متن عربی و ترجمهٔ فارسـی این رسـاله را نخستین‌بار در سال ۱۳۳۹هـ‌ش، دکتر مصاحـب از روی مجموعهٔ شمارهٔ ۱۷۵۱/۲ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران در کتاب «حکیم عُمَر خیام به‌عنـوان عالِم جبر» منتشـر سـاخت و عکس نسخهٔ خطی را نیز کـه منحصر به فرد است، در آن کتاب به چاپ رساند.

این رساله را دکتر **امیر معز** در سال ۱۹۶۱ میلادی به انگلیسی و **کاسـنوا و رزنفلـد** به روسـی ترجمه کردند. اخیراً نیز در سال ۱۹۸۱ میلادی **رشـدی راشد** و **احمـد جبار** متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی و تفسیر این رساله را به زبان فرانسوی انتشار دادند.

۳. تقویـم جلالـی یـا تقویـم ملکی

بعد از استیلای عرب بر ایران، ترتیبی که در اواخر عهد ساسانی کمابیـش منظماً بـرای اجرای کبیسه معمول بود، منسوخ شد و تقویم هجری قمری رایج شـد کـه به دلیل تطبیق نداشـتن با فصل‌هـا، در امور کشـت و زرع و فصل‌هـای مالیات اشـکالات فراوان ایجاد کرد. در سـال ۴۶۷ هـ‌ق، سـلطان مَلِکشاه سلجوقی تصمیم به اصلاح تقویم گرفت و جمعی از منجمان را مأمور سـر و صورت دادن به امر تقویم کرد که از آن جمله خیام، **ابوالعباس لوکری، میمون‌بن‌نجیب واسطی، ابوالمظفـر اسـفزاری** و چند تن دیگر را برشمرده‌اند. محل کار این جمع رصدخانهٔ جدید مَلِکشاه بود که محل آن در اصفهان (یا ری یا نیشابور) ذکر شده است. ملکشاه تقویم پیشنهادی این عُلما را که به‌نام تقویم جلالی یا تقویم ملکی موسـوم شـد، تا حدی در ایران رایج کرد.

تقویم جلالی تقویمی اسـت شمسی (که تقویم شمسی فعلی ایـران بر همان اسـاس اسـت). مبدأ این تقویـم روز جمعهٔ نهم رمضان سـال ۴۷۱هـ‌ق مطابق بـا ۱۵ مـارس ۱۰۷۹ میلادی و اول فروردین سال ۴۵۸ هـ‌ش بر حسب تقویم کنونی ایران است. سـال جلالی از اول بهـار (نوروز سـلطانی) آغاز می‌شود و مرکب از ۱۲ مـاه و ۳۰ روز و ۵ (و در سال‌های کبیسـه ۶) روز اضافی به دنبال ماه دوازدهم اسـت. نام ماه‌ها همـان نام‌های قدیم ایران است. کبیسه هر چهار سال یک بار اجرا می‌شود (کبیسهٔ رباعی). روز اول سال جلالی روزی است که خورشـید بین ظهر روز قبل و ظهـر آن روز وارد بـرج حمل می‌شـود (به‌عبارت دیگر، شروع سال جلالی مطابق است با ظهر روز ورود خورشید در برج حمل). با ایـن قرارداد، سـال جلالی بر عکـس سـال مسـیحی (تقویم



یولیانی و بعداً تقویم **گریگوری**) که هر ۱۰/۰۰۰ سال قریب سه سال با سال شمسی اختلاف پیدا می‌کند، همیشه با سال شمسی مطابقت دارد و آن را می‌توان دقیق‌ترین تقویم جهان دانست.

کارگردان فیلم «عمر خیام، نابغهٔ پرسشگر» در طول فیلم از گفت‌وگوها و مصاحبه‌های فراوانی با افراد گوناگون، برای توضیح در مورد وضعیت زندگی و کارهای علمی و ادبی خیام نیشابوری بهره برده است که از بین آن‌ها می‌توان به این افراد اشاره کرد: **محمود دولت‌آبادی** (نویسنده، نمایش‌نویس و فیلم‌نامه‌نویس)، **محمدرضا شجریان** (موسیقی‌دان، آهنگ‌ساز و خواننده)، **مارتین لوترکینگ جونیور** (رهبر جنبش حقوق مدنی آمریکایی‌های آفریقایی‌تبار)، **دیوید مورگان**[2] (استاد تاریخ **دانشگاه ویسکانسین ـ مدیسن**[3])، **حسن نظریان** (کارشناس تاریخ شهر نیشابور)، **جلال خالقی‌مطلق** (ادیب، پژوهشگر، شاهنامه‌شناس و استاد دانشگاه هامبورگ)، **محمدعلی اسلامی نُدوشَن** (شاعر، منتقد، مترجم و پژوهشگر)، **آیدین آغداشلو** (نقاش، نویسنده، منتقد فیلم و طراح)، **مارکوس دو ساتوی**[4] (استاد ریاضیات و علوم ارتباطات **دانشگاه آکسفورد**[5]) و **هِلِن واکِر**[6] (اخترشناس و عضو انجمن سلطنتی اخترشناسی بریتانیا).

در ادامه گفت‌وگویی را که توسط کارگردان این فیلم با ریاضی‌دان برجستهٔ دانشگاه آکسفورد، مارکوس دو ساتوی انجام شده است، تقدیم می‌کنیم.

«به دیدن مارکوس دو ساتوی، ریاضی‌دان و محقق معروف انگلیسی می‌روم تا ببینم دستاوردهای خیام در ریاضیات چه بوده است.

کارگردان: در دوران خیام و زمانی که کارش را شروع کرد، وضع ریاضیات در جهان چه‌طور بود؟

مارکوس دو ساتوی: بیشتر مردم فکر می‌کنند که ریاضیات در دوران یونان باستان آغاز شد و وقتی امپراتوری یونان از بین رفت، پیشرفت ریاضیات هم متوقف شد، تا اینکه اروپایی‌ها در قرن‌های سیزده و چهارده دوباره برگشتند. اما واقعیت این است که در آن مدت ریاضیات در شرق پیشرفت زیادی کرد؛ در چین، در هند، در جهان اسلام و در ایران. به‌خصوص در زمینهٔ زبان جدیدی از ریاضیات به نام جبر.

کارگردان: در آن زمان غربی‌ها از این پیشرفت ریاضیات در شرق خبر نداشتند؟

مارکوس دوساتوی: فکر می‌کنم شرق را کمی فراموش کرده بودند. اما حالا به دستاوردهای عظیم شرق پی می‌بریم.

کارگردان: به نظر شما دستاورد اصلی عُمَر خیام در ریاضیات چه بود؟

مارکوس دو ساتوی: من فکر کنم که دستاورد اصلی او تحلیل دربارهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم بود. اما معادلهٔ درجهٔ سوم چیست؟ کمی شبیه جدول کلمات متقاطع معمایی است! من عددی در ذهن دارم. اگر آن را به توان دو برسانم و بعد عدد یک را به آن اضافه کنم، می‌شود ۱۷. حالا می‌شود که بگویی چه عددی در ذهن من بود؟

کارگردان: ممکن است تکرار کنید؟

مارکوس دو ساتوی: به توان دو به اضافهٔ یک.

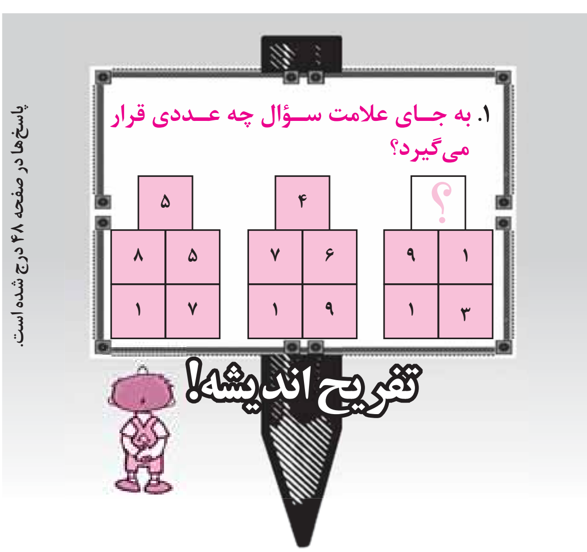
کارگردان: چهار.

مارکوس دو ساتوی: خیلی خوب. پس شما این جدول رمزدار را دربارهٔ عددی که من توی ذهن داشتم، حل کردید. این یک نمونه معادله درجهٔ دوم بود، چون من عددم را به توان دو رساندم. اما آنچه که عُمَر خیام روی آن کار می‌کرد، این بود که شما عدد را به توان سه برسانید و بعد حساب کنید که عدد اصلی که توی ذهن من بوده، چه عددی است. درک این معادله‌ها به شما امکان می‌دهد که مساحت یک زمین یا حجم یک جعبه را اندازه بگیرید. عُمَر خیام می‌کوشید رابطه‌ای برای حل معادلات درجهٔ سوم پیدا کند تا به عدد اصلی برسد. او نتوانست این مسئله را حل کند، یعنی خسته‌اش کرد. اما یک راه نیمه‌کاره پیدا کرد که اتفاقاً راه‌حل جالبی بود، چون جبر را به هندسه تبدیل کرد. برای اینکه دستاورد او را به شما نشان بدهم، روی زمین ترسیم می‌کنم که چه‌طور این مسئله را حل کرد...»

در پایان این مقاله خدمت شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات عرض می‌کنم، از آنجا که مطالب و موارد گنجانده شده در فیلم «عمر خیام، نابغهٔ پرسشگر» از گوناگونی و فراوانی بی‌شماری برخوردار هستند، به منظور جلوگیری از اطالهٔ کلام، از پرداختن بیشتر به موضوع این فیلم پرهیز می‌کنیم و شما را به تماشای فیلم ارزشمند مزبور تشویق می‌کنیم.

*** پی‌نوشت**

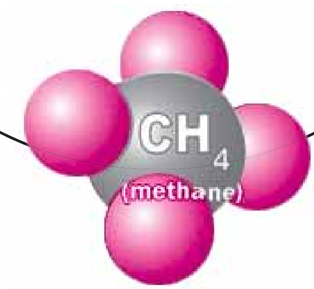
1. Edward FitzGerald
2. David Morgan
3. University of Wisconsin-Madison
4. Marcus du Sautay
5. University of Oxford
6. Helen Walker



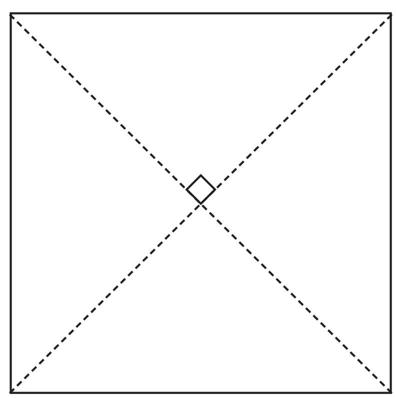
پاسخ‌ها در صفحه ۴۸ درج شده است.

شکل هندسی مولکول متان

حسین کریمی
دبیر ریاضی تهران

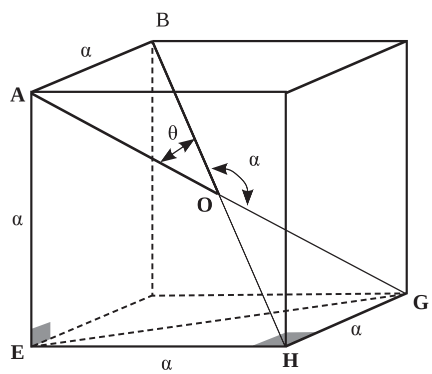


در صفحه، ساده‌ترین چندضلعی منتظم که قطر دارد، مربع است و می‌دانیم در مربع، قطرها برهم عمودند.



شکل۱

اما در فضا، ساده‌ترین چندوجهی منتظم دارای قطر، شش وجهی منتظم (مکعب) است که گاهی اشتباهاً تصور می‌کنیم، در مکعب اقطار برهم عمودند. اکنون نشان می‌دهیم که اگر زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر مکعب را، θ بنامیم، داریم: $\cos\theta = \frac{1}{3}$ و چون α مکمل θ است: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.



شکل۲

مکعبی به یال a را در نظر می‌گیریم. ابتدا اندازهٔ قطر مکعب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta AEG : AE = a, EG = a\sqrt{2}, AE \perp EG$$
$$\Rightarrow AG^2 = AE^2 + EG^2 = a^2 + 2a^2$$
$$= 3a^2 \Rightarrow AG = a\sqrt{3}$$

یعنی اندازهٔ قطر مکعب برابر است با: $a\sqrt{۳}$ و در نتیجه:

$$OA = OB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

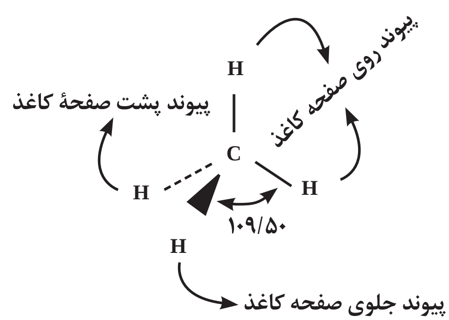
اکنـــون قضیهٔ کســـینوس‌ها را در مثلث ABO به‌کار می‌گیریم:

$$\cos\theta = \frac{OA^{۲} + OB^{۲} - AB^{۲}}{۲ \times OA \times OB}$$

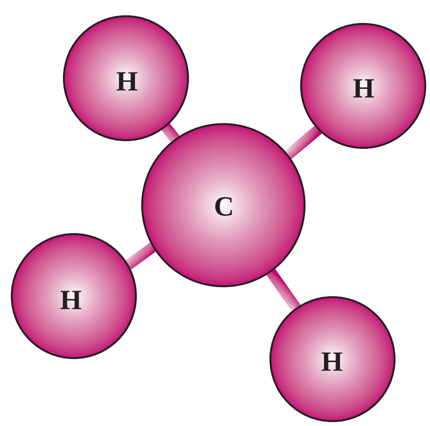
$$= \frac{\frac{۳}{۴}a^{۲} + \frac{۳}{۴}a^{۲} - a^{۲}}{۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a} = \frac{\frac{۱}{۲}a^{۲}}{\frac{۳}{۲}a^{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

که نشان می‌دهد، اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر (θ)، تقریباً ۷۰/۵ درجه است و نیز اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ بین دو قطر (α) تقریباً ۱۰۹/۵ درجه است.

برای بســـیاری از دانش‌آمـــوزان، زاویهٔ ۱۰۹/۵ درجه آشناســـت، چراکه در درس شیمی ۲، در شکل هندسی متـــان $(CH_{۴})$ زاویهٔ بین یک CH بـــا CH دیگر، ۱۰۹/۵ درجه معرفی شـــده اســـت (تقریبی ـ کتاب شیمی سال دوم صفحهٔ ۸۷).

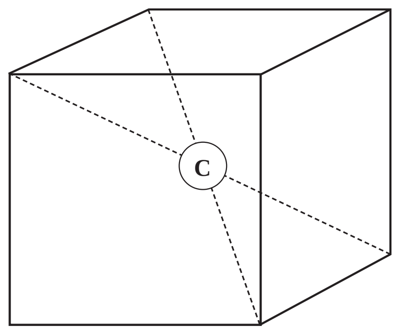


شکل ۳

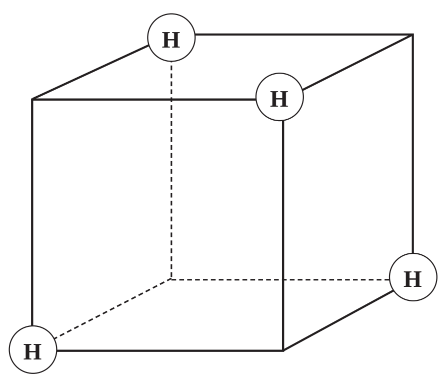


شکل ۴

در واقع شـــکل هندســـی متان به گونه‌ای است که کربن (C) در مرکز مکعب قرار دارد و دو هیدروژن (H) در دو رأس یک قطر از یک وجه و دو هیدروژن دیگر در دو رأس قطر غیرموازی با قطر قبلی در وجه روبه‌رو قرار می‌گیرد.

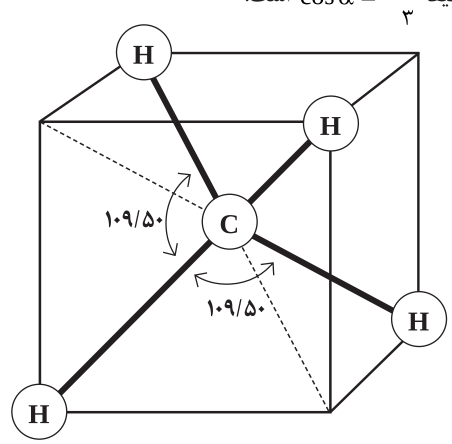


شکل ۵



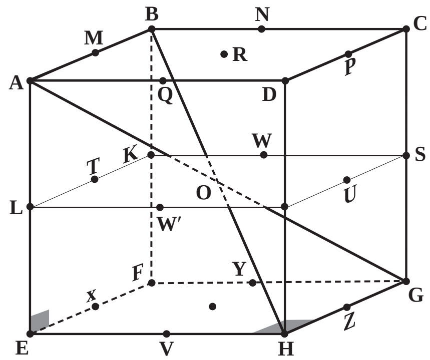
شکل ۶

همان‌طور که در شـــکل ۷ دیده می‌شود، هر یک از CHهـــا روی یکی از چهار قطـــر مکعب قرار می‌گیرند و به‌همیـــن دلیل زاویهٔ بین CHها، تقریباً ۱۰۹/۵ درجه و دقیقاً $\cos\alpha = -\frac{۱}{۳}$ است.



شکل ۷

مکعب دارای یک مرکز تقارن (O، محل تلاقی قطرها) و ۹ محور تقارن است (سه محور تقارن همان‌هایی هستند که مرکزهـای دو وجه روبه‌رو را بههـم وصل می‌کنند: ´WW، TU و RJ. شـش محور تقارن دیگر همان‌هایی هستند که وسـط دو یال موازی غیرواقع بر یک وجه را به‌هـم وصـل می‌کننـد: (QY، NV، MZ، PX، KI و LS). توجه داشته باشیم که قطرهای مکعب محور تقارن محسوب نمی‌شوند.



شکل ۸

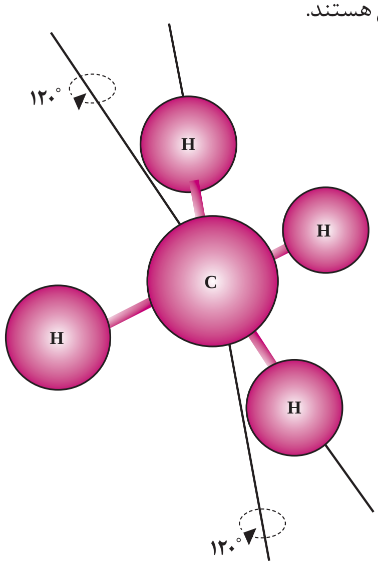
همچنین مکعب ۹ صفحهٔ تقارن دارد که عبارت‌اند از:

الـف) صفحه‌های گـذرا از مرکز و مـوازی دو وجه: LKSI، NQVY و MXZP.

ب) صفحه‌های شامل دو یال موازی غیرواقع بر یک وجـه: ACGE، BDHF، ADGF، BCHE، ABGH و CDEF.

لازم به ذکر است که متان (CH_4) فاقد مرکز تقارن است و ۳ محور تقارن و ۶ صفحهٔ تقارن دارد (صفحه‌های شامل اتم کربن و دو اتم هیدروژن).

مولکول متان دارای ۴ محور دوران ۱۲۰°ای اسـت که اگر حـول هر یک از آن محورها، دوران ۱۲۰° اعمال شود، همان شـکل اولیه حاصل می‌شود. ۴ محور مزبور خط‌های واصل بین یکی از Hها با C هستند. همچنین دارای ۳ محـور دوران ۱۸۰°ای اسـت کـه اگر حول هر یک از آن محورها، دوران ۱۸۰° اعمال شود، همان شکل اولیه حاصل می‌شـود. آن ۳ محـور دوران، امتداد واصل مرکزهـای دو وجـه روبه‌رو در مکعـب و همان ۳ محور تقارن هستند.



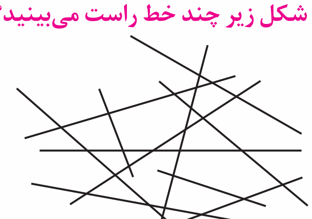
شکل ۹

۱ پرسش‌های پیکارجو!

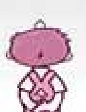
۱. در ده کیسـه، به‌ترتیـب ۱ مهـره، ۲ مهره، ۳ مهـره و... و ۱۰ مهره در ده رنگ مختلف داریم. اگر بخواهیم دو مهرهٔ هم‌رنگ برداریم، چند راه داریم؟

الف) $\binom{17}{3}$ ب) $\binom{11}{3}$ ج) $\binom{10}{7}$ د) $\binom{11}{4}$ هـ) $\binom{12}{2}$

۲. در شکل زیر چند خط راست می‌بینید؟



تفریح اندیشه!



هوشنگ شرقی

ایستگاه اول:
معماهای عدد سال نو!

باز هم به مناسبت فرا رسیدن سال نو و نوروز خجسته، معماهایی با عدد سال نو، یعنی ۱۳۹۵ برایتان داریم؛ بازی با اعداد و البته قواعد ریاضی و به‌خصوص نظریهٔ اعداد. امیدواریم برای شروع سرگرم‌کننده باشد.

معمای اول: $۳۱\times۵\times۳^{۲}=۱۳۹۵$. یعنی ۱۳۹۵ حاصل‌ضرب مربع یک عدد اول در دو عدد اول است. حداقل چند سال باید صبر کنیم تا دوباره همین وضع ایجاد شود؟ آخرین بار چند سال قبل همین وضع وجود داشته است؟

***

معمای دوم: عدد ۱۳۹۵ را حداکثر به صورت مجموع چند عدد اول متمایز می‌توان نوشت؟ حداقل به‌صورت مجموع چند عدد اول متمایز می‌توان نوشت؟

***

معمای سوم: می‌توان نوشت: ۳۱×۹×۵=۱۳۹۵ یعنی ۱۳۹۵ را می‌توان از ضرب رقم‌های آن از سمت راست در عدد دو رقمی که با دو رقم صدگان و هزارگان آن ساخته می‌شود، ایجاد کرد. آیا در سال‌های شمسی هزارهٔ دوم، سال دیگری با همین ویژگی سراغ دارید؟

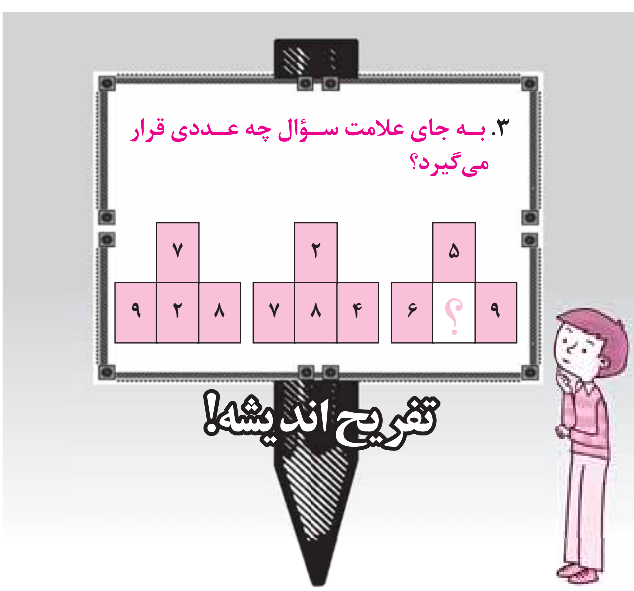
***

معمای چهارم: ۱۳۹۵ مضرب همهٔ ارقام خودش است! نزدیک‌ترین سال شمسی که همین خاصیت را داشته باشد، کدام سال است؟

معمای پنجم: عدد ۱۳۹۵ را به چند طریق می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متمایز نوشت؟

***

معمای ششم: می‌بینیم که: ۱۶۰+۹۵×۱۳=۱۳۹۵. حداقل چند سال دیگر همین وضع پیش می‌آید؛ یعنی عدد سال شمسی مساوی حاصل‌ضرب عددهای دو رقمی تشکیل‌دهنده آن به اضافهٔ ۱۶۰ می‌شود؟ حداکثر چند سال پیش همین‌طور بوده است؟



سخت‌ترین کار برای ریاضی‌دان این است که بگوید ریاضی چیست!

بهنام آیتی‌پور
دبیر ریاضی شهرستان دزفول

گفتگوی صمیمی با دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده، استاد نمونه ریاضی ایران

اشاره

دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده در سال ۱۳۲۳ در استان خوزستان و شهرستان مسجد سلیمان به‌دنیا آمد. تحصیلات ابتدایی و متوسطه را در همان‌جا به اتمام رساند و در کنکور سراسری در رشتهٔ ریاضی دانشگاه تهران پذیرفته شد. در سال ۱۳۴۸ مدرک کارشناسی خود را از این دانشگاه اخذ کرد و برای ادامهٔ تحصیل راهی کشور انگلستان شد. در سال‌های ۱۳۵۰ و ۱۳۵۳ به ترتیب مدرک‌های کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشتهٔ جبر از دانشگاه اکستر بریتانیا دریافت داشت و پس از بازگشت به کشور در دانشگاه جندی‌شاپور (شهید چمران) اهواز مشغول تدریس شد.

از آن زمان تاکنون دکتر کرم‌زاده در مسئولیت‌های متعددی همچون مدیر گروه ریاضی، رئیس دانشکدهٔ ریاضی، عضو شورای سرپرستی و عضو کمیتهٔ پژوهشی آن دانشگاه، به توسعهٔ دانش ریاضی در استان خوزستان و سراسر کشور کمک‌های شایانی کرده‌اند. علاوه بر آن، ایشان به مدت ۱۴ سال از ۱۳۶۷ تا ۱۳۸۱ عضو تیم سرپرستی دانش‌آموزان المپیاد ریاضی کشور بوده است.

این استاد فرزانه به‌خاطر تلاش‌هایش برای عمومی کردن ریاضیات در سال ۱۳۸۳ موفق به دریافت جایزهٔ ویژه ترویج علم شد و نیز از ایشان در سال ۱۳۸۴ به‌عنوان چهرهٔ ماندگار ریاضی کشور تجلیل به عمل آمد.

بهنام آیتی‌پور، از همراهان قدیمی مجلهٔ برهان، گفت‌وگویی را با این استاد گران‌قدر انجام داده است که مشروح آن در پی می‌آید.

استاد چطور شد که آقای کرم‌زاده امید و افتخار ریاضی استان شد و ما با افتخار در همه‌جا می‌گوییم که شاگرد این استاد هستیم؟

من از کودکی ـ تقریباً از سوم دبستان ـ به این سمت هدایت شدم. یکی از معایب نظام آموزش‌وپرورش ما از قبل از انقلاب تا اکنون این است که نظام به گونه‌ای نیست که بچه‌ها به علاقه و توانایی‌های خودشان پی‌ببرند. پدر و مادر هم که نقش اساسی در هدایت تحصیلی دارند، گاه فرزندانشان را به‌خاطر انگیزه‌های اقتصادی یا به‌خاطر رقابت‌های فامیلی ـ اجتماعی به رشته‌ای خاص هدایت می‌کنند و کمتر کودکان به‌سمت علاقه‌ها و استعدادهای واقعی خودشان رهنمون می‌شوند. ناچار با نگرانی به آیندهٔ شغلی خودشان فکر می‌کنند. بنابراین یک مانع بزرگ اینجاست که کمتر از بچگی به سمتی هدایت می‌شوند که دوست دارند.

از سوم دبستان که در مسجد سلیمان ساکن بودیم، در تابستان به‌خاطر گرما در خانه وقت می‌گذراندیم و تنها سرگرمی ما درس دادن به بچه‌های دوست و آشنای کم سن و سال‌تر از خودمان بود. و چون از بچه‌های محله و فامیل بزرگ‌تر بودم، به این خاطر اول از روی ناچاری و بعدها از روی علاقه به بچه‌ها درس می‌دادم. این باعث می‌شد که من درس‌های هر سال را در تابستان دوباره بخوانم تا بتوانم با تسلط کامل به بچه‌ها آموزش دهم.

در میان همهٔ درس‌ها، درس ریاضی شیرین‌تر بود و شیرین بودن آن هم به‌خاطر مبارزه با مسائل و حل آن‌ها بود و احتیاج به وسایل خاصی هم نداشت. همین‌طور که سال‌ها سپری شد، تجربهٔ درس دادن زیادتر می‌شد. زمانی که وارد دبیرستان شدیم، درس‌های ریاضی خیلی زیاد، عمیق و فشرده بودند، به‌طوری‌که خیلی از آن درس‌ها را در میان درس‌های کارشناسی ارشد بعضی از رشته‌های امروز ارائه می‌کنند.

در دوران دبیرستان در کلاس یازدهم (سوم دبیرستان) که بودیم، بچه‌هایی که از ما بزرگ‌تر بودند و در کلاس دوازدهم بودند، ما را از درسی به‌نام هندسهٔ ترسیمی و رقومی می‌ترساندند. به ما

می‌گفتند: که تمام شـــاگرد اول‌ها این درس را برای گرفتن نمــرهٔ ۷ یا ۸ می‌خوانند و بــا تک‌ماده آن را می‌گذرانند.

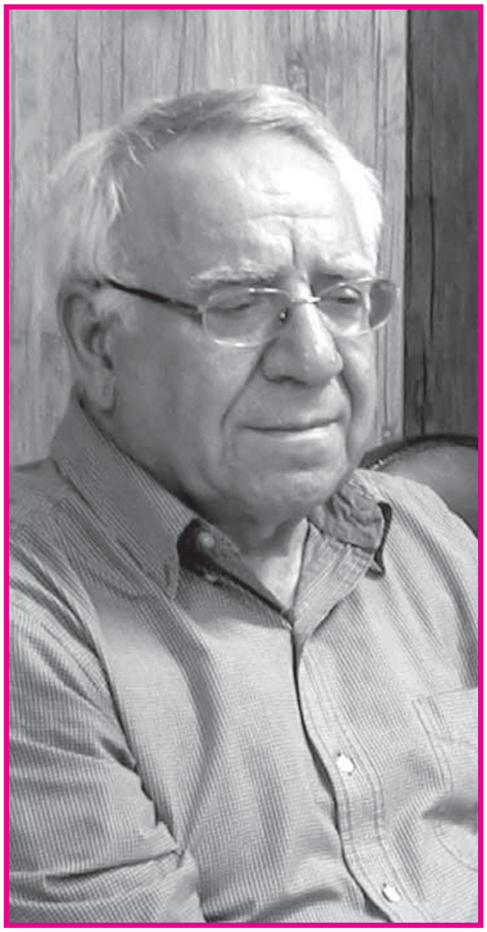
با شــنیدن این حرف‌ها حقیقتــاً به من برخورد. به‌همین دلیل در تابســـتان کــه کلاس یازدهم تمام شـــد، کتاب این درس را از دوســـتان گرفتم و آن را به‌طور کامل در تابســـتان خواندم. به‌طوری که وقتی وارد کلاس دوازدهـــم شـــدم، ایـــن درس را به بقیهٔ دوستان درس می‌دادم.

امــا در اینجا باید به این نکته هم توجه داشـــت کــه داشـــتن معلــم خــوب و دل‌ســوز و کاربلد در دوران دبیرســـتان کم‌تأثیر نیست. بنده از این نعمت برخوردار بودم و از محضر اســتادانی در دبیرســتان، همچـــون اســـتاد **گیتـــی‌زاده** کـــه از آغــاز دوران دبیرســـتان به مـــن ریاضی درس دادنـــد و همچنین اســـتاد **وکیلی** بهره‌مند بودم. این استادان محترم با شـــیوهٔ درس دادن زیبایشـــان به من انگیزهٔ بیشتری می‌دادند.

در کلاس ششـــم درس‌های ســخت و حجیمی همچون هندســـه و مغناطیس سیگنالی داشتیم که واقعاً پیشـــرفته بودند. در آن سال شاگرد اول استان شـــدم. دولت به من بورس تحصیلی رشتهٔ کشاورزی در مدرســـهٔ آمریکایی مقیم لبنان اعطا کرد، ولی من آن را به‌واســـطهٔ علاقه به رشتهٔ ریاضی نپذیرفتم. به دانشـــگاه تهران رفتم، در آنجا شاگرد برتر شدم و در نهایت مرا به عنوان دانشجوی برتر کل کشور انتخاب کردند.

در آن زمان طرحی بود که در دانشـــگاه آریامهر (شـــریف فعلی) اجرا می‌شد که در آن، شخصی به‌نام دکتـــر **انـــوری**، دانشـــجویان برتر و ممتـــاز را جمع می‌کرد. او مرا هم انتخاب کرد. من این موفقیت‌ها را مسئولیتی سنگین قلمداد می‌کردم که بر دوش من گذاشته شده‌اند. همهٔ این‌ها باعث شدند برای ریاضی تلاش بیشـــتری کنم و بعد هم به بورس تحصیلی و دکترا از انگلستان دست یافتم. به این خاطر است که عرض کردم، نظام آموزشی و خانواده‌ها باید فرزندان را به ســـمت رشـــتهٔ مورد علاقهٔ آن‌ها ســـوق دهند؛ رشته‌ای که در آن استعداد دارند.

برای مثال، اولین کسی که در این مملکت مدال المپیاد ریاضی را کســـب کرد، آقای **خان‌بان** بود که اول- برخلاف اســـتعداد و علاقهٔ خودش- به رشـــتهٔ پزشـــکی رفت و بعد انصـــراف داد و به ریاضی آمد و الان استاد یکی از دانشگاه‌های لندن است. آموختن ریاضی یک نیاز دارد و آن هم علاقه است. این علاقه در من باعث شـــد که دیشـــب در این سن و سال تا ساعت سه بامداد بیدار بمانم و جبر بخوانم.



نظام آموزشی و خانواده‌ها باید فرزندان را به سمت رشتهٔ مورد علاقهٔ آن‌ها سوق دهند؛ رشته‌ای که در آن استعداد دارند

جناب اســتاد کــرم‌زاده، چه‌طور شــد کــه قبل از انقلاب، با وجود آزادی‌هایی که بود، شما به حاشیه نرفتید و فقط ریاضی شما را جذب کرد؟

البتــه من ورزش می‌کــردم و فوتبال می‌دیدم. این تفریحات سالم به‌نظر من نباید حاشیه در نظر گرفته شوند. برای ایجاد روحیهٔ شــاد در یک جوان این‌ها ضروری هســـتند. اما مسائل اخلاقی و تربیتی خیلی مهم‌اند و سلامت اجتماعی و شخصی هر دو اهمیت دارند. البته جذابیت‌های علمی هم در ایجاد و حفظ این ســـلامتی‌ها نقـــش مؤثری دارنـــد و این یک اثر دو سویه اســـت؛ یک تأثیر متقابل. کسی که ریاضی می‌خواند باید عاشـــق رشـــته‌اش باشد و هر رشته و شـــغل دیگر هم باید مشمول این عشق باشد. همین عشق شـــغلی و تحصیلی سدی است در برابر فساد. البته در زمان دانشجویی اوقات فراغت کمی داشتیم و در آن زمان اخلاق شـــرط اول بود. در آن زمان، با وجود شرکت نفت از امکانات رفاهی خوبی برخوردار

از راست به چپ:
آقایان آیتی‌پور،
دکتر کرم‌زاده
و دکتر پرهام

من در پیشرفته‌ترین کارهای ریاضی از هندسه استفاده می‌کنم. خدمتی که مثلث به ریاضی کرده است، هیچ مفهوم پیشرفته‌ای در زمینهٔ ریاضی نکرده است

بودیــم. امکاناتی برای یک جوان وجود داشــت که اگر دنبال درس هم نبود، ســراغ تفریحات ناســالم نمی‌رفت؛ دنبال شعر بود، دنبال ورزش بود. در زمان ما، جوانان مسجد سلیمان در شنای کشور اول بودند. اگر کســی در آن زمان سیگار می‌کشید، دید مردم به او بدتر از فردی بود که امروزه مواد مخدر مصرف می‌کند. مــن در چنین محیطی پرورش یافته بودم.

روش مطالعــهٔ شــما روشــی اســت کــه ریاضی را جذاب می‌کند. اصطلاحاً از «ریاضیات سینماتیک» استفاده می‌کنید یا وارد ریاضی فکاهی می‌شوید و یــا از ضرب‌المثل‌ها و داســتان‌ها کمک می‌گیرید و مخصوصاً هندســه و جبر را ترکیــب می‌کنید. لطفاً کمی دربارهٔ این‌ها توضیح دهید. ضمناً بفرمایید چه روش‌های دیگری پیشــنهاد می‌کنید تا فرزندانمان به درس ریاضی علاقه‌مند شوند؟

راهبردی که من مدیون آن هســتم، هندسه است. مــن در پیشــرفته‌ترین کارهای ریاضی از هندســه اســتفاده می‌کنم. خدمتی که مثلث به ریاضی کرده اســت، هیچ مفهــوم پیشــرفته‌ای در زمینهٔ ریاضی نکرده اســت. این عقیده من است و پای این عقیده هــم ایســتاده‌ام. در ریاضیات پیشــرفته شــما باید ببینید، شیئی که شما دارید می‌تواند یک سلسله از خواص را داشته باشــد یا خیر و سپس در مورد آن خواص قضیه‌ای را تحقیق کنید. اما مثلث به تنهایی شــخصیتش نتیجه‌ساز اســت؛ هم نیم‌ساز دارد، هم نیم‌سازهایش همرسند و برخی ویژگی‌های دیگر.

وظیفهٔ افراد باســواد، به‌ویژه معلمان، این است که جامعه را با استفاده از مهارت‌های حرفه‌ای خود به‌درستی آگاه کنند. هر روز صدها نتیجهٔ جدید در بهینه کردن این مهارت‌ها به‌دست می‌آید. ریاضیات در ظاهر یک مشــت خطــوط متشــکل از علائم و نمادهاســت که در نگاه اول بی‌معنی‌اند و شــخص را ســردرگم می‌کنند. کار دانشــمند ریاضی نوشتن این خطوط است، اما کار معلم ریاضی نمایان کردن معنی این خطوط ســاکت و سرد و مرده است. این خطوط وقتی زده می‌شوند که بتوان آن‌ها را توضیح داد. این خطوط یک ارکستر سمفونیک هستند، اما کســی صدای آن‌ها را نمی‌شنود. این معلم است که باید صدای آن‌ها را بشنود و منتقل کند.

اســتاد، در مورد ایده‌ای که شما در آموزش ریاضی بــه نام «ارتباط ماری» یــا "snake connection" مطرح کرده‌اید، توضیحاتی بفرمایید.

معلمی در کلاس درس یک روســتا حاضر شــد و پای تابلو نوشــت مار، و گفت تکرار کنید. هیچ‌کدام از بچه‌هــا تکرار نکردند. معلــم دیگری «الف» مار را به «ر» چســباند و گفت تکــرار کنید مار، همه یک مــار دیدند و گفتند مار. معلم دوم حقه‌باز نبود، ولی می‌دانســت بچه‌ها بی‌سوادند. این هنر معلمی است. در آموزش ریاضی باید به‌دنبال این ارتباط‌های ماری بود. اثبات‌های بدون کلام و اثبات‌های ســینماتیک برای فهم دانش‌آموزان معجزه می‌کند.

دربارهٔ کاربردی که ریاضی در آموزش بهینه‌سازی زندگی شهروندی دارد، توضیحاتی بفرمایید؟

یکــی از موضوعاتــی کــه ریاضی به مــا می‌آموزد، دقت اســت. مثلاً شخصی از خانمش می‌پرسد: فلان وســیله کجاســت؟ او می‌گوید: پهلــوی یخچال. اما در ایــن خانه چند یخچال وجــود دارد، حالا منظور کدام یخچال و کدام پهلوست. یک خانم ریاضی‌دان هیچ‌وقت این‌طور آدرس نمی‌دهد.

یکــی دیگــر از موضوعات این اســت که اگر دو ریاضی‌دان بخواهند مباحثه کنند، اول هر کدام باید مشــخص کند چه دستگاه، چه اصول و چه تعاریفی دارد. مثلاً در دســتگاه هندســهٔ اقلیدســی خطوط مــوازی یــک تعریف دارند و در دســتگاه هندســه نااقلیدســی تعریف چیز دیگری اســت. در دستگاه هندسهٔ پوانکاره هم تعریف خطوط موازی باز چیز دیگری اســت. شما اگر در یک دســتگاه نیستید یا اصول متفاوت دارید، یا حتی تعاریف شــما یکســان نیست، مسلماً دچار اختلاف می‌شوید.

پس اول لازم است شما در یک دستگاه مشترک باشید و به یک توافق در مورد اصول و تعاریف برسید بعد وارد مباحثه شوید. در اصطلاح ادبا، شما باید اول هم‌دل باشید بعد هم‌زبان:

هم‌دلی خود یک زبان دیگر است
هم‌دلی از هم‌زبانی بهتر است
ای بسا دو ترک چون بیگانگان
ای بسا که هند و کرد هم‌زبان

اصل چیزی است که در آن هیچ شکی نباشد، مثل وجود خداوند. اگر دو نفر هم‌زبان باشند، اما یکی به اصل وجود خدا معتقد باشد و دیگری معتقد نباشد، هم‌زبانی این دو را به توافق نهایی نمی‌رساند.

مورد دیگر اینکه ریاضی و خصوصاً هندسه به شما در پرورش طرز فکر منطقی یاری می‌دهد. همین منطق مثلاً به یک سیاست‌مدار کمک می‌کند، اولاً بداند چه فرضیات و داده‌هایی دارد، ثانیاً می‌خواهد به چه هدفی برسد، و ثالثاً با چه راهبردی و چه مبانی و اصولی- که نمی‌تواند و نباید از آن‌ها عدول کند- می‌خواهد به این هدف برسد. پس یک نظم ذهنی و یک چارت منطقی پیش روی او قرار می‌گیرد.

استاد آیا این درست است که بگوییم ریاضی یک زبان بین‌المللی است؟

امروز سخت‌ترین کار برای ریاضی‌دان این است که بگوید ریاضی چیست. بعضی صحبت‌ها جامع نیستند. مثلاً یک جمله هست که می‌گوید: ریاضی زبان علم است و دیگری می‌گوید زبان علم، ریاضی است و این درست‌تر است. ریاضی به صورت مجرد مسیر خود را می‌پیماید و بقیهٔ علوم برای بیان مدل‌سازی‌های خود یا انجام محاسبات یا تنظیم فرمول‌های خود سراغ ریاضی می‌روند.

اگر یک مدل‌سازی ریاضی در یک علم به جواب‌های واقعی برسد، آن مطالعه ارزش علمی پیدا می‌کند؛ چه در اقتصاد، چه در شیمی و چه در رشته‌های دیگر. در تمام اتفاقات و معجزه‌هایی که در علم و فناوری اتفاق می‌افتند، ردپای ریاضی به وضوح دیده می‌شود.

استاد چند توصیه برای مدرسان ریاضی بفرمایید.

به ایشان می‌گویم:
- ترس از ریاضی را از دانش‌آموزان دور کنید.
- ریاضی طرح مسائل پیچ‌درپیچ نیست، ریاضی بیان هنرمندانه یک مفهوم فکری است. ریاضی تفکر منطقی است.
- برای دانش‌آموزان از همان دبیرستان پروژه‌های واقعی طراحی کنید. مقالات کاذب و کپی‌برداری ارزش علمی ندارند.
- ارزشیابی سنتی باید تصحیح شود. حداقل قسمتی از امتحان، کتاب باز باشد.
- دانش‌آموزان را به جست‌وجو در منابع و پرسیدن از اشخاص متخصص علاقه‌مند کنید. قسمتی از نمرهٔ امتحان را به این پیگیری‌ها اختصاص دهید. این‌ها تقلب نیست. پیدا کردن منبع و متخصص یک هنر است. البته نه اینکه ما «میکسر» کارهای دیگران باشیم؛ مثل وضعیت اسفبار تهیهٔ مقالات که امروز دچار آن هستیم.

استاد در مورد ارتباط ریاضی و ادبیات مطالبی بفرمایید.

رشته‌های ریاضی و ادبیات به هم نزدیک‌ترند تا رشته‌های ریاضی و مهندسی که از ریاضی استفاده می‌کنند. حداقل دو نوع قرابت بین ادبیات و ریاضی وجود دارد:

۱. هر دو رشته ساختار منظمی دارند. برای گفتمانی که بیان‌کنندهٔ یک مفهوم یا یک موضوع است، ابزارها متفاوت‌اند، اما هر دو دارای قالب‌ها و قانون‌های تعریف‌شده‌ای هستند.

۲. وجه اشتراک دیگر، وجود لایه‌های پنهان زیر لایهٔ ظاهری است. اگر همه‌چیز نوشته می‌شد، فهمیدن معنایی نداشت. اما در برخی متون خطوط ظاهراً خالی حاوی مطالب مهمی هستند که فقط باید خودت آن‌ها را بفهمی.

با سپاس از وقتی که به ما دادید.

اصل چیزی است که در آن هیچ شکی نباشد، مثل وجود خداوند. اگر دو نفر هم‌زبان باشند، اما یکی به اصل وجود خدا معتقد باشد و دیگری معتقد نباشد، هم‌زبانی این دو را به توافق نهایی نمی‌رساند

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی
دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.
نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.
منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۹۱. a عددی است حقیقی به‌طوری که: $a^{2}+\frac{1}{a^{2}}=14$. مقدار $a^{3}+\frac{1}{a^{3}}$ را به‌دست آورید.

۱۹۲. بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که عدد $K=75!-71!$ را می‌شمارد.

۱۹۳. a، b و c اعدادی صحیح هستند، به‌طوری که: $1\le a<b<c$ و $a^{2}+b^{2}+c^{2}=14(a+b+c)$. حاصل $a+b+c$ چه‌قدر است؟

۱۹۴. ریشه‌های معادلهٔ $(x^{2}-2x+m)(x^{2}-2x+n)=0$ که در آن $m,n\in R$، یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول $\frac{1}{4}$ تشکیل داده‌اند. حاصل $|m-n|$ را به‌دست آورید.

۱۹۵. x و y دو عدد طبیعی هستند، به‌طوری که: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{11}{12}$. آن‌ها را بیابید.

۱۹۶. ریشه‌های معادلهٔ $[x^{3}]+[x^{2}]+[x]=\{x\}-1$ را به‌دست آورید. ($[x]$ نشان‌دهندهٔ جزءصحیح x و $\{x\}=x-[x]$).

۱۹۷. با فرض $f(x)=x^{2}+12x+30$، ریشه‌های معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$f(f(f(f(f(x)))))=0$$

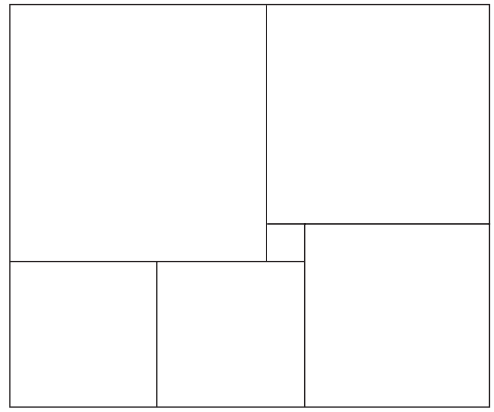
۱۹۸. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با: a، $2a+2d$ و $2a+3d$، که a و d دو عدد مثبت هستند. نسبت $\frac{a}{d}$ را بیابید.

۱۹۹. حاصل عبارت زیر را برحسب n به‌دست آورید:

$$A=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})...(1-\frac{1}{n^{2}})$$

۲۰۰. در شکل مستطیلی را می‌بینید که با ۶ مربع

پوشانده شده است. اگر ضلع کوچک‌ترین مربع، برابر یک باشد، ضلع بزرگ‌ترین مربع چه‌قدر است؟



■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۶۱. با فرض $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ و با فرض $f_۱(x)=f(x)$، $f_k=f_۱ o f_{k-۱}$. مطلوب است مقدار $f_{۲۰۱۵}(۲۰۱۵)$.

با محاسبهٔ $f_۲$، $f_۳$ و $f_۴$ داریم:

$$f_۲(x)=\frac{-۱}{x},\quad f_۳(x)=\frac{x+۱}{۱-x},\quad f_۴(x)=x$$

در نتیجه این چهار تابع متناوباً تکرار می‌شوند. پس:

$$f_{۲۰۱۵}(x)=f_۳(x)=\frac{x+۱}{۱-x}$$

و در نهایت: $f_{۲۰۱۵}(۲۰۱۵)=-\frac{۲۰۱۶}{۲۰۱۴}$.

۱۶۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$S=\frac{۱}{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}$$

داریم: $\frac{۱}{\sqrt{k}+\sqrt{k+۱}}=\sqrt{k+۱}-\sqrt{k}$. در نتیجه:

$$S=\sqrt{۲}-\sqrt{۱}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\dots+\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹}$$
$$=\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۱}=۱۰-۱=۹$$

۱۶۳. N عددی است که در آن هر رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ دقیقاً ۳بار به‌کار رفته، اما رقم ۸ در این عدد به‌کار نرفته است. ثابت کنید N مربع کامل نیست.

مجموع ارقام N برابر است با:

$۹k+(۱+۲+...+۷)\times۳=۸۴+۹k$

در نتیجه N مضرب ۳ است. پس اگر N مربع کامل باشد، باید مضرب ۹ نیز باشد که چنین نیست.

۱۶۴. برای هر عدد طبیعی n، f(n) برابر است با تعداد روش‌های نوشتن n به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی. مانند: $n=a_۱+a_۲+...+a_k$، به‌طوری که: $a_۱\le a_۲\le...\le a_k\le a_{k+۱}$. برای مثال: $f(۴)=۴$، چون: $۴=۲+۲=۱+۱+۲=۱+۱+۱+۱$. اکنون f(n) را برحسب n به‌دست آورید.

ثابت می‌کنیم: $f(n)=n$. برای هر $۱\le k\le n$ ثابت می‌شود تنها یک جواب برای معادلهٔ $a_۱+a_۲+...+a_k=n$ با شرط $۱\le a_۱\le a_۲\le...\le a_k\le a_k+۱$ وجود دارد. برای اثبات، فرض کنید: $n=kq+r$ که در آن $۰\le r<k$. در این صورت:

$n=r(q+۱)+(k-r)q$. در نتیجه:

$a_۱=a_۲=...=a_{k-r}=q\ ,\ a_{k-r+۱}=....=a_k=q+۱$

از طرف دیگر، اگر: $a_۱=a_k$، داریم: $a_۱=\frac{n}{k}$ و اگر $a_k=a_۱+۱$، آن‌گاه:

$$ka_۱\le a_۱+...+a_k<k(a_۱+۱)\Rightarrow a_۱\le\frac{n}{k}<a_۱+۱$$
$$\Rightarrow a_۱=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor.$$

بنابراین برای هر $۱\le k\le n$، دقیقاً یک جواب و در مجموع n جواب وجود دارد.

۱۶۵. آیا توانی از ۲ وجود دارد که چهار رقم سمت راستش برابر ۲۰۱۴ باشد؟

خیر. اگر ۲^α چهار رقم سمت راستش ۲۰۱۴ باشد، آن‌گاه: $۲^\alpha=۱۰^۴k+۲۰۱۴$. با تقسیم دو طرف بر دو داریم: $۲^{\alpha-۱}=۵۰۰۰k+۱۰۰۷$. طرف اول زوج و طرف دوم فرد است (تناقض).

۱۶۶. جملهٔ ۲۰۱۵-اُم در دنبالهٔ ...,۱,۲,۲,۳,۳,۳,۴,۴,۴,۴ را به‌دست آورید.

باید دنبال مقدار n بگردیم، به‌طوری که:

$۱+۲+...+n\le۲۰۱۵<۱+۲+...+n+(n+۱)$

که برای n به جواب $n=۶۲$ می‌رسیم. در واقع: $۶۲+(۶۲+...+۲+۱)=۲۰۱۵$. در نتیجه جملهٔ ۲۰۱۵-ام برابر است با ۶۳.

۱۶۷. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی فرد n، $1^n+2^n+...+n^n$ بر n^2 بخش‌پذیر است.

با فرض x+y=n خواهیم داشت: $y \overset{n}{\equiv} -x$، در نتیجه:

$$A = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... + y^{n-1} \overset{n}{\equiv} nx^{n-1} \overset{n}{\equiv} 0$$

در نتیجه: $n^2 \mid (x+y)A = x^n + y^n$. بنابراین:

$$n^2 \mid 1^n + (n-1)^n + 2^n + (n-2)^2 + ... + (\frac{n-1}{2})^n + (\frac{n+1}{2})^n + n^n$$

۱۶۸. nضلعی منتظمی در صفحه رسم شده است، به‌طوری که هیچ‌کدام از اضلاع آن عمودی نیست. اگر m_1، m_2، ... و m_n به ترتیب شیب اضلاع باشند، ثابت کنید:

$m_1m_2+m_2m_3+...+m_{n-1}m_n+m_nm_1=-n$

می‌دانیم بین شیب‌های دو خط متقاطع و زاویهٔ بین آن دو، رابطهٔ زیر برقرار است: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$

در نتیجه: $m_1m_2 = \frac{m_2-m_1}{\tan\alpha} - 1$. حال در یک n-ضلعی منتظم تمام زاویه‌ها برابرند. پس:

$$m_1m_2 + m_2m_3 + ... + m_nm_1 = \frac{m_2-m_1}{\tan\alpha} - 1 + \frac{m_3-m_2}{\tan\alpha} - 1 + ... + \frac{m_1-m_n}{\tan\alpha} - 1 = -n$$

۱۶۹. نه خط راست داریم که هر کدام مربع ABCD را به دو چهارضلعی با نسبت مساحت ۲ به ۳ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید سه‌تا از این خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

دو قطر مربع را رسم کنید و هر کدام از آن‌ها را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنید. دو نقطهٔ وسط از هر قطر را در نظر بگیرید. ثابت می‌شود هر خطی که مربع را به دو چهارضلعی به نسبت ۳ به ۲ تقسیم می‌کند، از یکی از این چهار نقطه می‌گذرد (اثبات به عهدهٔ خودتان). حال چون نه خط راست داریم، طبق اصل لانهٔ کبوتر، حداقل ۳ تا از آن‌ها از یکی از این چهار نقطه می‌گذرند.

۱۷۰. چندجمله‌ای P(x) از درجهٔ حداکثر n، n+1 ریشهٔ متمایز دارد. ثابت کنید: P(x) چندجمله‌ای صفر است (P(x)=0 به ازای هر $x \in R$).

به روش استقرا حکم را ثابت می‌کنیم. اگر چندجمله‌ای P از درجهٔ ۱ باشد و دو ریشه داشته باشد، به وضوح مشخص است که خط راست با شیب صفر یعنی P(x)=0 است. فرض کنید حکم برای n=k برقرار است و چندجمله‌ای P(x) از درجهٔ k+1 را در نظر بگیرید. چون P، k+2 ریشه دارد، پس فرض کنید α یکی از ریشه‌های آن باشد. در نتیجه P(x) بر x-α بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت، یک چندجمله‌ای از درجهٔ k خواهد بود که k+1 ریشه دارد. در نتیجه طبق فرض استقرا، چندجمله‌ای خارج‌قسمت، چندجمله‌ای ثابت صفر خواهد بود. در نتیجه P(x) نیز چندجمله‌ای ثابت صفر است.

۲ پرسش‌های پیکارجو!

محیط مثلثی با اضلاع به طول اعداد طبیعی، که در دایره‌ای به قطر ۶/۲۵ واحد محاط می‌شود، چه‌قدر است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۶ ج) ۱۸

د) ۱۹ هـ) ۲۰

۵. آقا و خانمی وارد فروشگاهی می‌شوند. آقا ۲۰/۰۰۰ تومان برای خرید چیزی می‌پردازد که ارزش آن ۱۰/۰۰۰ تومان است و به آن نیاز دارد. خانم ۱۰/۰۰۰ تومان برای خرید چیزی می‌پردازد که ارزش آن ۲۰/۰۰۰ تومان است و به آن نیاز ندارد! سود (زیان) هر یک چه‌قدر است؟!

تفریح اندیشه!

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اصطلاحات و لغات مهم

1. Real number	عدد حقیقی
2. Graph	نمودار - شکل
3. Function	تابع
4. Positive	مثبت
5. Properties	خاصیت‌ها
6. Operations	اعمال
7. counterexample	مثال نقض
8. Statement	گزاره
9. prime number	عدد اول
10. Hypothesis	فرض
11. prime number	مضرب
12. Least common multiple	کوچک‌ترین مضرب مشترک

مثال ۱. برای تمام اعداد حقیقی $x>0$، $x^3>x^2$.
بحث: این ممکن است یک ایدهٔ خیلی خوب برای رسم تابع‌های x^2 و x^3 برای مقایسهٔ آن‌ها باشد. فرض کنیم:
الف) عدد x یک عدد حقیقی مثبت است (ما می‌توانیم از همهٔ خواص و اعمال اعداد حقیقی بهره ببریم).
ب) $x^3>x^2$
اثبات: بیایید یک مثال نقض را ببینیم. اگر $x=0/5$، آن‌گاه $x^3=0/125$ و $x^2=0/25$. بنابراین، در این حالت $x^3<x^2$. بنابراین گزارهٔ فوق نادرست است.

مثال ۲. اگر یک عدد صحیح مثبت توسط یک عدد اول عاد شود (بر یک عدد اول بخش‌پذیر باشد)، در این صورت آن عدد، اول نیست.
اثبات: گزاره نادرست است. عدد اولِ ۷ را در نظر می‌گیریم. این عدد، عددی صحیح و مثبت است و توسط عدد اول ۷ عاد می‌شود (در واقع $\frac{7}{7}=1$). بنابرایـن در فرض صدق می‌کند. ولی ۷ عددی اول است. پس نتیجه نادرست است.

مثال ۳. اگر یک عدد صحیح، مضرب ۱۰ و ۱۵ باشد، آنگاه آن عدد، مضرب ۱۵۰ است.
اثبات: گزاره نادرست است. کافی است کوچک‌ترین مضرب مشترکِ ۱۰ و ۱۵، یعنی ۳۰ را در نظر بگیریم. این عدد مضرب ۱۰ و ۱۵ است، اما مضرب ۱۵۰ نیست. ■

EXAMPLE 1. For all real numbers $x>0$, $x^3>x^2$.
Discussion: It might be a good idea to graph the functions x^2 and x^3 to compare them. Let

A: The number x is a positive real number.
(We can use all the properties and operations of real numbers.)
B: $x^3>x^2$.
Proof. Let us look for a counterexample. If $x=0.5$, then $x^3=0.125$ and $x^2=0.25$. Therefore, in this case, $x^3<x^2$. So the statement is false. ■

EXAMPLE 2. If a positive integer number is divisible by a prime number, then it is not prime.
Proof. The statement is false. Consider the prime number 7. It is a positive integer number and it is divisible by the prime number 7 (indeed $7/7=1$). So it satisfies the hypothesis. But 7 is a prime number. Thus the conclusion is false. ■

EXAMPLE 3. If an integer is a multiple of 10 and 15, then it is a multiple of 150.
Proof. The statement is false. Just consider the least common multiple of 10 and 15, namely 30. This number is a multiple of 10 and 15, but it is not a multiple of 150. ■

ترجمه برای دانش‌آموز

EXAMPLE 4. Let a be an even number, with $|a|>16$. Then either $a\geq18$ or $a\leq-18$.
Proof
Hypothesis:
A: The number a is an even number, with $|a|>16$.
(*Implicit hypothesis:* The number a is an integer.)
Conclusion:
B: $a\geq18$
C: $a\leq-18$.
Because $|a|>16$, we have two possible cases:
1. $a>16$.
2. $a<-16$.
Assume that $a>16$. The number a is even, so it cannot be 17. Thus a must be at least 18; that is, $a\geq18$. Then, in this case the conclusion is true because B is ture.
Assume that $a<-16$. The number a is even, so it cannot be -17. Thus a must be at most -18; that is, $a\leq-18$. Then, in this case the conclusion is ture because C is true. ■

روشی جبری برای حل یک مسئلهٔ هندسی

مصطفی مرادی
دانش‌آموز سوم ریاضی
دبیرستان نمونهٔ تربیت
خراسان جنوبی
بیرجند

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ کسینوس‌ها، دایره‌های مماس

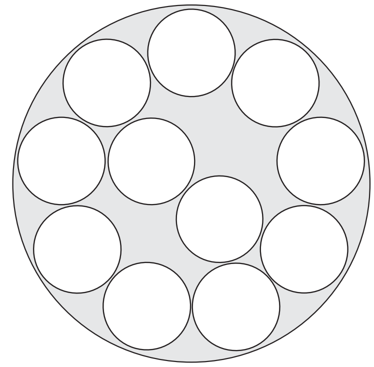
مقدمه

اگر از شما بپرسند که در مستطیلی به ابعاد ۴×۳ چند مربع به ضلع ۲ جای می‌گیرد، به سرعت می‌گویید ۲ تا. حال اگر از شما بپرسند که در دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر چند مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جای می‌گیرد، کمی مسئله سخت‌تر می‌شود. اما اگر بگویند در دایره‌ای به شعاع ۵ چند دایره به شعاع ۱ جای می‌گیرد چه‌طور؟ اگر سه دایره را در نزدیک‌ترین حالت کنار هم قرار بدهید متوجه می‌شوید که به راحتی نمی‌توان تصمیم گرفت. مطمئناً پاسخ به این مسئله فقط از راه رسم هندسی امکان‌پذیر است.

برای فهم مطلب فرض کنید می‌خواهید درون یک بشقاب (البته کاملاً دایره‌ای شکل) سکه‌های ۲۰۰ تومانی جای بدهید! و این سکه‌ها نمی‌توانند روی هم قرار بگیرند، بلکه باید کنار هم قرار بگیرند. شرط ما هم برای حل تمام مسائل مانند این مسئله این است که دایره‌های کوچک روی هم‌دیگر واقع نشوند (هم‌پوشانی نداشته باشند.) و در نزدیک‌ترین حالت بر هم مماس باشند.

در واقع ما می‌دانیم که در دایره‌ای به شعاع R حداقل یک دایره با شعاع K ($K<R$) جای خواهد گرفت. اما می‌خواهیم بدانیم حداکثر گنجایش دایرهٔ بزرگ‌تر برای دایره‌های کوچک چه‌قدر است.

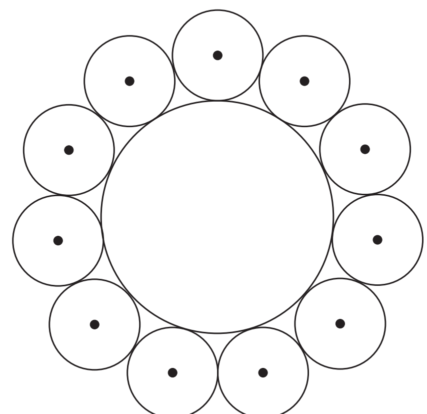
در این مقاله یک الگوریتم جبری برای حل این نوع مسائل ارائه می‌کنم تا بتوانیم به راحتی حداکثر گنجایش هر دایره را برای دایره‌های کوچک‌تر محاسبه کنیم.



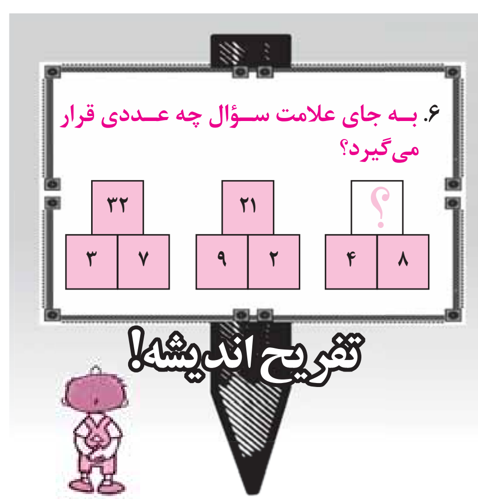
شکل ۱ حداکثر گنجایش یک دایره به شعاع ۴cm برای دایره‌هایی با شعاع ۱cm، ۱۱ دایره است.

الف) اثبات یک رابطهٔ موردنیاز پیش از حل مسئله

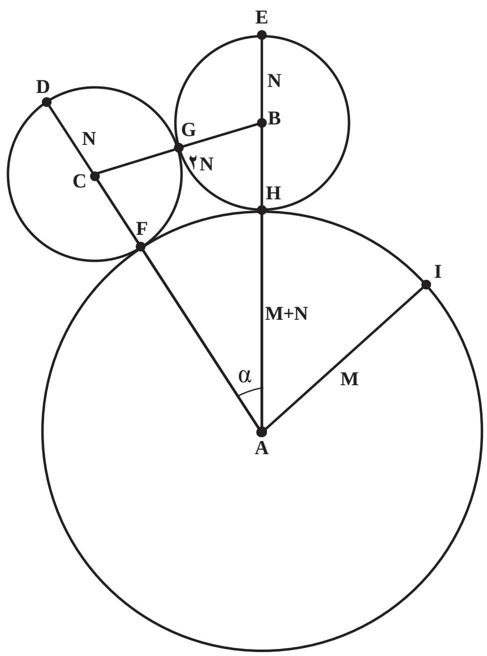
چگونه حداکثر تعداد دایره‌های هم‌شعاع (با شعاع N) مماس بر دایره به شعاع M را به‌دست آوریم؟ برای درک مطلب به شکل ۲ توجه کنید:



شکل ۲



برای محاسبه، مرکزهای دو دایرهٔ کوچک (B و C) را به هم متصل می‌کنیم. سپس هر دو مرکز را به مرکز دایرهٔ بزرگ وصل می‌کنیم تا مثلث ABC به‌دست آید (شکل ۳).



شکل ۳

می‌توانیم زاویهٔ α را از رابطهٔ زیر به‌دست بیاوریم. با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$(2N)^2 = (M+N)^2 + (M+N)^2 - 2(M+N)(M+N)\times\cos\alpha$$

$$\to 4N^2 = 2(M+N)^2 - 2(M+N)^2\times\cos\alpha$$

$$\to 2(M+N)^2\times\cos\alpha = 2(M+N)^2 - 4N^2$$

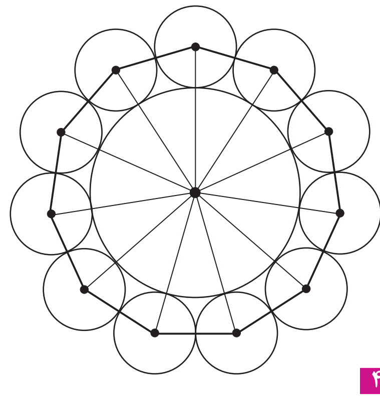
$$\to \cos\alpha = \frac{2(M+N)^2 - 4N^2}{2(M+N)^2}$$

$$\to \cos\alpha = 1 - \frac{4N^2}{2(M+N)^2} = 1 - \frac{2N^2}{(M+N)^2}$$

$$\to \alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2N^2}{(M+N)^2}\right)$$

حال به شکل ۴ توجه کنید:

با توجه به شکل می‌بینیم که برای هر مرکز دایرهٔ مماس خطی وجود دارد که مرکزهای دایره‌ها را به‌هم متصل می‌کند، همچنین، به ازای هر خط زاویه‌ای، مقابل آن‌که همان α است، وجود دارد. پس اگر بدانیم در



شکل ۴

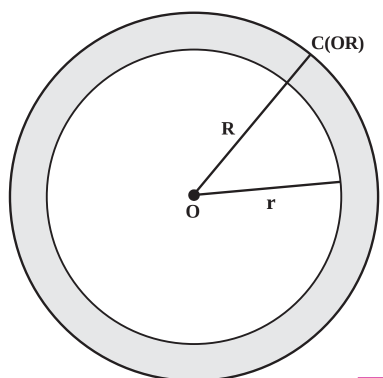
یک دایره چند زاویهٔ α داریم، می‌توانیم تعداد دایره‌های مماس را هم حدس بزنیم.

$$D=\left[\frac{۳۶۰}{\alpha}\right]=\text{تعداد دایره‌های مماس}$$

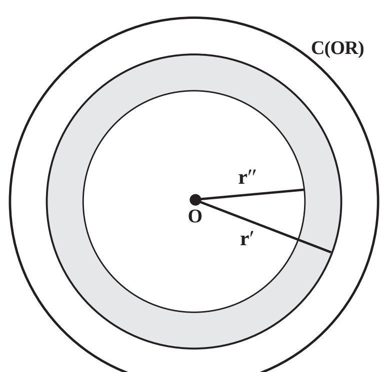
بنابرایـــن تعداد دایره‌هـــای مماس به شـــعاع N بر دایره‌ای به شعاع M برابر مقدار D است.

ب) حلقه

اکنون به دو شکل ۵ و ۶ توجه کنید:



شکل ۵



شکل ۶

در شکل‌های مزبور قسمت رنگ شده را حلقه (L)[۱] می‌نامیم و این‌گونه تعریف می‌کنیم: «حلقه عبارت‌است از ســـطح محصور به دو دایره که در دایرهٔ C(O,R) قرار می‌گیرد.»

با توجه به دو شکل ۵ و ۶ می‌توان برای هر حلقه یک طول به‌صورت مقابل تعریف کرد:

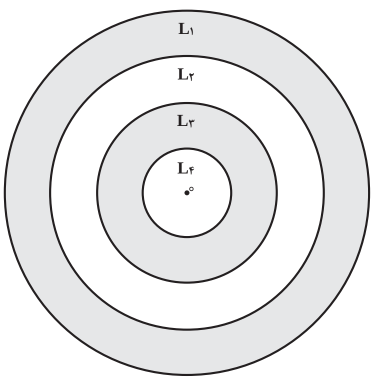
طول حلقهٔ شکل ۵ : $W_L=R-r$

طول حلقهٔ شکل ۶ : $W_L=r'-r''$

ممکن است یک دایره با شعاع R (C(O,R)) چندین حلقه با طول برابر داشـــته باشـد. آن‌گاه حداکثر تعداد حلقه‌هـــا که طول برابـــر دارند، به‌صورت زیر محاســـبه می‌شود:

$$\text{حداکثر تعداد حلقه‌ها}=\left[\frac{R}{W_{\text{(طول حلقه‌ها)}}}\right]$$

سپس حلقه‌ها را به‌ترتیب از دورترین حلقه نسبت به مرکز دایره ($L_۱$) شماره‌گذاری می‌کنیم (شکل ۷).



شکل ۷

نکتهٔ ۱: در دایرهٔ شـــکل ۳ و دایره‌های مشـــابه که $R=n\times w$ (یعنی شـــعاع دایرهٔ بزرگ مضرب صحیحی از طول حلقه است)، آخرین حلقه (در شکل ۷، $L_۴$) گرچه مانند یک دایره است، باز هم یک حلقه محسوب می‌شود.

طرح مسئله و روش حل آن

در یک دایره به شعاع R حداکثر چند دایره به شعاع K جای خواهد گرفت؟ (شـــرط اول: R>K – شرط دوم:

دو دایره هم شعاع در داخل دایرهٔ بزرگ حداکثر یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند (نقطهٔ تماس)- شرط سوم: دایره‌های کوچک نباید هم‌مرکز باشند.)

برای حل این مسئله ابتدا حداکثر تعداد حلقه‌ها را (مانند قسمت ب) به‌دست می‌آوریم (طول حلقه‌ها را برابر $2k$ در نظر می‌گیریم):

$$\text{تعداد حلقه‌ها} = \left[\frac{R}{2k}\right]$$

سپس تعداد دایره‌های مماس (دایره با شعاع K) به محیط داخلی هر حلقه را (طبق قسمت الف) محاسبه می‌کنیم. یک دایره هر تعداد حلقه داشت و آن حلقه هر تعداد دایره بر محیط خود داشت، جواب آخر مجموع تعداد دایره‌های مماس بر حلقه‌هاست.

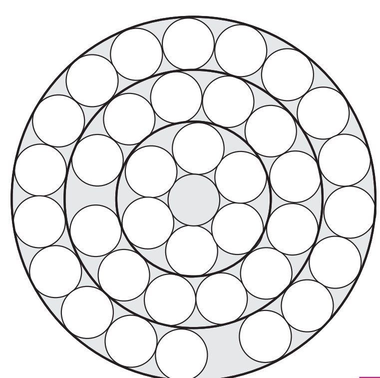
نکتهٔ ۲. اگر رقم اعشاری مرتبهٔ دهم حاصل تقسیم (قبل از گرفتن جزءصحیح)، ۰/۵ یا بزرگ‌تر از آن شد، به جواب آخر یک واحد می‌افزاییم.

مثال:

R=۵cm, K=۱cm → $\frac{۵}{۲}$ =۲/۵

R=۱۳cm, K=۵cm → $\frac{۱۳}{۵}$ =۲/۶

در دو مثال بالا، رقم اعشاری مرتبهٔ دهم ۰/۶ و ۰/۵ است. در نتیجه به محاسبات آخر یک واحد می‌افزاییم. علت این کار آن است که وقتی تقسیم را انجام می‌دهیم و جزءصحیح می‌گیریم، در واقع ممکن است که در مرکز دایره حلقه‌ای نداشته باشیم. اما شاید بتوان دایره‌ای را در مرکز قرار داد که در آن صورت به حاصل نهایی یک واحد می‌افزاییم.



شکل ۸

شعاع هر حلقه چه‌قدر است و تعداد دایره‌های مماس بر محیط آن چگونه به‌دست می‌آیند؟ مانند آنچه که در قسمت ب گفته شد، حلقه را شماره‌گذاری می‌کنیم. سپس طبق آنچه در قسمت الف گفته شد، مقدار B را برای هر حلقه به‌صورت جداگانه در فرمول ۱ محاسبه می‌کنیم (مقدار B در واقع مجموع شعاع حلقه + شعاع دوایر کوچک -K- است که برای سهولت در محاسبات استفاده می‌شود) و در ادامه آن را در فرمول ۲ قرار می‌دهیم تا α به‌دست آید. بعد با تقسیم عدد ۳۶۰ بر α، جزء صحیح این حاصل تقسیم را به‌دست می‌آوریم (فرمول ۳). عدد به دست‌آمده (D)تعداد دایره‌های مماس بر حلقه است. برای همهٔ حلقه‌ها به همین ترتیب مقدار D حلقه را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا مقدار C (گنجایش دایره) برای آن دایره به‌دست آید (فرمول ۴. در هنگام جمع این مقادیر حتماً باید به نکتهٔ ۲ توجه کنیم).

فرمول ۱ B[2] $= R-(2L-1)\times k$

فرمول ۲ $\alpha = \cos^{-1}\left(1-\frac{2\times K^2}{B^2}\right)$

فرمول ۳ $\left[\frac{360}{\alpha}\right] = D$

فرمول ۴ [3] $C = DL_1 + DL_2 + DL_3 + \ldots + DL_n$

مثال:

در یک دایره به شــعاع ۵ ســانتی‌متر چند دایره به شعاع ۱ سانتی‌متر جای خواهد گرفت؟ (K=۱, R=۵)

ابتدا تعداد حلقه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{R}{۲K}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

نکتهٔ ۳. باید توجه داشت:

۱. جزء صحیح حاصل این تقسیم تعداد حلقه‌هاست (در دایره ۲ حلقه داریم).

۲. رقم دهم خارج‌قســمت ۰/۵ شــد. پــس باید به حاصل محاسبات یک واحد اضافه کنیم.

محاســبهٔ مقدار D برای حلقهٔ ۱ (L=۱): ابتدا B را برای این حلقه به‌دست می‌آوریم:

$$B=۵-(۲\times۱-۱)\times۱=۴$$

حال B را در رابطهٔ زیر قرار می‌دهیم تا α به‌دســت آید:

$$\alpha=\cos^{-1}(۱-\frac{۲\times۱^{۲}}{۴^{۲}})=۲۸/۹۹۵۵\approx۲۹$$

ســپس D را بــرای حلقهٔ ۱ با تقســیم ۳۶۰ بر α و گرفتن جزء صحیح آن به‌دست می‌آوریم:

$$DL_{۱}=\left\lfloor\frac{۳۶۰}{۲۹}\right\rfloor=۱۲$$

و حال همین محاسبات را برای حلقهٔ ۲ (L=۲) انجام می‌دهیم:

$$B=۵-(۲\times۲-۱)=۲$$

$$\alpha=\cos^{-1}(۱-\frac{۲\times۱^{۲}}{۲^{۲}})=۶۰$$

$$DL_{۲}=\left\lfloor\frac{۳۶۰}{۶۰}\right\rfloor=۶$$

از آنجــا که این دایره بیشــتر از دو حلقه نداشــت، محاســبات همین‌جا پایان می‌پذیرد و جواب موردنظر، برابر مجموع مقدار Dها است؛ یعنی (در محاسبهٔ مجموع حتماً باید به نکتهٔ ۲ دقت کنیم):

$$C=DL_{۱}+DL_{۲}+DL_{۳}+...+DL_{n}$$

این دایره $C=۱۲+۶+۱^{(۴)}=۱۹$

در نتیجه در یک دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر، با توجه به محاسبات، ۱۹ دایره با شعاع ۱ سانتی‌متر جای خواهد گرفت.

*** پی‌نوشت**

۱. L از واژهٔ «loop» به معنی «حلقه» گرفته شده است.

۲. مقدار L همان شــماره‌ای اســت که به آن اختصاص داده‌ایم ($L_{۱}=۱$).

۳. C از ابتــدای کلمهٔ «capacity» به معنی حداکثر گنجایش و «ظرفیت» گرفته شده است.

۴. در اینجــا بــا توجه به نکتهٔ ۲، عدد ۱ به مجموع اضافه شــده است.

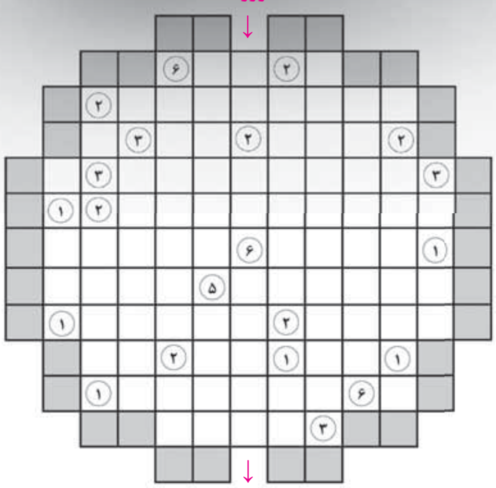
پرسش‌های پیکارجو!

۱۳۹۵ دانش‌آموز در جایی گرد آمده‌اند. آن‌ها را به دو گروه تقســیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب تعداد اعضای دو گروه را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه همین عمل را با دو گروه فوق انجام می‌دهیم و این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم که گروه‌های یک نفری ایجاد شوند. مجموع این حاصل‌ضرب‌ها کدام است؟

الف) $۱۳۹۵^{۲}$ ب) $۱۳۹۴^{۲}$ ج) ۱۳۹۵×۱۳۹۴ د) $\frac{۱۳۹۴\times۱۳۹۵}{۲}$ هـ) $\frac{۱۳۹۵^{۲}}{۲}$

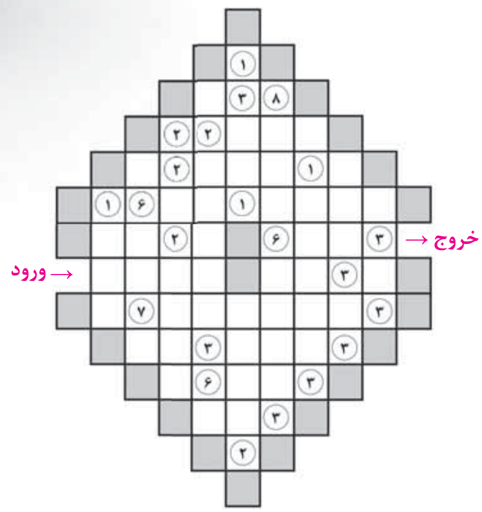
از شماره‌های قبل (شماره‌های ویژهٔ بهمن و اسفند- ۵ و ۶) با معماهای لابیرنت آشنا شده‌اید. یادتان هست که عددهای داخل خانه‌های لابیرنت معرف تعداد خانه‌های سفید موجود در راستای افقی و عمودی آن خانه است و بقیهٔ خانه‌ها باید سیاه شوند که این خانه‌های سیاه دیوارهای لابیرنت را می‌سازند و به این ترتیب مسیر ورودی و خروجی لابیرنت هم مشخص می‌شود. در اینجا سه نمونهٔ دیگر از این لابیرنت‌ها را داریم که باید به‌وسیلهٔ شما طراحی و مسیر ورودی و خروجی آن‌ها هم مشخص شوند. مسئله‌ها به ترتیب دشواری مرتب شده‌اند!

ورود ↓

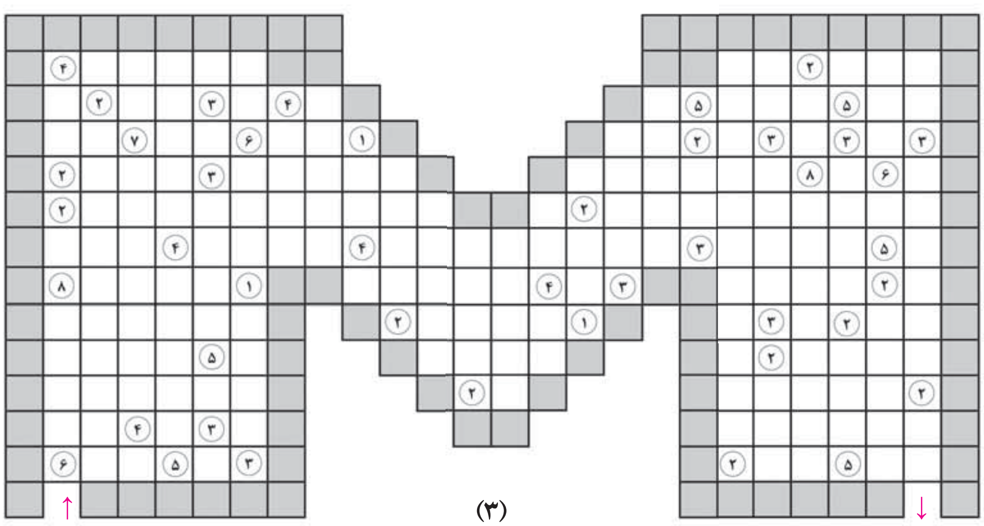


↓ خروج

(۲)



(۱)



↑ ورود

(۳)

↓ خروج

احسان یارمحمدی

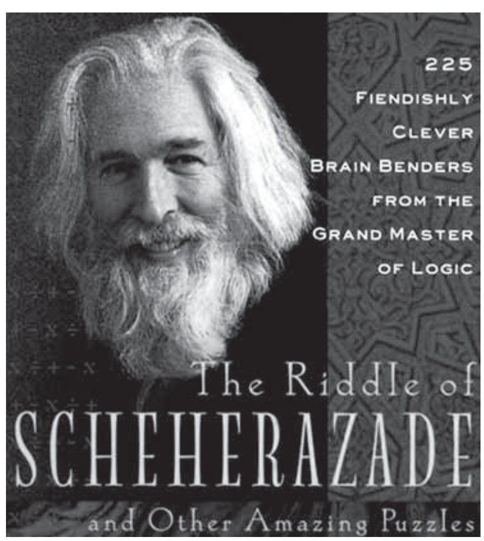
معماهای شهرزاد

- **نام کتاب:** معماهای شهرزاد[1]
- **مؤلف:** ریموند اسمولیان[2]
- **مترجم:** هوشنگ شرقی
- **ویراستار:** محمدرضا خانی
- **ناشر:** نشر علوم ریاضی ره‌آورد (وابسته به مؤسسه فرهنگی فاطمی- چاپ اول: ۱۳۹۴)
- **نشانی، تلفن، تارنما و رایانامه ناشر:**

نشانی: تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی، شماره ۱۴، کدپستی: ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱ تلفن: ۰۲۱-۸۸۹۴۵۵۴۵

تارنما: http:\\www.rahavardmath.ir

رایانامه: info@rahavardmath.ir



ریموند مِریل اِسمولیان یکی از نامدارترین ریاضی‌دانان، فلاسفه و منطق‌دانان معاصر است که به همین اندازه نیز در شعبده‌بازی و نواختن پیانو شهرت دارد. داشتن این ویژگی‌ها از ریموند اسمولیان شخصیتی چند بعدی ساخته که باعث شده است، دست به تألیف کتاب‌های متعدد ارزشمندی در زمینهٔ معماهای منطقی[3]، فلسفه و ریاضیات دانشگاهی بزند. در این مقاله قصد داریم به معرفی یکی از آثار وی به نام «معماهای شهرزاد» که به تازگی به فارسی برگردان شده است، بپردازیم. اما قبل از آن، نخست لازم می‌دانیم که به معرفی کتاب‌های دیگری از ریموند اِسمولیان دربارهٔ معماهای منطقی بپردازیم تا زمینه را برای داشتن آگاهی از وجود چنین آثار ارزشمندی برای علاقه‌مندان و توانمندان فن ترجمه فراهم سازیم. بنابراین امیدواریم در آیندهٔ بسیار نزدیک نیز شاهد ترجمه این کتاب‌های ارزنده به‌صورت جامع و مانع باشیم.

- 1978→What Is The Name of This Book?: The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles
- 1979→The Chess Mysteries of Sherlock Holmes: Introduction Retrograde Analysis in The Game of Chess
- 1981→The Chess Mysteries of The Arabian Knights: Second Book on Retrograde Analysis Chess Problems
- 1982→The Lady or Tiger?: Ladies, Tigers, and More Logic Puzzles

این کتاب توسط **محمد شریف‌زاده** با نام **معماهایی در منطق ریاضی** به فارسی برگردان شده و در سال ۱۳٦٦ خورشیدی در انتشارات فاطمی به زیور طبع آراسته شده است.

1982→Alice in Puzzle-Land

1985→To Mock a Mockingbird: Puzzles Based on Combinatory Logic

1987→Forever Undecided: Puzzles Based on Undecidability in Formal

1992→Satan, Cantor, and Infinity

1997→The Riddle of Scheherazade

2007→The Magic Garden of George B. and Other Logic Puzzles

2009→Logical Labyrinths

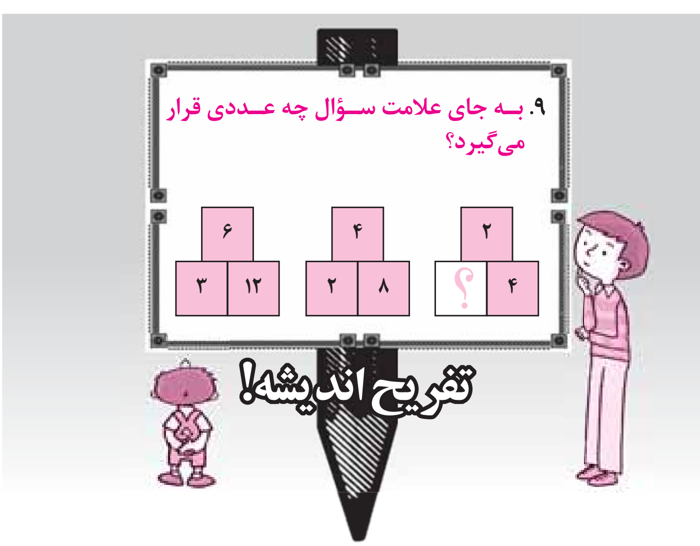
2010→King Arthur in Search of His Dog

2013→The Godelian Puzzles Book: Puzzles, Paradoxes, and Proofs

کتاب **معماهای شهرزاد** کتابی ۲۱۶ صفحه‌ای است که دربرگیرندهٔ سه بخش اصلیِ **کتاب اول** (شامل ۱۳ فصل)، **کتاب دوم** (شامل ۱۱ فصل) و بخش **راه‌حل‌های معماهای شهرزاد** است. کتاب حاوی معماهای منطقی است که به ترتیب از سطح مبتدی تا پیشرفته تنظیم شده‌اند و می‌توانند برای همهٔ علاقه‌مندان به این‌گونه از معماها جالب، سرگرم‌کننده و تفکربرانگیز باشند.

اما نخست و قبل از ورود بیشتر به موضوع کتاب مذکور، به این سؤال که چرا نام کتاب معماهای شهرزاد است و مثلاً معماهای **داریوش** یا معماهای **تهمینه** نیست، با توجه به آنچه که در فصل اول (سرچشمه) کتاب گنجانده شده است، می‌پردازیم:

به‌خاطر داریم که در نسخهٔ رایج کتاب «شب‌های عربی»[۴]، پادشاهی نسبت به خیانت ملکه‌اش بدگمان می‌شود و حکم به مرگ او می‌دهد. سپس قسم یاد می‌کند که هر شب زیباترین دوشیزهٔ سرزمین‌هایش را به همسری خود درآورد و صبح روز بعد او را تحویل جلاد دهد. این رفتار بی‌مانند غیرانسانی مدتی ادامه می‌یابد و موجی از وحشت را در شهر پراکنده می‌کند. مردم به جای دعای خیر و سپاسی که نثار پادشاهشان می‌کردند، حالا نفرت از او را در دل‌هایشان می‌پروراندند. اما دختر بزرگ صدراعظم پادشاه، **شهرزاد**، هوشمندانه توانست با ازدواج با



اگر مسئله‌ها سرچشمهٔ جوشندگی و حیات ریاضیات باشند، معماهای منطقی سرچشمهٔ خلاقیت و تفکر ریاضی هستند.

پادشاه بر این وضع مسلط شود (علی‌رغم هشدار جدی پــدرش) و ترتیبی داد تا خواهرش **دنیازاد** نیز با او در تالار عروسی بخوابد.

کمی قبل از پایان روز، شــهرزاد شروع می‌کرد به گفتن قصه‌ای عجیب برای خواهرش که شاه هم آن را می‌شــنید. وقتی موعد به جلاد سپردن می‌رسید، شاه آن‌قدر کنجکاو دانستن پایان قصه بود که اعدام را ۲۴ ســاعت دیگر به تعویق می‌انداخت. شــب بعد شهرزاد قصه را تمام می‌کرد، اما قصه‌ای دیگر را شروع می‌کرد و فرصت اتمــام آن را نمی‌یافت (و به همین ترتیب!)، شــاه هم یک روز دیگر اعدام را متوقــف می‌کرد. این ماجرا هزار و یک شــب ادامــه پیدا می‌کند و در پایان، پادشاه یا قسمش را فراموش می‌کند یا خودش را مقید به آن نمی‌کند و در نتیجه هم شــهرزاد زندگی دوباره می‌یابد، و هم اجرای فرمان وحشیانه متوقف می‌شود.

بــرای درک بهتر و بیشــتر معماهــای این کتاب خلاصه‌ای از پیشگفتار مترجم را در پی می‌آوریم:

اگــر مســئله‌ها سرچشــمهٔ جوشــندگی و حیات ریاضیــات باشــند، به گمــان من، معماهــای منطقی سرچشمه خلاقیت و تفکر ریاضی هستند. مزیت دیگر معماهای منطقی این است که چون به پایه‌های خاصی از دانــش ریاضی نیــاز ندارند، می‌تواننــد مورد توجه علاقه‌مندان، از هر ســن و ســال، و با هر سطح دانش ریاضی قرار بگیرند و به عمومی شــدن ریاضیات کمک شــایانی کنند. حل معماهــای منطقی (و ریاضی) یک ورزش فکری واقعی به‌شــمار مــی‌رود و از آنجا که این معماها با تفکر محض سروکار دارند و خواننده را درگیر محاسبات پیچیده ریاضی نمی‌کنند، به بالا رفتن توان خلاقیتی کمک می‌کنند. این معماها می‌توانند بســیار دشــوار باشند یا بسیار ســاده و ابتدایی. در این کتاب انواع متفاوتی از این معماهــا با روایت‌های زیبا مطرح شــده‌اند؛ معماهایی در قالب داستان‌های مشهور هزار و یک شب.

... نویسنده در این کتاب و دیگر کتاب‌های معمایی خود، هرجا که معماهای ریاضی خالصی را مطرح کرده، حتی‌الامکان کوشــیده است در حل این معماها از روش‌های جبــری پیچیده، معادله‌ها و دســتگاه‌های معادلات پرهیــز و با روش‌های توضیحــی یــا با تکیه بــر علم حســاب آن‌ها را حل کند. بــا این همه در ایــن کتاب رگه‌هایی از بحث‌های جدی منطق و فلســفهٔ ریاضی هم به چشم می‌خورد که زمینه‌ساز طرح معماهای بسیار پیچیده شده‌اند.

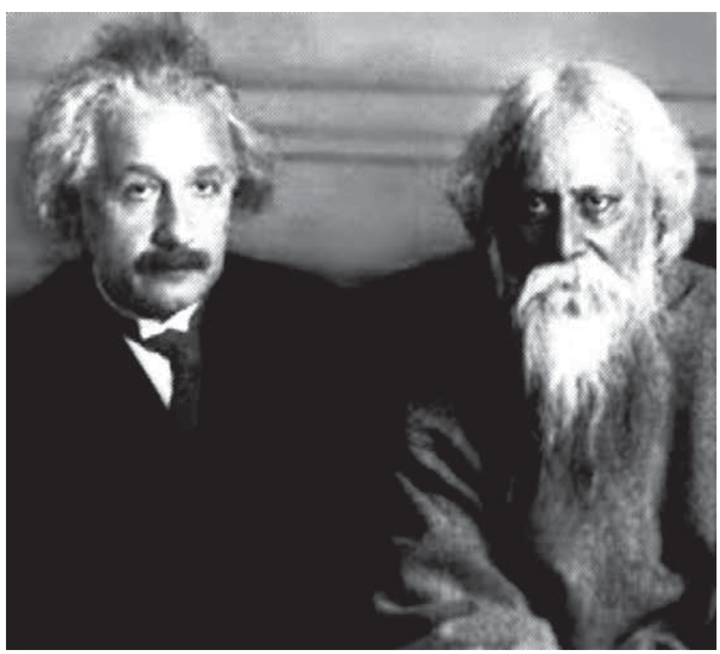
در پایــان این مقاله به ارائهٔ معمای فصل بیســتم (کدام شــخصیت؟) از این کتاب می‌پردازیم، تا قبل از تهیــه و مطالعهٔ کتاب معماهای شــهرزاد با گونه‌ای از معماهای آن آشنا شــوید و توانایی‌های ذهنی خود را در این زمینه آزمایش کنید.

کدام شخصیت؟

جــک و **جان** بــرادران دوقلــو هســتند و هر دو شخصیت‌های دوگانه (دو شــخصیتی) دارند. جک در وضعیت عادی خود همیشــه راســت می‌گوید، اما در وضعیت دیگرش همیشه دروغ می‌گوید. جان بر عکس اســت. در وضعیت عادی خود همیشه دروغ می‌گوید، اما در وضعیت دیگرش همیشه راست می‌گوید. آن‌ها را از نظر ظاهری نمی‌توان از هم تمییز داد، اما مادر آن‌ها تنها کســی اســت که می‌تواند آن‌ها را از هم تشخیص دهد. چند مسئلهٔ جالب در این‌باره پیش آمده است:

۱. فــرض کنیــد کــه یــک روز یکــی از برادرها را دیده‌ایــد و می‌خواهیــد بدانید که او جک اســت یا جان. شــما می‌توانید فقط یک ســؤال «بله- خیر» از او بپرسید. و ســؤال باید ساده باشد و نه مرکب. یعنی

ریموند اِسمولیان



حاوی رابط‌های منطقی مثل و، یا، نقیض، اگر و آن‌گاه نباشد. سؤال کاملاً ساده و سرراستی وجود دارد که مؤثر است. این چه سؤالی است؟

۲. یک بار دیگر یکی از برادرها را دیده‌اید و می‌خواهید بدانید که او در وضع عادی‌اش است یا در وضع دیگرش؛ چه جک و چه جان. چه پرسش بله-خیر ساده‌ای می‌توانید بپرسید؟

۳. فرض کنید به جای آنکه بخواهید بدانید یکی از دوقلوها در چه وضعی است، بخواهید بدانید که هر دو در یک وضع هستند یا خیر. چه پرسش بله- خیر ساده‌ای می‌توانید بپرسید؟

۴. اگر یکی از دو برادر را ببینید، روشن است که چگونه می‌توانید بفهمید که او در وضعیت راست‌گویی است یا نه. کافی است از او یک سؤال ساده بپرسید مثل اینکه: آیا دو به اضافهٔ دو مساوی چهار است؟ اما فرض کنید نمی‌خواهید بدانید که آیا او حالا راست‌گوست یا خیر، بلکه می‌خواهید بدانید که آیا برادر او حالا راست‌گوست یا خیر. چه پرسش بله- خیر ساده‌ای مناسب است؟

۵. در یک روز معین، یکی از برادرها در تمام روز در یک وضعیت بود. و در آن روز فقط یک جمله گفت: «فردا در وضعیت دیگرم هستم.» روز بعد او در تمام روز در یک وضعیت بود و فقط یک جمله گفت: «دیروز من راست‌گو نبودم.» او جک بود یا جان؟

۶. یک روز پزشکی همراه با مادر دوقلوها یکی از آن‌ها را ملاقات کرد. دکتر نمی‌دانست او جک است یا جان، اما می‌دانست که در چه وضعیتی است. مادر می‌دانست که او کدام یک از دو برادر است، اما نمی‌دانست که او در چه وضعیتی است. سپس برادر موردنظر گفت: من جان هستم و در وضع دیگرم هستم. پزشک همچنان نمی‌توانست بگوید که او جک است یا جان، و مادر همچنان نمی‌توانست بگوید که وضعیت او چیست. او جک بود یا جان، و در چه وضعیتی بود؟

*** پی‌نوشت**

1. The Riddle of Scheherazade
2. Raymond smullyan
3. Logic Puzzles
4. Arabian Nights

شب‌های عربی یا داستان‌های هزار و یک شب از فولکلورهای بسیار معروف در ادبیات عرب است که شرح مختصر آن در کتاب آمده است. بسیاری از داستان‌های معروف تاریخی عرب مانند سندباد بحری، علی‌بابا و چهل دزد بغداد، و علاءالدین و چراغ جادو همگی در این کتاب معرفی شده‌اند. از روی این داستان‌ها آثار ادبی و نمایشی متعددی نیز ساخته شده‌اند (مترجم).

۴ پرسش‌های پیکارجو!

اگر f تابعی روی مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد و داشته باشیم:
$f(n)=\begin{cases} n-3 & n\geq 1000 \\ f(f(n+5)) & n<1000 \end{cases}$، حاصل $f(95)$ کدام است؟

الف) ۹۹۵ ب) ۹۹۷ ج) ۹۹۸ د) ۹۹۹ هـ) ۱۰۰۰

مسائل برای حل

هوشنگ شرقی
محمدرضا امیری

ریاضی ۲

۱. در مثلث ABC، $\hat{A}=60^\circ$ ، $AB=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ و $AC=2\sqrt{6}$ مطلوب است: الف) طول BC، ب) اندازهٔ $\hat{B}$، ج) مساحت مثلث

۲. اگر داشته باشیم: $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-1\end{bmatrix}$ وارون ماتریس A^2-B^2 را به‌دست آورید.

۳. اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix}$، ماتریس مجهول x را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$A^2+AX=A+X$$

هندسه ۱

۱. حجم و مساحت کل هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن شش ضلعی منتظمی به ضلع a باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق b باشند $(b>a)$.

۲. شعاع قاعدهٔ یک مخروط مساوی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن مساوی ۸ سانتی‌متر است. اگر این مخروط را توسط صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از آن برش دهیم، حجم فضای محدود به این صفحه و قاعدهٔ مخروط را به‌دست آورید.

۳. متوازی‌الاضلاعی به اضلاع ۸ و ۴ سانتی‌متر را که یک زاویهٔ حادهٔ آن 30° است، حول ضلع بزرگ آن دوران می‌دهیم. حجم حادث شده را به‌دست آورید.

هندسه ۲

۱. ثابت کنید تبدیل $T(x,y)=(2\alpha-x\,,2\beta-y)$ بازتاب نسبت به یک نقطه است. سپس معادلهٔ بازتاب خط $2x-y=4$ را نسبت به نقطهٔ $M(1,2)$ به‌دست آورید.

۲. خط به معادلهٔ $2y+x=2$ را تحت تجانس با ضریب $k=2$ تبدیل کنید. سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ 90° حول مبدأ دوران دهید. معادلهٔ تصویر را به‌دست آورید.

۳. به کمک تبدیل‌های هندسی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث مساوی 180° است.

حسابان

۱. حدهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 3x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\tan^3 x}$$

ب) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan 3x}{\sin x-\cos x}$$

۲. a و b را طوری بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sin \pi x}{x-1}+b & x>1\\ \sin\dfrac{\pi x}{6}+\cos\dfrac{\pi x}{2} & x=1\\ a\pi[\pi x]+b[-x] & x<1\end{cases}$$

۳. a و b را طوری بیابید که خط $y=2x+1$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{x}+b$ مماس باشد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. ثابت کنید در هر تابع چندجمله‌ای درجهٔ ۳، نقطهٔ عطف، وسط نقاط ماکزی‌مم و مینی‌مم است.

۲. یک نقطـهٔ نورانی روی دایرهٔ $x^2+y^2=4$، از نقطهٔ $(\sqrt{3},1)$ در ناحیهٔ اول شروع به حرکت می‌کند تا به نقطهٔ $(0,2)$ برسد. در همان حال، مانعـی به شـکل پاره‌خط عمود بر محور xهـا در نقطهٔ $(4,0)$ و به ارتفاع یک واحد، سایه‌ای روی محور xها ایجاد می‌کند. اگر مختص x نقطـهٔ نورانی با سـرعت ۰/۱ واحد بر ثانیه افزایش یابد، سـرعت کاهش طول سایه را به‌دست آورید.

۳. اولاً جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ را رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید این نمودار سـه نقطهٔ عطف بر یک استقامت دارد.

ریاضیات گسسته

۱. سه ظرف همانند داریم. اولین ظرف شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه است. دومین ظرف شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است و سومین ظرف تنها شامل مهره‌های سفید است. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد چه‌قدر است؟

۲. در پارکینگی سـه خودروی تولیدی ۹۴ و چهار خودروی تولیدی ۹۳ وجـود دارد. در پارکینگ دیگری پنـج خودروی تولیدی ۹۴ و سـه خودروی تولیدی ۹۳ وجـود دارد. اگر راننده‌ای یکی از این دو پارکینگ را به تصادف انتخاب و یک خودرو برای مسابقه از آن خارج کند و مشـاهده شـود که خودروی انتخاب شده تولیدی ۹۳ است، چه‌قدر احتمال دارد این خودرو از پارکینگ اول باشد؟

۳. الف) قانون احتمال کل را بیان کنید.

ب) بگویید دو پیشامد ناسازگار چه زمانی مستقل هستند.

ج) شرط لازم و کافی برای استقلال A از B و B از A را بیان کنید.

جبر و احتمال

۱. تاس سالمی را nبار می‌اندازیم. احتمال اینکه mبار برآمد تاس یک عدد فرد باشد، چیست؟ احتمال اینکه rبار تاس یک عدد زوج بیاید، چه‌قدر است؟

۲. سه خودروی a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال بـرد a دو برابر احتمال بـرد b و احتمال پیروزی b دو برابر پیروزی c است.

الف) مطلوب است احتمال پیروزی هر کدام از ماشین‌ها؛

ب) مطلوب است احتمال اینکه a یا b ببرند؛

۳. دو قطعه چـوب به طول‌های ۱ و ۰/۵ متر داریم. قطعهٔ بزرگ‌تر را با اره به دو قسـمت تقسیم می‌کنیم (حال سه قطعه چوب خواهیم داشـت). احتمال اینکه این سـه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چه‌قدر است؟

ریاضی سوم تجربی

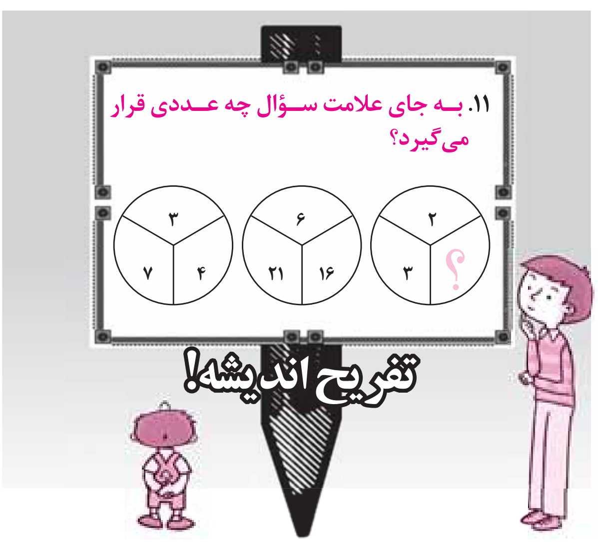
۱. مطلوب است محاسبهٔ هر یک از حدهای زیر:

الف) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^5+3x^3+2x-1}{7x^2+x-4}$

۲. اگـر تابع f با ضابطـهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-a & x<1\\ bx-1 & x>1\\ 3 & x=1\end{cases}$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۳. به ازای چـه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\geq a\\ x & x<a\end{cases}$ روی همهٔ نقاط R پیوسته است؟



توابع و اعداد گنگ!

روح‌الله حسنی‌کله‌لوئی
و لیلا قدیمی‌لاله‌دشتی
کارشناسان ارشد ریاضی محض و دبیران دبیرستان منطقهٔ زرقان شیراز

مقدمه

در ایـن مقالـه تأثیر رفتار برخی از توابـع را روی اعداد گنگ و گویا بررســی می‌کنیم. بدین معنا که می‌خواهیم به این پرســش پاسـخ دهیم: «تأثیر توابع چند جمله‌ای و مثلثاتی بر مجموعه اعداد گنگ و گویـا چیسـت؟» این مقاله نگاهی پیشاحسـابانی به توابـع دارد و وارد مقوله‌هایی چون پیوســتگی و ناپیوستگی نخواهد شد، مگر در یک مورد آن هم برای اثبات یک لم.

مقدمات و تعاریف

بحث را با مسئله‌ای آغاز می‌کنیم که مواجهه با آن، ایدهٔ ما برای نوشتن این مقاله بوده است.

مسئله: اگر a عددی گنگ باشد، آیا a^7+a نیز عددی گنگ است؟

در نگاه اول به نظر می‌رسد با مثال‌های متعارف مانند $\sqrt[7]{2}$، $\sqrt{2}$ و... جواب مثبت اسـت. تلاش برای اثبات این موضوع به نتیجه نرسـید. بنابراین برای شناخت بیشتر مسئله را کوچک‌تر کردیم.

مسئلهٔ خرد: اگر a عددی گنگ باشد، آیا a^2+a نیز عددی گنگ است؟

در برخورد با این مسئله فکر تبدیل آن به یک معادله به ذهنمان خطور کرد. اگر معادلهٔ $x^2+x=1$ دارای ریشهٔ گنگ باشد، جواب مسئلهٔ خرد منفی است، که به سادگی پیداست که چنین است:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

پس توانستیم با یک مثال نقض به مسئلهٔ خرد جواب منفی بدهیم. لذا به نظر می‌رسد که جواب مسئلهٔ اصلی نیز منفی باشـد، اما از روش حل مسـئلهٔ خرد نمی‌توان استفاده کرد (حل معادله از درجهٔ ۷ مقدور نیست). برای پاسخ به این مسئله و بلکه تعمیمی از آن نیازمند اندکی تعریف و قراردادیم.

تعریـف: گوییم تابع f، مجموعهٔ A را به مجموعهٔ B می‌نگارد (تصویر می‌کند)، هرگاه: $f(A)\subseteq B$. به‌عبارت دیگر، برای هر $x\in A$، $f(x)\in B$.

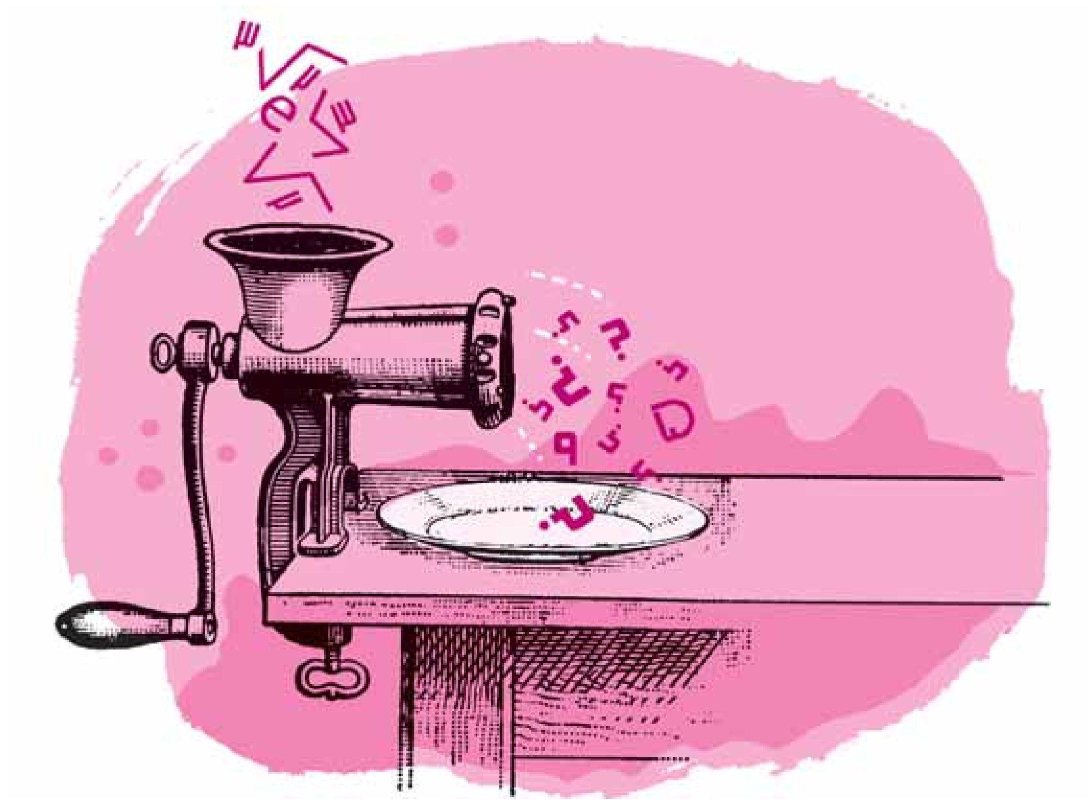
قـرارداد ۱. منظـور از چندجملـه‌ای در این مقاله چندجمله‌ای‌هایی مانند:
$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$
است که در آن‌ها تمام ضرایب عددی صحیح‌اند. همچنین منظور از «چندجمله‌ای تکین» یک چندجمله‌ای است کـه در آن ضریب جمله با بزرگ‌ترین توان یک اسـت؛ مانند: $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$.

قرارداد ۲. در این مقاله مجموعهٔ اعداد گویا را با Q و مجموعهٔ اعداد گنگ را با Q^c نمایش می‌دهیم.

توابع چندجمله‌ای

قضیهٔ ۱. فرض کنید: $a,b\in Q$، $(a\neq 0)$ و $f(x)=ax+b$. در ایـن صـورت تابع f اعداد گنـگ را به اعداد گنگ می‌نگارد.

اثبـات: فرض کنیـد: $x\in Q^c$ و $f(x)=c\in Q$. در این صـورت: $x=\frac{c-b}{a}$. اما چون مجموعـهٔ اعداد گویا نسبت به تفاضل و تقسیم بر عدد غیرصفر بسته است،



بنابراین: $x\in Q$ که با فرض در تناقض است. لذا $f(x)$ عددی گنگ است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید: $f(x)=\frac{۱}{x}$، در این صورت تابع f اعداد گنگ را به اعداد گنگ می‌نگارد.

اثبات: فرض کنید: $x\in Q^c$ و $f(x)=c\in Q$. در این صورت: $x=\frac{۱}{c}$. اما معکوس هر عدد گویای غیرصفر، عددی گویاست، پس: $x\in Q^c$ که با فرض در تناقض است. لذا $f(x)$ عددی گنگ است.■

قضیهٔ ۳. اگر $x=\frac{p}{q}$ $(p,q\in Z)(q\neq ۰)$ و $(p,q)=۱$) یک ریشهٔ چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ باشد، آن‌گاه p یک مقسوم‌علیه a_0 و q یک مقسوم‌علیه a_n است.

اثبات: چون $\frac{p}{q}$ ریشهٔ این چند جمله‌ای است، لذا: $f(\frac{p}{q})=۰$ و بنابراین:

$$a_n(\frac{p}{q})^n+a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1}+...+a_1(\frac{p}{q})+a_0=۰$$

با ضرب طرفین در q^n خواهیم داشت:

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=۰$$

و این خود دو تساوی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+...+a_1q^{n-1})=-a_0q^n$$

و:

$$q(a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1})=-a_np^n$$

از تساوی نخست نتیجه می‌گیریم که a_0q^n بر p بخش‌پذیر است و چون $(p,q)=۱$، پس p یک مقسوم‌علیه a_0 است. به همین طریق از تساوی دوم نتیجه می‌شود که q یک مقسوم‌علیه a_n است.■

نتیجهٔ ۱. تنها ریشه‌های گویای چندجمله‌ای تکین
$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$
مقسوم‌علیه‌های صحیح a_0 هستند.

اثبات: فرض کنیم $x=\frac{p}{q}$ که در آن، $(q\neq 0)$ و $p,q\in Z$ و $(p,q)=1$ یک ریشهٔ گویا چندجمله‌ای تکین $f(x)$ باشد. از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که: $p|a_0$ و $q|1$. لذا: $q=\pm1$ و این نیز به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد: $x=\pm p|a_0$. ■

اکنون به مسئلهٔ اصلی برمی‌گردیم: «اگر a عددی گنگ باشد، آیا a^7+a نیز عددی گنگ است؟» جواب منفی است، چون مثلاً چندجمله‌ای $f(x)=x^7+x-1$ چون از درجهٔ فرد است، حداقل دارای یک ریشهٔ حقیقی مانند a است. اگر a عددی گویا باشد، بنابر نتیجهٔ ۱ باید مقسوم‌علیه ۱ باشد. بنابراین: $a=1$ یا $a=-1$. اما داریم: $f(1)\neq 0$ و $f(-1)\neq 0$ که تناقض است. بنابراین a عددی گنگ است و: $f(a)=0$. به عبارت دیگر، a عددی گنگ است و: $a^7+a=1\in Q$.

پرسشی که اکنون مطرح می شود این است که: «تحت چه شرایطی یک چندجمله‌ای، مجموعه اعداد گنگ را به مجموعه اعداد گنگ می‌نگارد؟» (البته بدیهی است که هر چندجمله‌ای، اعداد گویا را به اعداد گویا تصویر می‌کند.) برای پاسخ به این پرسش ابتدا یک لم و سپس قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم.

لم ۱. اگر $p(x)$ یک چند جمله‌ای تکین با ضرایب صحیح و از درجهٔ $n>1$ باشد، آن‌گاه $k\in Z$ وجود دارد به‌طوری که: $p(k+1)-p(k)>1$.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد. پس برای هر $k\in Z$ داریم: $p(k+1)-p(k)\le 1$ و برای هر عدد صحیح مثبت مانند k داریم:

$$p(k)-p(k-1)\le 1$$
$$p(k-1)-p(k-2)\le 1$$
$$\vdots$$
$$p(1)-p(0)\le 1$$

اکنون با جمع کردن این نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$p(k)-p(0)\le k$$

به عبارت دیگر، برای هر عدد صحیح مثبت مانند k داریم:

$$p(k)-k\le p(0) \qquad (1)$$

همچنین به طریق مشابه می‌توان نشان داد، برای هر عدد صحیح منفی مانند k داریم:

$$p(0)\le p(k)-k \qquad (2)$$

اکنون چند جمله‌ای $f(x)$ را به‌صورت $f(x)=p(x)-x$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که چندجمله‌ای $f(x)$ از درجهٔ n یا $n-1$ است. اما اگر چندجمله‌ای $f(x)$ غیرثابت باشد، باید داشته باشیم: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ که این با (۱) و (۲) در تناقض است. لذا $f(x)$ یک چندجمله‌ای ثابت است و: $n=0$ یا $n=1$ که این نیز با فرض $n>1$ در تناقض است. بنابراین $k\in Z$ وجود دارد به‌طوری که: $p(k+1)-p(k)>1$. ■

قضیهٔ ۴. اگر چندجمله‌ای غیرثابت $p(x)$ مجموعه اعداد گنگ را به مجموعه اعداد گنگ تصویر کند، آن‌گاه این چند جمله‌ای از درجهٔ یک است.

اثبات: فرض کنید چندجمله‌ای
$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$
از درجهٔ $n>1$ باشد. همچنین فرض کنید: $q(x)=a_n^{n-1}p(\frac{x}{a_n})$. اکنون $q(x)$ یک چندجمله‌ای تکین است که اعداد گنگ را به اعداد گنگ تصویر می‌کند. بنا به لم ۱، $k\in Z$ وجود دارد به‌طوری که: $q(k+1)-q(k)>1$. در نتیجه عدد صحیحی مانند h وجود دارد، به‌طوری که:

$$q(k)<h<q(k+1)$$

اکنون بنا به قضیهٔ مقدار میانی از پیوستگی $q(x)$ نتیجه می‌شود که عددی حقیقی مانند m وجود دارد به‌طوری که: $k<m<k+1$ و $q(m)=h$. همچنین چون: $q(m)=h\in Q$، پس m نیز عددی گویا است. لذا m یک ریشهٔ گویا چندجمله‌ای تکین $f(x)=q(x)-h$ است بنا به نتیجهٔ ۱ این ریشه صحیح است، پس m عددی صحیح است و این با $k<m<k+1$ در تناقض است. بنابراین: $n=1$ و چندجمله‌ای $q(x)$ از درجهٔ یک است و این نیز نتیجه می‌دهد که $p(x)$ از درجهٔ یک است.

توابع مثلثاتی

در این بخـــش رفتار توابع مثلثاتی را بـــا اعداد گویا بررسی می‌کنیم. **ایوان نیون**[1]، ریاضی‌دان آمریکایی، در ســـال ۱۹۵۶ قضیه‌ای را ثابت کرد که نشان می‌داد تنها زاویه‌های حادهٔ (برحســـب درجـــه) گویا که لااقل یکی از نســـبت‌های چهارگانهٔ مثلثاتی آن‌ها گویاست، زاویه‌های °۳۰، °۴۵ و °۶۰ هستند. با بیان دو لم این قضیه را اثبات می‌کنیم.

◀ **لم ۲.** بـــرای هر $n\in N$ و هر زاویهٔ θ اتحاد زیر همواره برقرار است:

$$\cos((n+1)\theta)=2\cos n\theta\cos\theta-\cos((n-1)\theta)$$

◀ **اثبات:** از بسط تابع کسینوس داریم:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

بنابراین:

$$\cos(a+b)=2\cos a\cos b-\cos(a-b)$$

حال با قرار دادن $a=n\theta$ و $b=\theta$ در این تســـاوی اتحاد موردنظر اثبات می‌شود. ■

◀ **لـــم ۳.** برای هر $n\in N$ و هـــر زاویهٔ θ، n عدد صحیح $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+\dots+a_1(2\cos\theta)+a_0$$

◀ **اثبات:** حکم را با اســـتقرا ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ و $n=2$ داریم: $2\cos\theta=2\cos\theta$ و $2\cos 2\theta=(2\cos\theta)^2-2$. حال فرض کنیم حکم به ازای $n-1$ و n برقرار باشـــد. نشان می‌دهیم به ازای $n+1$ نیز برقرار است. به‌عبارت دیگـــر، $n-1$ عـــدد صحیـــح $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$2\cos(n-1)\theta=(2\cos\theta)^{n-1}+c_{n-2}(2\cos\theta)^{n-2}+\dots+c_1(2\cos\theta)+c_0$$

همچنین n عدد صحیـــح $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ وجود دارند، به‌طوری که:

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+\dots+a_1(2\cos\theta)+a_0$$

اکنون بنا به لم ۲ داریم:

$$\begin{aligned}2\cos((n+1)\theta)&=(2\cos n\theta)(2\cos\theta)-2\cos((n-1)\theta)\\&=\{(2\cos\theta)^{n+1}+a_{n-1}(2\cos\theta)^n+\dots+a_1(2\cos\theta)^2\\&+a_0(2\cos\theta)\}-\{(2\cos\theta)^{n-1}+c_{n-2}(2\cos\theta)^{n-2}+\dots\\&+c_1(2\cos)+c_0\}=(2\cos\theta)^{n+1}+a_{n-1}(2\cos\theta)^n\\&+(a_{n-2}-1)(2\cos\theta)^{n-1}+(a_{n-3}-c_{n-2})(2\cos\theta)^{n-2}+\dots\\&+(a_0-c_1)(2\cos\theta)-c_0\end{aligned}$$

با توجه به اینکه تمام ضرایب در آخرین عبارت تساوی فوق عـــددی صحیح‌اند، لذا حکم بـــرای $n+1$ نیز برقرار است. ■

◀ **قضیهٔ ۵ (قضیهٔ نیون):** اگر θ یک زاویه (برحســـب درجـــهٔ) گویا و $0<\theta<90^\circ$ باشـــد، آن‌گاه $f(\theta)=\cos\theta$ عددی گنگ است؛ بجز: $\theta=60^\circ$.

◀ **اثبات:** فرض کنید: $\theta=\frac{p}{q}$، p,q عددی طبیعی و $\cos\theta$ عددی گویا باشـــد. قرار می‌دهیم: $n=360q$. بنابراین: $\cos n\theta=1$. لذا بنا به لم ۳، n عدد صحیح $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ وجود دارند به‌طوری که:

$$2=(2\cos\theta)^n+a_{n-1}(2\cos\theta)^{n-1}+\dots+a_1(2\cos\theta)+a_0$$

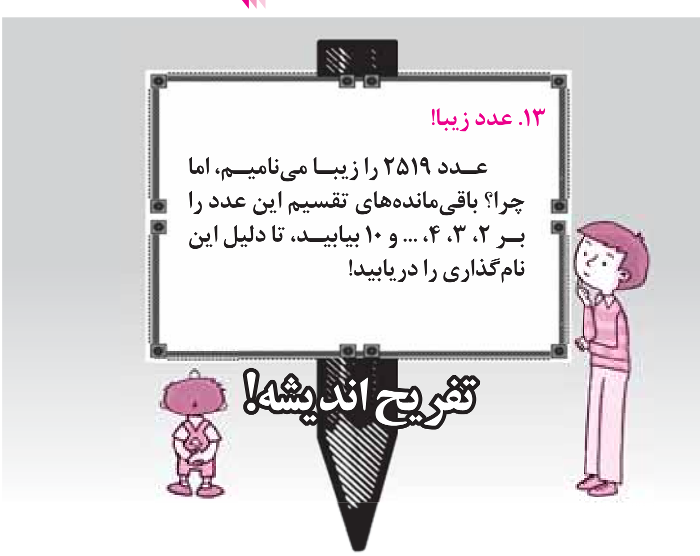
اکنون اگر قرار دهیم $x=2\cos\theta$ خواهیم داشت:

$$2=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

که در نتیجه:

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0-2=0$$

بنابراین $2\cos\theta$ یک ریشـــهٔ معادلهٔ فوق است. اما بنا به نتیجهٔ ۱، اگر معادلهٔ فوق دارای ریشـــهٔ گویا باشد، آن



ریشه صحیح است. حال چون $\cos\theta$ عددی گویا ا ست، پس $۲\cos\theta$ نیز عددی گویا و ریشهٔ معادلهٔ فوق است. بنابراین عددی صحیح است. اما چون θ یک زاویهٔ حاده است، بنابراین: $۰<۲\cos\theta<۲$، پس باید: $۲\cos\theta=۱$. لذا: $\cos\theta=\frac{۱}{۲}$ که این نیز نتیجه می‌دهد: $\theta=۶۰^\circ$. ■

نتیجهٔ ۲. اگر θ یک زاویهٔ (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۱۸۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\cos\theta$ عددی گنگ است؛ بجز: $\theta=۶۰^\circ$، $\theta=۹۰^\circ$ و $\theta=۱۲۰^\circ$.

اثبات: اگر $۰<\theta<۹۰^\circ$ آن‌گاه بنا به قضیهٔ نیون داریم: $\theta=۶۰^\circ$. حال فرض کنید: $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$. اما: $\cos\theta=-\cos(۱۸۰-\theta)$ و $۰<۱۸۰^\circ-\theta\le۹۰^\circ$. بنابراین: $۱۸۰-\theta=۹۰^\circ$ یا $۰<۱۸۰^\circ-\theta<۹۰^\circ$. در حالت اول، $\theta=۹۰^\circ$ و $\cos\theta=۰$. در حالت دوم، بنا به قضیهٔ نیون داریم: $۱۸۰-\theta=۶۰^\circ$. بنابراین: $\theta=۱۲۰^\circ$ و $\cos\theta=-\frac{۱}{۲}$.

نتیجهٔ ۳. اگر θ یک زاویه برحسب درجه گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\sin\theta$ عددی گنگ است؛ بجز $\theta=۳۰^\circ$.

اثبات: فرض کنید θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ و $\sin\theta$ عددی گویا باشد. چون: $\cos۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta$، پس $\cos۲\theta$ نیز عددی گویا است. اما: $۰<۲\theta<۱۸۰^\circ$، لذا بنا به نتیجهٔ ۲ داریم: $۲\theta=۶۰^\circ$، $۲\theta=۹۰^\circ$ و $۲\theta=۱۲۰^\circ$. بنابراین: $\theta=۳۰^\circ$، $\theta=۴۵^\circ$ و $\theta=۶۰^\circ$. اما چون $\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$ و $\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sin۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، پس: $\theta=۳۰^\circ$.

نتیجهٔ ۴. اگر θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $f(\theta)=\tan\theta$ عددی گنگ است؛ بجز $\theta=۴۵^\circ$. ■

اثبات: فرض کنید θ یک زاویه (برحسب درجه) گویا و $۰<\theta<۹۰^\circ$ و $\tan\theta$ عددی گویا باشد. اکنون به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\cos۲\theta=\frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}$$

سمت راست تساوی فوق عددی گویاست، لذا $\cos۲\theta$ نیز عددی گویا است و داریم: $۰<۲\theta<۱۸۰^\circ$ بنا به نتیجهٔ ۲ داریم: $۲\theta=۶۰^\circ$، $۲\theta=۹۰^\circ$ و $۲\theta=۱۲۰^\circ$، پس: $\theta=۳۰^\circ$، $\theta=۴۵^\circ$ و $\theta=۶۰^\circ$. اما چون $\tan۳۰^\circ=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}$ و $\tan۴۵^\circ=۱$، بنابراین: $\theta=۴۵^\circ$. ■

پی‌نوشت

1. Ivan Niven

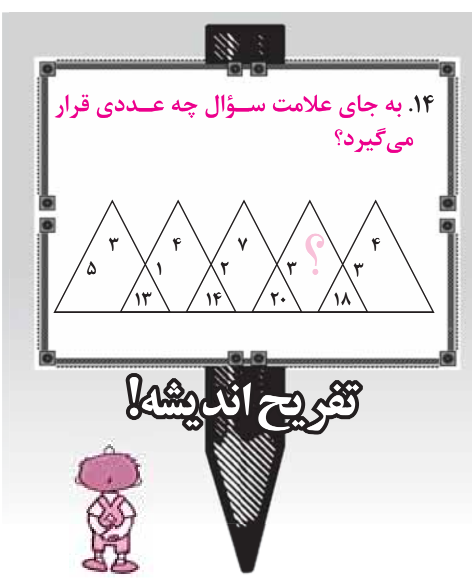
منابع

۱. نیون، ایوان (۱۳۶۷). اعداد گویا و گنگ. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.
۲. برگزیدهٔ مسئله‌های جبر و آنالیز (۱۳۷۸). گزینش و ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ دوم.
3. Niven,.I.M, Irrational Numbers. New York: Wiley. 1956.

پرسش‌های پیکارجو!

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{B}=۹۰^\circ$) مفروض است. اگر نقطP را درون مثلث طوری در نظر بگیریم که زوایای APC، BPC و APB برابر باشند و P از A و B به فاصلهٔ ۱۰ و ۶ واحد باشد، فاصلهٔ P از C کدام است؟

الف) ۲۶ ب) ۲۸ ج) ۳۰ د) ۳۲ هـ) ۳۳



امسال (۱۳۹۵) سال سرشماری عمومی توسط مرکز آمار ایران است. به‌همین مناسبت می‌خواهیم در این بخش به شوخی با آمار و متخصصان آن، که از حوزه‌های مهم و پرکاربرد ریاضیات است، بپردازیم. البته پیش از این و در شماره‌های پیشین مجله هم لطیفه‌هایی دربارهٔ این بخش از ریاضیات داشته‌ایم که شاید قبلاً آن‌ها را خوانده باشید. در هر حال به این نمونه‌ها هم توجه کنید و از آن‌ها لذت ببرید:

لطیفهٔ اول

مردی در یک بالن در حال پرواز بود که مسیر خود را گم کرد و در جایی بر بالای یک ساختمان، مردی را بالای بام در حال قدم زدن مشاهده کرد. از او پرسید: «هی آقا، من الان کجا هستم؟ و به کدام سمت می‌روم؟»

او بدون مکث گفت: «تو الان در ۴۳ درجه و ۱۲ دقیقه و ۲۱/۲ ثانیهٔ شمالی و ۱۲۳ درجه و هشت دقیقه و ۱۲/۸ ثانیهٔ غربی و در ارتفاع ۲۱۲ متری از سطح دریا قرار داری و با سرعت ۱/۸۳ متر بر ثانیه رو به جنوب و با سرعت ۱/۹۲۹ رادیان بر ثانیه حرکت دورانی داری!»

مرد گفت: «اوه، ببینم شما آماردان نیستی؟»

و مرد گفت: «درسته، از کجا فهمیدی؟»

بالن سوار گفت: «از آنجا که همهٔ چیزهایی که به من گفتی کاملاً دقیق بود. خیلی بیشتر از آنچه که نیاز داشتم به من اطلاعات دادی. اما دست آخر هم جواب سؤال اصلی‌ام را ندادی!»

مرد پرسید: «ببینم آیا تو رئیس یک مؤسسه نیستی؟!»

بالن سوار گفت: «درسته، از کجا فهمیدی؟»

و مرد گفت: «از آنجا که نمی‌دانی از کجا آمده‌ای و به کجا می‌روی. درست وقتی که به دردسر افتادی سؤال کردی و دست آخر هم همهٔ تقصیرها را گردن من انداختی!»

لطیفهٔ دوم

روزی سه دانشمند، یک فیزیک‌دان، یک شیمی‌دان و یک آماردان برای دیدن استاد سابقشان و به دعوت او، عازم دانشکده‌ای شدند که او در آنجا اتاقی داشت. به محض ورود به راهروی دانشکده، آن سه نفر مشاهده کردند که سطل زباله‌ای که در گوشهٔ سالن قرار داشت در حال آتش گرفتن است. فیزیک‌دان رو به شیمی‌دان گفت: «باید سعی کنیم درجهٔ حرارت مواد داخل سطل را به طریقی پایین بیاوریم تا آتش خاموش شود.»

شیمی‌دان گفت: «نه، فکر می‌کنم باید ورود اکسیژن را به درون ظرف قطع کنیم. این‌طوری خودبه‌خود واکنش سوختن متوقف و آتش خاموش می‌شود.»

در همان‌حال که آن دو نفر با هم بحث می‌کردند، یک مرتبه دیدند آماردان دارد آتش را به دور تا دور سالن گسترش می‌دهد! آن‌ها فریاد زدند: «چه‌کار می‌کنی؟!» و آماردان گفت: «دارم یک نمونهٔ به اندازه کافی بزرگ می‌سازم!»

لطیفهٔ سوم

روزی سه نفر آماردان به شکار رفته بودند. ناگهان خرگوشی را دیدند و دو نفر از آن‌ها هم‌زمان به طرف خرگوش شلیک کردند. اولی یک متر سمت راست آن و دومی یک متر سمت چپ آن را زد. سومی فریاد زد: «به‌طور میانگین شکارش کردید!»

و آخرین لطیفه

یک استاد آمار و همسرش صاحب چهارمین فرزندشان شدند و استاد آمار نام فرزند پسر را چانگ گذاشت! از او پرسیدند: «چرا این اسم را انتخاب کردی؟!» و او گفت: «آمار نشان می‌دهد که از هر چهار بچه‌ای که به دنیا می‌آیند، یکی چینی است!»

مراد کریمی
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شهرکرد

حد مجموع مساحت‌ها و محیط‌ها!

توضیح: می‌دانیم مجموع جملات یک تصاعد هندسی متناهی که $|q|>۱$ باشد، از فرمول $S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ محاسبه می‌شود. اما اگر قدرنسبت یک دنبالهٔ هندسی نامتناهی بین ۱- و ۱ باشد ($|q|<۱$)، جملات این دنباله با افزایش n به صفر نزدیک می‌شوند و مجموع تمام جملات دنباله از رابطهٔ $S_\infty=\frac{a_۱}{۱-q}$ به‌دست می‌آید که این مقدار را «حد مجموع جملات» می‌نامند.

دلیل این امر آن است که وقتی $-۱<q<۱$ باشد، آن‌گاه با بزرگ شدن n حاصل q^n به صفر نزدیک‌تر می‌شود، به‌طوری‌که برای nهای بسیار بزرگ، $q^n\simeq ۰$.

بنابراین داریم:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\overset{-۱<q<۱}{\underset{n\to+\infty}{\Rightarrow}}S_n=\frac{a_۱(۱-\cancel{q^n})}{۱-q}\Rightarrow S_\infty=\frac{a_۱}{۱-q}$$

تذکر: منظور از «S_∞» مجموع بی‌شمار جمله از دنباله است که گاه آن را فقط با S نمایش می‌دهند.

نکته: یک nضلعی منتظم به طول ضلع a را در نظر بگیرید. هرگاه وسط‌های اضلاع این n ضلعی را متوالیاً به‌هم وصل کنیم و این عمل را به‌طور نامتناهی ادامه دهیم، اضلاع این n ضلعی‌ها جملات یک دنبالهٔ هندسی نزولی را تشکیل می‌دهند که در نتیجه محیط و مساحت این nضلعی‌ها نیز جملات دنبالهٔ هندسی نزولی را تشکیل می‌دهند.

نتیجه: اگر وسط‌های اضلاع یک nضلعی منتظم را متوالیاً به‌هم وصل کنیم تا nضلعی‌های جدید به‌وجود آیند، در این صورت:

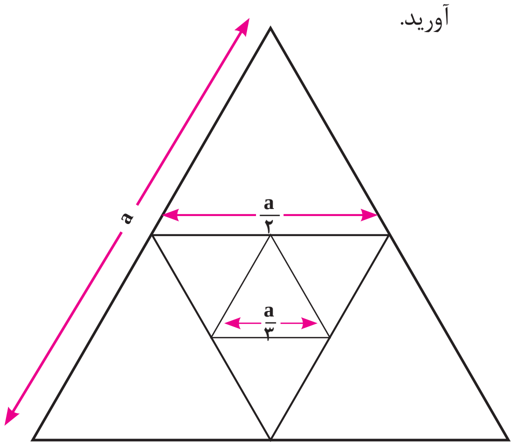
۱. دنبالهٔ محیط‌های nضلعی‌ها، دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=\cos\frac{\pi}{n}$ است.

۲. دنبالهٔ مساحت‌های nضلعی‌ها، دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=\cos^۲\frac{\pi}{n}$ است.

برای روشن شدن موضوع، در ادامه محیط و مساحت سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)، چهارضلعی منتظم (مربع) و شش‌ضلعی منتظم به‌طول ضلع a را محاسبه می‌کنیم.

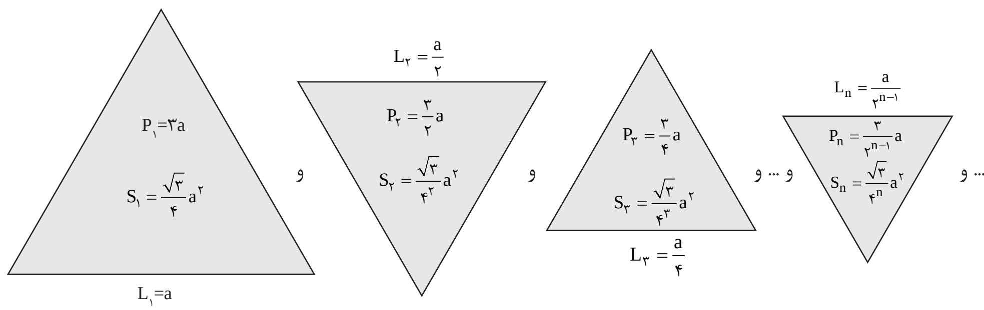
مسئلهٔ ۱. وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را متوالیاً به‌هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی به‌دست آید و این کار را ادامه می‌دهیم.

الف) مجموع محیط‌های همهٔ این مثلث‌ها را به‌دست آورید.



ب) مجموع مساحت‌های همهٔ این مثلث‌ها را حساب کنید.

شماره مثلث متساوی‌الاضلاع (n)	۱	۲	۳	...	n	...
طول ضلع متساوی‌الاضلاع (L_n)	$L_۱=a$	$L_۲=\frac{a}{۲}$	$L_۳=\frac{a}{۴}$	...	$L_n=\frac{a}{۲^{n-۱}}$	...
محیط مثلث متساوی‌الاضلاع (P_n)	$P_۱=۳a$	$P_۲=\frac{۳}{۲}a$	$P_۳=\frac{۳}{۴}a$	...	$P_n=\frac{۳}{۲^{n-۱}}a$	...
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع (S_n)	$S_۱=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$	$S_۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴^۲}a^۲$	$S_۳=\frac{\sqrt{۳}}{۴^۳}a^۲$	...	$S_n=\frac{\sqrt{۳}}{۴^n}a^۲$	...



مجموع جملات دنبالهٔ اضلاع مثلث‌ها $= L = L_۱+L_۲+L_۳+\dots+L_n+\dots = a+\frac{a}{۲}+\frac{a}{۴}+\dots+\frac{a}{۲^{n-۱}}+\dots=\frac{a}{\frac{۱}{۲}}=۲a$

مجموع محیط‌های مثلث‌ها $= P=P_۱+P_۲+P_۳+\dots+P_n+\dots=۳a+\frac{۳}{۲}a+\frac{۳}{۴}a+\dots+\frac{۳}{۲^{n-۱}}a+\dots=\frac{۳a}{۱-\frac{۱}{۲}}=۶a$

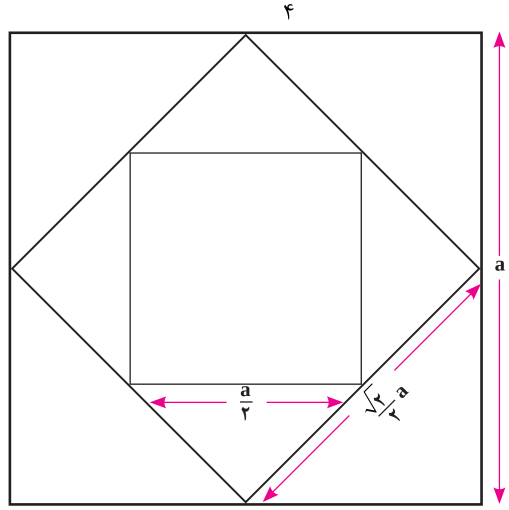
مجموع مساحت‌های مثلث‌ها $= S=S_۱+S_۲+S_۳+\dots+S_n+\dots=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴^۲}a^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴^۳}a^۲+\dots+\frac{\sqrt{۳}}{۴^n}a^۲+\dots$

$$=\frac{\sqrt{\frac{۳}{۴}}a^۲}{\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a^۲$$

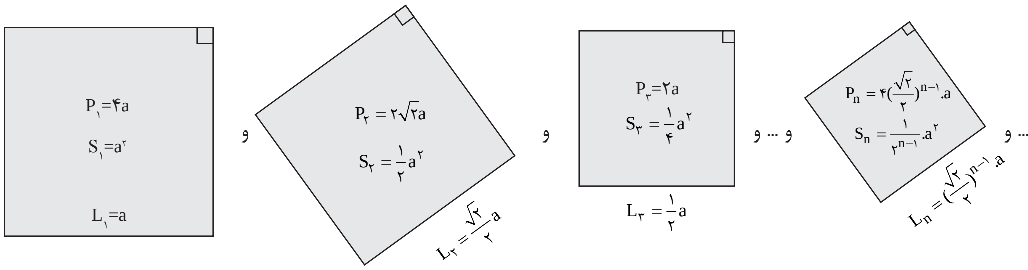
مســئلهٔ ۲. وسط‌های اضلاع یک مربع به ضلع a را متوالیاً به‌هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی به‌وجود آید و این کار را ادامه می‌دهیم.

الف) مجموع محیط‌های همهٔ مربع‌ها را به‌دست آورید.

ب) مجمــوع مســاحت‌های همــهٔ مربع‌ها را حساب کنید.



شمارهٔ مربع (n)	۱	۲	۳	...	n	...
طول ضلع مربع (L_n)	$L_1=a$	$L_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$L_3=\frac{1}{2}a$	...	$L_n=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}.a$	...
محیط مربع‌ها (P_n)	$P_1=4a$	$P_2=2\sqrt{2}a$	$P_3=2a$	...	$P_n=4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}.a$	...
مساحت مربع‌ها (S_n)	$S_1=a^2$	$S_2=\frac{1}{2}a^2$	$S_3=\frac{1}{4}a^2$	...	$S_n=\frac{1}{2^{n-1}}.a^2$	...

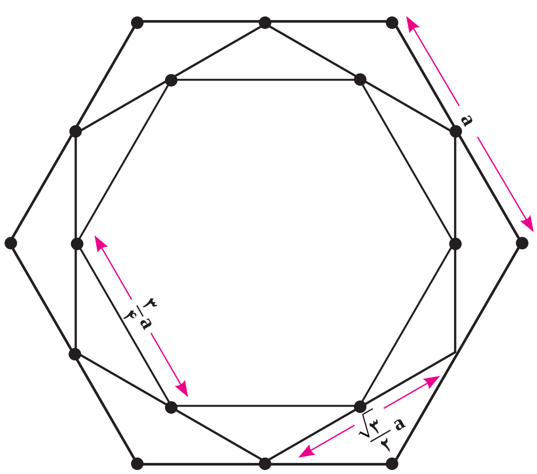


مجموع جملات دنبالهٔ اضلاع مربع‌ها $= L = L_1+L_2+L_3+\dots+L_n+\dots = a+\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{a}{2}+\dots+(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}a+\dots=\frac{a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=(2+\sqrt{2})a$

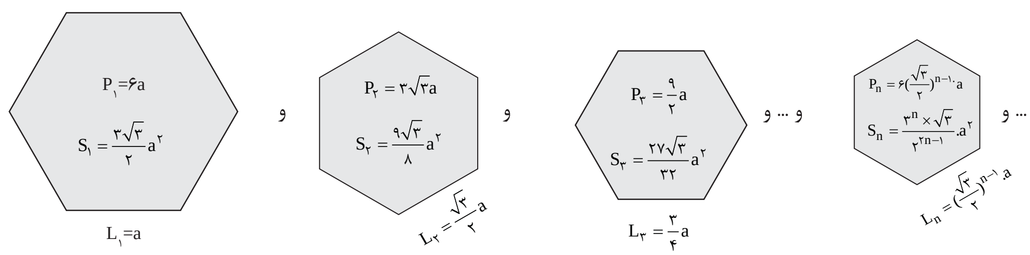
مجموع محیط‌های همهٔ مربع‌ها $= P = P_1+P_2+P_3+\dots+P_n+\dots = 4a+2\sqrt{2}a+2a+\dots+4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}a+\dots=\frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=(2+\sqrt{2})4a$

مجموع مساحت‌های همهٔ مربع‌ها $= S = S_1+S_2+S_3+\dots+S_n+\dots = a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.a^2+\dots=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$

مسئلهٔ ۳. وسط‌های اضلاع یک ۶ضلعی منتظم به ضلع a را متوالیاً به‌هم وصل می‌کنیم تا شش‌ضلعی جدیدی به‌وجود آید و این کار را ادامه می‌دهیم. مجموع محیط‌ها و مجموع مساحت‌های همهٔ شش‌ضلعی‌ها را به‌دست آورید.



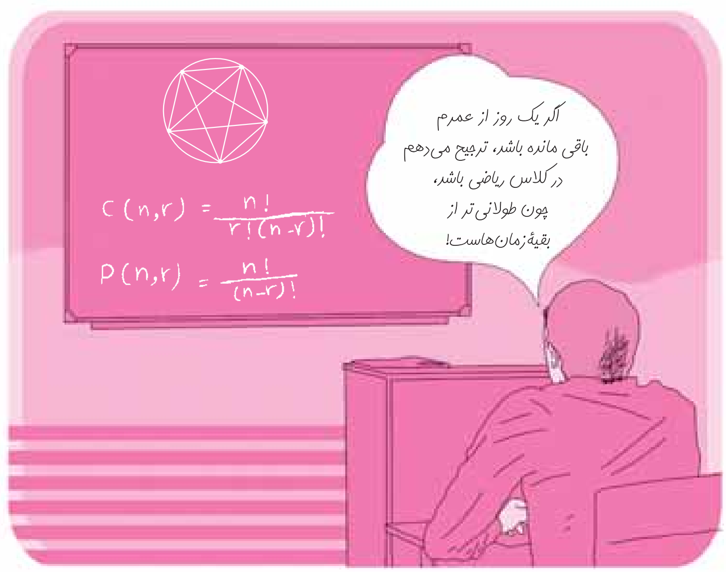
شمارهٔ شش‌ضلعی منتظم (n)	۱	۲	۳	...	n	...
طول شش‌ضلعی منتظم (L_n)	$L_1=a$	$L_2=\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$L_3=\frac{3}{4}a$	...	$L_n=(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}.a$	...
محیط شش‌ضلعی منتظم (P_n)	$P_1=6a$	$P_2=3\sqrt{3}a$	$P_3=\frac{9}{2}a$	...	$P_n=6(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}.a$	...
مساحت شش‌ضلعی منتظم (S_n)	$S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$S_2=\frac{9\sqrt{3}}{8}a^2$	$S_3=\frac{27\sqrt{3}}{32}a^2$	...	$S_n=\frac{3^n\times\sqrt{3}}{2^{2n-1}}.a^2$	...



مجموع جملات دنبالهٔ اضلاع شش‌ضلعی‌ها $= L = L_1+L_2+L_3+\dots+L_n+\dots = a+\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{4}a+\dots+(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}.a = \frac{a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = (2+\sqrt{3})2a$

مجموع محیط‌های همهٔ شش‌ضلعی‌ها $= P = P_1+P_2+P_3+\dots+P_n+\dots = 6a+3\sqrt{3}a+\frac{9}{2}a+\dots+6(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}a+\dots = \frac{6a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = (2+\sqrt{3})12a$

مجموع مساحت‌های همهٔ شش‌ضلعی‌ها $= S = S_1+S_2+S_3+\dots+S_n+\dots = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{9\sqrt{3}}{8}a^2+\dots+\frac{3^n\times\sqrt{3}}{2^{2n-1}}a^2+\dots = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}{1-\frac{3}{4}} = 6\sqrt{3}a^2$



آموزشی

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاِ یاسی‌پور

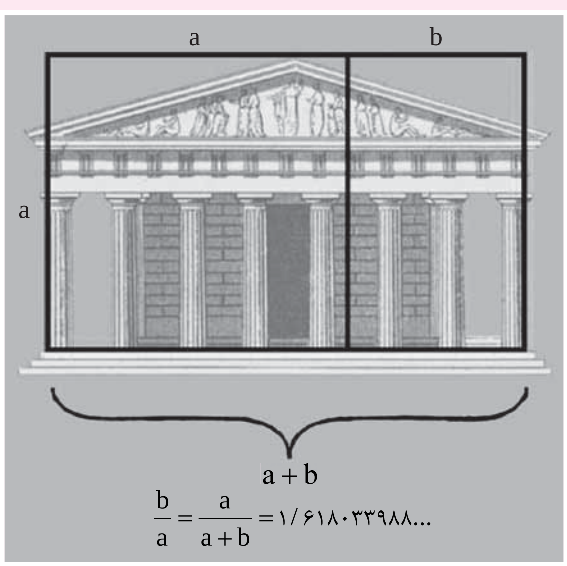
ریاضیات در چند دقیقه

اعداد گنگ

«اعداد گنگ» (irrational numbers) اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را با تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر بیان کرد. این عددها را برخلاف اعداد گویا، نمی‌توان به صورت نسبت بین دو عدد صحیح، یا به صورت یک عدد دهدهی که یا به پایان می‌رسد و یا در الگوی منظمی از ارقام تکرار شونده قرار می‌گیرد، بیان داشت. در عوض، بسط‌های دهدهی اعداد گنگ بدون تکرار متناوبی برای همیشه ادامه دارند.

گنگ‌ها نیز مانند اعداد طبیعی و اعداد گویا، در وسعت نامتناهی‌اند. اما در حالی که گویاها و اعداد صحیح مجموعه‌هایی با اندازه یا اصلیت یکسان‌اند، اعداد گنگ، باز هم بی‌شمارترند. در واقع طبیعتشان نه‌تنها آن‌ها را «نامتناهی» می‌کند، بلکه «ناشمارا» نیز می‌سازد.

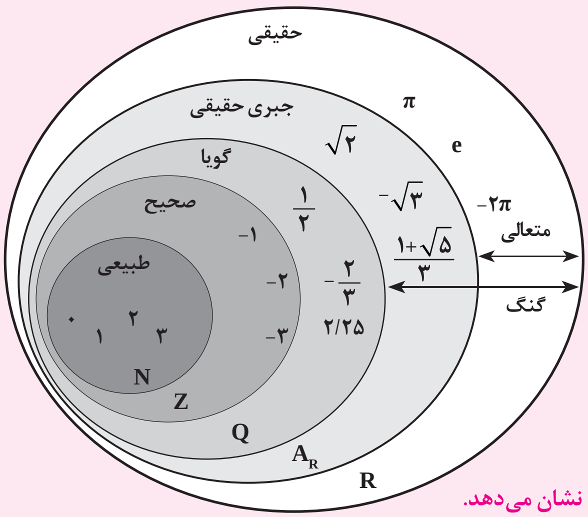
بعضی از مهم‌ترین اعداد واقع در ریاضیات، گنگ هستند، از جمله «π»، نسبت بین پیرامون یک دایره به شعاع آن، «ثابت اویلر»، یعنی e، نسبت طلایی * که در تصویر نشان داده شده، و نیز $\sqrt{۲}$، ریشهٔ دوم ۲.



* «نسبت طلایی» نسبت بین دو عدد است که نسبت کوچک‌تر به بزرگ‌تر، برابر نسبت بزرگ‌تر به مجموع کل آن دو باشد. این نسبت عددی گنگ و ثابت است که به‌طور طبیعی در وضعیت‌های بسیاری ظاهر می‌شود، و در مؤثر بودن تناسب در هنر و معماری به‌کار رفته است.

اعداد جبری و متعالی

«عدد جبری» عددی است که جواب معادله‌ای شامل توان‌های متغیر x، یعنی یک چندجمله‌ای با «ضرایب گویا» (rational coefficients) باشد، در حالی که «عدد متعالی» چنین جوابی نیست. ضرایب چنین معادلاتی اعدادی هستند که در هر یک از متغیرها ضرب شده‌اند. برای مثال، $\sqrt{۲}$ گنگ است، زیرا نمی‌تواند به‌صورت نسبتی از دو عدد تمام نوشته شود، اما جبری است. زیرا جواب معادلهٔ $x^۲-۲=۰$ است که دارای ضرایب گویاست (۱ و ۲). جمیع اعداد گویا جبری‌اند، زیرا هر نسبت معلـوم $\frac{p}{q}$ را می‌توان به‌صورت جواب $qx-p=۰$ به‌دست آورد.



ممکن است انتظار داشته باشیم که اعداد متعالی نادر باشـند، اما در واقع عکس این مطلب صحیح اسـت. $\sqrt{۲}$ استثناست، و تقریباً جمیع اعداد گنگ، متعالی نیز هستند. اثبات این موضوع بسـیار مشکل اسـت، اما تقریباً محقق است که هر عدد به تصادف از بین صفر و یک انتخاب شده، متعالی است. مطلب مزبور این پرسش را مطرح می‌کند که چرا ریاضی‌دان‌ها با گذشتن از اکثریت وسیعی از اعداد، این همه وقت صرف حل معادلات جبری می‌کنند.

نمودار لانه‌ای، انواع اصلی اعداد حقیقی، از جمله چند مثال مهم را نشان می‌دهد.

π

π عـددی متعالی و یکی از ثابت‌های اساسـی ریاضیات اسـت. این عدد که به حرف یونانی π نمایش داده می‌شـود، در مکان‌هـای متفـاوت و غیرمنتظـره‌ای رخ می‌دهد. عدد مورد بحث به‌قدری اهمیت دارد که پاره‌ای از ریاضی‌دان‌ها و دانشمندان علوم رایانه‌ای بخش بزرگی از وقت و کوشش خود را صرف محاسـبهٔ هرچه دقیق‌تر آن کرده‌اند. در سال ۲۰۱۰ گزارش شـد که این عدد با اسـتفاده از رایانه تا بیش از پنج میلیارد رقم محاسبه شده است.

چنیـن دقتی بـرای مقاصـد عملی ضروری نیسـت و π می‌توانـد بـه تقریب بـا اعداد گویـای $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$، یا در نمایش‌دهدهی با:

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸

محاسبه شود. این تقریب ابتدا از طریق هندسه، شاید در اوایل ۱۹۰۰ ق.م. در مصر و بین‌النهرین کشف شد و معمولاً به صورت نسـبت پیرامون یک دایره به قطرش نمایش داده می‌شود. **ارشمیدس** از هندسه برای یافتن حدود بالا و پایین این مقدار اسـتفاده کرد و از آن زمان به بعد مشخص شد که این عدد در حوزه‌های ظاهراً نامرتبطی چون احتمال و نسبیت آشکار می‌شود.

۳.۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱
۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰۹۷۴۹۴۴۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴۰۶۲۸۶۲۰۸۹۹۸۶۲
۸۰۳۴۸۲۵۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹۸۲۱۴۸۰۸۶۵۱۳۲۸۲۳۰۶۶۴۷۰۹۳۸۴
۴۶۰۹۵۵۰۵۸۲۲۳۱۷۲۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸۴۸۱۱۱۷۴۵۰۲۸۴۱۰۲۷۰۱۹
۳۸۵۲۱۱۰۵۵۵۹۶۴۴۶۲۲۹۴۸۹۵۴۹۳۰۳۸۱۹۶۴۴۲۸۸۱۰۹۷۵۶۶
۵۹۳۳۴۴۶۱۲۸۴۷۵۶۴۸۲۳۳۷۸۶۷۸۳۱۶۵۲۷۱۲۰۱۹۰۹۱۴۵۶۴
۸۵۶۶۹۲۳۴۶۰۳۴۸۶۱۰۴۵۴۳۲۶۶۴۸۲۱۳۳۹۳۶۰۷۲۶۰۲۴۹۱۴
۱۲۷۳۷۲۴۵۸۷۰۰۶۶۰۶۳۱۵۵۸۸۱۷۴۸۸۱۵۲۰۹۲۰۹۶۲۸۲۹۲۵۴
۰۹۱۷۱۵۳۶۴۳۶۷۸۹۲۵۹۰۳۶۰۰۱۱۳۳۰۵۳۰۵۴۸۸۲۰۴۶۶۵۲۱۳
۸۴۱۴۶۹۵۱۹۴۱۵۱۱۶۰۹۴۳۳۰۵۷۲۷۰۳۶۵۷۵۹۵۹۱۹۵۳۰۹۲۱۸۶
۱۱۷۳۸۱۹۳۲۶۱۱۷۹۳۱۰۵۱۱۸۵۴۸۰۷۴۴۶۲۳۷۹۹۶۲۷۴۹۵۶۷۳
۵۱۸۸۵۷۵۲۷۲۴۸۹۱۲۲۷۹۳۸۱۸۳۰۱۱۹۴۹۱۲۹۸۳۳۶۷۳۳۶۲۴
۴۰۶۵۶۶۴۳۰۸۶۰۲۱۳۹۴۹۴۶۳۹۵۲۲۴۷۳۷۱۹۰۷۰۲۱۷۹۸۶۰۹
۴۳۷۰۲۷۷۰۵۳۹۲۱۷۱۷۶۲۹۳۱۷۶۷۵۲۳۸۴۶۷۴۸۱۸۴۶۷۶۶۹
۴۰۵۱۳۲۰۰۰۵۶۸۱۲۷۱۴۵۲۶۳۵۶۰۸۲۷۷۸۵۷۷۱۳۴۲۷۵۷۷۸۹
۶۰۹۱۷۳۶۳۷۱۷۸۷۲۱۴۶۸۴۴۰۹۰۱۲۲۴۹۵۳۴۳۰۱۴۶۵۴۹۵۸۵
۳۷۱۰۵۰۷۹۲۲۷۹۶۸۹۲۵۸۹۲۳۵۴۲۰۱۹۹۵۶۱۱۲۱۲۹۰۲۱۹۶۰۸۶۴۰
۳۴۴۱۸۱۵۹۸۱۳۶۲۹۷۷۴۷۷۱۳۰۹۹۶۰۵۱۸۷۰۷۲۱۱۳۴۹۹۹۹۹۹۸
۳۷۲۹۷۸۰۴۹۹۵۱۰۵۹۷۳۱۷۳۲۸۱۶۰۹۶۳۱۸۵۹۵۰۲۴۴۵۹۵۵...

احسان یارمحمدی

The American Mathematical Monthly

● **اسم مجله:** The American Mathematical Monthly
● **تارنمای مجله:** http://www.maa.org/publications/periodicals/american-mathematical-monthly
● **ناشر:** انجمن ریاضی آمریکا[1]
● **مکان انتشار:** Washington, DC, USA
● **زبان:** انگلیسی
● **سال آغاز انتشار:** ۱۸۹۴
● **تعداد چاپ و توزیع در هر سال:** ۱۰ شماره
● **نشانی مجله:**
Mathematical Association of America
1529 Eighteenth St., N.W.
Washington,DC 20036

مجله The American Mathematical Monthly یکی از برجسته‌ترین و بهترین مجلات ریاضی جهان است و طیف گسترده‌ای از استادان و نام‌داران ریاضیات معاصر در آن قلم زده‌اند. در ضمن خط‌مشی مجلهٔ مزبور به‌گونه‌ای است که هر فرد علاقه‌مند که توانایی تألیف یا تدوین مقاله‌ای را در موضوعات مرتبط و هماهنگ با دستورالعمل‌های مجله داشته باشد، جدا از هرگونه دیدگاه سیاسی و جایگاه جغرافیایی، می‌تواند مطلب خود را برای چاپ در مجله ارسال کند.

این مجله در سال ۱۸۹۴ به دست یک آموزشگر و معلم مدرسه به نام **بنجامین فرانکلین فینکِل**[2] (۱۹۴۷-۱۸۶۵) در ایالت میسوری آمریکا پایه‌ریزی شد. علت این موضوع هم که فینکِل دست به این اقدام مهم زد، تصمیم‌ها و سیاست‌های نادرست سیاست‌گذاران ایالتی در زمینهٔ آموزش ریاضی بود که به‌شدت معلمان و آموزشگران ریاضی را برای دسترسی به منابع مناسب در تنگنا قرار داده بود. بنابراین فینکِل تصمیم گرفت با تأسیس مجله کمبودهای موجود در کتاب‌های درسی را جبران کند و معلمان، مدرسان و علاقه‌مندان را از مطالب و موضوع‌های جدید ریاضی بهره‌مند سازد.

علاقه‌مندان مجلهٔ ریاضی The Amercian Mathematical Monthly می‌توانند با مراجعه به تارنمای اینترنتی این مجله و بررسی شرایط عضویت در این تارنما و در نهایت، با عضویت در آن از خدمات اینترنتی تارنمای این مجله استفاده کنند. البته لازم به ذکر است که مشترکین مجلهٔ مزبور می‌توانند برای انجام مکاتبات لازم و ضروری دربارهٔ تغییر نشانی پستی‌شان، دریافت نکردن یا دسترسی نداشتن در زمان مناسب به شماره یا شماره‌هایی از مجله، و نیز پرداخت حق اشتراک مجله، با استفاده از نشانی پستی، تلفن‌ها و دورنگار مجله که در زیر آمده‌اند، با مجله ارتباط بگیرند.

The MAA Customer Service Center
P.O. Box 91112
Washington, DC 20090-1112
Telephones: (800)331-1622, (301)617-7800
Fax: (240)396-5647

اگر می‌خواهید مسئله یا مسائلی را برای مجلهٔ The Amercian Mathematical Monthly ارسال

کنید و یا اینکه موفق شـــده‌اید مســـئله یا مسئله‌هایی از این مجله را حل کنید و می‌خواهید راه‌حل (راه‌حل‌های) خود را برای مجلهٔ مزبور بفرســـتید، می‌توانید آن‌ها را به نشـــانی پســـتی زیر و یا در قالب فایل «PDF» به نشانی الکترونیکی زیر ارسال کنید:

Doug Hansley, Monthly Problems
Department of Mathematics
Texas A&M University
College Station, TX 77840
USA
E-mail: monthlyproblems@math.tamu.edu

اگر می‌خواهید یک یا چند کتاب را به بخش معرفی کتـــاب مجلهٔ مزبور ارائه کنید، می‌باید آن (آن‌ها) را برای مسئول قسمت مربوط به نشانی پستی زیر بفرستید:

Jeffrey Nunemacher-Book Review Editor
Ohio Wesleyan University
Department of Mathematics and Computer Science
90 S. Henry Street
Delaware, OH 43015

در ضمن اگر خواهان ارائهٔ هرگونه پیشنهاد یا انتقاد دربارهٔ رویکرد کمی یا کیفی مجله هســـتید و یا اینکه در این مجله مقاله‌ای را به چاپ رسانده‌اید و مایل هستید که مقالهٔ خود را در مجله‌ای دیگر مجدداً به چاپ برسانید یا ترجمهٔ مقالهٔ خود به فارسی را برای چاپ در اختیار یکی از مجله‌های ریاضی داخل کشور قرار دهید، لازم است که با مدیرمسئول مجلهٔ مزبور از طریق نشانی پستی یا نشانی الکترونیکی وی به شرح زیر ارتباط بگیرید و مجوز این کار را دریافت کنید:

Beverly Ruedi
Journals Editorial Manager
Mathematical Association of America
1529 Eighteenth Street, NW
Washington DC 20036
E-mail: bruedi@maa.org

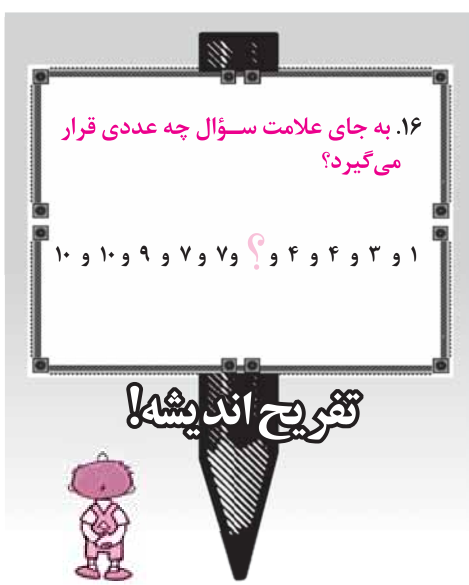
در پایـــان امیدواریم که ایـــن مجله را تهیه و مقالات ارزشـــمند آن را مطالعه کنید و در صورت تمایل، با انجام هماهنگی‌هـــای لازم و کافی با مســـئولان مجلهٔ ریاضی برهان (متوســـطهٔ ۲)، به ترجمهٔ مقالاتی که با خط‌مشی

مجلهٔ برهان هماهنگ باشـــند، دســـت بزنید. البته لازم بـــه ذکر اســـت که بـــرای مطالعهٔ آنلاین مقـــالات مجله The American Mathematical Monthly در تارنمای اینترنتی آن لازم اســـت که عضو انجمن ریاضی آمریکا باشید که چگونگی این عضویت در تارنمای مجله آمده است.■


بنجامین فرانکلین فینکل

***پی‌نوشت**

1. The Mathematical Association of America
2. Benjamin Franklin Finkel



راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

ریاضی ۲

۱. الف) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\hat{A}$

$$\Rightarrow BC^2 = (3\sqrt2+\sqrt6)^2 + (2\sqrt6)^2 - 2(3\sqrt2+\sqrt6)(2\sqrt6)\times\frac12$$

$$= 18+6+12\sqrt3+24-12\sqrt3-12 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

ب)

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt6}{\sin B} = \frac{6}{\sin A} = \frac{6}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{12}{\sqrt3}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{2\sqrt6\times\sqrt3}{12} = \frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow \hat B = 45^\circ$$

ج)

$$S = \frac12 AB.AC.\sin A = \frac12\times 2\sqrt6(3\sqrt2+\sqrt6).\frac{\sqrt3}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt2}{2}(3\sqrt2+\sqrt6) = 9+3\sqrt3$$

۲.

$$A^2 = \begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&3\\-3&0\end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix}1&-2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - B^2 = \begin{bmatrix}4&3\\-3&1\end{bmatrix} = C \Rightarrow |C| = 13$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac1{13}\begin{bmatrix}1&-3\\3&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac1{13}&-\frac3{13}\\\frac3{13}&\frac4{13}\end{bmatrix}$$

۳.

$$A^2 = \begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10&12\\8&10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - A = \begin{bmatrix}8&9\\6&8\end{bmatrix}$$

$$A^2 - A = X - AX = X(I-A) = \begin{bmatrix}8&9\\6&8\end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-3\\-2&-1\end{bmatrix}$$

$$X\underbrace{\begin{bmatrix}-1&-3\\-2&-1\end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix}8&9\\6&8\end{bmatrix}$$

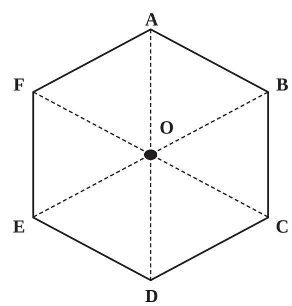
$$B^{-1} = \frac1{-5}\begin{bmatrix}-1&3\\2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac15&-\frac35\\-\frac25&\frac15\end{bmatrix}$$

$$XB = \begin{bmatrix}8&9\\6&8\end{bmatrix} \Rightarrow X(\underbrace{BB^{-1}}_{I}) = \begin{bmatrix}8&9\\6&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac15&-\frac35\\-\frac25&\frac15\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix}-2&-3\\-2&-2\end{bmatrix}$$

هندسهٔ ۱

۱. پای ارتفاع هرم، مرکز شش‌ضلعی قاعده (O) است و می‌دانیم مثلث‌های OAB ،OBC و... متساوی‌الاضلاع هستند. بنابراین: $OA=OB=OC=...=a$



حال اگر S رأس هرم باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ SOB $(SO \perp OB)$ داریم: $SO^2+OB^2=SB^2$ و در نتیجه: $SO^2+a^2=b^2$ و SO ارتفاع هرم برابر است با: $\sqrt{b^2-a^2}$ و در نتیجه حجم هرم برابر است با:

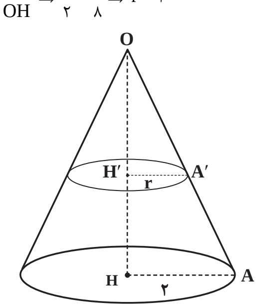
$$V = \frac13 sh = \frac13\times\frac{3\sqrt3}{2}a^2.\sqrt{b^2-a^2} = \frac{\sqrt3 a^2\sqrt{b^2-a^2}}{2}$$

مساحت وجه‌های جانبی، یعنی مثلث‌های متساوی‌الساقین با ساق‌های b و قاعدهٔ a برابر است با: $S = \frac12 a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$ (چرا؟) پس مساحت کل هرم برابر است با:

$$S = 3a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}} + \frac{3\sqrt3}{2}a^2$$

۲. مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ فوق و مخروط، دایره‌ای به شعاع r است. در مثلث OHA به کمک قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

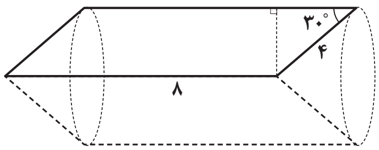
$$\frac{HA'}{HA} = \frac{OH'}{OH} \Rightarrow \frac r2 = \frac48 \Rightarrow r = 1$$



و حجم موردنظر، تفاضل حجم‌های دو مخروط است:

$$V = V_1 - V_2 = \frac13\pi(2)^2\times8 - \frac13\pi(1)^2\times4 = \frac{28\pi}{3}$$

۳. از دوران متوازی‌الاضلاع حول ضلع بزرگ آن، شکلی حاصل می‌شود که استوانه‌ای است که یک مخروط به آن اضافه شده و یک مخروط از آن برداشته شده است.



بنابراین حجم این شکل با حجم استوانه برابر است. ارتفاع این استوانه ۸ سانتی‌متر و شعاع قاعدهٔ آن (r) ۲ سانتی‌متر است. (چرا؟) پس حجم آن برابر است با:

$$V = \pi(2^2)\times8 = 32\pi$$

هندسهٔ ۲

۱. نقطه‌های $A(x,y)$ و $A'(2\alpha-x,2\beta-y)$ را در نظر می‌گیریم. وسط AA' نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ است. پس A' بازتاب A نسبت به O است. حال بازتاب خط $2x-y=4$ را به کمک این دستور به‌دست می‌آوریم:

$$T(x,y)=(2-x,4-y)=(X,Y)$$

$$\begin{cases}2-x=X\\4-y=Y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2-X\\y=4-Y\end{cases} \Rightarrow 2(2-X)-(4-Y)=4$$

$$\Rightarrow Y-2X=4$$

۲.

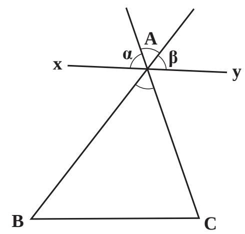
$$T_1(x,y)=(2x,2y)=(X,Y) \Rightarrow x=\frac X2, y=\frac Y2$$

$$\Rightarrow 2(\frac Y2)+\frac X2 = 2 \Rightarrow X+2Y=4$$

$$T_2(x,y)=(-y,x)=(X,Y) \Rightarrow \begin{cases}y=-X\\x=Y\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y-2X=4$$

۳. زاویهٔ B را با انتقال در راستای بردار $\overrightarrow{BA}$ و زاویهٔ C را با انتقال در راستای بردار CA جابه‌جا می‌کنیم. اگر انتقال یافتهٔ $\hat{B}$، زاویهٔ β و انتقال یافتهٔ $\hat{C}$، زاویهٔ α باشد، داریم: $\hat{\beta}=\hat{B}$، $\hat{\alpha}=\hat{C}$، $Ax||BC$ و $Ay||BC$. پس Ax و Ay در یک راستا هستند و متقابل به رأس زاویهٔ A با زوایای α و β یک زاویهٔ نیم‌صفحه تشکیل می‌دهد. پس: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{A}=180^\circ$ و در نتیجه: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.



حسابان

۱.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 3x-\sin x\cos x}{\tan^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos 3x-\cos x)}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(-2\sin 2x\sin x)}{\tan^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(\frac{\sin x}{x})^2(\frac{\sin 2x}{2x}).(2x^3)}{(\frac{\tan x}{x})^3.x^3}=-4$$

ب) $x=\frac{\pi}{4}+t$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+t)-\tan(\frac{3\pi}{4}+3t)}{\sin(\frac{\pi}{4}+t)-\cos(\frac{\pi}{4}+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1+\tan t}{1-\tan t}-\frac{1+\tan 3t}{1-\tan 3t}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2\tan t-2\tan 3t}{(1-\tan t)(1-\tan 3t)}}{\sqrt{2}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2(\frac{\sin(t-3t)}{\cos t\cos 3t})}{\sqrt{2}\sin t(1-\tan t)(1-\tan 3t)}=\ldots=-2\sqrt{2}$$

۲. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{a\sin\pi x}{x-1}+b\quad(x=1+t,t\to 0^+)$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{a\sin(\pi+\pi t)}{t}+b=\lim_{t\to 0^+}\frac{-a\sin\pi t}{t}+b=-a\pi+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}a\pi[\pi x]+b[-x]=3a\pi-b,\ f(1)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a\pi+b=\frac{1}{2}\\ 3a\pi-b=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 2a\pi=1,a=\frac{1}{2\pi},b=1$$

۳. نقطه‌ای به طول ۱ روی خط $y=2x+1$، نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ است. بنابراین، این نقطه روی منحنی هم هست و در نتیجه: $a+b=3$ و شیب مماس بر منحنی در این نقطه مساوی ۲ است:

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'(1)=\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4,b=-1$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$

فرض بر این است که این معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که طول‌های نقاط ماکزیمم و مینیمم هستند. مجموع طول‌های این دو نقطه برابر است با $\frac{-2b}{3a}$ و مجموع عرض‌های آن‌ها برابر است با:

$$y_1+y_2=f(x_1)+f(x_2)$$
$$=a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)+2d$$
$$=a[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)]+b[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]$$
$$+c(x_1+x_2)+2d$$
$$=a\left[(\frac{-2b}{3a})^3-3(\frac{c}{3a})(\frac{-2b}{3a})\right]+b\left[(\frac{-2b}{3a})^2-2(\frac{c}{3a})\right]$$
$$+c(\frac{-2b}{3a})+2d=\frac{4b^3-18abc+54a^2d}{27a^2}$$

بنابراین مختصات وسط این دو نقطه برابر است با:

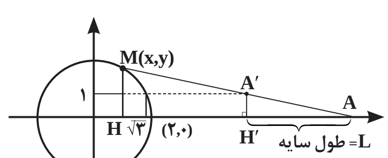
$$M(\frac{-b}{3a},\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2})$$

و به‌سادگی می‌توان نشان داد که این نقطه همان نقطهٔ عطف تابع است:

$$f''(x)=6ax+2b=0\Rightarrow x_0=-\frac{b}{3a},$$
$$f(x_0)=f(-\frac{b}{3a})=a(-\frac{b}{3a})^3+b(-\frac{b}{3a})^2+c(-\frac{b}{3a})+d$$
$$=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}$$

۲. $A'H'=1$

$$\frac{A'H'}{MH}=\frac{AH'}{AH}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{L}{(L+2+2-x)}$$
$$\Rightarrow Ly=L+4-x\Rightarrow\frac{dL}{dt}-\frac{dx}{dt}$$
$$=L\frac{dy}{dt}+y\frac{dL}{dt}\ (*)\quad \frac{dx}{dt}=0.1,$$
$$x=1,\ y=\sqrt{3},\ L=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$$
$$x^2+y^2=4\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$
$$\Rightarrow 2(1)(0.1)+2(\sqrt{3}).\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{30}$$



با جای‌گذاری این مقادیر در رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$\frac{dL}{dt}-0.1=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}\times(\frac{-\sqrt{3}}{30})+\sqrt{3}(\frac{dL}{dt})$$

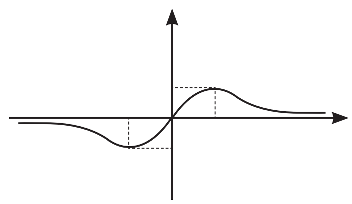
و از معادله فوق نتیجه می‌شود: $\frac{dL}{dt}=\frac{2+\sqrt{3}}{20}$

۳. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$

$$\Rightarrow x=\pm 1$$

x	−∞		−1		1		+∞
f′(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	0	↘	−1 min	↗	1 max	↘	0

$$f''(x)=\frac{-4x(1+x^2)^2-4(2x)(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$



با حل معادلهٔ $f''(x)=0$ سه ریشهٔ حقیقی $x_1=0$ و $x_2=\sqrt{3}$ و $x_3=-\sqrt{3}$ به‌دست می‌آید که طول‌های نقاط عطف هستند (جدول تغییرات $f''(x)$ را رسم کنید). بنابراین سه نقطهٔ عطف $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}\sqrt{3}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-\sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}$ به‌دست می‌آیند و با محاسبهٔ شیب‌های AB و AC نتیجه بگیرید که این سه نقطه بر یک استقامت‌اند.

ریاضیات گسسته

۱. سه پیشامد انتخاب ظرف اول، انتخاب ظرف دوم و انتخاب ظرف سوم را B_1 و B_2 و B_3 تعریف کنید و سپس برای حل مسئله از قانون احتمال کل کمک بگیرید.

۲. از قانون احتمال کل استفاده کنید. جواب آخر: $\frac{32}{53}$.

۳. ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد.

جبر و احتمال

۱. از دستور احتمال دوجمله‌ای استفاده کنید.

۲. الف) از اینکه مجموع احتمال‌های برد a و b و c برابر ۱ است، استفاده کنید.
ب) از دستور احتمال $a\cup b$ استفاده کنید.

۳. سه پاره‌خط زمانی تشکیل مثلث می‌دهند که طول هر پاره‌خط از مجموع طول‌های دو پاره‌خط دیگر کمتر باشد. سپس از روش احتمال پیشامدهای پیوسته استفاده کنید.

ریاضیات سوم علوم‌تجربی

۱. الف) از x در صورت و مخرج فاکتور بگیرید و فرض کنید: $\frac{1}{x}=t$.
ب) چون درجهٔ صورت از مخرج بیشتر است، حد کسر بی‌نهایت می‌شود و علامت بی‌نهایت از درجهٔ $x^{5-2}=x^3$ به‌دست می‌آید.

۲. شرط پیوستگی در نقطهٔ داده شده را برقرار کنید و a و b را به‌دست آورید که $a=-2$ و $b=4$ حاصل می‌شود.

۳. با اِعمال شرط پیوستگی در $x_0=0$ برای a دو مقدار (± 1) به‌دست می‌آید که $a=-1$ قابل قبول نیست. زیرا برای $a=-1$ تابع در $x_0=0$ ناپیوسته می‌شود.

ایستگاه اول

معمای اول

حداقل باید ۲۵ سال صبر کنیم:

$1420=2^2\times5\times71$

و آخریـــن بار حدود ۳۰ ســـال قبل این اتفاق افتاده است:

$1364=2^2\times11\times31$

معمای دوم

حداکثر به‌صورت مجموع ۲۸ عدد:

$2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+67+71+73+79+83+89+97+101+103+131=1395$

و حداقل به‌صورت مجموع سه عدد:

$1395=1381+11+3$

معمای سوم

ایـــن یک مســـئله از تئوری اعـــداد (معادلات ســـیال) است. در واقع باید در میان عددهای چهار رقمی به‌صورت $\overline{1abc}$، عددی را یافت که داشـــته باشیم: $\overline{1abc}=c\times b\times\overline{a1}$ و برای حل این معادله می‌نویسیم:

$$1000+100a+10b+c=bc(10a+1)$$
$$\Rightarrow 10(100+10a+b-abc)=(b-1)c$$
$$\Rightarrow 10\mid(b-1)c$$

و با توجه به اینکه: $b\leq 9$ و $c\leq 0$، حالت‌های زیر قابل بحث هستند:

$$\begin{cases}b=3,5,7,9\\c=5\end{cases},\begin{cases}b=6\\c=2,4,6,8\end{cases},$$
$$\begin{cases}b=1\\c=0,1,\dots,9\end{cases},\begin{cases}b=0,1,\dots,9\\c=0\end{cases}$$

بـــا جای‌گذاری این حالت‌ها در معادلهٔ اصلی و محاســـبهٔ مقدار a، معلوم می‌شـــود که تنها جواب قابل قبول همان ۱۳۹۵ است.

معمای چهارم

جواب: ۱۴۱۲

معمای پنجم

این یک مسئلهٔ ترکیبیات است:

$1395=3^2\times5\times31$

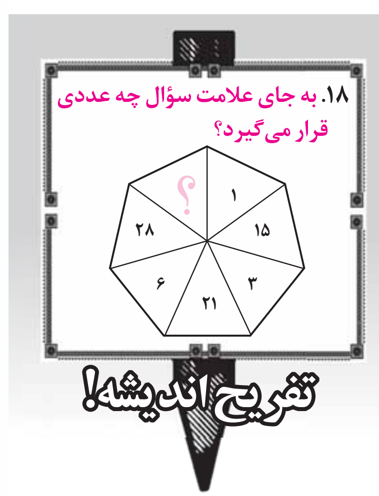
و از آنجـــا باید عامل‌هـــای ۳ و ۳ و ۵ و ۳۱ را به دو بلوک مجزا تفکیک کرد و شش طریق برای این کار ممکن است: ۱۳۹۵×۱، ۴۶۵×۳، ۱۶۵×۹ و ۴۵×۳۱ و ۲۷۹× ۵ و ۹۳×۱۵.

معمای ششم

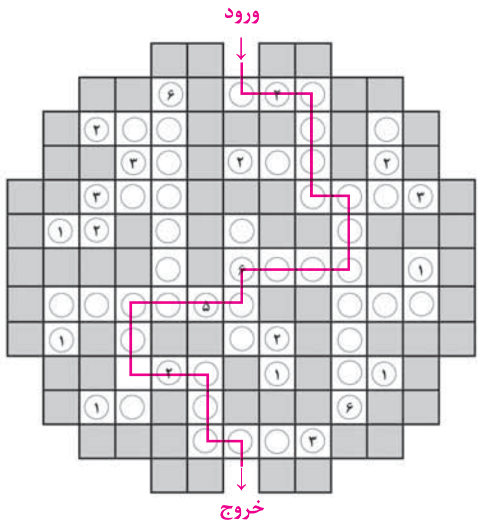
این هم یک مسئله از معادلات سیاله است.

$$\overline{abcd}=\overline{ab}\times\overline{cd}+160$$
$$\overline{ab}=x,\ \ \overline{cd}=y$$
$$\Rightarrow 100x+y=xy+160$$
$$x=\frac{160-y}{100-y}=1+\frac{60}{100-y}$$
$$\Rightarrow 100-y\mid 60$$
$$\Rightarrow 100-y=1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60$$
$$\Rightarrow (x,y)=(61,99),(31,98),(21,97),(16,96),(13,95),(11,94)$$

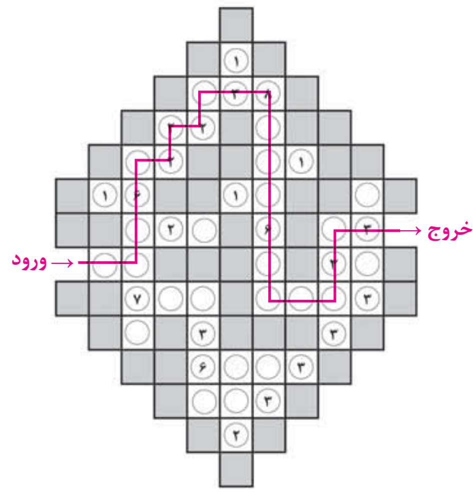
و بنابراین حداقل در ســـال ۱۶۹۶ یعنی ۳۰۲ ســـال دیگر همین وضع پیش می‌آید و حداکثر در ســـال ۱۱۹۴ یعنی ۲۰۲ ســـال پیش همین وضع بوده اســـت! و در هزارهٔ دوم فقط در همین دو سال (غیر از امسال) این وضع وجود دارد.



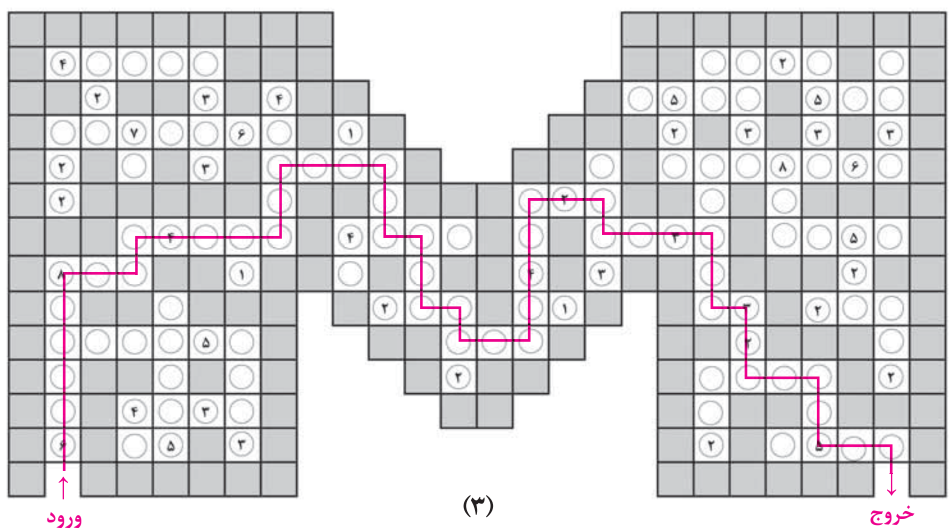
ایستگاه دوم (معماهای لابیرنت)



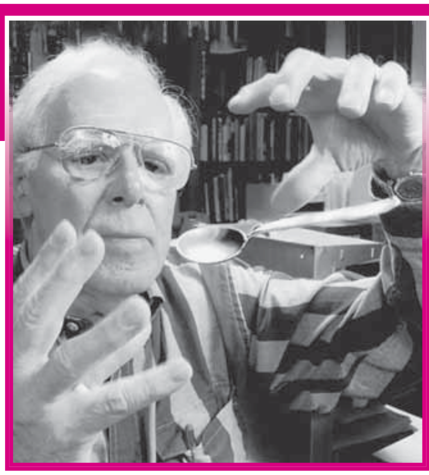
(۲)



(۱)



(۳)



پارادوکس و سفسطه

پارادوکس ریاضی، قضیه‌ای است که با وجود این‌که در شیوهٔ استدلالش هیچ شکی و در مراحل اثباتش هیچ ابهامی وجود ندارد، عقل از پذیرفتن آن امتناع دارد. بنابراین پارادوکس موضوعی است که هم حقیقت دارد و هم باور کردنش مشکل است. در صورتی که سفسطه، ضمن این‌که باورکردنی است، عاری از حقیقت هم هست و برخلاف پارادوکس در اثبات آن نکاتی گمراه‌کننده و ظریف، نهفته دارد که نتایج غیرقابل باوری را به بار می‌آورد.

مارتین گاردنر ــ ریاضی‌دان معاصر

پاسخ پرسش‌های پیکارجو!

۱. باید دو مهره را از کیسهٔ دوم یا از کیسهٔ سوم یا... یا از کیسهٔ دهم برداریم، بنابراین تعداد راه‌ها برابر است با: $\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+...+\binom{۱۰}{۲}$ و می‌دانیم:

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+...+\binom{n}{۲}=\binom{n+۱}{۳}$$

(به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید.) پس تعداد راه‌ها برابر است با: $\binom{۱۱}{۳}$ (گزینهٔ ب)

۲. می‌دانیم شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی به اضلاع a، b و c برابر است با: $R=\frac{abc}{۴S}$ (S مساحت مثلث است) و طبق دستور هرون: $S=\sqrt{(P(P-a)(P-b)(P-c)}$ (P نصف محیط مثلث است). بنابراین داریم:

$$۲R=\frac{abc}{۲\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}=۶/۲۵$$

$$\Rightarrow \frac{۲abc}{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}=۲۵$$

$$۴a^۲b^۲c^۲=۶۲۵(\frac{a+b+c}{۲})(\frac{a+b-c}{۲})(\frac{a+c-b}{۲})(\frac{b+c-a}{۲})$$

$$\Rightarrow ۶۴a^۲b^۲c^۲=۶۲۵(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a+c-a)$$

بنابراین: $(۲۵)^۲ | a^۲b^۲c^۲$ و از اینجا نتیجه می‌شود که باید دوتا از مقادیر a، b و c مضرب ۵ باشند و با توجه به قطر دایرهٔ محیطی مثلث، باید مساوی ۵ باشند؛ مثلاً b=c=۵. در نتیجه:

$$۶۴a^۲=(۱۰+a)(۱۰-a)(a)(a)$$

$$\Rightarrow ۱۰۰-a^۲=۶۴,\ a=۶$$

یعنی این مثلث، مثلث متساوی‌الساقین با ساق‌های ۵ و قاعدهٔ ۶ است و لذا محیط آن مساوی ۱۶ واحد است (گزینهٔ ب).

۳. اگر تعداد اعضای دو گروه x و y باشد، داریم:

$$x+y=۱۳۹۵,(x+y)^۲=۱۳۹۵^۲$$

$$\Rightarrow xy=\frac{۱۳۹۵^۲-x^۲-y^۲}{۲}$$

و به‌همین ترتیب اگر: x=r+s و y=p+q، داریم:

$$rs=\frac{x^۲-r^۲-s^۲}{۲},pq=\frac{y^۲-p^۲-q^۲}{۲},...$$

$$\Rightarrow xy+rs+pq+...$$

$$=\frac{۱۳۹۵^۲-x^۲-y^۲+x^۲-r^۲-s^۲+y^۲-p^۲-q^۲+...-۱^۲-۱^۲-۱^۲-...}{۲}$$

$$=\frac{۱۳۹۵^۲-۱۳۹۵}{۲}=\frac{۱۳۹۵\times۱۳۹۴}{۲}$$ (گزینهٔ د)

۴. با مقادیر نزدیک به ۱۰۰۰ کار می‌کنیم:

$$f(۹۹۹)=f(f(۱۰۰۴))=f(۱۰۰۱)=۹۹۸$$
$$f(۹۹۸)=f(f(۱۰۰۳))=f(۱۰۰۰)=۹۹۷$$
$$f(۹۹۷)=f(f(۱۰۰۲))=f(۹۹۹)=۹۹۸$$
$$f(۹۹۶)=f(f(۱۰۰۱))=f(۹۹۸)=۹۹۷$$
$$f(۹۹۵)=f(f(۱۰۰۰))=f(۹۹۷)=۹۹۸$$

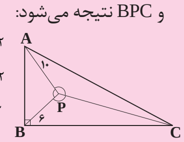
و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌گیریم که برای هر n<۱۰۰۰ داریم:

$$f(n)=\begin{cases}۹۹۸ & n=۲k+۱\\ ۹۹۷ & n=۲k\end{cases}$$

بنابراین: f(۹۵)=۹۹۸ (گزینهٔ ج).

۵. روشن است که: $A\hat{P}B=A\hat{P}C=B\hat{P}C=۱۲۰^\circ$ و با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های APB، APC و BPC نتیجه می‌شود:

$$AP^۲+BP^۲+AP.BP=AB^۲$$
$$AP^۲+PC^۲+AP.PC=AC^۲$$
$$BP^۲+PC^۲+BP.PC=BC^۲$$



و با توجه به قضیهٔ فیثاغورس نیز داریم: AB^۲+BC^۲=AC^۲ و بنابراین:

$$AP^۲+۲BP^۲+PC^۲+AP.BP+BP.PC$$
$$=AP^۲+PC^۲+AP.PC$$
$$\Rightarrow ۲BP^۲+AP.BP+BP.PC=AP.PC$$

و با جای‌گذاری مقادیر AP و PB نتیجه می‌شود:

$$۷۲+۶۰+۶PC=۱۰PC\Rightarrow PC=۳۳$$ (گزینهٔ هـ)

پاسخ پرسش‌های حاشیهٔ صفحات:

۱. جواب: ۷، ۱۳×۷=۹۱ و ۱۹×۴=۷۶ و ۱۷×۵=۸۵

۲. جواب: ۱۱

۳. جواب: ۴، ۶×۹=۵۴ و ۷×۴=۲۸ و ۹×۸=۷۲

۴. جواب: ۱۲. مجموع رقم‌های عددهای سه رقمی، عددهای دو رقمی را می‌سازند.

۵. پاسخ به عهدهٔ خودتان است!

۶. جواب: ۱۸. حاصل‌ضرب عددهای زیر، عددهای بالایی را بدون ترتیب می‌سازند.

۷. جواب ۱۰. مجموع عددهای روی خطوط موازی قطر مربع عددهای طبیعی متوالی هستند. (۱۰ و ۴+۵ و ۳+۱+۴ و ۲+۲+۱+۲ و ۳+۱+۲ و ۳+۲ و ۴)

۸. قورباغه و سر اسب! اگر شک دارید، تصویر را ۹۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانید.

۹. جواب: ۱. $\sqrt{۱\times۴}=۲, \sqrt{۲\times۸}=۴, \sqrt{۳\times۱۲}=۶$

۱۱. جواب: ۴. ۴×۴=۱۶ و ۳×۲=۶ و ۷×۳=۲۱

۱۲. جواب: ۱۱. دو دنبالهٔ حسابی مجزا، یکی با قدر نسبت ۳ و دیگری با قدر نسبت ۴- وجود دارد و جملات آن‌ها یک در میان نوشته شده‌اند.

۱۴. جواب: ۸. هر عدد ردیف زیرین مساوی مجموع ۴ عدد ردیف بالا است: ۱۸=۳+؟+۴+۳

۱۵. جواب: ۳۴۸۲۶. هر جمله از روی جملهٔ قبل با این قاعده به‌دست می‌آید: دو رقم سمت راست با هم جمع می‌شوند و رقم آخر سمت راست را می‌سازند و بقیهٔ ارقام، به ترتیب عکس در سمت چپ آن قرار می‌گیرند.

۱۶. جواب: ۶. جملات به ترتیب ۰ و ۱ و ۲ واحد کم می‌شوند.

۱۷. جواب: ۶۳۸۰. عددهای بیرون پرانتز را مربع کنید و از حاصل یک واحد کم کنید و با آن‌ها عدد داخل پرانتز را بسازید.

۱۸. جواب: ۱۰. از عدد ۱ شروع کنید و یک مثلث در میان به آن عددهای ۲ و ۳ و ۴ و... را اضافه کنید.

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط دایره، آگاه است،
و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد،
و آفرینندهٔ زمین و آسمان‌ها و قراردهندهٔ نور در تاریکی است،
و درود و سلام بر محمد مصطفی (ص) که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است.
و بر خاندان و یاران پاک او باد.

«از مقدمهٔ کتاب رسالهٔ محیطیه ـ غیاث‌الدین جمشید کاشانی»