بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وپنجم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۹۲
■ اسفند ۱۳۹۴
■ شمارهٔ ۶
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
[illegible]
پیام‌نگار:
[illegible]
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
roshdmag:
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۱۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷–۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱–۸۸۳۰۵۷۷۲

کتاب درسی و کلاس درس
دو عامل مهم در موفقیت

تمام آموزش‌های مدرسه‌ای از «کتاب درسی» آغاز می‌شوند و برای تألیف، چاپ و توزیع هر کتاب درسی هزینه‌های بسیاری صرف می‌شود و از بهترین کارشناسان، استادان و دبیران هر رشــته، در تألیف هر کتاب درسی بهره برده می‌شــود. در نهایت هم قرار است این کتاب درسی بعد از آموزش‌های لازم به دبیران و معلمان شما، در کلاس درس توسط ایشان تدریس شــود. بنابراین، بی‌توجهی به اهداف کتاب درسی، کم‌توجهی و عدم تمرکز روی تمام مطالبِ نگارش شــده (حتی پاورقی‌ها) در کتاب‌های درســی، چه از طرف معلمان و دبیران و چه از طرف دانش‌آموزان، به‌معنی به هدر دادن تمام ســرمایه‌هایی اســت که برای تألیف، چاپ و توزیع کتاب درسی صرف شده است.

البته به‌دلیل محدودیت‌های موجود در تألیف کتاب‌های درســی و به‌خصوص این موضوع که کتاب درســی در ایران برای سراسر کشور تألیف می‌شــود و در سراسر کشور، توانِ همهٔ دانش‌آموزان یکســان نیست، شما با صلاحدید و مشورتِ معلم خودتان در هر درسی که لازم اســت، از کتاب‌های کمک‌آموزشی اســتاندارد و مورد تأیید وزارت آموزش‌وپرورش استفاده می‌کنید. به همهٔ شما دانش‌پژوهان عزیز توصیه می‌کنم در حد امکان با تمرکز بالا در کلاس درس حضور یابید و کلاس درس و کتاب درســی را اصلی‌ترین عامل در یادگیری و موفقیت بدانید.

مؤید و پیروز باشید
سردبیر

دانش‌آموزان هر سؤالی می‌خواستند می‌پرسیدند!

مصاحبه با استاد جعفر نیوشا معلم پیشکسوَت درس هندسه

اشاره

اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطهٔ ۲ تابستان امسال گفت‌وگویی صمیمی با استاد جعفر نیوشا، معلم پیشکسوت هندسه و مؤلف کتاب‌های درسی و کمک‌درسی و عضو سابق کمیته المپیاد ریاضی ایران داشتند. قسمت اول این گفت‌وگو را در شمارهٔ ۵ ملاحظه نمودید. اینک قسمت دوم و پایانی این گفت‌وگو را با هم می‌خوانیم.

■ **برخورد شما با دانش‌آموزان در کلاس درس چگونه بود؟**

❍ من در کلاس جدی بودم، تکلیف می‌دادم و تکلیف می‌خواستم. اما در عین حال فضایی در کلاس بود که هر دانش‌آموزی هر سؤالی می‌خواست می‌توانست بپرسد و ترس و واهمه‌ای در کار نبود. یک خاطره هم بگویم بد نیست. در دبیرستان فرزانگان، خانمی بود به نام **پرستو صادقی** که حالا دکترا دارد و در استرالیا زندگی می‌کند. نفر دوم کنکور سراسری سال ۱۳۷۱ بود. مسئلهٔ نسبتاً مشکلی داده بودم و بچه‌ها نتوانسته بودند آن را حل کنند. راه‌حل آن را توضیح دادم. این خانم دست بلند کرد و گفت: اگر اجازه بدهید من هم راه دیگری بگویم و آمد و با روشی خیلی بهتر از روش من مسئله را حل کرد. من هم رو به بچه‌ها گفتم این دوست شما نه تنها خودش و کلاس را روسفید کرد، بلکه باعث افتخار من هم شد و این شعر را برایش سرودم:

پرستو راه‌حلی را بیان کرد
که بودش کار او بس خوب و زیبا
دبیرش کار او را آفرین گفت
از یرا هست شاگردی توانا
بخندیدند بر او دوستانش
نگار و مریم و رؤیا و شیوا
بپرسیدم چه رازی در میان است؟
چرا آزرده‌اش کردید او را؟
بگفتند بسته‌ایم ما عهد و پیمان
که هرکس طرح نو آرد ز ماها
چنان با نیش خود کارش بسازیم
که تا دنیاست نتواند برخیزد از جا
نیوشا این سخن از بهر شوخی
سروده است از بهر شماها

عزیزان قدر یکدیگر بدانید
که باشد زندگی چون خواب و رؤیا
به دنیا مردمی آزاده باشید
نترسید از عتاب پیر و برنا
ببینم من شما را شاد و خندان
بسان شاخ گل در بوستان‌ها

من این شعر را در کلاس خواندم و بچه‌ها آن را نوشتند و روی دیوار کلاس نصب کردند!

■ **استاد شهریاری جمله‌ای دارد که می‌گوید: «اگر ریاضی‌دان این حق را از خود سلب کند که از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب به ژرفای روح انسان‌ها وارد شود، گل و گیاه را دوست داشته باشد، به مسئله‌های حاد اجتماعی و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد و... . آن‌وقت، به یک انسان تک‌بعدی تبدیل می‌شود که در این**

به‌طور کلی به ریاضیات علاقه داشتم امّا در دانشگاه بیشتر تحت تأثیر دکتر هشترودی و دکتر آل‌بویه به هندسه علاقه‌مند شدم

صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان خوب باشد» شما با این جمله موافقید؟

○ بله، صددرصد. شما استادان ریاضی را ببینید: آقای شهریاری، آقای امامی، آقای غیور، آقای مصاحب، آقای دکتر هشترودی، دکتر آل‌بویه. این‌ها اصلاً آدم‌های یک‌بعدی نبودند. دایرةالمعارف، آقای مصاحب معروف بود. آقای غیور دیوان شعر داشت و آقای هشترودی شاعر بود. دکتر آل‌بویه هم شاعر بود و دیوانی داشت به‌نام «دیوان بویه» که من آن را از خودش هدیه گرفته بودم.

■ شما ظاهراً در سال ۱۳۶۱ از خدمت رسمی آموزش و پرورش بازنشسته شدید. معلمی را از چه سالی شروع کردید؟

○ بعد از پایان دورهٔ دانش‌سرا، من معلمی را از سال ۱۳۳۴ در تبریز شروع کردم. بعد از ۹ سال در سال ۱۳۴۳ به تهران منتقل شدم و ۱۷ سال در تهران بودم. خدمت رسمی من در دبیرستان مروی بود. مدیر دبیرستان مروی، آقای **مساوات** بود که از اشخاص فرهیخته و فرهنگی بود. ایشان لیسانس ریاضی داشت و در بیرجند معلم آقای **علم**- نخست‌وزیر و وزیر دربار در حکومت پهلوی- بود. یک‌بار در جشنی که در دبیرستان مروی به مناسبتی برگزار شده بود، آقای علم و وزیر آموزش و پرورش وقت- دکتر هدایتی- آمده بودند که من هم آنجا حاضر بودم.

تدریس غیردولتی خودم را از دبیرستان خوارزمی شروع کردم. آقای **باقر امامی** که مدیرعامل آنجا بود، در تبریز معلم من بود و در کلاس ششم ریاضی هندسه‌های ما را تدریس می‌کرد. وقتی من به تهران منتقل شدم، پیش ایشان رفتم و ایشان به من گفت که ما داریم مدرسهٔ «خوارزمی ۲» را در میدان بهارستان راه می‌اندازیم و شما برای تدریس به آنجا بروید. این‌طور بود که من از آنجا شروع کردم و بعد به دبیرستان خوارزمی پسرانه و دخترانه رفتم و سال‌ها در آن مدارس هم تدریس کردم.

■ با آقای شهریاری هم همکار بودید؟

○ بله در خوارزمی و «دبیرستان مرجان» با ایشان همکار بودم. آقای شهریاری معلمی بسیار توانا بود و البته فصاحت کلام بسیار خوبی هم داشت و بچه‌ها بسیار او را دوست داشتند. چون فقط ریاضی درس نمی‌داد و در کنار درس مطالبی می‌گفت که بچه‌ها خیلی استقبال می‌کردند. وی با همه همکاران رفتار بسیار خوبی داشت و در جمع آن‌ها همیشه حرف‌های تازه‌ای می‌زد و از صحبت‌هایشان استفاده می‌کردیم.

شرقی: آقای دکتر **فیروز نادری** که در آمریکا و در سازمان هوا- فضای آنجا (ناسا) سمت مهمی دارد، جملهٔ معروفی دارد و می‌گوید: «کلاس‌های آقای شهریاری برای ما حکم «مدی تیشن» داشت و ما را مسحور کلام خود می‌کرد.»

■ **امیری:** یک خاطره در این‌باره بگویم: من در سال‌های ۷۶-۱۳۷۳ در «دبیرستان فیروز بهرام» افتخار همکاری با استاد شهریاری را داشتم. در کلاس سوم ریاضی من ریاضیات

از راست به چپ:
محمدرضا امیری، هوشنگ شرقی، جعفر نیوشا، حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، حسین کریمی و ابراهیم دارابی

جدید درس می‌دادم و آقای شـــهریاری جبر می‌گفت. استاد خودش مؤلف کتاب جبر سوم ریاضی نظام قدیم بود. از بدشانســـی من، کلاس ریاضی جدید من درست بعـــد از کلاس جبر آقای شـــهریاری بـــود و وقتی من می‌رفتم سر کلاس، این سِحر را می‌دیدم و تا می‌آمدم کلاس را به دست بگیرم، مدتی طول می‌کشید!

■ چه شـــد که رشـــتهٔ ریاضی را انتخاب کردید و چه‌طور شد که به هندسه روی آوردید؟

❍ در آن دوره که ما در دبیرســـتان تحصیل می‌کردیم، مثل حالا نبود. ما تقریباً چشـــم و گوش بسته بودیم و معلم‌هایمان ما را با توجه به توانایی و استعدادمان هدایت می‌کردند که مثلاً شما به رشتهٔ ریاضی بروید و شما به رشتهٔ طبیعی. اما خب، خودم هم کلاً به ریاضیات علاقه داشتم. در دانشگاه بیشتر تحت تأثیر دکتر هشترودی و دکتر آل‌بویه به هندسه علاقه‌مند شدم.

■ در دوران معلمی، شـــما برای برخی تحصیلات تکمیلی به کشور فرانســـه اعزام شدید. در این مورد هم کمی توضیح بدهید.

❍ بله در ســـال‌های آغاز دههٔ ۵۰، دو مرتبه، هر بار دو ماه از طرف وزارت آموزش و پرورش برای یادگیری مباحث ریاضیات جدید به کشـــور فرانســـه اعزام شدم؛ چون فرانسوی‌ها در این امر پیشگام بودند.

■ با دفتر تألیف کتب درسی از چه زمانی همکاری داشتید؟

❍ در ســـال‌های آغاز دههٔ ۷۰ شمسی، همزمان با تحول نظام آموزشـــی به دفتر تألیف دعوت شدم و در گروه ریاضی در تألیف کتاب‌های هندسه نقش داشتم. آقایان رســـتمی و دارابی هم آن زمان آنجا بودند و در تألیف بعضی کتاب‌ها همکاری می‌کردند. اما من از سال‌های میانی دههٔ ۷۰ دیگر با دفتر تألیف همکاری نداشتم و از روند تألیف کتاب‌های هندسهٔ ۱ و ۲ نیز راضی نبودم و نسبت به آن‌ها انتقاد داشتم. اگرچه با کمیتهٔ المپیاد ریاضی تا سال ۱۳۸۶ همکاری داشتم.

■ **امیری:** الان چه می‌کنید، دســـت به قلم هســـتید؟ آخرین کارهایتان چه بودند؟

■ در حال حاضر مشغول گردآوری کارهایم هستم و بعضی از آن‌ها را هم منتشـــر کرده‌ام. در واقع پسرم که خودش هم تحصیلات عالی دارد (در ایران مهندسی عمران گرفت و از دانشگاهی در ژاپن دکترای زلزله‌شناسی دریافت کرد و اکنون مقیم ایران است) مشوق من برای این کار بوده است.

❍ از وقتـــی که در اختیار ما گذاشـــتید ســـپاس‌گزار و امیدواریم که بتوانیم باز هم از تجربیات شما در مجلهٔ برهان استفاده کنیم.

■ من هم از شما تشکر می‌کنم و امیدوارم بتوانم در خدمتتان باشم.

در سال‌های آغاز دههٔ ۵۰، دو مرتبه، هر بار دو ماه از طرف وزارت آموزش و پرورش برای یادگیری مباحث ریاضیات جدید به کشور فرانسه اعزام شدم

جبر خطی در Mathstudio

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

اشاره

معرفی یک ماتریس، جمع، تفریق و ضرب ماتریسی، دترمینان ماتریس‌ها و محاسبهٔ ماتریس معکوس از جمله مواردی هستند که روش محاسبهٔ آن‌ها با نرم‌افزار «Mathstudio» روی سیستم عامل اندروید در این مختصر مطرح شده‌اند. در پایان ضرب بردارها و محاسبهٔ زاویهٔ بین بردارها نیز بیان شده است.

در ادامهٔ مقاله‌های قبل در این مقاله به موضوع جبر خطی می‌پردازیم که بیشتر همان بحث ماتریس است. ماتریس شاید یکی از قسمت‌های ساده در ریاضی دبیرستانی است که در ریاضی سال دوم دبیرستان و هنرستان، همچنین در کتاب هندسه تحلیلی و جبر خطی سال چهارم ریاضی مطرح می‌شود. ولی برخی قسمت‌های آن به‌دلیل محاسبات طولانی خسته‌کننده است. این مشکل در این نرم‌افزار به سادگی حل شده است.

معرفی یک ماتریس

ماتریس به کمک کروشه تعریف می‌شود. هر سطر ماتریس داخل یک کروشه قرار می‌گیرد و سطرها به کمک ویرگول از هم جدا می‌شوند. کروشه در گوشهٔ سمت راست صفحهٔ کلید رایانه وجود دارد. هر ماتریس باید اسمی داشته باشد که مساوی کروشهٔ اصلی قرار می‌گیرد. برای مثال ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۵ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

A=[[۲,−۱,۳],[۵,۰,۷]]

۲	−۱	۳
۵	۰	۷

تصویر۱

جمع، تفریق و ضرب ماتریسی

برای انجام اعمال جبری روی ماتریس‌ها، ابتدا باید این ماتریس‌ها را به برنامه معرفی کنیم. اعمال جمع و تفریق طبق معمول و عمل ضرب با علامت ستاره انجام می‌شود. می‌توان چند ماتریس را در یک سلول تعریف کرد. به این منظور بعد از معرفی هر ماتریس کلید "Enter" را فشار می‌دهیم تا خط جدید در سلول موردنظر تعریف شود.

مثـــلاً می‌خواهیم برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ ماتریس‌هـــای A×B، A-B و A+B را حساب کنیم (تصویر ۲).

```
A=[[۲,۳],[-۱,۱]]
B=[[۴,۰],[۱,۵]]
A+B
```

۶	۳
۰	۶

```
A-B
```

-۲	۳
-۲	-۴

```
A*B
```

۱۱	۱۵
-۳	۵

تصویر ۲

توان ماتریس

در صورتی که بخواهیم توان nام یک ماتریس مربعی را حســـاب کنیم، از دستور A^n استفاده می‌کنیم. برای مثال، توان چهارم ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم (تصویر ۳).

```
A=[[۱,۰,۲],[۰,۳,۰],[۴,۵,۱]]
A^۴
```

۱۱۳	۲۶۰	۷۲
۰	۸۱	۰
۱۴۴	۴۴۰	۱۱۳

تصویر ۳

اما فقط کار به همین محاســـبات ختم نمی‌شـــود و ما می‌توانیم برای حل مســـائل بزرگ‌تر نیز از این برنامه کمک بگیریم. مثلاً می‌خواهیم شـــکل کلـــی توان nام ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ را حســـاب کنیم. در این صورت مراحل حدس و آزمایش را با این برنامه و به سرعت طی می‌کنیم (تصویر ۴).

```
A=[[۱,۱],[۰,۱]]
A^۲
```

۱	۲
۰	۱

```
A^۳
```

۱	۳
۰	۱

```
A^۴
```

۱	۴
۰	۱

```
A^۵
```

۱	۵
۰	۱

تصویر ۴

با توجه به جواب‌ها می‌بینیم که $A^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. در ادامه می‌توانیم با استقرای ریاضی مسئله را ثابت کنیم.

همچنین تـــوان nام ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم (تصویر ۵).

```
A=[[۱,۲,۳],[۰,۱,۴],[۰,۰,۱]]
```

۱	۲	۳
۰	۱	۴
۰	۰	۱

```
A^۲
```

۱	۴	۱۴
۰	۱	۸
۰	۰	۱

```
A^۳
```

۱	۶	۳۳
۰	۱	۱۲
۰	۰	۱

```
A^۴
```

۱	۸	۶۰
۰	۱	۱۶
۰	۰	۱

تصویر ۵

با توجه به جواب‌ها به این نتیجه می‌رسیم که:

$$A^n = \begin{bmatrix} ۱ & ۲n & a_n \\ ۰ & ۱ & ۴n \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

a_n در این مورد دنبالهٔ ... ,۳,۱۴,۳۳,۶۰ است. با کمک همین برنامه می‌توان جملهٔ عمومی این دنباله را پیدا کرد. جملهٔ عمومی این دنباله $a_n=۴n^۲-n$ است که به کمک مفهوم رگرسیون به‌دست آمده است.

ترانهادهٔ ماتریس

برای به‌دست آوردن ترانهادهٔ ماتریسی به نام B، ابتدا ماتریس را تعریف و سپس از دستور Transpose(B) استفاده می‌کنیم (تصویر ۶).

```
B=[[۱,۲,۳],[۰,۴,۵]]
```

۱	۲	۳
۰	۴	۵

```
Transpose(B)
```

۱	۰
۲	۴
۳	۵

تصویر ۶

دترمینان ماتریس

برای محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس مربعی به نام C، پس از معرفی ماتریس از دستور Det(C) استفاده می‌کنیم (تصویر ۷).

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

حاصل $|A\times B|$, $|A|\,|B|$, $|A|+|B|$ را حساب کنید.

```
A=[[۱,۲,۳],[۳,۴,۱],[۰,۳,۴]]
B=[[-۲,۳,۱],[۰,۵,۵],[۳,۲,۱]]
Det(A*B)
```

۶۴۰

```
Det(A) * Det(B)
```

۶۴۰

```
Det(A) + Det(B)
```

۵۶

تصویر ۷

وارون ماتریس

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس کافی است بعد از معرفی ماتریس دستور Inverse(A) را اجرا کنیم. مثلاً وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم (تصویر ۸).

```
A=[[۳,۴,۵],[۵,۳,۴],[۴,۵,۳]]
```

۳	۴	۵
۵	۳	۴
۴	۵	۳

```
Det(A)
```

۳۶

```
Inverse(A)
```

$-\frac{۱۱}{۳۶}$	$\frac{۱۳}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$\frac{۱}{۳۶}$	$-\frac{۱۱}{۳۶}$	$\frac{۱۳}{۳۶}$
$\frac{۱۳}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$-\frac{۱۱}{۳۶}$

تصویر ۸

یکی از مزایای این نرم‌افزار آن است که برخی از محدودیت‌ها را از پیش روی دانش‌آموزان برمی‌دارد. مثلاً می‌توانیم دترمینان و معکوس یک ماتریس مرتبهٔ ۴ را به سادگی حساب کنیم و از آن لذت ببریم (تصویر ۹).

```
A=[[۱ ,۲ ,۳,۴] ,[۲ ,۳ ,۴ ,۱],[۳ ,۴ ,۲ ,۱],[۴ ,۱ ,۲ ,۳]]
```

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۲	۳

```
Det(A)
```
۱۲۰

```
Inverse(A)
```

$-\frac{۱۳}{۶۰}$	$\frac{۱}{۱۲۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۱۱}{۴۰}$
$\frac{۷}{۶۰}$	$-\frac{۱۹}{۱۲۰}$	$\frac{۱۱}{۳۰}$	$-\frac{۹}{۴۰}$
$-\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱۷}{۴۰}$	$-\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۱}{۴۰}$
$\frac{۱۷}{۶۰}$	$-\frac{۲۹}{۱۲۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۱}{۴۰}$

تصویر۹

بردارها

بــردار بهصــورت ماتریســی یک ســطری معرفی می‌شــود. اگر u و v دو بردار باشــند، ضــرب درونی با علامــت Dot(v,u) و ضرب خارجــی با علامت Cross (v,u) محاسبه می‌شود. برای مثال، اگر داشته باشیم: v=i+۳j-۵k و u=۲i+۴j+۷k، آن‌گاه حاصل (v-u).(v+u)، (v-u)×(v+u) و v.u,v×u را حساب کنید (تصویر ۱۰).

```
V=[۱,۳,-۵]
U=[۲,۴,۷]
Dot(V,U)
```
-۲۱

```
Dot(V-U, V+U)
```
-۳۴

```
Cross(V,U)
```
[۴۱ ,-۱۷,-۲]

```
Cross(V-U, V+U)
```
[۸۲ ,-۳۴,-۴]

تصویر۱۰

زاویهٔ بین دو بردار

برای محاســبهٔ زاویهٔ بین دو بردار u و v کافی است که دســتور angle(v,u) را اجرا کنیــم. برای مثال، اگر w=i+j+k ، u=j+k و v=i+j زاویهٔ بین بردارهای u و v و همچنین w و u، و w و v را حساب کنید (تصویر ۱۱).

```
v=[۱,۱,۰]
u=[۰,۱,۱]
w=[۱,۱,۱]
Angle(v,u)
```
۶۰

```
Angle(u,w)
```
۳۵,۲۶۴۳۹

```
Angle(v,w)
```
۳۵,۲۶۴۳۹

تصویر۱۱

سخن پایانی

با کمک Mathstudio می‌توان محاســبات دیگری نیز روی ماتریس‌ها انجام داد؛ از جمله محاسبات مقادیر ویــژه و بردارهای ویژه که در حیطهٔ ریاضی دبیرســتان نیستند.

پرسش‌های پیکارجو!

چند جفت اعداد اول (p,q) یافت می‌شوند که در رابطهٔ $۲^p+p^۲=q$ صدق کنند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲
د) ۳ هـ) ۴

۱ هندسهٔ

۱. طول‌هـــای قطرهای وجه‌های جانبی یک مکعب مستطیل مســـاوی ۲، $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ هستند. طول قطر اصلی مکعب مستطیل را به‌دست آورید.

۲. حجم استوانه‌ای را به‌دســـت آورید که ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر و ســـطح کل آن مساوی 112π سانتی‌متر مربع باشد.

۳. حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن شش‌ضلعی منتظمی به ضلع واحد و طول یال‌های جانبی آن $\sqrt{2}$ است.

۲ هندسهٔ

۱. خـــط راســـت $L:y=2x+1$ تحت تبدیل هندســـی $T(x,y)=(-2x,y+1)$ بـــه خط L' تبدیل می‌شـــود. معادلهٔ L' را به‌دست آورید.

۲. در یک صفحهٔ مختصات قائم، دو خط $L_1:3x-2y=6$ و $L_2:3x-2y=12$ مفروض‌اند:

الف) ضابطهٔ سه انتقال متفاوت را که تحت آن‌ها L_1 به L_2 تصویر شود را بنویسید.

ب) اگـــر L_2 بازتاب L_1 باشـــد، معادلهٔ محور بازتاب را به‌دست آورید.

۳. تبدیل هندســـی $T(x,y) \quad (\frac{ax+4y}{5},\frac{ay-4x}{5})$ مفروض است. a را طوری به‌دست آورید که این تبدیل ایزومتری باشد.

حسابان

۱. حاصل $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$ را به‌دست آورید.

۲. k را طوری به‌دســـت آورید که تابع زیر در نقطهٔ $x=1$ دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\sqrt{x}-k}{\sqrt{x^2+3}-2} & x>1\\[2ex] \dfrac{k[2x]+2x}{k+[x]} & x<1\end{cases}$$

۲ ریاضی

۱. نمودار تابع بـــا ضابطهٔ $y=-2\sin(\frac{2\pi x}{3})+1$ را در یک دورهٔ تناوب آن رسم کنید.

۲. در یک شـــش ضلعی منتظم، طول قطر بزرگ چند برابر طول قطر کوچک است؟

۳. شـــخصی زمینی به شـــکل متوازی‌الاضلاع دارد که ابعاد آن ۳۰۰ و ۱۰۰ متر اســـت و یک زاویهٔ حاده آن 60° اســـت. او می‌خواهد با نصـــب دو حصار موازی از دو رأس قطر کوچک متوازی‌الاضلاع، در داخل زمین خود باغچه‌ای به شکل لوزی محصور کند. طول ضلع و مساحت باغچه را به‌دست آورید.

۳. حد مقابل را به‌دست آورید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x-6\sin x}{2\sin 2x\cos 4x-\sin 4x}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. معادلهٔ مماس بر منحنی تابع $f(x)=tg^{-1}(e^{2x})$ را در نقطه‌ای از آن به‌طول $x_0=\ln\sqrt[4]{3}$ بنویسید.

۲. a و b را طوری به‌دست آورید که $(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$ یک نقطهٔ ماکزی‌مم برای تابع با ضابطهٔ $y=\sin^2x+a\cos x+b$ باشد.

۳. از یک رودخانه به عرض a، کانالی به عرض b عمود بر آن ایجاد کرده‌ایم. طول بلندترین قایقی را به‌دست آورید که می‌تواند از رودخانه وارد کانال شود.

جبر و احتمال

۱. یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش را و پیشامد آنکه سکه حداقل یک بار پشت بیاید بنویسید.

۲. یک کیسه حاوی ۲۰ مهرهٔ قرمز، ۱۰ مهرهٔ سفید و ۱۵ مهرهٔ سبز است. ۱ مهره را به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است:

الف) احتمال آنکه این مهره سفید باشد.

حال این مهره را به کیسه برمی‌گردانیم و ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم؛ مطلوب است:

ب) احتمال اینکه یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۳. تاس سالمی را ۱۵ بار می‌ریزیم. احتمال اینکه ۶ بار از آمدن تاس، یک عدد فرد باشد، چیست؟

ریاضیات گسسته

۱. به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ نوع گل و به دلخواه، ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع سوم دقیقاً ۳ شاخه انتخاب شود؟

۲. تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=8$ را پیدا کنید، طوری که شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$2\le x_1\le 3$$
$$4\le x_2\le 8$$
$$x_3\ge 1$$

۳. اگر سه تاس را با هم بریزیم، چقدر احتمال دارد مجموع اعدادی که می‌آیند کوچک‌تر از ۱۶ باشد؟

ریاضیات ۳ (علوم‌تجربی)

۱. مقادیر a و b را چنان بیابید که چندجمله‌ای x^3+2ax^2-bx+4 بر $(x-1)$ بخش‌پذیر و باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر (x+1)، مساوی ۱۲ باشد.

۲. حد هر یک از تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\sqrt{x^2-1}}{10x^2+3x-4}$

ب) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4-\sqrt{x+14}}$

۳. تابع با ضابطهٔ
$$f(x)=\begin{cases}ax^3-2 & x>-2\\ 6 & x=-2\\ x^2+bx-1 & x<-2\end{cases}$$
مفروض است.

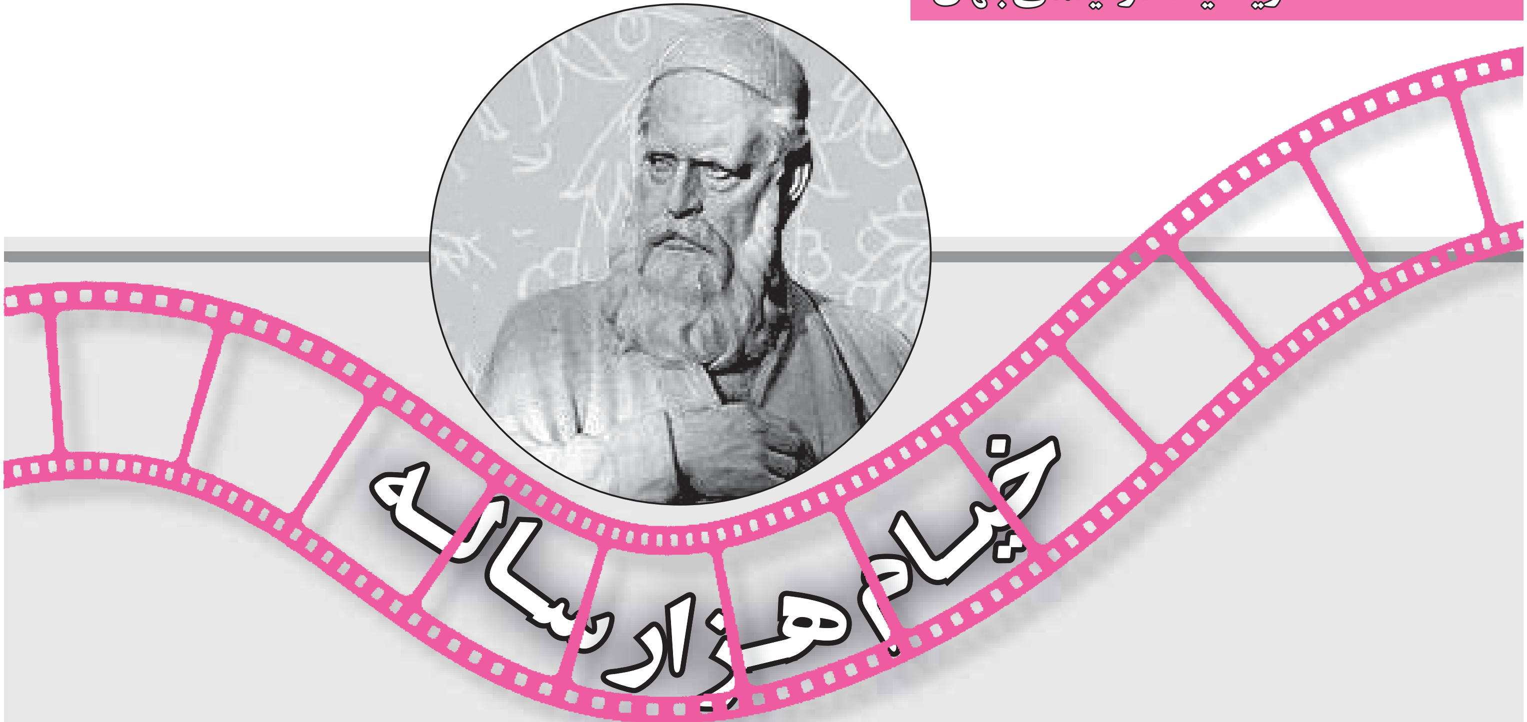
a و b را چنان بیابید که تابع در x=-2 پیوسته باشد.

پرسش‌های پیکارجو!

دنبالهٔ a_n با ضابطهٔ $a_n.a_{n-1}+1=2a_{n-1}$ و $a_1=2$ مفروض است. a_{1395} کدام است؟

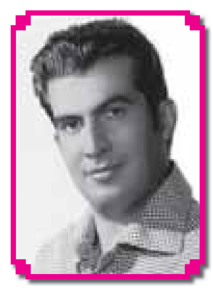
الف) $\frac{1394}{1395}$ ب) $\frac{1395}{1394}$ ج) $\frac{1395}{1396}$

د) $\frac{1396}{1395}$ هـ) ۱



خیام هزار ساله

● **اسم فیلم:** خیام هزار ساله
● **کارگردان:** سعید تارازی ● **نویسنده:** سعید تارازی ● **تدوین:** مهدی باقری
● **تهیه‌کننده:** سعید رشتیان ● **تهیه شده در:** گروه فرهنگ و ادب شبکه یک سیمای جمهوری اسلامی ایران ● **سال تولید:** ۱۳۸۸-۱۳۸۷



احسان یارمحمدی

فیلم «خیام هزار ساله» با صحنه‌هایی آغاز می‌شود که در آن چند نقاشی و تندیس منسوب به خیام به تصویر کشیده و این پرسش مطرح می‌شود که خیام واقعی شبیه کدام‌یک از آن‌ها بوده است. سپس دوربین فیلم‌برداری به میان مردم در خیابان خیام تهران می‌رود و راوی فیلم می‌پرسد که اگر خیام در دورهٔ کنونی زندگی می‌کرد، دارای چه شکل و شمایلی بود. در ادامه **سعید تارازی**، در مقام کارگردان فیلم، دوربین را در کوچه و بازار به حرکت درمی‌آورد و نظرات و عقاید مردم را دربارهٔ خیام می‌پرسد. جالب این است که در این میان، گفته‌های بسیار متفاوتی را از زبان مردم می‌شنویم و می‌بینیم.

در یکی از صحنه‌های فیلم که به قسمتی از مستندی که از شبکهٔ چهار سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده است اشاره دارد، گفته می‌شود: «... در نیشابور درس خواند و با **حسن طوسی** و **حسن صباح** هم‌درس بود که در تاریخ به سه یار دبستانی معروف هستند...» اما در ادامه راوی فیلم بیان می‌کند که خواجه نظام‌الملک با خیام ۳۰ سال اختلاف سن داشته و این هم از آن قصه‌هایی است که توی دل مردم ساخته می‌شود!

در صحنه‌ای دیگر دوربین فیلم‌برداری به داخل «دبیرستان علامهٔ حلی تهران» می‌رود و پرسش‌هایی دربارهٔ خیام، از تعدادی از دانش‌آموزان آن مدرسه به‌عمل می‌آید. در این بین دانش‌آموزی به‌نام **احسان شَواربی‌مقدم** دانسته‌های زیادی دربارهٔ خیام دارد و توانسته است چندین مقاله نیز دربارهٔ این ریاضی‌دان و شاعر نام‌دار ایرانی بنویسد. نیز علاقهٔ بسیاری دارد تا اطلاعات جدید و تازه‌ای را دربارهٔ رسالهٔ موسیقی خیام به‌دست آورد.

از صحنه‌های جالب فیلم می‌توان از صحنه‌ای یاد کرد که دوربین فیلم‌برداری به صفحه‌ای از یک کتاب اشاره دارد که در آن جدولی شامل آثار تألیفی خیام نیشابوری نمایش داده می‌شود. آنچه در این صفحه آمده است را در ادامه ارائه می‌کنیم تا علاقه‌مندان به این ریاضی‌دان مشهور ایرانی و نیز تاریخ ریاضیات بتوانند با پیگیری موارد مزبور به دانسته‌هایشان اضافه کنند.

نام تصنیف	موضوع	مکان نسخهٔ خطی
مشکلات‌الحساب	رسالهٔ حساب	پیدا نشده
بی‌نام	رسالهٔ جبر	تهران
رساله فی‌البراهین علی مسائل‌الجبر والمقابله	رسالهٔ جبر	پاریس، لیدن، لندن، نیویورک و رُم
شرح‌المشکل من کتاب‌الموسیقی	رسالهٔ تئوری موسیقی	پیدا نشده[1]
شرح من اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس	رسالهٔ هندسه	لیدن
مختصر فی‌الطبیعیات	رسالهٔ فیزیک	پیدا نشده
میزان‌الحکم	رسالهٔ فیزیک	لنینگراد، بمبئی، حیدرآباد و گوتا
لوازم‌الامکنه	رسالهٔ جغرافیا	پیدا نشده
رساله الکون و التکلیف	رسالهٔ فلسفی	قاهره
الجواب عن ثلاث مسائل	رسالهٔ فلسفی	قاهره
الفباءالعقلی فی موضوع العلم الکلی	رسالهٔ فلسفی	قاهره
رساله فی‌الوجود	رسالهٔ فلسفی	برلن، پونا و تهران
زیج ملکشاهی	جدول‌های نجومی	پاریس
رساله فی کلیات‌الوجود	رسالهٔ فلسفی	لندن، پاریس و تهران
نوروزنامه	رسالهٔ تاریخی	برلن و لندن

در صحنــه‌ای دیگر ســعید تــارازی و **منوچهر مشــــیری**[2] به ملاقــات زنده‌یاد **پرویز شــــهریاری** (۱۳۹۱-۱۳۰۵) می‌رونــد. در ایــن گفت‌وگو منوچهر مشیری چند ســؤال از زنده‌یاد شهریاری می‌پرسد که دو پرســش را به همراه پاسخ‌های استاد در ادامه بیان می‌کنیم.

■ **مشیری:** پرسشی که ذهن مرا مشغول کرده، استاد این است که واقعاً خیام کیست؟

❍ **شــــهریاری:** من خیــام را ریاضــی‌دان می‌دانم و بنابراین این سؤال خیلی هم مهم است. ریاضی‌دانی که توانست کارهای ریاضی را انجام بدهد و معادلات درجهٔ سوم را حل کرد. احتمالاً محورهای مختصات را هم درســت کرده اســت و در هندسه هم اگرچه خیلی جدی نتوانســت کاری کند، ولی کتابش در زمینهٔ هندسه کتاب بســیار باارزشی است. فقط به خاطر اطرافیانش نتوانسته بود کار کند. برای اینکه کتاب جبر را نوشته بود و مدت‌ها هیچی نمی‌گفت تا مقطعی که رفت به شــمال ایران و آنجا توانست آن را پخش کند.

■ **مشیری:** چه‌طور استاد می‌شود ثابت کرد که خیام شاعر و خیام ریاضی‌دان یک فرد بوده است؟

○ **شـــــهریاری:** در مقدمهٔ همین کتاب جبر مطلبی دارد کــه تقریبــاً عین اشــعارش اســت، اما خود شــعرهایش را منتشــر نکرد. بعد از مرگش منتشر شد و توی نوشــته‌هایش دیدند... در مقدمهٔ کتاب جبــرش، در همان ابتدای مقدمه توضیحی می‌دهد که کاملاً عین اشــعارش است: «چنین است گرفتار روزگاری شده‌ایم یا هستیم که از اهل علم فقط عدهٔ کمی مبتلا به اندیشــهٔ آن‌اند که غفلت‌های زمان را فرصت جُسته به تحقیق در علم و استوار کردن آن بپردازند و بیشــتر عالِم نمایان زمان ما حق را جامهٔ باطل می‌پوشــند و گامــی از خودنمایی و تظاهر به دانایــی فراتر نمی‌نهند و آنچــه را هم می‌دانند، جز در راه اغراض مادی بــه‌کار نمی‌بندند و اگر ببینند کسی جُســتن حقیقت و برگزیدن راستی را وجههٔ همت خود ساخته و در ترک دروغ، خودنمایی، مکر و حیله جهد و ســعی دارد، او را خوار می‌شمارند و تمسخر می‌کنند و در هر حال خدا یاری‌دهند و پناه همه است.»

در صحنــه‌ای دیگر، **بهمـــن اصلاح‌پذیر** دربارهٔ تدوین تقویم خورشــیدی چنین می‌گویــد: «... و ما می‌رســیم به خیام. در آن زمــان دیگر تصمیم گرفته می‌شــود، نه براساس عقاید، ســنت‌ها و... بلکه کاملاً علمــی نظم و نَسَــق امور را برقرار بکننــد. این باعث می‌شــود که از خیام و چند ریاضی‌دان دیگر خواسته شود که تقویم شمسی مدونی را بر پایهٔ علمی و دقیق بنویسند...»

در پایــان شــما را به تهیــهٔ این فیلم تشــویق می‌کنیم، تا آن‌چه را که در این مقاله به آن اشــاره نکرده‌ایــم، پیگیری کنید و نیز از تماشــای آن لذت ببرید.

*** پی‌نوشت**

۱. بعدها بخشی از این اثر یافته و منتشر شد: «رسالهٔ موسیقی خیام از دیدگاه ریاضیات»، صفورا هوشیار و محمد باقری، رهپویهٔ هنر، دفتر سوم، پاییز ۱۳۷۶، صفحات ۶۳-۴۳.

۲. منوچهر مشــیری کارگردان فیلم مســتند «معلمی را دوست دارم» است که در ســال ۱۳۸۲ در گروه دانش شبکهٔ یک سیمای جمهوری اسلامی ایران دربارهٔ زنده‌یاد **پرویز شهریاری** تهیه شد.

ایستگاه اول:
بازهم معمای لابیرنت

در شمارۀ قبل با معماهای جدول‌های لابیرنتی آشنا شدید. دیدید که عددهای درون دایره‌های موجود در خانه‌های جدول بیانگر تعداد خانه‌های خالی (سفید) در امتداد افقی و عمودی آن خانه هستند و خود این خانه‌ها هم، خانۀ خالی‌اند. تعدادی از خانه‌ها هم با توجه به این عددها باید سیاه شوند. بعد از سیاه شدن این خانه‌ها یک لابیرنت طراحی می‌شود که مسیر ورود و خروج آن باید رسم شود. حال به دو نمونۀ دیگر از این جدول‌ها توجه کنید و با توجه به عددهای خانه‌ها، خانه‌های سیاه را پر و لابیرنت را طراحی کنید و مسیر ورود و خروج آن را نیز رسم کنید:

ورود ↓

	۴				۴			۲		
	۲					۲			۲	
	۲							۲		
			۶				۵			
	۴				۸				۴	
	۲				۲					
		۴							۳	
	۱			۲		۵	۱			
		۴			۲				۲	
			۳							

↓ خروج

ورود ↓

								۱		
						۴				
				۳			۵			
					۱				۸	
	۱							۴		
						۲				
	۱	۵				۱				
				۳				۲		
	۲		۸							
							۲			
			۴		۶					

↓ خروج

پرسش‌های پیکارجو!

از نقطۀ M درون مثلث ABC، سه خط موازی اضلاع مثلث رسم کرده‌ایم و از برخورد آن‌ها با اضلاع مثلث، سه مثلث به مساحت‌های ۱، ۳ و ۴ تشکیل شده است. مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

الف) ۱۶ ب) $16\sqrt{3}$ ج) $6(2+\sqrt{3})$

د) $6(3+\sqrt{3})$ هـ) $9\sqrt{2}$

میلاد ضیایی
اسماعیل ابراهیمی

قبولی شانسی و مهندسی شانس!

برای اخذ یک مدرک، آزمونی چهارگزینه‌ای با ۶۰ سؤال برگزار می‌شود. داوطلبی موفق به اخذ مدرک خواهد شد که «حد نصاب» امتیاز او از آزمون لااقل ۵۰ درصد باشد. هر پاسخ غلط دارای $\frac{۱}{۳}$ نمرهٔ منفی است. اگر شما در این آزمون شرکت کرده باشید و بعد از تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤالات، تنها به ۲۹ سؤال پاسخ گفته باشید، چه می‌کنید؟ آیا دست روی دست می‌گذارید تا از آزمون مردود بیرون بیایید یا اینکه شانس خود را امتحان می‌کنید و به سؤالاتی به طور «شانسی» پاسخ می‌دهید؟

بعضی از افراد در پاسخ به این سؤال فوراً می‌گویند: خب هر پاسخ غلط $\frac{۱}{۳}$ نمره منفی دارد. اگر به سؤالی شانسی پاسخ دهیم، همان امتیازی که ممکن است با پاسخ‌گویی صحیح کسب کنیم با احتمال پاسخ‌گویی غلط خنثا می‌شود. پس در عمل وضعیت ما تفاوتی نخواهد کرد. این افراد فراموش می‌کنند، داوطلبی که در این آزمون به ۲۹ سؤال (یا کمتر) پاسخ گفته باشد، چیزی برای از دست دادن ندارد! (چون ۲۹ پاسخ صحیح او را به قبولی در آزمون نمی‌رساند.) آیا بهتر نیست به یک سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم؟ مسلماً بهتر است! چون در آن صورت به احتمال $\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$ به سؤال پاسخ صحیح می‌دهیم و مدرک را کسب می‌کنیم، ولی با ۲۹ پاسخ صحیح به هیچ‌جا نمی‌رسیم![1]

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم: آیا بهتر نیست به دو سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم؟ ممکن است شما فوراً بگویید لابد بهتر است! بگذارید حساب کنیم. در این حالت اگر به یک سؤال صحیح و به یک سؤال غلط پاسخ دهیم، مجموعاً $۲۹+۱+(-\frac{۱}{۳})=۲۹\frac{۲}{۳}$ امتیاز کسب می‌کنیم که از ۳۰ امتیاز کمتر است. در حالتی موفق به قبولی در آزمون می‌شویم که به هر دو سؤال شانسی پاسخ صحیح بدهیم (۳۰>۲+۲۹) که احتمال آن برابر است با: $(\frac{۱}{۴})^۲=۰/۰۶۲۵$.
پس پاسخ گفتن شانسی به دو سؤال بهتر از پاسخ گفتن شانسی به یک سؤال نیست.

اگر به سه سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم چه‌طور؟ اگر هر سه پاسخ ما صحیح باشد، در آزمون قبول می‌شویم (۳۰>۳+۲۹). اگر به دو سؤال صحیح و به یک سؤال غلط پاسخ دهیم، باز هم امتیاز لازم برای قبولی را کسب می‌کنیم ($۲۹+۲+(-\frac{۱}{۳})>۳۰$). اما ترکیب‌های دو پاسخ غلط ـ یک پاسخ صحیح و سه پاسخ غلط ما را مردود می‌کند. پس احتمال قبولی ما در آزمون از مجموع احتمال دو ترکیب اول به‌دست می‌آید:

$$(۰/۲۵)^۳+\binom{۳}{۲}(۰/۲۵)^۲(۰/۷۵)^۱=۰/۱۵۶۲۵ \qquad (۱)$$

در جملهٔ دوم عبارت فوق، قرار است از بین سه پاسخ، دو پاسخ

صحیح باشد. احتمال صحیح بودن هر پاسخ برابر ۰/۲۵ و احتمال غلط بودن آن برابر ۰/۷۵ است. انتخاب دو پاسخ از سه پاسخ مذکور $\binom{۳}{۲}$ حالت مختلف ایجاد می‌کند. در واقع صورت بهتر رابطهٔ ۱ به شکل زیر است:

$$\binom{۳}{۳}(۰/۲۵)^{۳}(۰/۷۵)^{۰}+\binom{۳}{۲}(۰/۲۵)^{۲}(۰/۷۵)^{۱}=۰/۱۵۶۲۵ \qquad (۲)$$

نتیجه آنکه پاسخ‌گویی شانسی به سه سؤال بهتر از پاسخ‌گویی شانسی به دو سؤال است، اما از پاسخ‌گویی شانسی به یک سؤال بهتر نیست.

قبل از حل مسئله به‌صورت کلی، یک مثال دیگر را به‌طور خاص حل می‌کنیم: احتمال قبولی داوطلب اگر به پنج سؤال شانسی پاسخ دهد چه‌قدر می‌شود؟ در جدول ۱ نشان داده شده است که احتمال آنکه پاسخ داوطلب به ۵، ۴، ...، ۰ سؤال صحیح باشد، چه‌قدر است (مجموع تمامی این احتمالات برابر ۱ است). اما احتمال قبولی داوطلب از جمع احتمال در وضعیت‌هایی به‌دست می‌آید که امتیاز لااقل ۳۰ را برای او کسب کند. (یعنی حالت‌های اول تا چهارم). می‌توان به ازای هر وضعیت، نشانگری دودویی تعریف کرد که در صورت کسب امتیاز حد نصاب (عدم کسب) برابر ۱ (۰) خواهد شد (در ستون ششم) و حاصل‌ضرب احتمال رخداد هر وضعیت در نشانگر وضعیت در ستون هفتم نشان داده شده است. حاصل جمع احتمال‌های نمایش داده شده در ستون هفتم برابر کل احتمال قبولی داوطلب است. (این احتمال برابر ۰/۳۶۷۱۹ خواهد شد.)

اگر داوطلب به سؤالات بیشتری به‌طور شانسی پاسخ دهد، آیا می‌توانیم بگوییم احتمال قبولی‌اش بیشتر و بیشتر می‌شود؟ آیا تعداد سؤالی وجود دارد که اگر به آن تعداد پاسخ دهد، احتمال قبولی‌اش ماکزیمم می‌شود؟ (در این صورت بعد از آنکه داوطلبان تلاش خود را برای پاسخ‌گویی به سؤالات کردند، می‌توانند تصمیم بگیرند که به چند سؤال به‌طور شانسی پاسخ درست گویند تا بیشترین احتمال قبولی را داشته باشند.)

بیایید مسئله را به‌صورت کلی مطرح کنیم. فرض کنیم داوطلبی بعد از تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤالات، با حل کردن آن‌ها (بگوییم به‌صورت تحلیلی) به $k_{۱}$ سؤال $(۰\le k_{۱}\le ۳۰)$ پاسخ درست گفته است. می‌خواهیم احتمال آن را به‌دست آوریم که داوطلب با پاسخ‌گویی شانسی به $k_{۲}$ سؤال دیگر حد نصاب قبولی را به‌دست آورد $(۱\le k_{۲}\le ۶۰-k_{۱})$. مشابه با مثال‌های حل‌شده ممکن است از بین این پاسخ‌ها، i پاسخ صحیح و $k_{۲}-i$ پاسخ غلط باشد. $(i=۱,۲,...,k_{۲})$. باید مجموع احتمال وضعیت‌هایی محاسبه شوند که قبولی را برای داوطلب رقم می‌زنند. این مطلب در رابطهٔ زیر خلاصه شده است:

$$P(k_{۱},k_{۲})=\sum_{i=۰}^{k_{۲}}\binom{k_{۲}}{i}(۰/۲۵)^{i}(۰/۷۵)^{k_{۲}-i}.f(k_{۱},k_{۲},i) \qquad (۳)$$

در این رابطه، $P(k_{۱},k_{۲})$ احتمال مطلوب و $f(k_{۱},k_{۲},i)$ نشانگری دودویی است. این نشانگر در وضعیتی که نمرهٔ کسب‌شده توسط داوطلب بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰ باشد، برابر ۱ و در غیر این صورت

جدول ۱. محاسبهٔ احتمال قبولی داوطلب با پنج پاسخ شانسی

احتمال قبولی و رخداد وضعیت	نشانگر وضعیت	احتمال رخداد وضعیت	وضعیت	امتیاز	تعداد پاسخ: غلط	تعداد پاسخ: صحیح
۰/۰۰۰۹۸	۱	$\binom{۵}{۵}(۰/۲۵)^{۵}(۰/۷۵)^{۰}=۰/۰۰۰۹۸$	قبول	$۲۹+۵+(-\frac{۰}{۳})=۳۴$	۰	۵
۰/۰۱۴۶۵	۱	$\binom{۵}{۴}(۰/۲۵)^{۴}(۰/۷۵)^{۱}=۰/۰۱۴۶۵$	قبول	$۲۹+۴+(-\frac{۱}{۳})=۳۲\frac{۲}{۳}$	۱	۴
۰/۰۸۷۸۹	۱	$\binom{۵}{۳}(۰/۲۵)^{۳}(۰/۷۵)^{۲}=۰/۰۸۷۸۹$	قبول	$۲۹+۳+(-\frac{۲}{۳})=۳۱\frac{۱}{۳}$	۲	۳
۰/۲۶۳۶۷	۱	$\binom{۵}{۲}(۰/۲۵)^{۲}(۰/۷۵)^{۳}=۰/۲۶۳۶۷$	قبول	$۲۹+۲+(-\frac{۳}{۳})=۳۰$	۳	۲
۰	۰	$\binom{۵}{۱}(۰/۲۵)^{۱}(۰/۷۵)^{۴}=۰/۳۹۵۵۱$	مردود	$۲۹+۱+(-\frac{۴}{۳})=۲۸\frac{۲}{۳}$	۴	۱
۰	۰	$\binom{۵}{۰}(۰/۲۵)^{۰}(۰/۷۵)^{۵}=۰/۲۳۷۳۰$	مردود	$۲۹+۰+(-\frac{۵}{۳})=۲۷\frac{۱}{۳}$	۵	۰

برابر صفر است:

$$f(k_1,k_2,i)=\begin{cases}1 & k_1+i-\frac{1}{3}\times(k_2-i)\geq 30\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\quad (4)$$

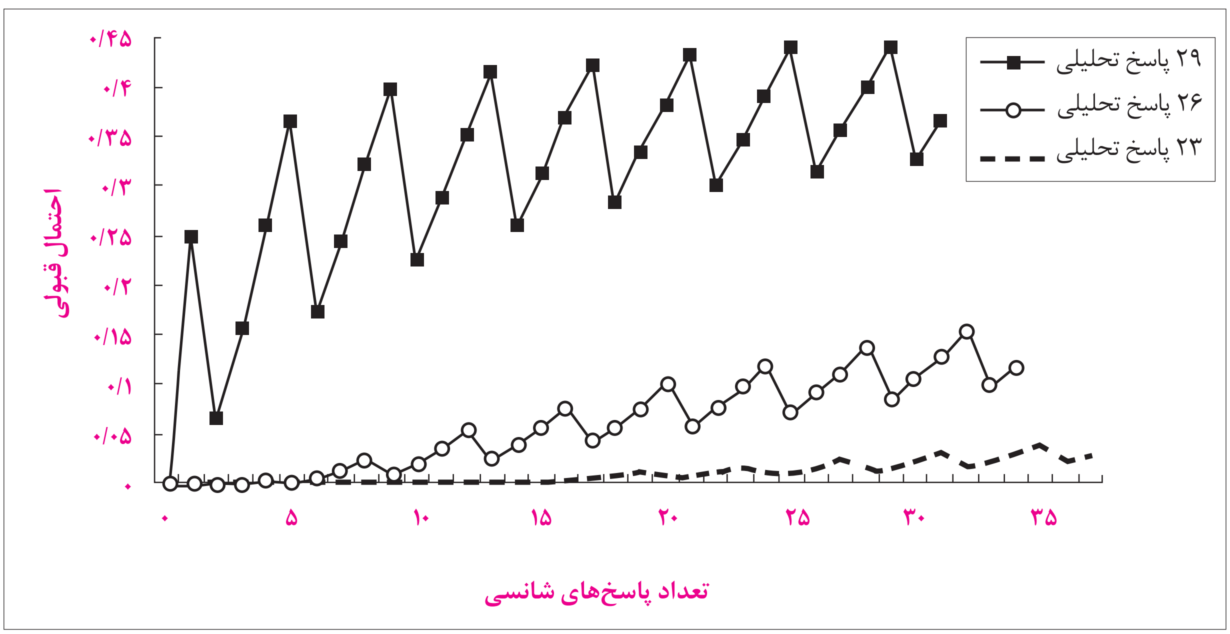
محاســـبهٔ P از رابطهٔ فوق با یک برنامه‌نویسی رایانه‌ای نه‌چندان پیچیده قابل اجراست. با اجرای این برنامه می‌توانید به سادگی P را به ازای مقادیر مختلف k_1 و k_2 محاسبه کنید. از خروجی‌های این برنامه نتایج زیر قابل برداشت‌اند:

۱. در نمودار، منحنی تغییرات احتمال موفقیت داوطلبی که به ۲۹ و ۲۶ سؤال به‌صورت تحلیلی پاسخ گفته باشد، در ازای تغییرات پاسخ‌های شانسی رسم شده است. روند تغییرات صعود منحنی یک‌نوا نبوده و به‌صورت دندان اره‌ای اســـت. به‌علاوه، هر منحنی دارای یک ماکزی‌مم مطلق اســـت. مثـــلاً می‌توانیم بگوییم در صورتی که داوطلب به ۲۶ ســـؤال به صورت تحلیلی پاسخ گفته باشد، شـــانس قبولی‌اش وقتی ماکزی‌مم می‌شود که به سؤالات باقی‌مانده، ۳۲ پاسخ شانسی بدهد.

۲. نکتهٔ جالب‌تر اینکه هر یک از دندان‌های اره‌ای منحنی شـــامل چهار سؤال شانسی اســـت (احتمالاً به‌دلیل چهارگزینه‌ای بودن آزمون). می‌توانید مســـئله را برای آزمون‌های ۵ گزینه‌ای با نمرهٔ $-\frac{1}{4}$ برای هر پاسخ غلط تکرار کنید و ببینید در منحنی متناظر، تعداد سؤالات موجود در هر یک از دندان‌های اره‌ای برابر ۵ سؤال می‌شود یا نه؟!

۳. متأسفانه یا خوش‌بختانه، احتمال قبولی داوطلبان با پاسخ‌گویی شانسی به سؤالات چندان زیاد نیست. در بهترین حالت که داوطلب به ۲۹ ســـؤال، تحلیلی و ۲۹ سؤال، شانســـی پاسخ گفته باشد، شانس قبولی‌اش برابر ۰/۴۴۳۲ است. (که زیر ۵۰ درصد است!)

۴. همهٔ نتیجه‌گیری‌های فوق در حالتی درست‌اند که فرض کنیم تمامی پاســـخ‌های تحلیلی داوطلب درست باشند. این در حالی است که عملاً چنین نیست. همهٔ شـــما این تجربه را داشته‌اید که در آزمون‌های چهارگزینه‌ای تعدادی از پاسخ‌هایتان به‌دلیل اشتباه محاسبات و... غلط از آب درمی‌آید! اهمیت این مطلب از آن جهت اســـت که نقاط ماکزی‌مم نسبی منحنی‌های احتمال قبولـــی (مانند نمودار ۱) دارای دره‌هایـــی در هر دو طرف خود هســـتند. چه‌بســـا اگر از احتمال غلط بودن برخی پاســـخ‌های تحلیلی‌تان صرف‌نظر کنید، در یکی از دره‌ها می‌افتید و احتمال قبولی‌تان شدیداً کاهش می‌یابد!



نمودار ۱. احتمال قبولی داوطلب با تعداد پاسخ‌های شانسی متفاوت

پی نوشت

۱. دقـــت کنید، در این ســـؤال یک آزمون چهار گزینه‌ای با حد نصاب قبولی ۵۰ درصد مطرح اســـت. نتیجه‌گیری‌های طرح شـــده در ایـــن مقاله برای آزمون‌های چهارگزینه‌ای که در آن داوطلبان با تراز با یکدیگر مقایســـه می‌شـــوند، معتبر نیســـت. در آزمون‌های چهارگزینه‌ای با تراز، هر پاسخ غلط موقعیت شما را نسبت به داوطلبان دیگر تضعیف می‌کند.

آموزشی

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اصطلاحات و لغات مهم

1. Multiple	مضرب
2. Hypothesis	فرض
3. Number	عدد
4. Implicit	بدیهی
5. Properties	خاصیت‌ها
6. Operations	اعمال
7. Integer numbers	اعداد صحیح
8. State	بیان کردن
9. Conclude	نتیجه‌گیری
10. Therefore	بنابراین

EXAMPLE 1. If b is a multiple of 2 and of 5, then b is a multiple of 10.

proof

Hypothesis:
A: The number b is multiple of 2.
B: The number b is a multiple of 5.
(*Implicit hypothesis:* All the properties and operations of integer numbers can be used.)

Conclusion:
C: The number b is a multiple of 10.
By hypothesis A, the number b is a multiple of 2. So, $b=2n$ for some integer n. The other hypothesis B, states that b is a multiple of 5. Therefore, $b=5k$ for some integer k. Thus

$$2n=5k.$$

Because $2n$ is divisible by 5, and 2 is not divisible by 5, we conclude that n is divisible by 5. Thus, $n=5t$ for some integer number t. This implies that

$$b=2n=2(5t)=10t$$

for some integer umber t. Therefore, the number b is a multiple of 10.

مثال ۱. اگر b مضرب ۲ و ۵ باشد، در این صورت b مضرب ۱۰ است.

اثبات

فرض:

الف) عدد b مضرب ۲ است.

ب) عدد a مضرب ۵ است.

(فرضیات بدیهی: همهٔ خاصیت‌ها و اعمال مربوط به اعداد صحیح می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.)

حکم:

ج) عدد b مضرب ۱۰ است.

با توجه به فرض الف، عدد b مضرب ۲ است. بنابراین به ازای بعضی مقادیر صحیح n: b=۲n.

فرض دیگر (ب) بیان می‌کند که b مضرب ۵ است. بنابراین، به ازای بعضی مقادیر صحیح k، داریم: b=۵k. پس: ۲n=۵k.

چون ۲n بر ۵ بخش‌پذیر است، و ۲ بر ۵ بخش‌پذیر نیست، نتیجه می‌گیریم که n بر ۵ بخش‌پذیر است. بنابراین برای بعضی مقادیر صحیح t، داریم: n=۵t و این اثبات می‌کند که: b=۲n=۲(۵t)=۱۰t.

بنابراین، عدد b مضرب ۱۰ است. ■

ترجمه برای دانش‌آموز

EXAMPLE 2. If n is a positive integer, then either n is a multiple of 2 or n divided by 2 has a remainder of 1.

Proof

Hypothesis:
A: The number n is a positive integer.
(*Implicit hypothesis:* All the properties and operations of integer numbers can be used.)
Conclusion:
B: The number n is a multiple of 2.
C: The number n divided by 2 has a remainder of 1.
We assume that n is an integer and that the remainder of the division of n by 2 is not 1 (composite hypothesis: "A and 'not C' ").
We have to prove that the only other possible conclusion we can reach is that n is a multiple of 2.
The division algorithm establishes that the only possible remainder when dividing by 2 is either 0 or 1. By hypothesis the remainder is not 1. So it must be 0. Thus

$$n=2q+0=2q$$

where q is a positive integer. Therefore, n is a multiple of 2. ■

احسان یارمحمدی

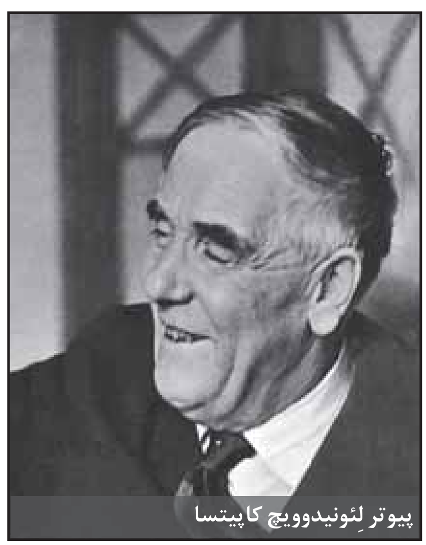
KVANT

- **اسم مجله:** kvant
- **تارنما:** http//kvant.mccme.ru - http//www.kvant.info
- **ناشر:** Applied Probability Trust
- **مکان انتشار:** مسکو، واقع در فدراسیون روسیه
- **زبان:** روسی
- **سال آغاز انتشار:** ۱۹۷۰
- **تعداد چاپ و توزیع در هر سال:** ۱۲ شماره

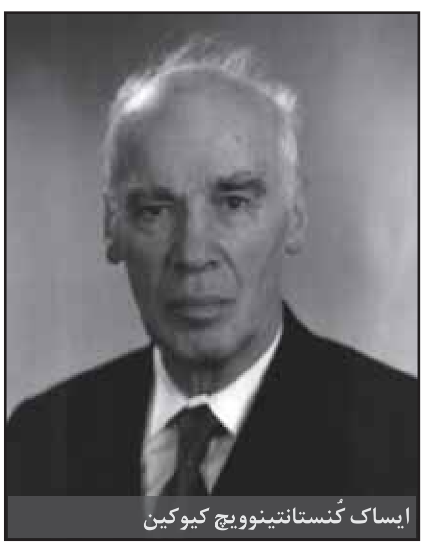
واژهٔ "Kvant" که نگارش روسی آن به صورت "KBaHT" است، معادل کلمهٔ "Quantum" در زبان انگلیسی است. مجلهٔ kvant یک مجلهٔ عمومی علمی دربارهٔ فیزیک و ریاضیات است که برای افزایش سطح دانش و آگاهی‌های دانش‌آموزان مدارس و نیز معلمان در سال ۱۹۷۰ در اتحاد جماهیر شوروی آغاز به کار کرد و پس از تکمیل فدراسیون روسیه در سال ۱۹۹۱، همچنان به کار خود ادامه می‌دهد و به جامعهٔ ریاضیات عرضه می‌شود. مقالات ارائه شده در این مجله از چنان جایگاه بالای علمی برخوردار است که مجموعه‌ای از مقالات منتخب آن به زبان انگلیسی ترجمه شد و بین سال‌های ۱۹۹۰ تا ۲۰۰۱ در مجلهٔ علمی- ریاضی **«کوانتوم»** واقع در ایالات متحده آمریکا به چاپ رسید. در ضمن دو کتاب نیز، مشتمل بر مقالات برگزیده از مجلهٔ kvant در فرانسه به زیور طبع آراسته شده است.

ایدهٔ اولیهٔ مجلهٔ kvant برای اولین بار در طرح‌های وابسته به **«آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی»** و آکادمی آموزش‌وپرورش این کشور مطرح شد و مجلهٔ مزبور تا زمان فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی با شمارگان ۲۰۰ هزار نسخه در انتشارات "Nauka"[۲] چاپ می‌شد. اما ایدهٔ ایجاد و تأسیس چنین مجله‌ای توسط فیزیک‌دان برجستهٔ روسی، **پیوتر لِئونیدوویچ کاپیتسا**[۳] مطرح شد. او که ایده‌های بزرگی در سر داشت و از جایگاه علمی ممتازی نیز در جامعهٔ جهانی برخوردار بود، به منظور افزایش سطح توانمندی و پرورش استعدادهای فیزیک و ریاضی در آن دوران اتحاد جماهیر شوروی، دست به ارائهٔ دیدگاهش دربارهٔ مجله kvant زد.

این مجله از چنان جایگاه ارزشمندی در جامعهٔ

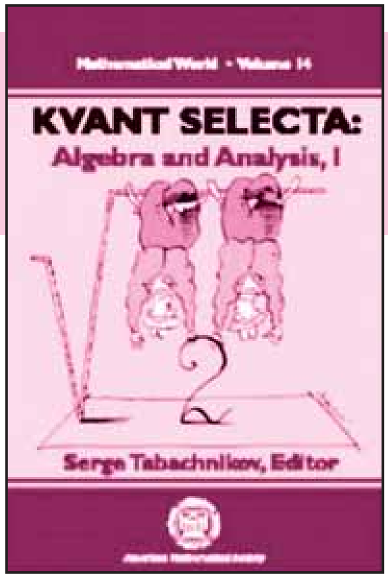


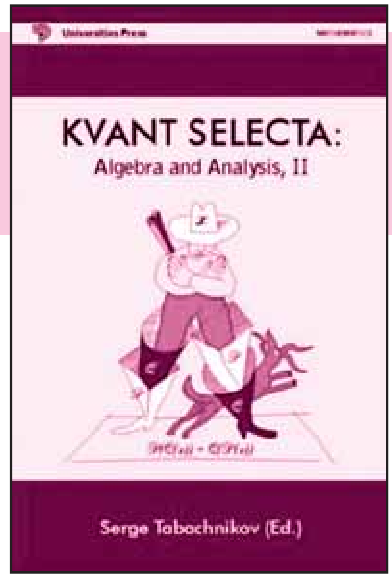
پیوتر لِئونیدوویچ کاپیتسا



ایساک کُنستانتینوویچ کیوکین

آندرِی کولموگروف



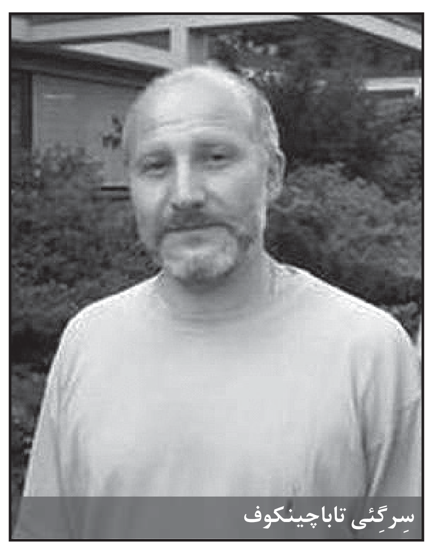


ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان شوروی برخوردار شد که برای نخستین سردبیر بخش ریاضی آن، ریاضی‌دان بزرگ جهان، **آندرِی کولموگروف**[4] و برای نخستین سردبیر بخش فیزیک آن، فیزیک‌دان مشهور، **ایساک کُنستانتینوویچ کیوکین**[5] را برگزیدند.

این مجله تا جایی اهمیت پیدا کرد که در سال ۱۹۸۵، شورای برنامه‌ریزی و کارشناسی آن مشتمل بر ۱۸ عضو برجستهٔ دانشگاهی و نیز تعداد زیادی از شخصیت‌های علمی دیگر، از آکادمی علوم شوروی و آکادمی آموزش‌وپرورش این کشور بود. مقالات مجلهٔ kvant به قدری جالب و ارزنده بود که «**انجمن ریاضی آمریکا**»[6] در سال ۱۹۹۹ ترجمهٔ انگلیسی تعدادی از مقالات برگزیدهٔ آن را دربارهٔ جبر و آنالیز ریاضی در دو جلد در مجموعهٔ "Mathematical World" منتشر کرد. اما اهمیت مقالات این مجله باعث شد تا جلد دیگری از مقالات منتخب ترجمه شده به انگلیسی این مجله دربارهٔ «ترکیبیات» در سال ۲۰۰۱ منتشر شود.

علاقه‌مندان به مطالعهٔ این سه جلد می‌توانند با مراجعه به تارنماهای معتبر و بین‌المللی فروش کتاب در اینترنت، آن‌ها را خریداری کنند. برای آگاهی بیشتر شما، تصاویر جلد این سه کتاب که به وسیلهٔ **سِرگِئی تاباچینکوف**[7] تدوین شده‌اند، تقدیم شده است.[8]

واژهٔ "Kvant" که نگارش روسی آن به صورت "KBaHT" است، معادل کلمهٔ "Quantum" در زبان انگلیسی است.


سِرگِئی تاباچینکوف

پی‌نوشت‌ها

1. USSA (Russia) Academy of Science

۲. انتشارات Nauka یکی از بزرگ‌ترین و مطرح‌ترین ناشران دوران اتحاد جماهیر شوروی در این کشور بود. این انتشارات تا سال ۱۹۶۳ با نام «انتشارات آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی» فعالیت می‌کرد. عمده فعالیت آن چاپ و نشر کتاب‌ها و مجلات علمی و پژوهشی است و از آن به‌عنوان اصلی‌ترین ناشر محصولات آکادمی علوم شوروی (روسیه فعلی) و شاخه‌های مرتبط با آن یاد می‌شود. علاقه‌مندان می‌توانند با مراجعه به دو تارنمای زیر به‌صورت مستقیم محصولات و تولیدات علمی این انتشارات را پیگیری کنند.

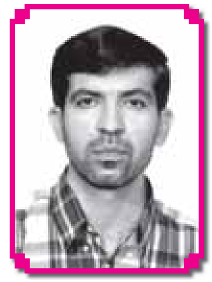
http://www.naukaran.ru
http://www.maik. rssi.ru

3. Pyort Leonidovich Kapitsa (1894-1984)
4. Andrey Kolmogrov (1903-1987)
5. Isaak Konstantionvich Kiokin (1908-1984)
6. American Mathematical Society
7. Sergei Tabachinkov

۸. نام و مشخصات این سه کتاب به شرح زیر است:

Kvant Selecta: Algebra and Analysis I (Mathematical World)
Kvant Selecta: Algebra and Analysis II (Mathematical World)
Kvant Selecta: Combinatorics (Mathematical World)

دکتر محرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد.

منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۸۱. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $n!\geq ۲^{n-۱}$.

۱۸۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $۲^{۲^n}-۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۸۳. r عددی حقیقی است، به‌طوری که $r+\frac{۱}{r}$ عددی صحیح است. ثابت کنید $r^n+\frac{۱}{r^n}$ به ازای هر $n\in N$ عددی صحیح است.

۱۸۴. n خط راست، صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۱۸۵. ثابت کنید در بسط عبارت $(۱+x+x^۲)^n$، حداقل یکی از ضرایب زوج است.

۱۸۶. با فرض $a,b,c>۰$ ثابت کنید:

$$(a^۲b+b^۲c+c^۲a)(ab^۲+bc^۲+ca^۲)\geq ۹a^۲b^۲c^۲$$

۱۸۷. با فرض $a,b,c\geq ۰$ ثابت کنید:

$$\sqrt{۳(a+b+c)}\geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

۱۸۸. a، b و c سه عدد طبیعی هستند، به‌طوری‌که $a^۲+b^۲=c^۲$. ثابت کنید ab مضرب ۳ است.

۱۸۹. ثابت کنید $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{n}$ $(n\geq ۲)$ هیچ‌وقت صحیح نیست.

۱۹۰. اگر p و $p^۲+۲$ هر دو اول باشند، ثابت کنید $p^۳+۲$ نیز اول است.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۵۱. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b+۱=۰$ طبیعی باشند، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ عددی مرکب است.

اگر r و s ریشه‌های معادله باشند، داریم $r+s=-a$ و $rs=b+۱$. در نتیجه:

$$a^۲+b^۲=(r+s)^۲+(rs-۱)^۲=(r^۲+۱)(s^۲+۱).$$

۱۵۲. همهٔ جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$m^۲-۳m+۱=n^۲+n-۱$$

می‌توان معادله را به فرم $(n+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۵}{۴}=(m-\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۵}{۴}$ تبدیل

کرد. در نتیجه: $(m+n-1)(m-n-2)=0$. چون m و n طبیعی هستند، پس $m+n-1>0$ و در نتیجه $m-n-2=0$. بنابراین، $(m,n)=(a+2,a)$ که در آن $a\in N$.

۱۵۳. ضرایب تابع $p(x)=ax^2+bx+c$ اعدادی حقیقی هستند و مقادیر $p(0)$، $p(1)$ و $p(-1)$ صحیح‌اند. ثابت کنید $p(n)$ به ازای همهٔ مقادیر صحیح n صحیح است.

چون $p(-1)=a-b+c$، $p(0)=c$ و $p(1)=a+b+c$ صحیح هستند، در نتیجه اعداد $2a$، $2b$ و c صحیح هستند. برای هر عدد زوج $n=2m$ داریم:

$p(n)=4am^2+2bm+c=2m^2\times 2a+m\times 2b+c\in Z$.

و اگر $n=2m+1$ آنگاه

$$p(n)=a(2m+1)^2+b(2m+1)+c$$
$$=(2m^2+2m)(2a)+m(2b)+(a+b+c)$$

که نشان می‌دهد در این حالت نیز $p(n)$ صحیح است.

۱۵۴. $p(x)$ یک چندجمله‌ای است، به‌طوری‌که: $p(x^2+1)=x^4+4x^2$. مطلوب است: $p(x^2-1)$.

با توجه به فرض مسئله $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم است. با فرض $p(x)=x^2+bx+c$ داریم: $(x^2+1)^2+b(x^2+1)+c=x^4+4x^2$. در نتیجه، با متحد قرار دادن دو طرف به روابط $2+b=4$ و $1+b+c=0$ می‌رسیم. در نتیجه: $b=2$ و $c=-3$ و $p(x)=x^2+2x-3$ و در نتیجه: $p(x^2-1)=x^4-4$.

۱۵۵. a، b، c و d اعدادی طبیعی هستند، به‌طوری‌که: $a+b=c+d$ و $a^3+b^3=c^3+d^3$. ثابت کنید دو تا از این اعداد با هم برابر هستند.

داریم $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$. در نتیجه، چون $a+b=c+d\neq 0$ پس $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$. از طرف دیگر، $(a+b)^2=(c+d)^2$. از دو رابطهٔ آخر نتیجه می‌شود: $ab=cd$. در نتیجه، $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ ریشه‌های معادلهٔ $Z^2-(a+b)Z+ab=0$ خواهند بود. در نتیجه: $\{a,b\}=\{c,d\}$.

۱۵۶. با فرض $n>r>0$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{r}^2>\binom{n}{r+1}\binom{n}{r-1}$$

پس از ساده کردن جملات مشترک در دو طرف نامساوی، به نامساوی زیر می‌رسیم: $\frac{1}{n-r}>\frac{1}{n-r+1}$ که برقرار است.

۱۵۷. با فرض $a<b$ ثابت کنید:

$$\binom{a}{2}+\binom{b}{2}\geq\binom{a+1}{2}+\binom{b-1}{2}$$

پس از ساده کردن جملات مشترک به نامساوی $b\geq a+1$ می‌رسیم.

۱۵۸. سیزده نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید چهار نقطه در میان آن‌ها وجود دارند که مرکز ثقل این چهار نقطه مختصاتی صحیح دارد (مختصات مرکز ثقل k نقطه برابر است با میانگین مختصات آن k نقطه).

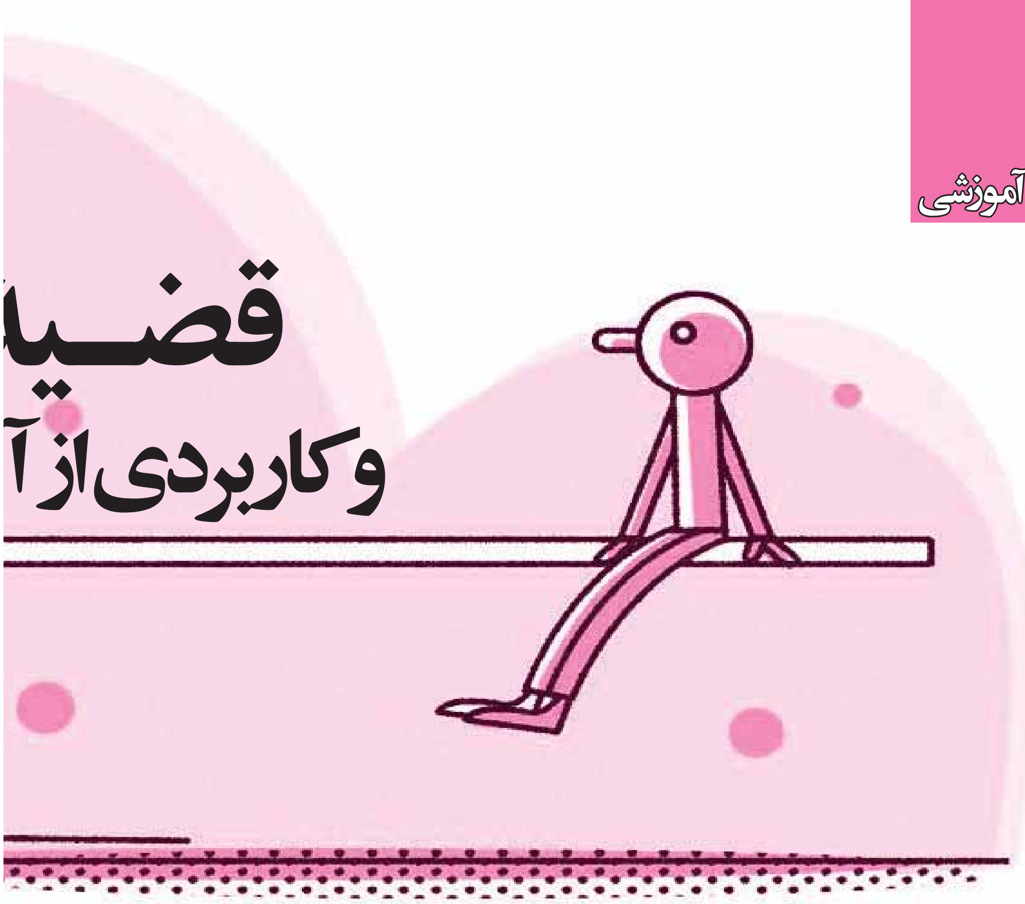
چهار حالت برای مؤلفه‌های یک نقطه در تقسیم بر ۲ وجود دارد: $(1,1)$-$(0,1)$-$(1,0)$ و $(0,0)$. در نتیجه، در میان هر پنج نقطه، حداقل ۲ نقطه از لحاظ زوجیت مؤلفه‌ها یکسان هستند. بنابراین، با تکرار این ۵تایی‌ها، به ۵ زوج از نقاط می‌رسیم که یکسان هستند. برای مجموع مؤلفه‌های هر دو نقطه چهار حالت وجود دارد: $(0,2)$، $(2,2)$، $(0,0)$ و $(2,0)$. در نتیجه، در میان این پنج زوج نقطه، دو زوج نقطه وجود دارند که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها یکسان است. در نتیجه، مجموع مؤلفه‌های این ۴ نقطه مضرب ۴ خواهد بود که نشان می‌دهد مرکز ثقل آن‌ها نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

۱۵۹. اعداد ۱ تا n روی تختهٔ سیاه نوشته شده‌اند. می‌خواهیم برای این اعداد علامت مثبت یا منفی بگذاریم، به‌طوری‌که مجموع اعداد حاصل صفر شود. به ازای چه مقادیری از n این کار امکان‌پذیر است؟

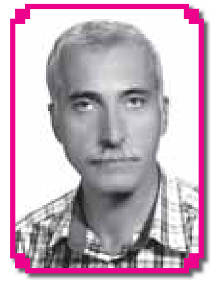
این کار در صورتی امکان‌پذیر است که مجموع اعداد ۱ تا n یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد. پس $n(n+1)$ باید مضرب ۴ باشد. در نتیجه، n باید به فرم $4k$ یا $4k-1$ باشد. در حالتی که $n=4k$، اعداد را به دو دستهٔ $A=\{1,2,...,k,3k,3k+1,3k+2,...,4k\}$ و $B=\{k+1,k+2,...,3k\}$ افراز می‌کنیم و در حالتی که $n=4k-1$، عدد $4k$ را از مجموعهٔ A حذف و از مجموعهٔ B، $2k$ را به A اضافه می‌کنیم.

۱۶۰. ثابت کنید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد مانند n، فرد است، اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد.

اگر n را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و به‌صورت $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_k^{\alpha_k}$ بنویسیم، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n برابر است با $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$. این تعداد فرد است، اگر و تنها اگر α_iها همگی زوج باشند که در این حالت n مربع کامل خواهد بود.



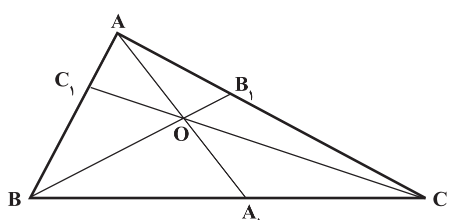
قضیـه
و کاربردی از آ



حسین کریمی
دبیر ریاضی تهران

قضیه: اگر O نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث ABC باشد و امتداد AO ضلع BC را در A_1 و امتداد BO ضلع AC را در B_1 و امتداد CO ضلع AB را در C_1 قطع کند، داریم:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\times\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

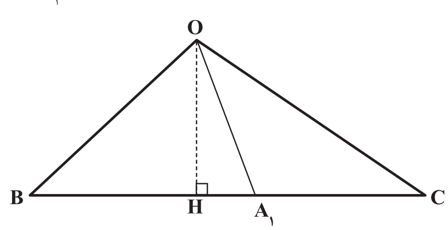


شکل۱

قبل از آنکه به اثبات قضیه بپردازیم، دو مطلب را یادآوری می‌کنیم.

الف) نسبت مساحت‌های دو مثلث با ارتفاع یکسان برابر است با نسبت قاعده‌های دو مثلث:

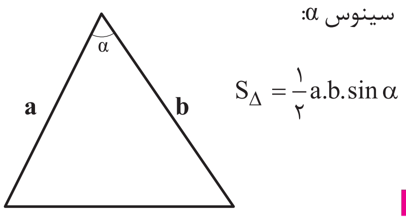
$$\frac{S_{OBA_1}}{S_{OCA_1}}=\frac{BA_1}{A_1C}$$



شکل۲

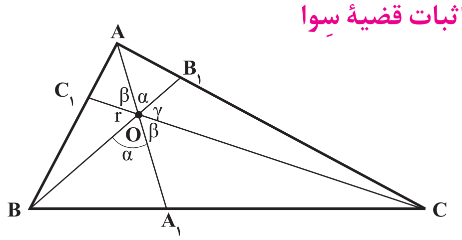
ب) مساحت مثلث با زاویهٔ α برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور به زاویهٔ α در سینوس α:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}a.b.\sin\alpha$$



شکل۳

اثبات قضیهٔ سِوا



شکل۴

$$\Delta OBA_1,\Delta OCA_1:\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{OBA_1}}{S_{OCA_1}}=\frac{\frac{1}{2}OB.OA_1.\sin\alpha}{\frac{1}{2}OC.OA_1.\sin\beta}$$

$$=\frac{OB.\sin\alpha}{OC.\sin\beta}$$

$$\Delta OCB_1,\Delta OAB_1:\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{OCB_1}}{S_{OAB_1}}=\frac{\frac{1}{2}OC.OB_1.\sin\gamma}{\frac{1}{2}OA.OB_1.\sin\alpha}$$

$$=\frac{OC.\sin\gamma}{OA.\sin\alpha}$$

$$\Delta OAC_1, \Delta OBC_1 : \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{OAC_1}}{S_{OBC_1}} = \frac{\frac{1}{2} OA.OC_1.\sin\beta}{\frac{1}{2} OB.OC_1.\sin\gamma}$$

$$= \frac{OA.\sin\beta}{OB.\sin\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B}$$

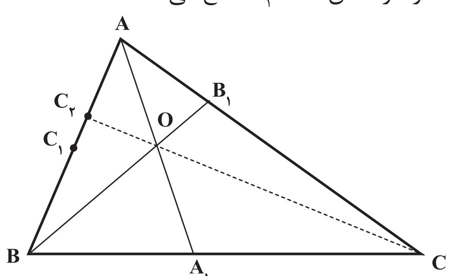
$$= \frac{OB.\sin\alpha}{OC.\sin\beta} \times \frac{OC.\sin\gamma}{OA.\sin\alpha} \times \frac{OA.\sin\beta}{OB.\sin\gamma} = 1 \ \blacksquare$$

عکس قضیۀ سِوا

اگـر نقاط A_1 روی ضلع BC و B_1 روی ضلع AC و C_1 روی ضلع AB از مثلث ABC چنان واقع باشند که: $\frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{AC_1}{C_1B} = 1$، آن‌گاه AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

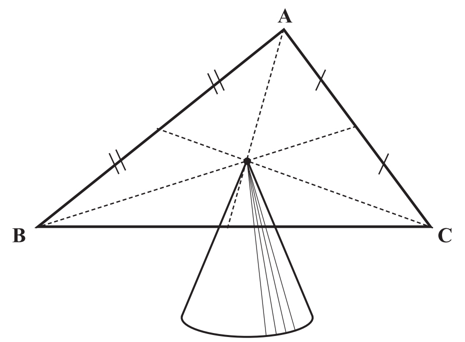
اثبات: نقطـۀ تلاقـی AA_1 و BB_1 را O می‌نامیم. اگر امتـداد CO از C_1 بگذرد که قضیه اثبات شـده اسـت. فرض کنیم امتــداد CO، AB را در C_2 قطع کند. پس طبق قضیۀ سوا داریم: $\frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_2}{C_2B} = 1$ که از مقایسۀ آن با فرض قضیۀ ($\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$) داریم: $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$.

پـــس: $\frac{AC_2 + C_2B}{C_2B} = \frac{AC_1 + C_1B}{C_1B}$ در نـتـیـــجه: $\frac{AB}{C_2B} = \frac{AB}{C_1B}$ و از آنجا: $C_2B = C_1B$ که نشان می‌دهد دو نقطۀ C_1 و C_2 برهم منطبق‌اند، لذا امتداد CO، ضلع AB را در همان نقطۀ C_1 قطع می‌کند.



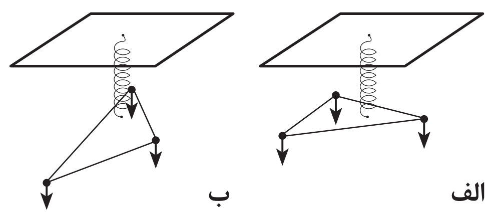
شکل ۵

تذکر: اگــر AA_1 میانــه ($BA_1 = A_1C$) و BB_1 میانه ($AC_1 = C_1B$) میانــه CC_1 و ($CB_1 = B_1A$) باشــند، داریم: $\frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} \times \frac{AC_1}{C_1B} = 1$ که نشــان می‌دهد ســه میانۀ مثلث در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و آن نقطه را مرکز ثقل و یا گرانیگاه گویند.



شکل ۶

مسئله: می‌خواهیم یک لوستر سه قسمتی را که هر قسمت آن از یک گوشهٔ صفحهٔ مثلثی آویزان است و جرم هر قسمت، متفاوت با قسمت دیگر است، از سقف آویزان کنیم. نقطهٔ اتصال زنجیر آویز از سقف به مثلث را چنان تعیین کنید تا صفحهٔ مثلث به موازات کف (یا سقف) اتاق قرار گیرد (شکل ۷- الف رخ دهد و شکل ۷- ب رخ ندهد).

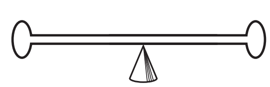


شکل ۷

مقدمه

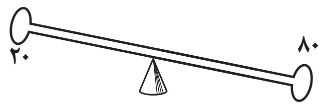
بدیهی است که اگر وزن سه جسم آویزان شده از سه رأس مثلث، یکسان باشد، باید صفحهٔ مثلث را از مرکز ثقل آن (گرانیگاه) یعنی از محل تلاقی سه میانه آویزان کنیم (مانند شکل ۶).

در پارک‌های بازی، الاکلنگ‌های کار گذاشته شده برای دو نفر هم‌وزن ساخته شده‌اند، از این رو تکیه‌گاه را در وسط الاکلنگ قرار می‌دهند (مانند شکل ۸).



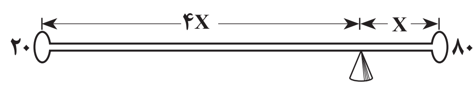
شکل ۸

حال اگر قرار باشد پدری با وزن ۸۰ کیلوگرم با پسرش به وزن ۲۰ کیلوگرم، الاکلنگ بازی کنند، در همان ابتدا، اتفاقی رخ می‌دهد که در شکل ۹ می‌بینید و بازی ادامه پیدا نمی‌کند.



شکل ۹

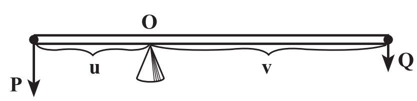
اما علم مکانیک شکل بازی پدر و پسر را حل کرده است و راه‌حل زیر را ارائه می‌دهد: اگر وزن پدر ۴ برابر وزن پسر است، تکیه‌گاه را طوری قرار دهید که فاصله‌اش تا پسر، ۴ برابر فاصله‌اش تا پدر باشد (مانند شکل ۱۰).



شکل ۱۰

در واقع در مکانیک ثابت می‌شود که نسبت فاصله‌ها برابر با عکس نسبت وزن‌ها است (شکل ۱۱).

$$\frac{u}{v}=\frac{Q}{P}$$

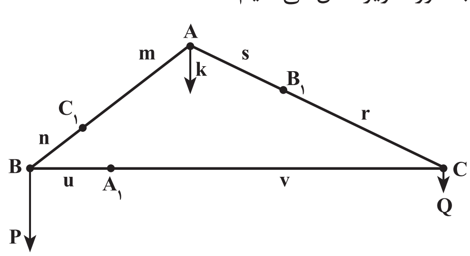


شکل ۱۱

به عبارت دیگر، اگر فاصله‌های نقطهٔ O از وزنه‌های P و Q را با u و v نشان دهیم، ترازمندی تنها هنگامی است که حاصل‌ضرب نیروی P در بازوی u برابر با حاصل‌ضرب نیروی Q در بازوی v باشد؛ یعنی: $P.u=Q.v$

حال با توجه به مقدمهٔ گفته شده به حل مسئلهٔ لوستر می‌پردازیم که کاربردی از قضیهٔ سوا در مکانیک است.

برای به‌دست آوردن نقطهٔ A_1، محل گرانیگاه پاره‌خط BC، که از B وزنهٔ P و از C وزنهٔ Q آویزان است به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



شکل ۱۲

$$\begin{cases} u.P = v.Q \\ u+v = BC \end{cases} \Rightarrow u.P = (BC-u).Q$$

$$\Rightarrow u = \frac{BC.Q}{P+Q}, v = \frac{BC.P}{P+Q}$$

یعنی A_1 به فاصلهٔ $\frac{BC.Q}{P+Q}$ از رأس B، روی BC قرار دارد و همچنین داریم: $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$

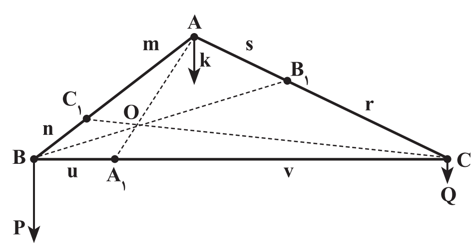
به‌همین ترتیب محل نقطهٔ B_1 را به‌عنوان گرانیگاه پاره‌خط AC که از رأس A وزنهٔ k و از رأس C وزنهٔ Q آویزان است تعیین می‌کنیم و داریم: $\frac{r}{s} = \frac{k}{Q}$.

با مشخص کردن محل نقطهٔ C_1 روی AB به‌عنوان گرانیگاه که در آن از رأس A وزنهٔ k و از رأس B وزنهٔ P آویز است، داریم: $\frac{m}{r} = \frac{P}{k}$.

با توجه به برقراری تساوی $\frac{Q}{P} \times \frac{k}{Q} \times \frac{P}{k} = ۱$ داریم: $\frac{u}{v} \times \frac{r}{s} \times \frac{m}{r} = ۱$.

به استناد عکس قضیه سِوا، همرسی AA_1، BB_1 و CC_1 را داریم که نقطهٔ تلاقی یعنی همان O نقش مرکز ثقل مثلث ABC را خواهد داشت.

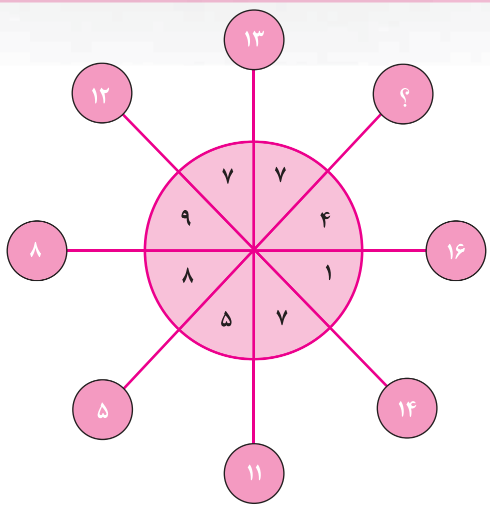
توجه داشته باشیم که A_1، B_1 و C_1 وسط‌های اضلاع مثلث نیستند، ولی به‌دلیل متفاوت بودن جرم وزنه‌های آویزان‌شده از A، B و C نقاط A_1، B_1 و C_1 همان نقش تکیه‌گاه الاکلنگ با وزن‌های متفاوت در دو سر را ایفا می‌کنند و به‌همین دلیل، O مرکز ثقل صفحهٔ مثلث لوستر است (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

منبع
الهام گرفته شده از کتاب: اوسپنسکی، و. (۱۳۶۱). برخی کاربردهای مکانیک در ریاضیات. ترجمهٔ دکتر کاظم ابهری. نشر گستره. تهران.

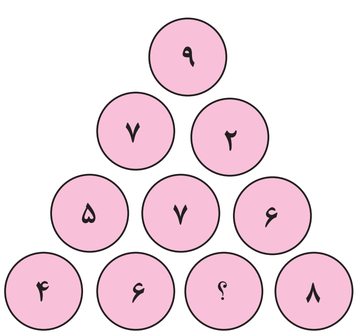
با توجه به الگوهای عددی که در نمودارهای زیر پیدا می‌کنید، عددی را که باید در خانهٔ با علامت سؤال قرار گیرد، مشخص کنید. تلاش خود را بکنید و اگر موفق نشدید، پاسخ و راه‌حل را در صفحهٔ ۴۸ ببینید.



(الف)

			۱۴	
	۲۲			
			۳۴	
۴۱				
		۵۳		؟

(ب)



(ج)

فرشته بیاتی
دبیر ریاضی نیشابور

معرفی، اهداف و فعالیت‌های خانهٔ ریاضیات نیشابور

مقدمه

خانهٔ ریاضیات نیشابور در سال جهانی ریاضیات، سال ۱۳۷۹، هم‌زمان با کنگرهٔ جهانی بزرگداشت نهصدمین سال وفات حکیم عمر خیام با حضور وزیر وقت علوم، رؤسای انجمن‌های ریاضی و آمار ایران، استادان شرکت‌کننده در کنگره و مقامات محلی افتتاح شد. این خانه تاکنون در قسمت‌های مختلف آموزش ریاضی در چارچوب اهداف اساس‌نامه فعالیت‌های چشمگیری را به انجام رسانده و موفقیت‌ها و دستاوردهای قابل‌توجهی را به دست آورده است. از جمله اینکه سال ۱۳۹۰ جایزهٔ نهاد برگزیدهٔ مروج علم را از طرف «انجمن ترویج علم ایران» به خود اختصاص داد.

تشکیلات

طبق اساس‌نامه، خانهٔ ریاضیات به صورت هیئت امنایی اداره می‌شود و فرماندار وقت رئیس این هیئت است. تعداد اعضای هیئت امنای آن ۲۸ نفر است که از اعضای حقوقی، مانند رئیس آموزش‌وپرورش، شهردار، رئیس شورای اسلامی شهر، رؤسای مراکز آموزش عالی نیشابور و...، و اشخاص حقیقی از جمله پروفسور **والد اشمیت** (رئیس سابق انجمن ریاضی فرانسه)، دکتر **مهدی بهزاد**، دکتر **ناصر ارقامی** و عده‌ای از استادان و دبیران نیشابور می‌توان نام برد.

اهداف خانهٔ ریاضیات نیشابور

۱. عمومی کردن ریاضیات؛
۲. آشنایی جوانان و نوجوانان با تاریخ ریاضی و کاربردهای آن؛
۳. زیبا و مفهومی کردن آموزش ریاضی؛
۴. از بین بردن ترس از درس ریاضی و امتحان؛
۵. پرورش و شکوفایی بیش از پیش استعدادها و خلاقیت‌ها.

گوشه‌ای از فعالیت‌های خانهٔ ریاضیات نیشابور

- فعالیت در جهت ترویج دانش ریاضی برای عموم با برپایی سمینارها و همایش‌های علمی.
- آموزش ریاضی برای دوره‌های متفاوت تحصیلی به صورت کار گروهی و بازی با ریاضی.
- آموزش ریاضی برای معلمان با برگزاری کلاس‌های ضمن خدمت و همایش‌ها با حضور مؤلفان کتاب‌های درسی.

- برگزاری مسابقات ماهانه از طریق سایت و بخش‌نامه و مسابقات کانگورو و مسابقهٔ حل مسئله خیام.
- برپایی نمایشگاه دائمی وسایل آموزشی ساخته شده توسط همکاران در کارگاه فناوری خانهٔ ریاضیات.
- برگزاری همایش‌ها و سمینارهای علمی با حضور استادان برجستهٔ داخل و خارج کشور.

سخنرانی دکتر مهدی بهزاد در جمع دبیران ریاضی نیشابور

به ترتیب از چپ به راست: آقایان دکتر بهزاد، بهرامی‌زاده، خسروی‌راد، طلایی

- برگزاری کارگاه آموزشی با حضور همکاران ریاضی.
- همکاری در برگزاری همایش کشوری مدرسان کلاس‌های چندپایه در مردادماه ۱۳۹۴.
- راه‌اندازی کتابخانه با بیش از ۳۰۰۰ جلد کتاب ریاضی و رایانه.
- راه‌اندازی کارگاه رایانه و ارائهٔ کلاس‌های "ICDL" و ارائهٔ خدمات اینترنتی به دانش‌آموزان و دانشجویان به صورت رایگان.
- آموزش محاسبهٔ سریع ذهنی برای گروه‌های سنی ۵ تا ۷ و ۸ تا ۱۳ سال و کودکان نابینا.

آموزش محاسبه با چرتکه و رایانه به کودکان نابینا

برگزاری مسابقات

خانهٔ ریاضیات نیشابور، به همت دبیران ریاضی شهرستان از سال ۱۳۸۳، به مناسبت روز ریاضی و خیام، در ۲۸ اردیبهشت‌ماه هر سال، یک مسابقهٔ ریاضی به صورت گروهی بین دانش‌آموزان شهرستان در محل آرامگاه خیام با حضور بیش از هزار دانش‌آموز برگزار می‌کند. در مراسم بزرگداشت خیام نیز جوایز نفیسی به برگزیدگان اهدا می‌شود. امیدواریم با حمایت مسئولان بتوانیم این مسابقه را در سطح کشور برگزار کنیم.

مجری بنیاد علمی و فرهنگی طرح عتر (عام ترویج ریاضی)

خانهٔ ریاضیات نیشابور به منظور اجرای طرح‌های ترویج علوم ریاضی برای دانش‌آموزان مناطق محروم و زمینه‌سازی برای بروز استعدادها، استادان خود را همراه با وسایل آموزشی و کتاب‌های لازم به صورت کاروانی به روستاها می‌فرستد و برنامه‌های خود را در محل انجام می‌دهد.

اجرای طرح عتر در روستای بار نیشابور

بوستان ریاضیات

از جمله اقدامات خانهٔ ریاضیات پیشنهاد احداث بوستان ریاضیات در نیشابور است که برای اولین بار در جهان به‌عنوان بزرگ‌ترین بوستان ریاضیات طراحی شده است. زمینی به مساحت ۳۰ هکتار از طرف شهرداری در شمال مسیر جادهٔ نیشابور- مشهد به این کار اختصاص داده شده و تاکنون بیش از سه و نیم میلیارد تومان برای ۱۰ هکتار از آن هزینه شده است.

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول

اعداد اول اعداد صحیح مثبتی هستند که تنها بر خودشان و ۱ بخش‌پذیرند. یازده عدد اول نخستین عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و ۳۱، امـا بی‌نهایـت عـدد اول موجودند. بنابر قرارداد، ۱ عدد اول در نظر گرفته نمی‌شـود، در حالی‌که ۲ تنها عدد اول زوج اسـت. عددی که نه ۱ و نه اول اسـت، به «عدد مرکب» (composite number) موسوم است.

هر عدد مرکب را می‌توان به گونه‌ای یکتا به صورت حاصل ضربی از عوامل اولی نوشت که در هم ضرب شده باشند. برای مثال: $۱۲=۲^۲\times۳$, $۲۱=۳\times۷$, $۲۷۰=۲\times۳^۳\times۵$

از آنجا که خود اعداد اول نمی‌توانند تجزیه شـوند، می‌توان آن‌ها را به‌عنوان بلوک‌های سـاختمانی و بنیانی اعـداد صحیح مثبت در نظر گرفت. اما تعیین اینکه عددی اول اسـت یا نه، و یافتن عوامل اول آن، در صورتی که اول نباشـد، می‌تواند بسیار مشکل باشـد. بنابراین، این فرایند مبنای ایده‌آلی برای دستگاه‌های رمزبندی است.

الگوهای پیچیدهٔ بسیاری در مورد اعداد اول موجودند، و یکی از فرض‌های برجستهٔ بزرگ ریاضیات، یعنی «فرض ریمـان» (Riemann hypothesis)، در مـورد توزیع آن‌هاست.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

* جدول اعداد ۱ تا ۱۰۰ که در آن اول‌ها به‌صورت روشـن نمایش داده شده‌اند

الگوریتم اقلیدس

الگوریتم روش یا دستورالعملی برای حل یک مسئله، با انجام مجموعه‌ای از قواعد است. «الگوریتم اقلیدس» (Euclid's algorithm) یکی از قدیمی‌ترین مثال‌هایی است که در حدود سال ۳۰۰ ق.م تنظیم شده است. این الگوریتم برای یافتن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، یعنی ب.م.م.، دو عدد طرح شده است. الگوریتم‌ها در علوم رایانه‌ای نقشی اساسی دارند و اغلب ابزارهای الکترونیکی، برای تولید خروجی مفید، از آن‌ها استفاده می‌کنند.

ساده‌ترین صورت الگوریتم اقلیدس از این واقعیت استفاده می‌کند که ب.م.م. دو عدد برابر ب.م.م. عدد کوچک‌تر و تفاضل بین آن‌هاست. این موضوع مجازمان می‌کند که به‌طور مکرر عدد بزرگ‌تر واقع در جفت موردنظر را برداریم و بدین‌ترتیب اندازهٔ اعداد مشمول را تا صفر شدن یکی، کاهش دهیم. در این صورت عدد ناصفر آخری ب.م.م. جفت اولیه است.

این روش می‌تواند تا رسیدن به پاسخ، تکرارهای زیادی داشته باشد. روش کاراتر، یعنی الگوریتم استاندارد، طریقی است که در آن به‌جای عدد بزرگ‌تر، باقی‌مانده‌ای را قرار می‌دهد که از تقسیم آن بر عدد کوچک‌تر به‌دست آمده است. این عمل را تا زمانی که دیگر باقی‌مانده‌ای موجود نباشد، ادامه می‌دهد.

پیدا کردن ب.م.م. ۵۸۵ و ۴۴۲

صورت سادهٔ الگوریتم اقلیدس: ۱۵ مرحله

۱۴۳=۴۴۲-۵۸۵، بنابراین ۴۴۲ و ۱۴۳ را در نظر می‌گیریم.

۲۹۹=۱۴۳-۴۴۲، پس ۲۹۹ و ۱۴۳ را در نظر می‌گیریم.

۱۵۶= ۱۴۳-۲۹۹، پس ۱۵۶ و ۱۴۳ را در نظر می‌گیریم.

۱۳=۱۴۳-۱۵۶، پس ۱۴۳ و ۱۳ را در نظر می‌گیریم.

۱۳۰=۱۳-۱۴۳، پس ۱۳۰ و ۱۳ را در نظر می‌گیریم.

(پاسخ در این مرحله واضح است، اما تفریق نه بار دیگر به ۱۳ منجر می‌شود...)

۰=۱۳-۱۳، بنابراین ب.م.م. موردنظر ۱۳ است.

صورت استاندارد الگوریتم اقلیدس: ۳ مرحله

$\frac{۵۸۵}{۴۴۲}$ = ۱ (باقی‌مانده ۱۴۳)

$\frac{۴۴۲}{۱۴۳}$ = ۳ (باقی‌مانده ۱۳)

$\frac{۱۴۳}{۱۳}$ = ۱۱ (بدون باقی‌مانده)

بنابراین فرایند متوقف می‌شود، و ب.م.م. ۱۳ است.

مقسوم‌علیه‌ها و باقی‌مانده‌ها

عددی «مقسوم‌علیه» (divisor)عدد دیگری است اگر دقیقاً و بدون باقی‌مانده در آن عدد شمرده شود. بنابراین ۴ مقسوم‌علیه ۱۲ است، زیرا می‌تواند دقیقاً سه بار در ۱۲ شمرده شود. در این نوع عمل، عددی که در آن شمرده شده، یعنی ۱۲، به‌عنوان «مقسوم» (dividend) شناخته می‌شود.

اما در مورد ۱۳ چون توسط ۴ شمرده شود، چه می‌توان گفت؟ در این حالت، ۴ مقسوم‌علیه ۱۳ نیست، زیرا این عدد سه بار در ۱۳ شمرده می‌شود، اما ۱ واحد باقی می‌ماند. یک راه بیان پاسخ به‌صورت سه، باقی‌ماندهٔ یک بیان می‌شود. این طریق راه دیگری برای گفتن این مطلب است که ۱۲، که ۴×۳ است، بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر از مقسوم (۱۳) است که بر چهار بخش‌پذیر است، و اینکه: ۱+۱۲=۱۳. اکنون چون باقی‌ماندهٔ یک توسط چهار شمرده می‌شود، نتیجهٔ کسر $\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین، پاسخ پرسش اولیّه‌مان $۳\frac{۱}{۴}$ است.

۳ و ۴ هر دو مقسوم‌علیه‌های ۱۲اند (همان‌طور که ۱، ۲، ۶ و ۱۲ نیز چنین‌اند). اگر عددی طبیعی، مثلاً p را توسط عدد دیگری، مثل q، بشماریم که مقسوم‌علیه p نیست، در این صورت همواره باقی‌ماندهٔ rی موجود است که کمتر از q است. این موضوع به این معنی است که در حالت عمومی داریم: p=kq+r که در آن، k عددی طبیعی، و r عددی طبیعی و کمتر از q است.

به ازای دو عدد p و q، «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، ب.م.م.»(greatest common divisor, GCD) و نیز مشهور به «بزرگ‌ترین عامل مشترک» (greatest common factor) بزرگ‌ترین عددی است که مقسوم‌علیه p و q، هر دو است.

از آنجا که به‌طور واضح ۱ مقسوم‌علیه هر دو عدد است، ب.م.م. همواره بزرگ‌تر از یا برابر با ۱ است. اگر ب.م.م. برابر ۱ باشد، در این صورت اعداد را «متباین» (coprime) می‌گویند. آن‌ها به استثنای ۱، مقسوم‌علیه مثبت مشترک ندارند.

مقسوم‌علیه‌ها خانوادهٔ جالبی از اعداد موسوم به «اعداد کامل» (perfect numbers) را تولید می‌کنند. این اعداد عددهایی هستند که مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبتشان، غیر از خودشان، به اندازهٔ خود عدد است. اولین و ساده‌ترین عدد کامل ۶ است، که برابر مجموع مقسوم‌علیه‌های خود، یعنی ۱، ۲ و ۳ است. دومین عدد کامل ۲۸ است که برابر است با: ۱۴+۷+۴+۲+۱. باید برای یافتن سومین عدد کامل، یعنی ۴۹۶، صبر بیشتری داشته باشیم. این عدد برابر است با: ۲۴۸+۱۲۴+۶۲+۳۱+۱۶+۸+۴+۲+۱.

اعداد کامل بسیار کمیاب‌اند و یافتنشان چالشی محسوب می‌شود. ریاضی‌دان‌ها همچنان باید پاسخ‌هایی قطعی برای پرسش‌های مهمی در این زمینه بیابند؛ از قبیل اینکه: آیا تعدادی نامتناهی از این اعداد موجودند؟ یا: آیا جمیع آن‌ها زوج‌اند یا نه؟

محمود داورزنی
پژوهش‌سرای دانش‌آموزی ذکریای رازی، ناحیهٔ ۱ شهرری
نصیر فلاح
دانش‌آموز سال سوم ریاضی دبیرستان شهید بهشتی، ناحیهٔ ۱ شهرری

گشتی در سرزمین اعداد گنگ

اشاره

اعداد حقیقی به دو دستهٔ گویا و گنگ تقسیم می‌شوند. مثلاً $\frac{2}{5}$ گویا و $\sqrt{5}$ گنگ است. در این تقسیم‌بندی اثبات گنگ بودن بسته به نوع مسئله تغییر می‌کند. برای مثال، روشی که به منظور اثبات گنگ بودن $\sqrt[3]{5}$ به‌کار می‌رود با روشی که برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ به‌کار می‌رود، متفاوت است. در این مقاله، ابتدا اعداد حقیقی را به دو بخش اعداد جبری و غیرجبری (متعالی) تقسیم می‌کنیم. سپس رابطهٔ بین این اعداد را با اعداد گویا و گنگ بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان گنگ بودن بسیاری از اعداد حقیقی جبری را به روش واحدی بیان کرد.

۱. اعداد گویا و گنگ

هر عدد حقیقی به شکل $\frac{a}{b}$ که $a,b\in Z$ و $b\neq 0$ گویا و بقیهٔ اعداد حقیقی، گنگ نامیده می‌شوند. مثلاً $\sqrt{2}$، $5\sqrt{2}-\sqrt{3}$، $\log 2$، $\sin 10$، π و $2^{\sqrt{2}}$ گنگ هستند، ولی روش اثبات گنگ بودن این اعداد یکسان نیست و برای بعضی از آن‌ها مثل π و یا $2^{\sqrt{2}}$، باید از ابزارهای پیشرفته‌ای استفاده کرد تا بتوان نشان داد این اعداد گنگ هستند. در ادامه چند خاصیت سادهٔ اعداد گویا و گنگ را مرور می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. اگر α یک عدد گنگ و r یک عدد گویای مخالف صفر باشد، $r+\alpha$، $r\alpha$ و $\frac{r}{\alpha}$ گنگ هستند.

اثبات: به کمک برهان خلف به‌راحتی همهٔ آن‌ها اثبات می‌شوند. برای مثال، اگر $r=\frac{a}{b}$ که $a,b\in Z$ و $b\neq 0$ و $r\alpha$ گنگ نباشد، پس گویاست یعنی $r\alpha=r'\in Q$ و در نتیجه $\alpha=\frac{r'}{r}\in Q$ که متناقض با فرض گنگ بودن α است. پس $r\alpha$ گنگ است.

نتیجهٔ ۱. اگر α یک عدد گنگ باشد، $-\alpha$ و α^{-1} نیز گنگ هستند.

اثبات: در قضیهٔ بالا و در $r\alpha$ و $\frac{r}{\alpha}$ به ترتیب قرار می‌دهیم: $r=-1$ و $r=1$.

البته مجموعهٔ اعداد گنگ نسبت به عمل جمع بسته نیست. مثلاً داریم: $\sqrt{2}+(\sqrt{-2})=0$ که صفر یک عدد گنگ نیست. به کمک قضیهٔ بالا گنگ بودن بسیاری از اعداد ثابت می‌شود؛ برای مثال، $3-\sqrt{2}$ و یا $\frac{5}{2}\sqrt{3}$؛ البته به شرطی که ثابت شود $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ گنگ هستند.

در ادامه با حل چند مثال، گنگ بودن اعدادی مانند $\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ را نشان می‌دهیم.

◆**مثال ۱.** ثابت کنید که $\sqrt{۳}$ گنگ است.

اثبات: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\sqrt{۳}$ گنگ نباشد. پس:

$$\sqrt{۳}=\frac{a}{b}: a,b\in Z, b\neq ۰$$

می‌توانیم فرض کنیم کسر $\frac{a}{b}$ تحویل‌ناپذیر است، یعنی تا جایی ساده شده که دیگر a و b به‌هیچ عدد طبیعی دیگری ساده نمی‌شوند. در این حالت می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند؛ یعنی $(a,b)=۱$. از رابطهٔ $\frac{a}{b}=\sqrt{۳}$ می‌توان تساوی $a^۲=۳b^۲$ را نتیجه گرفت. بنابراین $a^۲$ مضرب ۳ است و در نتیجه a نیز مضرب ۳ است، پس: $a=۳k$ که $k\in Z$. با جای‌گذاری این مقدار در رابطهٔ $a^۲=۳b^۲$، $۹k^۲=۳b^۲$ و یا $b^۲=۳k^۲$ نتیجه می‌شود. بنابراین مشابه قبل باید $b^۲$ مضرب ۳ باشد و در نتیجه b نیز مضرب ۳ خواهد بود؛ یعنی $b=۳k'$ که $k'\in Z$. با توجه به نتایج بالا a و b هر دو مضرب ۳ هستند و این به معنای آن است که کسر $\frac{a}{b}$ حداقل به ۳ ساده می‌شود که خلاف فرض است. پس $\sqrt{۳}$ گنگ است.

◆**مثال ۲.** اگر $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ گنگ باشند، ثابت کنید $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ نیز گنگ است.

اثبات: باز هم از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ گنگ نباشد. پس گویاست. با توجه به اینکه:

$$(۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲})(۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲})=۲۰-۱۸=۲$$

پس: $۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲}=\frac{۲}{۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}}$ و در نتیجه $۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲}$ نیز گویاست. از طرف دیگر:

$$(۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲})+(۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲})=۴\sqrt{۵}$$

و چون جمع دو عدد گویا نیز عددی گویاست، پس $۴\sqrt{۵}$ و در نتیجه $\sqrt{۵}$ نیز گویاست که متناقض با فرض است. بنابراین $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ گنگ است.

در مثال زیر نیز گنگ بودن $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ خواسته شده، ولی فرض سؤال متفاوت است و این راه‌حل متفاوتی را ایجاب می‌کند.

◆**مثال ۳.** اگر $\sqrt{۱۰}$ گنگ باشد، ثابت کنید $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ نیز یک عدد گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}$ گنگ نباشد، پس: $۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}=r$ که $r\in Q$، داریم:

$$۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}=r \Rightarrow (۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲})^۲=r^۲$$

$$\Rightarrow ۲۰+۱۸-۱۲\sqrt{۱۰}=r^۲ \Rightarrow \sqrt{۱۰}=\frac{۳۸-r^۲}{۱۲}$$

و چون $r\in Q$ پس: $\frac{۳۸-r^۲}{۱۲}$ و در نتیجه $\sqrt{۱۰}$ نیز گویاست که متناقض با فرض است.

از سه مثال بالا به‌راحتی می‌توان دریافت که روش‌های اثبات گنگ بودن اعداد رادیکالی متفاوت با یکدیگرند.

۲. معادلات جبری و ریشه‌های گویای آن‌ها

هر عدد رادیکالی را می‌توانیم ریشهٔ یک معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح در نظر بگیریم. مثلاً $x=\sqrt{۲}$ یک ریشه از معادلهٔ $x^۲-۲=۰$ است و یا برای $x=۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ به‌راحتی می‌توانیم معادله‌ای بسازیم:

$$x=۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲=۱۲+۲-۴\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow (x^۲-۱۴)^۲=(-۴\sqrt{۶})^۲ \Rightarrow x^۴-۲۸x^۲+۱۹۶=۹۶$$

$$\Rightarrow x^۴-۲۸x^۲+۱۰۰=۰$$

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، $\sqrt{۲}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲-۲=۰$ و $۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ نیز ریشه‌ای از معادلهٔ $x^۴-۲۸x^۲+۱۰۰=۰$ است. به چنین اعدادی که ریشهٔ یک معادله با ضرایب صحیح هستند، جبری می‌گوییم و به اعداد حقیقی دیگر غیرجبری می‌گوییم. مثلاً $\log ۲$ غیرجبری است که اثبات آن نیز کار نسبتاً دشواری است. اگر بتوانیم ثابت کنیم که این معادلات ریشهٔ گویایی ندارند، بنابراین اعداد $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گویا نیستند و باید گنگ باشند. برای اثبات این مطلب ذکر مفاهیم زیر لازم است.

لم اقلیدس: اگر a، b و c اعداد صحیحی باشند و $a|bc$ و $(a,b)=۱$، آنگاه: $a|c$.

اثبات این قضیه در کتاب درسی «ریاضیات گسسته» آمده است. بیان دیگری از این قضیه به این صورت است که اگر a یک مقسوم‌علیه bc باشد و a و b

هیچ مقسوم‌علیه مشترکی به‌جز ۱ نداشته باشند، a یک مقسوم‌علیه c است. قضیهٔ زیر اساس مطالب بعدی است.

قضیهٔ ۲. اگر $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0 = 0$ یک معادله با ضرایب صحیح و $\frac{a}{b}$ ریشهٔ گویای تحویل‌ناپذیر این معادله باشد، a یک مقسوم‌علیه c_0 و b یک مقسوم‌علیه c_n خواهد بود.

اثبات: اگر $x=\frac{a}{b}$، ریشهٔ این معادله و همچنین یک کسر تحویل‌ناپذیر باشد، در این معادله صدق می‌کند. بنابراین:

$$c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+...+c_1\left(\frac{a}{b}\right)+c_0=0$$

با ضرب طرفین در b^n داریم:

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b+...+c_1ab^{n-1}+c_0b^n=0$$

بنابراین:

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b+...+c_1ab^{n-1}=-c_0b^n$$

در معادلهٔ بالا a یک مقسوم‌علیه سمت چپ تساوی است، بنابراین a یک مقسوم‌علیه سمت راست، یعنی $-c_0b^n$ نیز هست و چون: $(a,b)=1$، طبق لم اقلیدس a یک مقسوم‌علیه c_0 است. به‌طور مشابه داریم:

$$c_{n-1}a^{n-1}b+...+c_1ab^{n-1}+c_0b^n=-c_na^n$$

در این معادله b یک مقسوم‌علیه سمت چپ است، پس یک مقسوم‌علیه سمت راست، یعنی $-c_na^n$ نیز هست و چون: $(a,b)=1$، طبق لم اقلیدس b یک مقسوم‌علیه c_n خواهد بود.

◆**مثال ۴.** تمام ریشه‌های گویای معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$2x^3-9x^2+10x-3=0$

حل: اگر $x=\frac{a}{b}$، ریشهٔ گویا و تحویل‌ناپذیر این معادله باشد، طبق قضیهٔ بالا a یک مقسوم‌علیه ۳- و b یک مقسوم‌علیه ۲ است. بنابراین انتخاب‌های ممکن a و b عبارت‌اند از:

$a=\pm1,\pm3,\ b=\pm1,\pm2$

پس حالت‌های مختلف $\frac{a}{b}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$\frac{a}{b}=\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm3,\pm\frac{3}{2}$

که با جای‌گذاری در معادله، فقط عددهای ۱، $\frac{1}{2}$ و ۳ در آن صدق می‌کند و بنابراین ریشه‌های آن به‌شمار می‌روند.

نکته: در قضیهٔ بالا، اگر $c_n=1$ و این معادله یک ریشه گویا داشته باشد، این ریشه یک عدد صحیح و این عدد یک مقسوم‌علیه c_0 است. به کمک قضیهٔ بالا گنگ بودن چند عدد را نشان می‌دهیم.

◆**مثال ۵.** ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

حل: عدد $\sqrt{3}$ ریشهٔ معادله $x^2-3=0$ است. اگر ثابت کنیم که این معادله ریشهٔ گویا ندارد، $\sqrt{3}$ گنگ خواهد بود. با توجه به نکتهٔ بالا هر ریشهٔ گویای این معادله یک عدد صحیح و این عدد صحیح یک مقسوم‌علیه ۳- است. بنابراین اگر معادلهٔ بالا ریشه‌های گویا داشته باشد، این ریشه‌ها در بین عددهای زیرند:

$\pm1,\pm3$

با جای‌گذاری به‌سادگی درمی‌یابیم که هیچ‌کدام از این عددها ریشهٔ معادله نیستند. پس این معادله هیچ ریشهٔ گویایی ندارد و چون $\sqrt{3}$ ریشهٔ این معادله است، قطعاً گنگ خواهد بود.

◆**مثال ۶.** ثابت کنید $\sqrt[3]{7}$ گنگ است.

حل: عدد $\sqrt[3]{7}$ ریشهٔ معادله $x^3-7=0$ است و می‌دانیم هر ریشهٔ گویای این معادله یک عدد صحیح و این عدد صحیح یک مقسوم‌علیه ۷- است. بنابراین ریشه‌های گویای این معادله فقط از بین اعداد زیر می‌توانند باشند:

$\pm1,\pm7$

که با جای‌گذاری آن‌ها در معادلهٔ بالا هیچ‌کدام ریشه نیستند. پس $\sqrt[3]{7}$ که ریشهٔ این معادله است، گنگ خواهد بود.

◆**مثال ۷.** ثابت کنید $\sqrt[3]{2}-\sqrt{5}$ گنگ است.

ابتدا معادله‌ای با ضرایب صحیح به‌دست می‌آوریم که این عدد ریشهٔ آن باشد:

$$x=\sqrt[3]{2}-\sqrt{5}\Rightarrow x+\sqrt{5}=\sqrt[3]{2}\Rightarrow (x+\sqrt{5})^3=2$$
$$\Rightarrow x^3+3\sqrt{5}x^2+15x+5\sqrt{5}=8$$
$$\Rightarrow x^3+15x-8=-\sqrt{5}(3x^2+5)$$
$$\Rightarrow (x^3+15x-8)^2=5(9x^4+30x^2+25)$$
$$\Rightarrow x^6-15x^4-16x^3-75x^2-240x-61=0$$

با توجه به اینکه هر ریشهٔ گویای این معادله یک عدد صحیح، و این عدد صحیح یک مقسوم‌علیه ۶۱-، و ۶۱ نیز یک عدد اول است، ریشه‌های گویا (در صورت وجود) در میان اعداد زیر خواهند بود:

$\pm ۱, \pm ۶۱$

با جای‌گذاری معلوم می‌شود، هیچ‌کدام ریشهٔ معادله نیستند. پس این معادله ریشهٔ گویا ندارد و با توجه به اینکه $\sqrt{۵} - \sqrt[۳]{۲}$ ریشهٔ این معادله است، پس این عدد گنگ خواهد بود.

◆**مثال ۸.** ثابت کنید $\sin ۱۰^\circ$ گنگ است.

با توجه به اتحاد مثلثاتی

$$\sin ۳\theta = ۳\sin\theta - ۴\sin^{۳}\theta$$

و با قرار دادن $\theta = ۱۰$، داریم:

$$۳\sin ۱۰ - ۴\sin^{۳} ۱۰ = \frac{۱}{۲} ۳x \quad ۴x$$

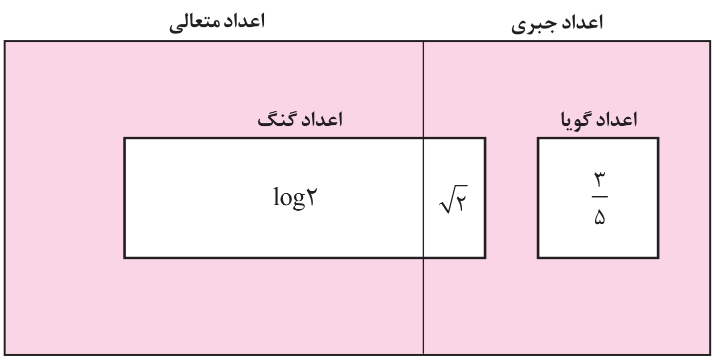
و با جای‌گذاری $\sin ۱۰ = x$، معادلهٔ $۳x - ۴x^{۳} = \frac{۱}{۲}$ و یا $-۸x^{۳} + ۶x - ۱ = ۰$ به‌دست می‌آید که $\sin ۱۰$ ریشهٔ آن است. اکنون اگر معادلهٔ اخیر ریشهٔ گویای $\frac{a}{b}$ داشته باشد، باید a مقسوم‌علیه ۱- و b مقسوم‌علیه ۸- باشد. پس ریشه‌های گویای این معادله به شکل زیر خواهند بود:

$$\pm ۱, \pm \frac{۱}{۲}, \pm \frac{۱}{۴}, \pm \frac{۱}{۸}$$

که با جای‌گذاری در معادله هیچ‌کدام ریشهٔ آن نیستند. پس این معادله ریشهٔ گویا ندارد و در نتیجه $\sin ۱۰$ (که ریشهٔ این معادله است) گویا نیست.

۳. اعداد جبری و غیرجبری

همان‌طور که قبلاً گفته شد، هر عدد حقیقی که ریشهٔ معادله‌ای با ضرایب صحیح باشد، جبری نامیده می‌شود و در غیر این صورت آن‌را غیرجبری یا متعالی می‌نامیم. هر عدد گویا یک عدد جبری است، چرا که اگر $x = \frac{a}{b}$ یک عدد گویا باشد، $bx - a = ۰$ معادله‌ای با ضرایب صحیح است که $\frac{a}{b}$ ریشه‌ای از آن است. بنابراین اعداد گویا زیرمجموعهٔ سره‌ای از اعداد جبری هستند. از سوی دیگر، هر عدد گنگی لزوماً یک عدد متعالی نیست. مثلاً $\sqrt{۲}$ گنگ است، ولی متعالی نیست، در حالی‌که $\log ۲$ هم گنگ است و هم متعالی. در حقیقت بسیاری از اعداد حقیقی گنگ، متعالی هستند. از توضیحات بالا می‌توانیم تصویر زیر را از اعداد حقیقی در ذهن داشته باشیم:



از جمله عددهای متعالی $\log ۲$ و π هستند. در حالت کلی می‌توان ثابت کرد که $\log n$ برای هر n که مخالف ۱۰^{k} $(k \in Z)$ باشد، غیرجبری است، ولی اثبات متعالی بودن آن‌ها مفصل‌تر و عمیق‌تر از آن است که بتوان در اینجا بیان کرد.

اثبات متعالی بودن π در سال ۱۸۸۲ کشف شد، ولی اثبات متعالی بودن اعدادی مانند $\log ۲$ و یا $۲^{\sqrt{۲}}$ سال‌ها بعد و در سال ۱۹۳۴ انجام شد. در سال ۱۹۰۰، ریاضی‌دان بزرگ، **دیوید هیلبرت**، فهرست مشهوری از ۲۳ مسئلهٔ متفاوت را عرضه کرد که هر کدام از آن‌ها سؤال‌های ریاضی حل نشدهٔ مهمی بودند که تا آن زمان حل نشده بودند. مسئلهٔ هفتم به این صورت بود: «اگر α و β جبری باشند، آیا α^{β} جبری است و یا غیرجبری؟» البته حالت‌های $\alpha = ۰$ و $\alpha = ۱$ و یا وقتی که β گویا باشد، از این حکم مستثنا شده‌اند. در سال ۱۹۳۴ متعالی بودن این عدد توسط **گلفند**[۱] و به‌طور جداگانه توسط **شنیدر**[۲] اثبات شد. متعالی‌بودن $۲^{\sqrt{۲}}$ حالت خاصی از این حکم است. همچنین با کمک این قضیه متعالی بودن $\log ۲$ نیز به‌راحتی اثبات می‌شود، چرا که:

$$\alpha^{\beta} = ۱۰^{\log ۲} = ۲$$

در حالت کلی این قضیه ثابت می‌کند که اگر r گویا و $\log r$ گنگ باشد، $\log r$ متعالی خواهد بود.

پی‌نوشت‌ها

1. Gelfond
2. Schncider

منابع

1. Ian Anderson, *A first course in discrete mathematics*, Springer Verlag, 2001.
2. J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A course in combinatorics*. Cambridge University Press. 1992.

روش بازگشتی استدلالی نیرومند!

عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی شیراز

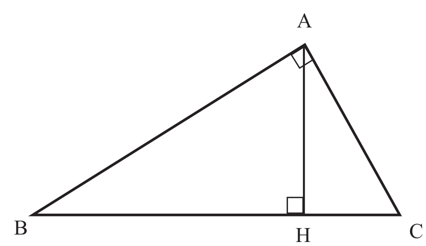
مقدمه

«اثبات بازگشتی» روشی است که بیشتر برای اثبات درستی نابرابری‌ها از آن استفاده می‌شود. در این روش درستی حکم را می‌پذیریم و با انجام محاسبات لازم و کمک گرفتن از ویژگی‌ها و خواص مرتبط با مسئله، نابرابری یا گزارهٔ حکم را تا آنجا ساده می‌کنیم که به گزاره‌ای برسیم که بدیهی است، یا درستی آن را از قبل می‌دانیم. در صورتی که مراحل انجام شده برگشت‌پذیر باشند، درستی روش اثبات تأیید شده است.

در این مقاله نمونهٔ مسائل متنوعی از جبر، مثلثات و به‌ویژه هندسه که جای خالی آن بیشتر احساس می‌شود، طرح و حل شده‌اند تا فراگیر بودن استفاده از این روش در اغلب شاخه‌های ریاضیات دبیرستانی نشان داده شود.

● **مثال ۱.** مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{AH^۲}=\frac{۱}{AB^۲}+\frac{۱}{AC^۲}$$



◀ **اثبات:** درستی حکم را می‌پذیریم و به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{AH^۲}=\frac{AC^۲+AB^۲}{AB^۲.AC^۲}, AC^۲+AB^۲=BC^۲$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{AH^۲}=\frac{BC^۲}{AB^۲.AC^۲}\Rightarrow BC^۲.AH^۲=AB^۲.AC^۲$$

$$\Rightarrow BC.AH=AB.AC\Rightarrow\frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}AB.AC$$

تساوی اخیر بدیهی است (زیرا هر دو طرف برابر S مساحت مثلث ABC هستند) و تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیرند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی، حکم مسئله برقرار است.

● **مثال ۲.** ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}(\sqrt{۴۶}-\sqrt{۲})=\sqrt{۱۲-\sqrt{۲۳}}$$

◀ **اثبات:** درستی تساوی را می‌پذیریم و دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$\frac{۱}{۴}(\sqrt{۴۶}-\sqrt{۲})^۲=۱۲-\sqrt{۲۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۴}(۴۶+۲-۲\sqrt{۹۲})=۱۲-\sqrt{۲۳}$$

$$\Rightarrow ۴۸-۲\sqrt{۹۲}=۴۸-۴\sqrt{۲۳}\Rightarrow ۲\sqrt{۹۲}=۴\sqrt{۲۳}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۴\times ۲۳}=۴\sqrt{۲۳}\Rightarrow ۴\sqrt{۲۳}=۴\sqrt{۲۳}$$

مراحل بازگشت‌پذیرند، لذا تساوی اولیه برقرار است.

● **مثال ۳.** ثابت کنید:

$$(\tan\theta+\cot\theta)^۲\geq ۴;\theta\neq\frac{k\pi}{۲}$$

◀ **اثبات:** فرض کنیم $\tan\theta=a$ در این صورت $\cot\theta=\frac{۱}{a}$ پس باید نشان دهیم:

$$(a+\frac{۱}{a})^۲\geq ۴$$

فرض کنیم این نامساوی درست باشد، پس:

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲\geq ۴\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}-۲\geq ۰$$

$$\Rightarrow(a-\frac{۱}{a})^۲\geq ۰$$

درستی رابطهٔ اخیر واضح است و روابط همگی برگشت‌پذیرند. لذا طبق روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است.

اینک به چند نمونهٔ دیگر از مسائل هندسی که پیرامون خواص مثلث برقرار است، می‌پردازیم و درستی آن‌ها را به روش اثبات

بازگشتی، مطرح می‌کنیم.

●**مثال ۴.** ثابت کنید اگر مثلثی با طول اضلاع a، b و c وجود داشته باشد، مثلثی با طول ضلع‌های $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ نیز وجود دارد.

◀**اثبات:** کافی است نشان دهیم که نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$$
$$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$$
$$\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$$

یکی از سه نابرابری را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه مشابه است. از روش اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$، در این صورت:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c})^2$$
$$a+b+2\sqrt{ab}>c$$

نابرابری آخر درست است، زیرا در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است؛ یعنی: a+b>c. پس:

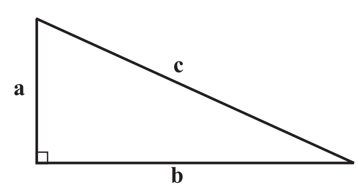
$$a+b+2\sqrt{ab}>c+2\sqrt{ab}>c$$

بنابراین نابرابری $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ درست است و حکم ثابت شده است.

●**مثال ۵.** ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، مکعب طول وتر از مجموع مکعبات دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

◀**اثبات:** اگر a و b طول دو ضلع و c طول وتر باشند، ثابت می‌کنیم:

$$c^3>a^3+b^3$$



درستی حکم را می‌پذیریم. با توجه به رابطهٔ **فیثاغورس** که: $c^2=a^2+b^2$، داریم:

$$c\times c^2>a^3+b^3$$
$$\Rightarrow (a^2+b^2)c>a^3+b^3 \Rightarrow a^2c+b^2c>a^3+b^3$$
$$\Rightarrow a^2c-a^3+b^2c-b^3>0$$
$$\Rightarrow a^2(c-a)+b^2(c-b)>0$$

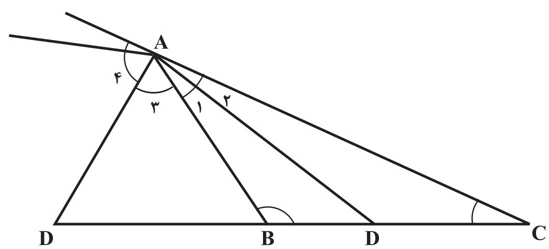
درستی رابطهٔ اخیر از آنجا ناشی می‌شود که در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ وتر از طول دو ضلع بزرگ‌تر است؛ یعنی: c>a و c>b.

پس: c-a>0 و c-b>0 و جمع دو مقدار مثبت، مثبت است. روابط همگی برگشت‌پذیرند و لذا حکم برقرار است.

●**مثال ۶.** مثلث ABC را که در آن فرض کرده‌ایم: $\hat{B}>\hat{C}$ و $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ (و یا با فرض $\hat{C}>\hat{B}$ و $\hat{C}-\hat{B}=90^\circ$، یعنی در حالت کلی $|\hat{B}-\hat{C}|=90^\circ$)، مثلث شبه‌قائمه در رأس A می‌نامیم.

ثابت کنید در این مثلث طول‌های نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس A با هم برابرند.

◀**اثبات:** مطابق شکل در مثلث ABC، $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ و AD و AD′ نیمسازهای داخلی و خارجی A هستند ($\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{A}_3=\hat{A}_4$). می‌خواهیم ثابت کنیم: AD=AD′.



با پذیرفتن درستی حکم، و با توجه به اینکه نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس در هر مثلث، همواره بر یکدیگر عمودند (چرا؟)، پس مثلث DAD′ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در نتیجه: $\hat{D}=\hat{D}'=45^\circ$ و در مثلث ABD داریم:

$$\hat{B}+\hat{A}_1+\hat{D}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}+45^\circ=180^\circ$$
$$\Rightarrow 2\hat{B}+\hat{A}=270^\circ \Rightarrow 2\hat{B}+180^\circ-\hat{B}-\hat{C}=270^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=90^\circ$$

این نتیجه هم معادل با فرض مسئله است. تمام مراحل برگشت‌پذیر هستند و استدلال اصلی را با طی مسیر عکس، خودتان انجام دهید.

امیدواریم مثال‌های فوق آن‌قدر متنوع بوده باشند که فراگیربودن این روش را در اثبات‌ها نشان دهند. اکنون اگر به حل مسئله‌های خاص علاقه‌مند هستید، پیشنهاد می‌شود مسائل زیر را هم ببینید که دو مسئلهٔ ویژه از هندسه هستند.

مسئلهٔ ۱. (نامساوی فینسلر ـ هادویگر) در هر مثلث به اضلاع a، b و c و مساحت S، نشان دهید نامساوی زیر برقرار است:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

◀**اثبات:** با فرض اینکه 2p=a+b+c محیط مثلث باشد، قرار می‌دهیم:

x=p−a, y=p−b, z=p−c

لذا داریم: $p=x+y+z$. فرض کنیم نامساوی حکم درست باشد.
طبق فرمول **هرون** داریم:

$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ و لذا:

$$S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

اکنون نامساوی حکم مسئله را برحسب متغیرهای x، y و z بازنویسی می‌کنیم:

$$(y+z)^2+(x+z)^2+(x+y)^2\ge 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$
$$\Rightarrow xy+yz+xz\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$\Rightarrow (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2+2x^2yz+2y^2xz$$
$$+2z^2xy\ge 3x^2yz+3y^2xz+3z^2xy$$
$$\Rightarrow (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2\ge xyz(x+y+z)$$

قرار می‌دهیم $A=xy$، $B=yz$ و $C=xz$ و خواهیم داشت:

$$A^2+B^2+C^2\ge AB+BC+AC$$

که درستی آن بدیهی است! (اگر اثبات آن را نمی‌دانید دو طرف را در ۲ ضرب کرده و عبارت‌ها را به سمت چپ نابرابری ببرید) روابط همگی برگشت‌پذیرند و بنابراین طبق روش اثبات بازگشتی حکم برقرار است. توجه کنیم که حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $x=y=z$ و یا $a=b=c$؛ یعنی مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

مسئلهٔ ۲. اگر A، B و C اندازهٔ زاویه‌های یک مثلث دلخواه و x، y و z اعداد حقیقی مثبت و دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$x^2+y^2+z^2\ge 2xy\cos A+2yz\cos B+2xz\cos C$$

◀ **اثبات:** با پذیرش حکم و توجه به اینکه:

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

با جای‌گذاری این رابطه در نامساوی فوق و دسته‌بندی مناسب به شرح زیر داریم:

$$x^2+y^2+z^2\ge 2xy\cos A+2yz\cos B$$
$$+2xz\sin A\sin B-2xz\cos A\cos B$$

و

$$\begin{cases} x^2\underbrace{(\sin^2 A+\cos^2 A)}_{1}+y^2+z^2\underbrace{(\sin^2 B+\cos^2 B)}_{1} \\ =x^2+y^2+z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y^2-2xy\cos A-2yz\cos B+2xz\cos A\cos B$$
$$+x^2\cos^2 A+z^2\cos^2 B)+(x^2\sin^2 A+z^2\sin^2 B$$
$$-2xz\sin A\sin B)\ge 0$$

$$\Rightarrow (y-x\cos A-z\cos B)^2+(x\sin A-z\sin B)^2\ge 0$$

درستی نامساوی اخیر بدیهی است و همهٔ روابط برگشت‌پذیرند. در نتیجه براساس روش اثبات بازگشتی حکم مسئله برقرار است.

تمرین‌ها

۱. نشان دهید در هر مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a و b و وتر c داریم:

$$a+b\le c\sqrt{2}$$

۲. ثابت کنید در هر مثلث دلخواه، نصف محیط مثلث، از طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است.

۳. مثلث ABC با طول اضلاع a، b و c و مساحت S مفروض است. ثابت کنید:

الف) $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$

ب) $ab+bc+ca\ge 4\sqrt{3}S$

۴. در هر مثلث با طول اضلاع a، b و c و نصف محیط P ثابت کنید:

$$\frac{a}{P-a}+\frac{b}{P-b}+\frac{c}{P-c}\ge 6$$

۵. ثابت کنید:

$$\frac{5^n}{1+5^{2n}}\ge\frac{5^{n+1}}{1+5^{2n+2}}\qquad(n\in N)$$

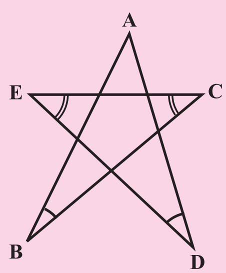
۶. ثابت کنید:

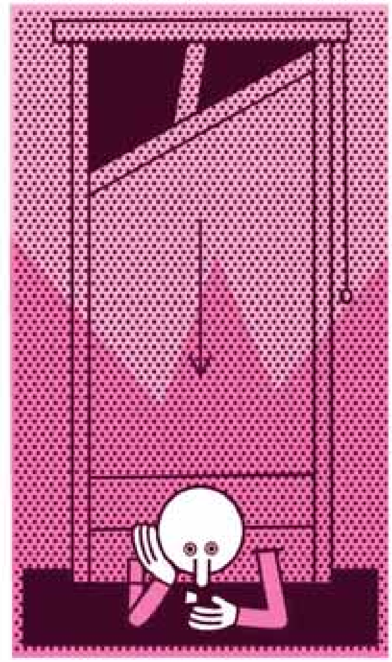
$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\ge\frac{1}{2}\qquad(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

۷. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{30}-\sqrt{2})=\sqrt{8-\sqrt{15}}$$

۸. در شکل زیر می‌دانیم: $\hat{B}=\hat{D}$، $\hat{C}=\hat{E}$ و DE=BC. ثابت کنید: AB=AD.





لطیفهٔ اول

احتمالاً با نام «گیوتین» آشـــنایی دارید. همان ابزار مخوف اعدام که تیغهٔ برندهٔ آن سر معدوم نگون‌بخت را می‌برد. گفته می‌شود این دستگاه به‌وسیلهٔ شخصی به همین نام اختراع شـد و در دوران انقلاب فرانســه بسیار مورد استفاده قرار گرفت.

در همـــان دوران، روزی ســه نفر، یک ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک شیمی‌دان را برای اعدام با این وســیله بردند. ابتدا نوبت فیزیک‌دان بود. او سرش را در جای مخصوص گذاشت و جلاد اهرم گیوتین را کشید. تیغه پایین آمد و در یک وجبی سر او ایستاد! جلاد گفت: «این از شــانس تو بوده است. پس آزاد هستی و می‌توانی بروی!»

فیزیک‌دان گفت: «شانس در کار نیست. ایـن از نیروی اصطکاک سرچشــمه گرفت کــه باعث توقف تیغه در ریل آن شــد» و با خوش‌حالی منتظر سرنوشت دوستانش شد.

بعد نوبت شیمی‌دان شد. او هم سرش را در جای مخصوص گذاشــت و جلاد اهرم را کشید و تیغه پایین آمد. اما باز در یک وجبی ســر او ایســتاد! جلاد گفت: «تو هم شانس آوردی. پس می‌توانی بروی!»

شیمی‌دان گفت: «شانسی در کار نیست. این به‌خاطر فعل و انفعال شیمیایی است که سبب زنگ زدن تیغه و گیر کردن آن در ریل شد.» و با خوش‌حالی منتظر سرنوشت ریاضی‌دان نشست.

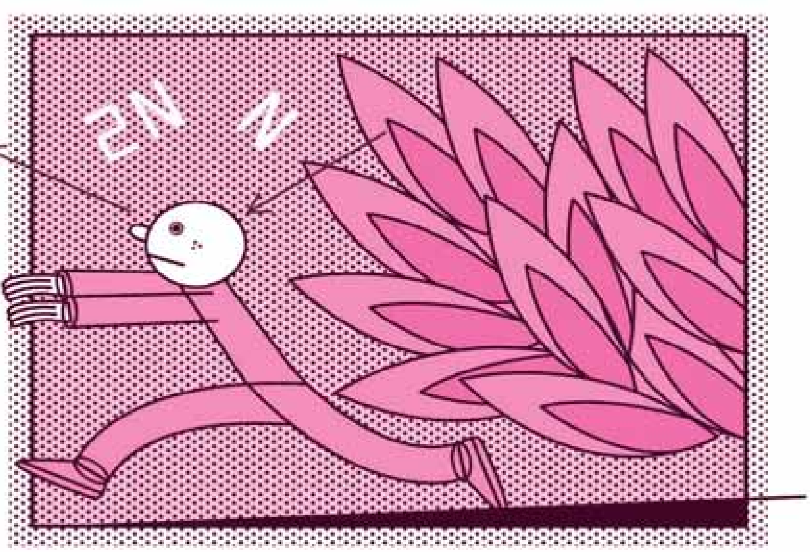
ریاضی‌دان به‌طرف گیوتین رفت و کمی مکث کــرد. ابتدا بادقت به تیغه نگاه کرد و بعد فریاد زد: «یافتم! اشکال هیچ یک از این‌ها نبود»، و یک تکه سنگریزه را از ریل حرکت تیغه بیرون آورد و گفت: اشــکال از اینجاســت. حالا می‌توانی کارت را به‌درستی انجام دهی!»

لطیفهٔ دوم

در شهری دوردست به نام «ناکجا آباد» قرار بود کنفرانس بســیار عظیمــی دربارهٔ ریاضیات برگزار شود. بی‌نهایت ریاضی‌دان در این کنفرانس شــرکت کرده بودند و دو هتل در دو طرف خیابان محل برگزاری کنفرانس پذیرای شــرکت‌کنندگان بود. از قضا هتل‌ها هم که متعلق به دو بــرادر بودند، گنجایش بی‌نهایت مهمان را داشتند! مهمان‌ها در این دو هتل مستقر شدند، ولی درست در همان زمان که کنفرانس در حال برگزاری بود، یکی از هتل‌ها کاملاً در آتش سوخت و از بین رفت!

حالا نیمی از شرکت‌کنندگان بدون جا مانده بودند. چاره چه بود؟

یکــی از شــرکت‌کنندگان در کنفرانس که ریاضی‌دان بزرگی بود، راه‌حلی پیدا کرد: همهٔ مهمانانی را که در هتل ســالم هستند، تغییر اتاق بدهند. به این صورت که هرکسی که در اتاق شــمارهٔ n ساکن اســت، به اتاق شــمارهٔ ۲n تغییر جا بدهد. مثلاً مهمان اتاق ۱۰۱ بــه اتاق ۲۰۲ و مهمــان اتاق ۳۴۵، به اتــاق ۶۹۰، و... بــرود. حالا تمــام اتاق‌های دارای شــمارهٔ فــرد خالی می‌شــوند و بقیهٔ مهمان‌هــا را بــه این اتاق‌هــا منتقل کنید!



واریانس جملات دنبالهٔ حسابی

اشاره

با توجه به فرمول پیچیدهٔ واریانس (انحراف معیار) که استفاده از آن برای داده‌های زیاد، مثلاً n داده، وقت‌گیر و طاقت‌فرساست، اگر حالت خاصی از داده‌ها که از نظم خاصی پیروی کنند (تشکیل دنباله حسابی دهند) را در نظر بگیریم، یک فرمول ساده و جالب برای به‌دست آوردن واریانس وجود دارد که به اثبات آن می‌پردازیم.

مسلم نادری
دبیر ریاضی آموزش‌وپرورش استان کرمانشاه منطقه ثلاث باباجانی

هرگاه n دادهٔ آماری داشته باشیم، به‌طوری که این داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d دهند، میانگین و انحراف معیار آن با استفاده از فرمول‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_n}{۲}\quad,\quad \sigma=d\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}$$

اثبات: n دادهٔ زیر که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d می‌دهند را در نظر می‌گیریم:

$a, a+d, a+۲d, a+۳d, ..., a+(n-۱)d$

ابتدا مجموع این داده‌ها را با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی، به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$S_n=\frac{n}{۲}(a+a_n)=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$$

$$\bar{x}=\frac{x_۱+...+x_n}{n}=\frac{n(a+a_n)}{۲n}=\frac{(a+a_n)}{۲}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{(a+a_n)}{۲}$$

$$\bar{x}=\frac{(۲a+(n-۱)d)}{۲}=a+\frac{(n-۱)}{۲}d \quad (۱)$$

می‌دانیم فرمول واریانس که در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده به‌صورت زیر است و با جاگذاری (۱) به‌جای میانگین داریم:

$$\sigma^۲=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(x_k-\bar{x})^۲=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(x_k-(a+\frac{(n-۱)d}{۲}))^۲$$

با توجه به فرمول $x_k=a+(k-۱)d$ داریم:

$$=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(a+(k-۱)d-(a+\frac{(n-۱)d}{۲}))^۲$$

$$=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}((k-۱)d-\frac{(n-۱)d}{۲})^۲$$

$$=\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}d^۲((k-۱)-\frac{(n-۱)}{۲})^۲=\frac{d^۲}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱}(k-\frac{(n-۱)}{۲})^۲$$

$$=\frac{d^۲}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱}[k^۲-۲k\frac{(n-۱)}{۲}+(\frac{n-۱}{۲})^۲]$$

$$=\frac{d^۲}{n}[\sum_{k=۰}^{n-۱}k^۲-(n-۱)\sum_{k=۰}^{n-۱}k+n\frac{(n-۱)^۲}{۴}]$$

می‌دانیم مجموع مجذورات n عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{n}k^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

و مجموع n عدد طبیعی متوالی برابر است با: $\sum_{k=۱}^{n}k=\frac{n(n+۱)}{۲}$. بنابراین:

$$=\frac{d^۲}{n}[\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶}-(n-۱)(\frac{(n-۱)n}{۲})+\frac{n(n-۱)^۲}{۴}]$$

$$=d^۲[\frac{(n-۱)(۲n-۱)}{۶}-\frac{(n-۱)^۲}{۲}+\frac{(n-۱)^۲}{۴}]$$

$$=d^۲(n-۱)[\frac{۴n-۲-۶n+۶+۳n-۳}{۱۲}]=d^۲(n-۱)\frac{(n+۱)}{۱۲}$$

$$=\frac{d^۲(n^۲-۱)}{۱۲}\Rightarrow\sigma^۲=\frac{d^۲(n^۲-۱)}{۱۲}$$

$$\Rightarrow\sigma=d\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}$$

مثال: میانگین و واریانس داده‌های آماری زیر را به‌دست آورید:

۲,۵,۸, ..., ۸۹

حل: داده‌های فوق جملات دنبالهٔ $a_n=۳n-۱$ و $n\leq۳۰$ هستند. بنابراین به کمک دستور فوق داریم:

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_n}{۲}=\frac{۲+۸۹}{۲}=۴۵/۵$$

$$\sigma=d\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}=۳\sqrt{\frac{۸۹۹}{۱۲}}$$

گزارشی از

مسابقهٔ شهر ریاضی

شهر مشهد ـ استان خراسان رضوی

دکتر مجید میرزاوزیری
استاد گروه ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

مشـــکلاتی که در شیوهٔ ســـنتی تدریس و آزمون‌های مدرسه‌ای وجود دارند، غالباً باعـــث کاهش انگیزهٔ دانش‌آموزان بـــرای تحصیل و به‌خصوص علاقه‌مندی آنان به درس ریاضی شـــده است. وجود مشکلات عدیدهٔ مرتبط با آزمون‌های پایان ســـال‌های تحصیلی و از همه مهم‌تر آزمون ورودی دانشگاه‌ها (کنکور سراسری) و حتی المپیادهای ریاضی باعث انجام مجموعه پژوهش‌هایی شـــد که در نهایت به تعریف و تدوین مسابقه‌ای به‌نام «شهر ریاضی» انجامید. در اینجا به معرفی مختصر این مسابقه می‌پردازیم.

تاریخچه

این مسابقه از حدود سال ۱۳۸۶ با ایده گرفتن از کتـــاب «با ذره تا بی‌نهایت مهر[۱]» و با عنوان «مسابقهٔ ریاضی‌دانان جوان» در دبیرستان‌های مشهد برگزار شد. پس از چند سال این مســـابقه برای مدارس راهنمایی و نیز در شهرهای دیگر استان خراسان رضوی هم به اجرا درآمد. از حدود سال ۱۳۸۸ آن را با عنوان «شـــهر ریاضی» در سطح کشور برگزار کردند و معروف شد. در سال ۱۳۹۲ مسابقهٔ شـــهر ریاضی در دانشگاه استنفورد آمریکا معرفی شد و مورد استقبال استادان آن دانشگاه قرار گرفت.

مزایا

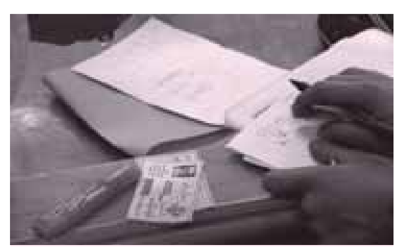
- امـــکان یادگیـــری حل مســـائل از دیگر شرکت‌کنندگان در حین مسابقه.
- افزایـــش تصاعـــدی امتیاز حل مســـائل متناسب با گذشت زمان.
- تجربهٔ انجام کار تیمـــی و مدیریتی برای شرکت‌کنندگان.
- هیجان و نشـــاط در تمام لحظات شرکت در مسابقه.
- امـــکان شـــرکت در مســـابقه به‌صـــورت خانوادگی.
- ایجـــاد علاقه به ریاضـــی در دانش‌آموزان متوسط به پایین.
- امکان استفاده از منابع علمی، و کتاب‌ها و سایت‌های اینترنتی در طول مسابقه.

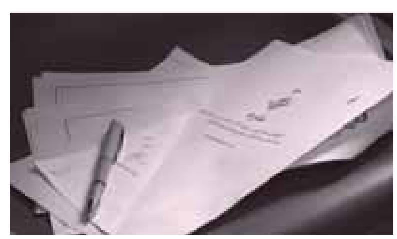
جوایز

در سال‌هایی که مسابقه برگزار شده، جوایز ارزشمندی، از جمله لوح تقدیر از طرف دانشگاه فردوسی مشهد، مدال، هارددیسک، تبلت، جایزهٔ نقدی (تا سقف ۱۵ میلیون ریال) و... به شرکت‌کنندگان اهدا شده است. علاوه بر آن، برندگان نهایی این مسابقه غالباً در مسابقات کشوری و جهانی درخشیده‌اند و هم‌اکنون در دانشگاه‌های معتبر دنیا مشغول به تحصیل هستند.

شیوه‌نامهٔ اجرایی

با توجه به توضیحات بخش قبل و ایده‌ای که در کتاب با *ذره تا بی‌نهایت مهر* آمده بود، طرحی برای مسابقه‌ای ریاضی تهیه گردید که مورد استقبال دانش‌آموزان نیز قرار گرفت[۲]. تجربهٔ برگزاری مسابقه در چهار سال متوالی در مدارس راهنمایی و دبیرستان‌های شهر مشهد و برخی شهرستان‌های استان، و همچنین تجربهٔ برگزاری این مسابقه در سطحی وسیع‌تر در نمایشگاه هفتهٔ پژوهش سال ۱۳۹۰ با همکاری مرکز پژوهشی *شیوه‌های آموزش ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد*، باعث شد تا قوانین این مسابقه به پختگی مطلوب خود برسد و ایرادات آن برطرف شود. آنچه در ادامه می‌آید ملزومات مورد نیاز برای برگزاری مسابقه و قوانین اجرای آن است.





۱. وسایل لازم

این مسابقه با حداقل ۲۵ تیم سه‌نفری در فضایی به مساحت حدود ۱۵۰ مترمربع قابل اجراست. فضای موردنیاز برای مسابقه برای تعداد تیم‌های بیشتر به‌همین نسبت افزایش خواهد یافت. نیروی اجرایی برای انجام مسابقه، تیمی چهار تا شش‌نفری است که با افزایش تیم‌های شرکت‌کننده به‌همین میزان افزایش می‌یابد. هیچ‌گونه وسیله‌ای برای انجام مسابقه لازم نیست مگر سه میز کوچک و شش صندلی.

۲. قوانین مسابقه

- هر تیم شامل سه نفر است که یکی از افراد به‌عنوان سرپرست تیم به کمیته برگزاری مسابقه معرفی خواهد شد. تیم‌ها می‌توانند یک نام نیز برای خود انتخاب کنند.
- در ابتدای مسابقه از طرف کمیتهٔ برگزاری مسابقه ۹۰۰ امتیاز به سرپرست هر تیم داده می‌شود.
- اعضای تیم پنج دقیقه فرصت دارند تا با یکدیگر برای خرید سؤال مشورت کنند. پس از آن سرپرست تیم باید به کمیتهٔ برگزاری مسابقه مراجعه کند و سؤال بخرد. سؤال‌ها از سه نوع ساده (۱۰۰ امتیازی)، متوسط (۳۰۰ امتیازی) و سخت (۵۰۰ امتیازی) هستند. در ۴۰ دقیقهٔ اول هیچ تیمی نمی‌تواند بیش از پنج سؤال از یک نوع بخرد.
- تیم‌ها حق ندارند روی برگه‌های سؤال چیزی بنویسند یا آن‌ها را تا کنند.
- در صورتی‌که سؤال حل شود، سرپرست تیم وظیفه دارد پاسخ را به کمیتهٔ برگزاری اعلام کند. البته او می‌تواند شخص دیگری از تیم خود را برای پاسخ دادن معرفی کند. اگر حل سؤال توسط داور درست تشخیص داده شود، دو برابر ارزش سؤال به سرپرست تیم تحویل داده می‌شود.
- در صورتی‌که تیمی سؤالی را دریافت کند و نتواند آن را حل کند، می‌تواند آن را به کمیتهٔ برگزاری یا تیم دیگری بفروشد. قیمت سؤال با توافق طرفین خواهد بود. در هر صورت مبلغ سؤال فروخته شده باید به اطلاع کمیتهٔ برگزاری برسد.
- تیم‌ها می‌توانند حل سؤال را به تیم‌های دیگر بفروشند. قیمت حل سؤال با توافق سرپرست‌ها تعیین می‌شود.
- به‌دلیل تورم، به ازای هر ۴۰ دقیقه ارزش سؤال‌ها به دو برابر ارزش قبلی آن افزایش خواهد یافت. زمان تغییر ارزش براساس تورم، توسط کمیتهٔ برگزار کننده به اطلاع شرکت‌کنندگان خواهد رسید.
- سرپرستان تیم‌ها می‌توانند امتیازهای اضافی خود را به‌طور امانت نزد کمیته برگزاری قرار دهند. در این صورت در ازای هر ۱۰ دقیقه ۱۰ درصد به مبلغ امانت گذاشته شده اضافه خواهد شد. مبلغ امانت گذاشته شده مشمول قانون تورم نمی‌شود.
- سرپرستان تیم‌ها می‌توانند تا دو برابر موجودی نهایی خود وام دریافت کنند. برای بازپرداخت وام به ازای هر ۱۰ دقیقه ۱۰ درصد سود دریافت خواهد شد.
- هیچ تیمی حق ندارد خارج از دلایل فوق امتیازهای خود را به تیم دیگری واگذار کند.
- زمان پایان مسابقه توسط کمیتهٔ برگزاری اعلام خواهد شد. پس از آن نه پاسخی پذیرفته می‌شود و نه سؤالی پس‌گرفته می‌شود. بنابراین بعد از اعلام پایان مسابقه، سؤال‌ها و پاسخ‌هایی که نزد تیم‌ها باقی مانده باشند، از بین می‌روند و هیچ‌گونه امتیازی به آن‌ها تعلق نخواهد گرفت.
- استفاده از تلفن همراه در طول مسابقه ممنوع است، اما تیم‌ها می‌توانند از کتاب، جزوه و ماشین‌حساب استفاده کنند.
- در صورتی‌که تیمی قوانین مسابقه را رعایت نکند، توسط کمیتهٔ برگزاری از مسابقه حذف خواهد شد.
- تیم‌ها می‌توانند اعتراض خود را به نظر داور یا کمیتهٔ برگزاری، توسط سرپرست خود به «کمیتهٔ ناظر» مسابقه اطلاع دهند. تصمیم‌گیری نهایی در مورد اعتراض با کمیتهٔ ناظر است.

● ایـــن مســـابقه زیرنظر «مرکز پژوهشـــی شیوه‌های آموزش ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد» انجام می‌شود و هرگونه کپی‌برداری از آن ممنوع است.

نتایج برگزاری

دانش‌آموزانی که علاقهٔ چندانی به شـــرکت در مسابقه‌های علمی از خود نشان نمی‌دادند، از جمله افرادی هستند که در این چند سال پیگیر برگزاری مسابقه‌اند و به دنبال منابعی برای قوی‌تر کردن خود برای شـــرکت در مسابقه می‌گردند. کسانی که در این مسابقه شرکت می‌کنند، انگیزهٔ بالایی برای مطالعهٔ بیشتر یافته‌اند، در طول مسابقه حل بســـیاری از سؤالات ریاضی را یاد می‌گیرند، شیوه‌های یادگیری یک مطلب علمی را با دوستان خود تجربه می‌کنند و با مطالب ریاضی استدلالی از نوعی که بیشتر در دوره‌های دانشگاهی آموزش داده می‌شوند، آشنا می‌شوند. آن‌ها تجربهٔ حضور در محیط‌های دانشگاهی را پیدا می‌کنند و رغبت بیشتری برای آماده‌سازی خود به منظور ورود به دانشگاه‌های ردهٔ بالاتر نشان می‌دهند.

از سوی دیگر، کســـانی که در این مسابقه رتبه‌های خوبی را کسب می‌کنند، معمولاً همان افرادی هستند که در مسابقه‌های استانداردی که در سطح کشوری نیز برگزار می‌شوند، رتبه‌های خوبی به‌دســـت می‌آورند. این نشان می‌دهد که مسابقه جدا از ایجاد هیجان و انگیزه، در یادگیری ریاضی به شکلی قابل قبول می‌تواند دانش‌آموزان توانمنـــد را بیابـــد. این موضوع البتـــه از اهداف مسابقه نبوده است، اما خوش‌حالیم که الگوهای ما در این مســـابقه بر آنچه در معیارهای عمومی آزمون‌های سنجش استعداد تحصیلی مورد توجه است، منطبق شده و نزدیکی قابل‌قبولی با نتایج آزمون‌های سراسری دارد.

آنچه امروزه در نظام آموزشی کشور در مورد حذف کنکور و آزمون‌های ورودی مشابه مطرح می‌شـــود، نتیجهٔ بحث‌های کارشناسی در مورد عـــدم موفقیت این‌گونه آزمون‌هاســـت و همین موضوع نشـــان می‌دهد که شـــیوهٔ موجود برای انتخاب نخبگان و افراد مســـتعد چندان مقبول طبع صاحب‌نظران قرار نگرفته است. حذف یکبارهٔ کنکور و جایگزینی معدل به‌جای آن، بدون توجه به پیشینهٔ علمی دانش‌آموزان، می‌تواند موجب وارد شدن خســـارات دیگری شود و شاید دلیل تعلل در حذف کنکور همین نکتهٔ مهم باشد.

ما گمـــان می‌کنیم، آنچه باعث می‌شـــود که این تصمیم به‌صورتی کارشناسانه‌تر گرفته شـــود، آن اســـت که افراد زبده، دانشـــگاهی، تحصیل‌کـــرده و پژوهشـــگر در زمینهٔ آموزش و سنجش اســـتعداد تحصیلی، از گوشه و کنار وارد کار شـــوند و در یک بازهٔ زمانی چند ساله، روش‌هایـــی را برای بهبود این تصمیم آزمایش کنند. انجام مسابقات علمی زیر نظر دانشگاه‌ها برای دانش‌آموزان، شـــاید بهترین ضامن برای صحت این روش‌های بهبودیافته باشـــد. نتایج برگزاری مسابقهٔ شهر ریاضی نشان می‌دهد که ما به آنچه انجام می‌دهیم، واقفیم و افقی دورتر را در به ثمر رساندن این بازی به ظاهر کودکانه و هیجان‌انگیز مدنظر داریم.

امید اســـت بـــا حمایت مســـئولانی که دستی در هدایت کشـــتی علم دارند و درایت دانش‌آموختگانی که برای به مقصد رســـیدن این کشتی دل می‌سوزانند، بتوانیم به نتیجه‌ای مطلوب برســـیم کـــه جز این، وظیفـــه‌ای نزد پروردگار متعال نداریم.

توجـــه: علاقه‌منـــدان بـــرای دریافت اطلاعات بیشتر دربارهٔ این مسابقه و نمونه سؤالات آن و فعالیت‌های دیگر نویسنده به نشـــانی اینترنتی زیر مراجعه کنند: mirzavaziri.ir/arithland/

پی‌نوشت‌ها

۱. مجید میرزاوزیری، انتشارات پارس سینا، چاپ ۱۳۷۸.
۲. این مسابقه با شکلی مشابه در دانشگاه صنعتی شریف نیز برگزار می‌شود؛ گرچه قوانین برگزاری آن تا حدودی متفاوت است.

پرسش‌های پیکارجو!

اگر باقی‌ماندهٔ تقسـیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $(x-1)^3$ برابر x^2+x+1 باشـد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $(x-1)^2$ کدام است؟

الف) $3x$ ب) $3x-1$ ج) $3x+1$ د) $3x-2$ هـ) $3x+2$

عکس قضیهٔ نیمساز و معرفی یک مکان هندسی

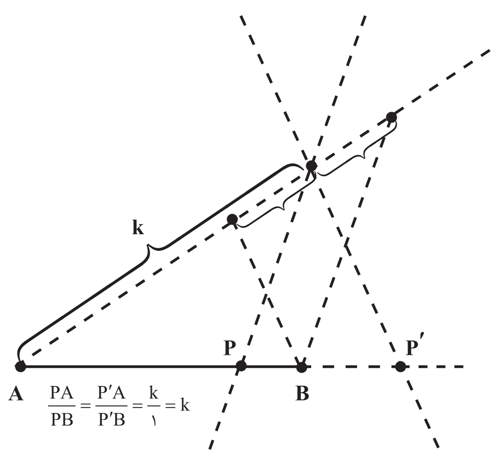
سیمین افروزان
دبیر ریاضی منطقهٔ ۲ تهران

مسئله: مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که نسبت فاصلهٔ این نقاط از دو نقطهٔ مفروض A و B: الف) برابر عدد معین k≠۱ باشد. ب) برابر یک باشد.

حل الف:

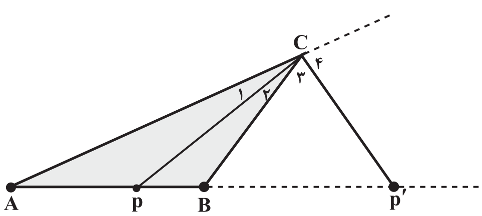
نکتهٔ ۱: روی پاره‌خط مفروض AB یک نقطه و در امتداد آن نیز تنها یک نقطه وجود دارد که نسبت فواصل آن‌ها به‌ترتیب از A و B به اندازهٔ معین k≠۱ است.

بنابراین نقاط منحصربه‌فرد P و ´P دو جواب از جواب‌های مسئله هستند که روی خط AB قرار دارند.

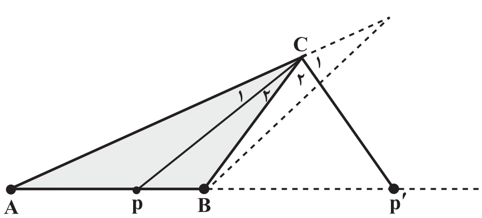


نکتهٔ ۲ (عکس قضایای نیم‌ساز داخلی و خارجی): اگر در مثلث ABC نقطه‌هایی مانند P و ´P روی ضلع AB و امتداد آن، قطعات متناسب با اندازهٔ اضلاع زاویهٔ C به‌وجود آورند، P پای نیم‌ساز زاویهٔ داخلی C و ´P پای نیم‌ساز زاویهٔ خارجی C است.

$$\frac{PA}{PB}=\frac{P'A}{P'B}=\frac{CA}{CB}=k\neq ۱\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}_۱=\hat{C}_۲\\ \hat{C}_۳=\hat{C}_۴\end{cases}$$

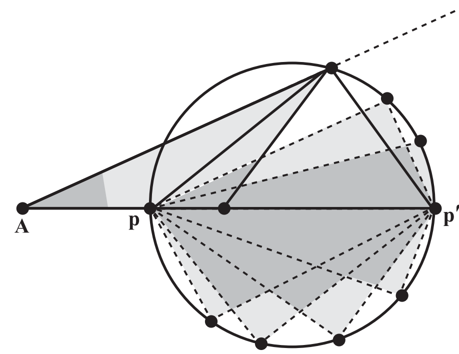


برهان: از نقطهٔ B خطی موازی CP رسم می‌کنیم تا امتداد AC را قطع کند. با استفاده از قضیهٔ خطوط موازی و فرض خواهیم داشت: $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$. بار دیگر از نقطهٔ B خطی موازی ´CP رسم می‌کنیم تا ضلع AC را قطع کند. به کمک قضیهٔ خطوط موازی و فرض: $\hat{C}_۳=\hat{C}_۴$.



بنابراین نقطه‌ای مانند C جواب دیگر مسئله است که روی خط AB نیست و با دو نقطهٔ A و B یک مثلث می‌سازد. همچنین P و ´P پای نیم‌سازهای داخلی و خارجی متناظر آن هستند. از آنجا که نیم‌ساز داخلی و خارجی متناظر یک زاویه برهم‌عمودند، پاره‌خط ´PP از نقطه C همواره به زاویهٔ ۹۰ درجه دیده می‌شود و

در نتیجـــه نقطهٔ C روی دایره‌ای به قطر ´PP قرار دارد (کمان درخور زاویهٔ ۹۰ درجه وابسته به پاره‌خط ´PP). این دایره موسوم به دایرهٔ **آپولونیوس**[1] است.
دایرهٔ آپولونیوس مکان هندسی موردنظر مسئله است.



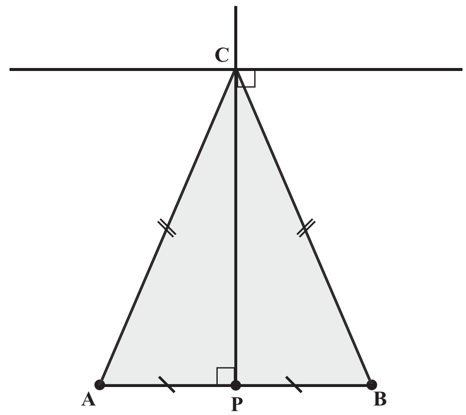
حل ب:

تنها یک نقطـــه روی خط AB مانند P در وســط پاره‌خط AB وجـــود دارد، به‌طوری که: $\frac{PA}{PB}=۱$. نقاط دیگری مانند C که روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند نیز جواب‌های دیگر مسئله هستند.

$$\frac{CA}{CB}=۱\Rightarrow CA=CB$$

پس عمودمنصف AB مکان هندسی موردنظر است.

اگر به قسمت ب به‌عنوان حالت خاصی از الف نگاه کنیم، نقطهٔ C رأس مثلث متساوی‌الســاقینی است که P پای نیم‌ســاز داخلی زاویهٔ C وســط ضلع AB قــرار دارد و نیم‌ساز خارجی متناظر C موازی AB است.



پی‌نوشت‌ها

1. Apollonins

منبع

اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷٦). هندسه‌های جدید. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.

آیا می‌دانستید که:
$\frac{۵}{۴}$ مردم دنیا با کسرهای متعارفی آشنایی ندارند؟!

پرسش‌های پیکارجو!

در یک گروه ۱۳۹۵ نفری، در هر دستهٔ ۴ نفری دلخواه، لااقل یک نفر هســت که سه نفر دیگر را می‌شناسد. حداقل چند نفر در این گروه وجود دارند که همهٔ دیگران را می‌شناسند؟ (رابطهٔ شناسایی دوطرفه است.)

الف) هیچ　　ب) ۳ نفر　　ج) ۱۳۹۲ نفر
د) ۱۳۹۳ نفر　　هـ) ۱۳۹۴ نفر

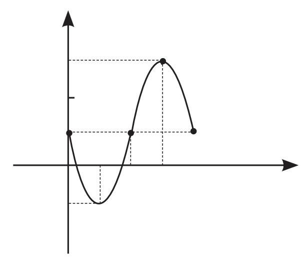
راهنمای حل مسائل

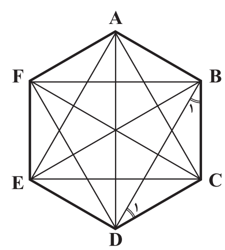
آمادگی برای آزمون‌های مستمر

۲ ریاضی

۱. $T=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$

x	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	3
y	1	-1	1	3	1
		min		max	





۲. در شش‌ضلعی منتظم روبه‌رو، شش قطر کوچک (AE, AC, ..., BF) و سه قطر بزرگ (AD, BF, CE) با هم برابرند. (چرا؟) بنابراین باید نسبت یکی از قطرهای بزرگ (مثلاً AD) را به یکی از قطرهای کوچک (مثلاً BF) به‌دست آوریم:

$\Delta ABF: \hat{A}=120^\circ, AB=AF=a$

$\Rightarrow BF^2=AB^2+AF^2-2AB.AF.\cos\hat{A}$

$=a^2+a^2-2a^2.\underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}}=3a^2 \Rightarrow BF=\sqrt{3}a$

$\hat{B}_1=\hat{D}_1=30^\circ \Rightarrow A\hat{B}D=90^\circ$

$\Rightarrow AD^2=AB^2+BD^2=a^2+3a^2=4a^2$

$\Rightarrow AD=2a \Rightarrow \frac{AD}{BF}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳. اگر حصارها را AE و CF بگیریم، داریم:

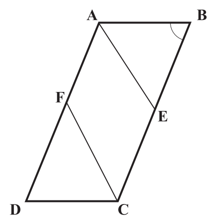
$\hat{B}=60^\circ, AB=100, AE=EC=CF=AF=x,$
$BE=300-x$

$\Delta ABE: AE^2=AB^2+BE^2-2AB.BE.\cos 60^\circ$

$\Rightarrow x^2=100^2+(300-x)^2-2(100)(300-x)\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2=10000+90000+x^2-600x-30000+100x$

$\Rightarrow 500x=70000 \Rightarrow x=140$



یعنی باید طول ضلع لوزی (طول حصار) ۱۴۰ متر باشد. برای یافتن مساحت باغچه می‌توان مساحت دو مثلث ABE و DFC را (که با هم برابرند) از مساحت متوازی‌الاضلاع کم کرد.

$S_{ABE}=\frac{1}{2}AB.BE.\sin\hat{B}=\frac{1}{2}\times100\times140\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3500\sqrt{3}$

(ارتفاع متوازی‌الاضلاع) $h=AD.\sin\hat{D}=300\times\frac{\sqrt{3}}{2}=150\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=h\times DC=15000\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{AECF}=15000\sqrt{3}-2(3500\sqrt{3})=8000\sqrt{3}$

۱ هندسهٔ

۱. اگر ابعاد مکعب مستطیل a، b و c باشند، طبق فرض داریم:

$\sqrt{a^2+b^2}=2, \sqrt{a^2+c^2}=2\sqrt{2}, \sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{6}$

$\Rightarrow a^2+b^2=4, a^2+c^2=8, b^2+c^2=6$

و با جمع زدن طرفین این سه تساوی خواهیم داشت:

$2(a^2+b^2+c^2)=18 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=9$

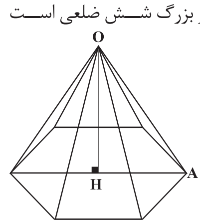
$\Rightarrow d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3$

۲. $h=10, S=2\pi r^2+2rh=112\pi \Rightarrow r^2+10r=56,$

$r^2+10r-56=0 \Rightarrow (r+14)(r-4)=0 \Rightarrow r=4$

$V=\pi r^2h=\pi\times16\times10=160\pi$

۳. مساحت قاعده از دستور $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ مساوی $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن ارتفاع هرم توجه می‌کنیم که پای ارتفاع، مرکز شش ضلعی است (نقطهٔ H) و AH نصف قطر بزرگ شش ضلعی است



که مساوی 2a است (به حل مسئلهٔ ۲ از بخش ریاضی ۲ همین شماره توجه کنید). بنابراین: AH=a=1 و با توجه به قضیهٔ **فیثاغورس** در مثلث OAH داریم:

$OH^2=OA^2-AH^2=(\sqrt{2})^2-1=1 \Rightarrow OH=1$

$V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲ هندسهٔ

۱. $T(x,y)=(-2x,y+1)=(X,Y)$

$\Rightarrow x=-\frac{X}{2}, y=Y-1, y=2x+1$

$\Rightarrow Y-1=2(-\frac{X}{2})+1 \Rightarrow L': Y=-x+2$

۲. هر بردار که مبدأ آن روی L_1 و انتهای آن روی L_2 باشد، می‌تواند بردار این انتقال باشد. بنابراین سه جفت نقطهٔ دلخواه روی L_1 و L_2 در نظر می‌گیریم و برداری را که هر دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند، می‌کشیم و انتقال نظیر آن را می‌نویسیم. برای مثال، $A(0,-3)$ روی L_1 و $B(4,0)$ روی L_2:

$\overrightarrow{AB}=(4,3) \Rightarrow T_1(x,y)=(x+4,y+3)$

دو انتقال دیگر را به همین روش بنویسید.

۳. دو نقطهٔ دلخواه A و B، مثلاً $A(0,0)$ و $B(1,0)$ را در نظر می‌گیریم:

$AB=1$ و $T(A)=A'(0,0)$ و $T(B)=B'(\frac{a}{5},-\frac{4}{5})$

$A'B'=\sqrt{\frac{a^2}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{a^2+16}{25}}=1$

$\Rightarrow a^2+16=25 \Rightarrow a=\pm3$

حسابان

۱. با فرض $\sin^{-1}(\frac{3}{5})=\alpha$ نتیجه می‌شود: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و ما مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$ را می‌خواهیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2\tan\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

با توجه به اتحاد $1+\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 3\tan^2\frac{\alpha}{2}-10\tan\frac{\alpha}{2}+3=0$$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=3$ یا $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$

اما با توجه به اینکه: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$، در نتیجه: $\tan\frac{\alpha}{2}<1$ و لذا پاسخ $\tan\frac{\alpha}{2}=3$ غیرقابل قبول است. بنابراین:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

۲.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{k(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3-4)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{k(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=k$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{k[2x]+2x}{k+[x]}=\frac{k+2}{k}$$

و برای آنکه f در x=۱ حد داشــــته باشد، لازم است که حد راست و حد چپ آن در این نقطه با هم برابر باشند:

$$\frac{k+۲}{k}=k \Rightarrow k^{۲}-k-۲=۰$$
$$\Rightarrow (k-۲)(k+۱)=۰ \Rightarrow k=۲ \text{ یا } k=-۱$$

۳.
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin ۳x-۶\sin x}{۲\sin ۲x\cos ۴x-\sin ۴x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲(۳\sin x-۴\sin^{۳} x)-۶\sin x}{۲\sin ۲x\cos ۴x-۲\sin ۲x\cos ۲x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۸\sin^{۳} x}{۲\sin ۲x(\cos ۴x-\cos ۲x)}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۴\sin^{۳} x}{\sin ۲x(-۲\sin ۳x\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۴(\frac{\sin x}{x})^{۳}.x^{۳}}{-۲(\frac{\sin ۲x}{۲x})(\frac{\sin ۳x}{۳x})(\frac{\sin x}{x}).۶x^{۳}}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۴x^{۳}}{-۱۲x^{۳}}=\frac{۱}{۳}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. مشتق تابع را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

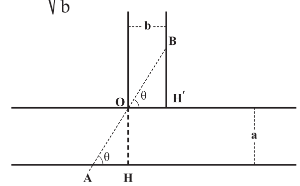
$$y=\tan^{-۱} u \Rightarrow y'=\frac{u'}{۱+u^{۲}}$$
$$y=\tan^{-۱}(e^{۲x}) \Rightarrow y'=\frac{۲e^{۲x}}{۱+e^{۴x}}$$
$$x_۰=\text{Ln}\sqrt[۴]{۳}=\frac{۱}{۴}\text{Ln}۳$$
$$\Rightarrow e^{۲x_۰}=e^{\frac{۱}{۲}\text{Ln}۳}=(e^{\text{Ln}۳})^{\frac{۱}{۲}}=۳^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳},$$
$$e^{۴x_۰}=e^{\text{Ln}۳}=۳ \Rightarrow y'(x_۰)=\frac{۲\sqrt{۳}}{۱+۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow m=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$f(x_۰)=f(\text{Ln}\sqrt[۴]{۳})=\tan^{-۱}(e^{\frac{۱}{۲}\text{Ln}۳})=\tan^{-۱}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۳}$$
$$y-\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(x-\text{Ln}\sqrt[۴]{۳})$$
$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x-\frac{\sqrt{۳}}{۸}\text{Ln}۳+\frac{\pi}{۳}$$

۲.
$$f'(\frac{\pi}{۲})=۰ \Rightarrow f'(x)=۲\sin x\cos x-a\sin x=۰$$
$$\Rightarrow \sin ۲x=a\sin x \Rightarrow \sin\pi=a\sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow a=۰$$
$$f(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^{۲}\frac{\pi}{۲}+a\cos\frac{\pi}{۲}+b=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

۳. طول قایق: AB=L

L=OA+OB

$$\sin\theta=\frac{OH}{OA}=\frac{a}{OA} \Rightarrow OA=\frac{a}{\sin\theta}$$
$$\cos\theta=\frac{OH'}{OB}=\frac{b}{OB} \Rightarrow OB=\frac{b}{\cos\theta}$$
$$L=\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta} \Rightarrow L'=\frac{-a\cos\theta}{\sin^{۲}\theta}+\frac{b\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}=۰$$
$$\Rightarrow a\cos^{۳}\theta=b\sin^{۳}\theta \Rightarrow \tan^{۳}\theta=\frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \tan\theta=\sqrt[۳]{\frac{a}{b}}$$



با داشــتن مقدار tanθ، مقادیــر sinθ و cosθ و از آنجا مقدار ماکزی‌مم L را به‌دست آورید.

سؤالات جبر و احتمال

۱. فضای نمونه‌ای برای این آزمایش تصادفی ۴=۲×۲ عضو دارد و تعداد اعضای پیشــامد مطلــوب (حداقل یک بار پشت) ۳ حالت است.

۲. الف) $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ که n(A)=۱۰ و n(S)=۴۵

ب) در این قسمت، چون ۲ مهره به تصادف برمی‌داریم، پس $n(S)=\binom{۴۵}{۲}$ و $n(A)=\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۲۰}{۱}$ است.

۳. هربار که تاس ریخته شود، احتمال اینکه فرد باشد $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ است. لذا با توجه به این که آزمایش موردنظر ۱۵ بار تکرار شده و در هر بار احتمال فرد آمدن $\frac{۱}{۲}$ است، برای یافتن احتمال اینکه ۶ بار فرد بیاید، از احتمال دو جمله‌ای استفاده کنید.

ریاضیات گسسته

۱. ابتدا از گل نوع دوم ۲ شـــاخه و از گل نوع ســـوم ســـه شـــاخه برمی‌داریم. گل نوع ســـوم را کنـــار می‌گذاریم. ۷=۵-۱۲ و سپس ۷ گل باقی‌مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم. تعداد این انتخاب‌ها $\binom{۱۰}{۳}$ است.

۲. با شرایط داده شـــده در مسئله، فقط ســـه جواب به این صورت برای معادله حاصل می‌شود:

$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
۲	۴	۲
۲	۵	۱
۳	۴	۱

۳. وقتی سه تاس ریخته می‌شـــود، $n(S)=۶^{۳}=۲۱۶$ است و برای محاســـبهٔ تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد سه تاس کمتر از ۱۶ است، از متمم این پیشامد، یعنی اینکه مجموع اعداد سه تاس بزرگ‌تر یا مساوی ۱۶ باشد، استفاده می‌کنیم. حالت‌های زیر برای متمم به دســـت می‌آیند:
(۶,۶,۶),(۶,۶,۵),(۶,۵,۶),(۵,۶,۶),(۶,۶,۴),(۶,۴,۶),
(۴,۶,۶),(۵,۵,۶),(۵,۶,۵),(۶,۵,۵)

ریاضیات ۳ (علوم‌تجربی)

۱. اگـــر فـــرض کنیم $P(x)=x^{۳}+۲ax^{۲}-bx+۴$ طبق فرض باید P(۱)=۰ و P(-۱)=۱۲ یعنی باید ۲a-b=-۵ و ۲a+b=۹ که از آنجا a=۱ و b=۷ به‌دست می‌آید.

۲. الف) از $x^{۲}$ در صورت و در مخرج فاکتور می‌گیریم و x را به سمت ∞+ میل می‌دهیم. حاصل حد $\frac{۳}{۱۰}$ به‌دست می‌آید.

ب) صـــورت و مخـــرج را ابتدا در مـــزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شـــود. سپس (x-۲) را از صورت و مخـــرج حذف می‌کنیم و در نهایت x را به ســـمت ۲ میـــل می‌دهیـــم. در نهایت بـــه عدد ۳۲- می‌رســـیم.

۳. چـــون f(-۲)=۶، پـــس بـــــاید $\lim_{x\to -۲^{+}} f(x)=۶$ و $\lim_{x\to -۲^{-}} f(x)=۶$ که در این صـــورت a=-۱ و $b=-\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید.

پاسخ پرسش‌های پیکارجو!

۱. روشن است که p≠۲ و در نتیجه p عددی فرد است. اما همچنین داریم: $۲^p \overset{۳}{\equiv} (-۱)^p = -۱$. حال اگر p مضرب ۳ نباشد، داریم: p=۳k±۱ و در نتیجه: $p \overset{۳}{\equiv} \pm۱$ و $p^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱$ و $q = p^۲ + ۲^p \overset{۳}{\equiv} ۰$ و لذا q مضرب ۳ است. پس q=۳ و در نتیجه p=۱ که غیرقابل قبول است. پس باید p مضرب ۳ باشد و در نتیجه p=۳. از آنجا داریم: q=۱۷ که تنها جواب قابل قبول است (گزینهٔ ب).

۲. با قرار دادن n=۲,۳,۴,... در رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

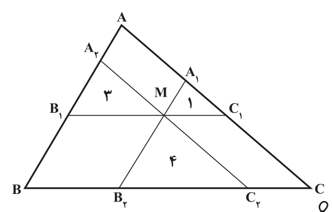
$$n = ۲ : a_۲a_۱ + ۱ = ۲a_۱ \Rightarrow a_۲ = \frac{۲a_۱ - ۱}{a_۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$n = ۳ : a_۳a_۲ + ۱ = ۲a_۲ \Rightarrow a_۳ = \frac{۲a_۲ - ۱}{a_۲} = \frac{۴}{۳}$$

$$n = ۴ : a_۴a_۳ + ۱ = ۲a_۳ \Rightarrow a_۴ = \frac{۲a_۳ - ۱}{a_۳} = \frac{۵}{۴}$$

و به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی می‌توانید ثابت کنید: $a_n = \frac{n+۱}{n}$ (انجام دهید!) و در نتیجه: $a_{۱۳۹۵} = \frac{۱۳۹۶}{۱۳۹۵}$ (گزینهٔ د).

۳. واضح است که سه مثلث فوق با مثلث اصلی (ABC) متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت هر یک از آن‌ها به مساحت مثلث اصلی، توان دوم نسبت تشابه آن‌هاست:



$$(\frac{S_{MA_۱C_۱}}{S_{ABC}}) = (\frac{MC_۱}{BC})^۲, (\frac{S_{MA_۲B_۱}}{S_{ABC}}) = (\frac{MB_۱}{BC})^۲,$$

$$(\frac{S_{MB_۲C_۲}}{S_{ABC}}) = (\frac{B_۲C_۲}{BC})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_{MA_۱C_۱}}}{\sqrt{S_{ABC}}} + \frac{\sqrt{S_{MA_۲B_۱}}}{\sqrt{S_{ABC}}} + \frac{\sqrt{S_{MB_۲C_۲}}}{\sqrt{S_{ABC}}}$$

$$= \frac{MC_۱ + MB_۱ + B_۲C_۲}{BC} = \frac{C_۲C + B_۲B + B_۲C_۲}{BC}$$

$$= \frac{BC}{BC} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{S}} + \frac{۲}{\sqrt{S}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{S} = ۳ + \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S = (۳ + \sqrt{۳})^۲ = ۱۲ + ۶\sqrt{۳} = ۶(۲ + \sqrt{۳})$$ (گزینهٔ ج)

۴. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$p(x) = (x-۱)^۳ Q(x) + (x^۲ + x + ۱)$$
$$= (x-۱)^۲ . R(x) + ax + b$$

اگر در اتحاد بالا به‌جای x، ۱ قرار دهیم، نتیجه می‌شود: a+b=۳

و اگر از طرفین آن مشتق بگیریم و دوباره به‌جای x، ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

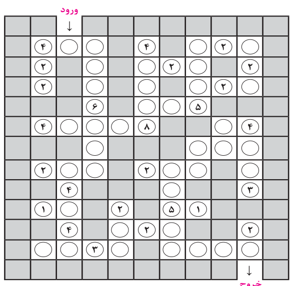
$$۳(x-۱)^۲ Q(x) + (x-۱)^۳ Q'(x) + ۲x + ۱$$
$$= ۲(x-۱)R(x) + (x-۱)^۲ R'(x) + a, x = ۱$$
$$\Rightarrow a = ۳,\ b = ۰$$

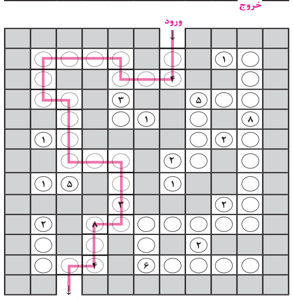
و باقی‌ماندهٔ تقسیم مساوی ۳x خواهد شد (گزینهٔ الف).

۵. فرض کنیم دو نفر مانند $P_۱$ و $P_۲$ در این گروه باشند که یکدیگر را نشناسند. حال دو نفر دلخواه دیگر مانند $P_۳$ و $P_۴$ را انتخاب می‌کنیم. باید این دو نفر یکدیگر را بشناسند (زیرا در غیر این صورت فرض مسئله نقض می‌شود)، اما ممکن است یکی از این دو نفر (مثلاً $P_۳$) نه $P_۱$ را بشناسد و نه $P_۲$ را. یعنی $P_۴$ است که هر سه نفر دیگر را می‌شناسد. پس در بدترین حالت $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ دوبه‌دو یکدیگر را نمی‌شناسند، ولی هر فرد دلخواه $P_۴$ هر سهٔ آن‌ها را می‌شناسد. بنابراین، تمام افراد گروه همدیگر و این سه نفر را می‌شناسند. لذا در بدترین حالت فقط سه نفر هستند که بقیه را نمی‌شناسند و ۱۳۹۲نفر هستند که همهٔ دیگران را می‌شناسند (گزینهٔ ج).

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول





ایستگاه دوم

الف) جواب: ۱۷. برای رسیدن به عدد هر خانه، کافی است خط راستی را که از آن خارج شده است، امتداد دهیم تا دایره را در نقطهٔ دوم برخورد، قطع کند. سپس در امتداد حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره حرکت کنیم و عددهای دو خانهٔ اول را با هم جمع کنیم.

ب) جواب: ۵۵. در واقع عدد هر خانه معرف مختصات آن خانه است! (رقم دهگان شمارهٔ ردیف و رقم یکان شمارهٔ ستون را مشخص می‌کند.)

ج) جواب: صفر. به الگوی زیر توجه کنید:

۹×۸=۷۲ و ۷۲×۸=۵۷۶ و ۵۷۶×۸=۴۶۰۸