زنده‌یاد جلیل‌الله قراگوزلو

(۱۳۹۳-۱۲۹۹)

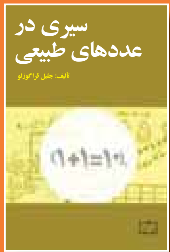
ریاضی‌دانان معاصر ایران

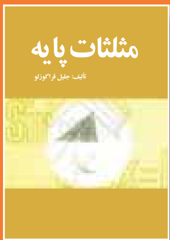
استاد **جلیل‌الله قراگوزلو** در مردادماه ۱۲۹۹ در شهرستان تفرش متولد شد. تحصیلات ابتدایی خود را در دبستان صفوی و تحصیلات متوسطه را در دبیرستان‌های علمیه و ایرانشهر گذراند. به دلیل علاقهٔ وافر به معلمی و آموزش ریاضی، برای ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی وارد دانش‌سرای عالی شد و از سال ۱۳۱۸ به کسوت معلمی ریاضی درآمد. وی تا سال ۱۳۲۴ در شهرستان‌های همدان، دزفول، شیراز و... به تدریس ریاضی پرداخت و سپس به تهران منتقل شد.

استاد در سال ۱۳۳۹ به کشور آمریکا اعزام شد و یک دورهٔ تکمیلی را در آنجا گذراند و در بازگشت در دانش‌سرای عالی به دستیاری زنده‌یادان پروفسور هشترودی و دکتر بهفروز منصوب شد. او در سال ۱۳۴۴ از خدمت بازنشسته شد و پس از آن در دانشگاه ملی سابق و چند مؤسسه عالی و دبیرستان به تدریس پرداخت.

زنده‌یاد قراگوزلو در زمینهٔ تألیف و ترجمهٔ کتاب‌های درسی و کمک‌درسی ریاضی ید طولایی داشت و در این زمینه کارنامهٔ پرباری از خود به‌جا گذاشته است. ایشان سال‌ها از همکاران دفتر تألیف کتاب‌های ریاضی و از مؤلفان کتاب‌های جبر و آنالیز و ریاضی جدید نظام قدیم آموزشی بود. علاوه بر آن، ده‌ها جلد کتاب را نیز که از بهترین و مشهورترین آثار ریاضی سال‌های اخیر بوده‌اند، ترجمه و تألیف کرده است که از آن جمله می‌توان به کتاب‌های «سیری در عددهای طبیعی»، «مثلثات پایه»، «آمار و احتمال»، «آنالیز و هندسهٔ تحلیلی» و ترجمهٔ کتاب «توپولوژی چیست؟» با مقدمه‌ای از استاد هشترودی اشاره کرد. استاد همچنین سال‌ها با مجلهٔ ریاضی یکان (به مدیرمسئولی زنده‌یاد عبدالحسین مصحفی) همکاری داشت و مقالات زیادی را در آن به چاپ رساند.

زنده‌یاد قراگوزلو از جملهٔ نخستین مطرح‌کنندگان و نظریه‌پردازان ریاضیات جدید در کشور ما بود و سال‌ها برای اشاعهٔ فرهنگ تغییر در ریاضیات سنتی ایران کوشید. این استاد فرزانه در تابستان سال ۱۳۹۳ و در سن ۹۴ سالگی در دیار غربت دار فانی را وداع گفت.





دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وچهارم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۸۹
■ دی ۱۳۹۴
■ شمارهٔ ۴
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور،
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی، محمدعلی قربانی، حسین کریمی، محمود داورزنی، احسان یارمحمدی
وبگاه:
www.roshdmag.ir
roshdmag:
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۵۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی‌عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:
شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:
نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هر پیروزی مقدمه‌ای برای پیروزی‌های دیگر است

بعد از امتحانات مستمر و کلاسی که در درس‌های ریاضی برگزار شده، حالا نوبت امتحانات پایان نیم‌سال اول است که از اهمیت بسیاری برخوردارند. از نظر معلم اهمیت موضوع در آن است که متوجه می‌شود دانش‌آموزان کلاسش در چه بخش‌هایی اشکال دارند تا در آغاز نیم سال دوم بیشتر به آن‌ها بپردازد. دیگر اینکه متوجه می‌شود، چه کسانی در کلاس، خوب درس خوانده و چه دانش‌آموزانی نسبت به بقیه کم کاری داشته‌اند تا به آن‌ها تذکر دهد و از آن‌ها بیشتر کار و تمرین طلب کند.

از نظر دانش‌آموز هم اهمیت موضوع تا حدی مشابه موارد فوق است.

اول اینکه دانش‌آموزان متوجه اشکالات و ایرادهای خودشان در کلاس درس می‌شوند و برای جبران آن در نیم‌سال دوم می‌کوشند. دوم اینکه به کم‌کاری‌ها و یا شیوه‌های مطالعۀ نامناسب خود پی می‌برند و سعی می‌کنند مدیریت زمان و روش‌های خود را بهبود بخشند. در واقع، لزوم برنامه‌ریزی دقیق و کاربردی را در مسیر آموزش خود احساس می‌کنند.

نکتۀ بسیار مهمی که باید مورد توجه خاص شما دانش‌پژوهان عزیز قرار بگیرد آن است که شما همواره باید روی نقاط قوت خودتان تمرکز داشته باشید، نه روی نقاط ضعف! اگر شما در درسی یا موضوعی از یک درس موفق بوده‌اید، به دنبال دلایل این موفقیت باشید. آن‌ها را پیدا و تجزیه و تحلیل کنید و سپس به بقیۀ درس‌ها یا موضوع‌هایی که در آن‌ها موفقیت چندانی کسب نکرده‌اید، سری بزنید و تا آنجا که می‌توانید موفقیت‌های خود را به این درس‌ها یا موضوع‌ها تعمیم دهید.

برای مثال، دانش‌آموزی در یک درس یا موضوعی از موضوعات ریاضی بسیار موفق بوده است. وقتی سیر طی شده در طول نیم سال اول را بررسی می‌کند، درمی‌یابد که به آن موضوع علاقه‌مند بوده، سر کلاس خوب تمرکز داشته و تمرین‌ها را به موقع حل کرده است. پس اگر همین کارها را برای موضوع‌های دیگر هم انجام دهد، به احتمال زیاد نتیجۀ خوبی خواهد گرفت.

پس مهم‌ترین توصیۀ من به شما این است که روی نقاط قوت خودتان تمرکز کنید، دلایل رسیدن به این موفقیت‌ها را بیابید و به بقیه درس‌ها و موضوع‌های درسی تعمیم دهید. ان‌شاءالله این شعار را به خاطر می‌سپاریم که «هر پیروزی مقدمه‌ای برای پیروزی‌های دیگر است».

مؤید و پیروز باشید
سردبیر

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

آموزشی

نجمه مؤمنی
کارشناسی ارشد ریاضی، دبیر ناحیهٔ ۱ کرمان

کاربرد هندسه در

اشاره

**از آنجـا که مو
مسائل علمی همواره
اسـت، ارائهٔ اسـتدلال
مناسـب، خدمت بزرگ
در درس‌هـای علـوم پا
اساسـی در کلاس درس
مطالب تدریس شـده اسـ
جنبـهٔ اثباتی دارد. در اغلـ
و کاربرد آن‌ها، تنها به اثبا
لازم را بـرای دانش‌آموزان
خواص مستطیل، یکی از مـ
مدرسـه می‌خوانند، اشـار
مستطیل در صنعت پرداخ**

مقدمه

**در کتاب هندسـهٔ ۱ دبیرسـ
کل کتاب آمده اسـت، دو قضیـ
ابتدایـی بـه دانش‌آموزان آمو
برابرند و در دبیرسـتان آن را
اما هرگـز به دانش‌آمـوزان نم
مهم اسـت. فراوانی اثبات قضـ
کاربرد حتی یکی از آن‌ها در ز
شدن و دلزدگی دانش‌آموزان
دانش‌آموز می‌پرسـد: «حا
مساوی‌اند، خوب بعدش چی؟»
در ادامـه، خـواص مسـتـ
بیـان می‌شـود. اما قبـل از آن
متوازی‌الاضلاعی که چهار زاویهٔ قائمه دارد، مستطیل می‌گویند.»**

خواص مستطیل

چـون مسـتطیل یـک متوازی‌الاضـلاع اسـت، پـس خواص متوازی‌الاضلاع را به ارث می‌برد. خواص متوازی‌الاضلاع عبارت‌اند از:

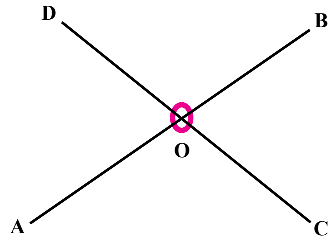
۱. اضلاع روبه‌رو موازی و مساوی‌اند.
۲. قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.
۳. زوایای روبه‌رو مساوی و زوایای مجاور، مکمل‌اند.

خاصیتی که در مسـتطیل برقرار اسـت، اما در متوازی‌الاضلاع همیشه درست نیست، عبارت است از: «قطرها با هم مساوی‌اند.»

به‌کارگیری خاصیت مستطیل در صنعت

دو میلهٔ AB و CD را با طول‌های مسـاوی در نظر می‌گیریم. وسـط آن‌ها را سوراخ می‌کنیم. سـپس این دو میلهٔ سوراخ‌شده را

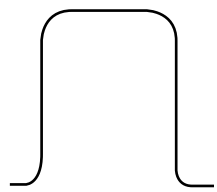
طوری روی هم قرار می‌دهیم که سوراخ‌ها در برابر هم قرار گیرند. از این دو سوراخ لولایی عبور می‌دهیم (شکل ۱).



شکل ۱

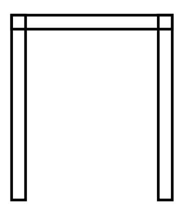
دو میلهٔ AB و CD می‌توانند دور لولای O بچرخند. هنگامی‌که دو میله دور لولا می‌چرخند، شکل چهارضلعی ACBD تغییر می‌کند، اما همیشه یک مستطیل است. (چرا؟)

یکی از کاربردهای این خاصیت را در پایه‌های میز تاشو می‌توان دید. یک جفت لولهٔ خمیده مطابق شکل ۲ چهارپایهٔ میز تاشو را تشکیل می‌دهند.



شکل ۲

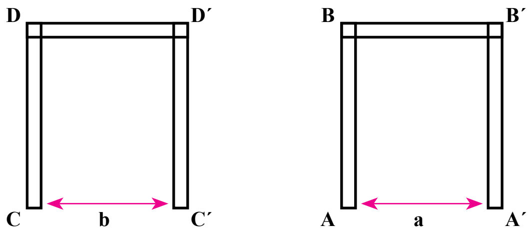
پایهٔ میز را می‌توان مانند شکل ۳ که لوله‌ای با دو گوشهٔ قائمه است، نشان داد.



شکل ۳

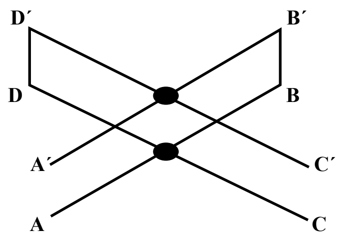
دو میلهٔ گوشه‌دار $ABB'A'$ و $CDD'C'$ را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها چهار زاویهٔ B، B'، D و D' قائمه‌اند و: $AB=A'B'=CD=C'D'$ (شکل ۴). فاصلهٔ خارجی دو پایهٔ AB و $A'B'$ را a و فاصلهٔ داخلی دو پایهٔ CD و $C'D'$ را b می‌نامیم. فاصلهٔ a اندکی بزرگ‌تر از فاصلهٔ b اختیار شده است.

قطعات AB، $A'B'$، CD و $C'D'$ را از نقاط وسطشان به ترتیب O، O'، O_1 و O'_1 سوراخ می‌کنیم. لولهٔ گوشه‌دار $CDD'C'$ را از داخل لولهٔ گوشه‌دار $ABB'A'$ عبور می‌دهیم (چون $a>b$ است، این عمل ممکن است)؛ به‌طوری‌که سوراخ O در مقابل سوراخ O_1 و سوراخ O' مقابل O'_1 باشد.



شکل ۴

سپس از دو سوراخ OO' و $O_1O'_1$ یک لولا عبور می‌دهیم. هر یک از دو لولهٔ گوشه‌دار می‌توانند آزادانه دور دو لولای مذکور بچرخند (شکل ۵).



شکل ۵

حکم: هنگامی‌که یکی از دو لولهٔ گوشه‌دار $ABB'A'$ و $CDD'C'$ دور دو لولای OO_1 و $O'O'_1$ می‌چرخد، شکل فضایی حاصل از دو لولهٔ گوشه‌دار لولا شده، تغییر شکل می‌دهد. اما همواره صفحه‌ای که از دو خط موازی BB' و DD' می‌گذرد، موازی با صفحه‌ای است که از دو خط موازی AA' و CC' می‌گذرد. برای اثبات حکم می‌گوییم:

۱. دو چهارضلعی $ABB'A'$ و $CDD'C'$ دو مستطیل مساوی‌اند، زیرا هر یک از چهار زاویهٔ B، B'، D و D' قائمه‌اند و داریم: $\overline{AB}=\overline{A'B'}=\overline{CD}=\overline{C'D'}$.

۲. دو نقطهٔ O و O' وسط‌های دو ضلع مقابل مستطیل $ABB'A'$اند، پس دو خط AA' و BB' با خط OO' موازی‌اند. با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم دو خط CC' و DD' با خط OO' موازی هستند. بنابراین چهار خط CC'، AA'، BB' و DD' موازی یکدیگرند.

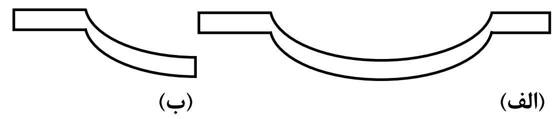
۳. چون: $AA'\|CC'$، پس دو خط AA' و CC' در یک صفحه‌اند. این صفحه را P می‌نامیم. چون: $BB'\|DD'$، پس دو خط BB' و DD' در یک صفحه‌اند. این صفحه را Q می‌نامیم.

۴. چهارضلعی ACBD مستطیل است، زیرا دو قطر آن مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین: $AC\|DB$. با همین شیوه استدلال نتیجه می‌شود: $A'C'\|D'B'$.

۵. دو خط متقاطع AC و ´AA از صفحهٔ P با دو خط متقاطع DB و ´DD از صفحهٔ Q موازی‌اند. پس این دو صفحه موازی‌اند.

نتیجه: اگر چهار نقطهٔ A، ´A، ´C و C از دستگاه لولایی (شکل ۵) را روی زمیـــن قرار دهیم، آن‌گاه صفحـــهٔ Q که بر دو خط ´BB و ´DD می‌گذرد، موازی با ســـطح زمین قرار می‌گیرد. بنابراین اگر یک صفحهٔ فلزی یا چوبی روی دو لولهٔ ´BB و ´DD قرار گیرد، این صفحه موازی با سطح زمین قرار می‌گیرد.

بست‌هایی سطح میز را به پایه‌ها ربط می‌دهند (شکل ۶). زیر میز تاشـــو چند بست به شـــکل الف و ب نصب شده‌اند که سطح میز را به پایه‌ها ربط می‌دهند.



شکل ۶

این بست‌ها زیر میز چوبی قرار می‌گیرند و لولهٔ ´BB بین دو بست در صفحهٔ میز در نقاط M و N قرار می‌گیرند (شکل ۷).

شکل ۷

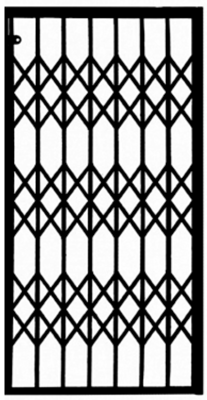
اکنون میز تاشـــو ساخته شده است. هر وقت بخواهیم این میز را تا کنیم، لولهٔ ´DD را از بســـت (ب) درمی‌آوریم و پایه‌ها را دور لوله‌ها می‌چرخانیم.

شکل ۸

از جمله کاربردهای دیگر خواص مســـتطیل در ساختن «میز بالا بر هیدرولیک» است (شکل ۹). این‌گونه میزها هرجا که تنظیم ارتفاع برای انجام دادن عملی لازم باشـــد، بـــه کار می‌رود. برای مثال، کارگر رنگ کار ارتفاع میز را با فشار دکمه با پدال پایی تنظیم می‌کند تا به قسمت‌های متفاوتی که می‌خواهد رنگ کند، تسلط کامل داشته باشد.

به‌کارگیری میز بالا بر هیدرولیک موجب می‌شود که کارگر دیرتر خسته شود و در نتیجه کارایی او افزایش یابد. یک مسئلهٔ زیبای دیگر در کشـــویی آکوردئونی است (شـــکل ۱۰). در کشویی فلزی علاوه بر محکم بودن، چون به آســـانی جمع می‌شـــود و پس از جمع شدن در کنار جرز مغازه جای کمی اشـــغال می‌کند، مورد توجه است. از خارج مغازه‌ای که در کشویی دارد می‌توان داخل آن را مشاهده کرد و از تنوع کالاهای آن مطلع شد.

شکل ۹



شکل ۱۰

نتیجه‌گیری

به تبع پیشـــرفت علم و دانش، تغییرات گسترده‌ای در همهٔ ابعاد زندگی بشر مشاهده می‌شود که با سرعت و شتاب زیاد به سمت جلو در حال حرکت اســـت و تغییر در نظام آموزشی نیز ضروری است. در این راســـتا نیاز اســـت در کتاب‌ها تغییراتی اعمال شوند. به دلیل عدم ارتباط هندسه با دنیای واقعی و تأکید بر حفظ کردن قضایا در هندسه و عدم انگیزش لازم برای حل مســـائل هندسه، نیاز است برای رهایی از این مشکل و رسیدن به آموزش و فراگیری ایده‌آل درس‌هایی مثل هندسه، کتاب‌های درسی به‌طور اساسی تغییر کنند و همزمان با بیان نظری مطالب به کاربرد آن‌ها به‌عنوان فعالیت یا حتی مطالب خواندنی اشاره و اهمیت داده شود.

* منابع

۱. اس. لف، لارنس (۱۳۷۰). آموزش هندسه به روش ساده. ترجمهٔ فیروز یارایی و محمد مجدآبادی. نشر شمع. تهران. چاپ اول.
۲. رستمی، محمدهاشم (۱۳۷۸). دائرةالمعارف هندسه (ج ۱). انتشارات مدرسه. تهران.
۳. شرف‌الدین، احمد (۱۳۷۷). هندسه دلپذیر. انتشارات مدرسه. تهران.
٤. هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (۱۳۸۳). گزیدهٔ مقالات هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی. دانشکده علوم دانشگاه کردستان. سنندج.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دکتر محرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۶۱. با فرض $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و با فرض $f_1(x)=f(x)$، $f_k=f_1 o f_{k-1}$. مطلوب است مقدار $f_{2015}(2015)$.

۱۶۲. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

۱۶۳. N عددی است که در آن هر رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ دقیقاً ۳بار به‌کار رفته، اما رقم ۸ در این عدد به‌کار نرفته است. ثابت کنید N مربع کامل نیست.

۱۶۴. برای هر عدد طبیعی n، f(n) برابر است با تعداد روش‌های نوشتن n به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی. مانند: $n=a_1+a_2+\dots+a_k$، به‌طوری که: $a_1\le a_2\le\dots\le a_k\le a_{k+1}$. برای مثال: $f(4)=4$، چون: $1+1+1+1=1+1+2=1+3=2+2=4$. اکنون f(n) را برحسب n به‌دست آورید.

۱۶۵. آیا توانی از ۲ وجود دارد که چهار رقم سمت راستش برابر ۲۰۱۴ باشد؟

۱۶۶. جملهٔ ۲۰۱۵-اُم در دنبالهٔ ...,۱,۲,۲,۳,۳,۳,۴,۴,۴,۴ را به‌دست آورید.

۱۶۷. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی فرد n، $1^n+2^n+\dots+n^n$ بر n^2 بخش‌پذیر است.

۱۶۸. nضلعی منتظمی در صفحه رسم شده است، به‌طوری‌که هیچ‌کدام از اضلاع آن عمودی نیست. اگر m_1، m_2، ... و m_n به ترتیب شیب اضلاع باشند، ثابت کنید:

$$m_1m_2+m_2m_3+\dots+m_{n-1}m_n+m_nm_1=-n$$

۱۶۹. نه خط راست داریم که هر کدام مربع ABCD را به دو چهارضلعی با نسبت مساحت ۲ به ۳ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید سه‌تا از این خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

۱۷۰. چندجمله‌ای P(x) از درجهٔ n، حداق n+1، ریشهٔ متمایز دارد. ثابت کنید: P(x) چندجمله‌ای صفر است (P(x)=0 به ازای هر $x\in R$).

■بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۳۱. بدون استفاده از ماشین حساب عدد ۱۵۹۹۹۹ را به عامل‌های اول تجزیه کنید.

$159999=400^2-1=20^4-1=(20^2-1)(20^2+1)$

$=(20-1)(20+1)\times401=3\times7\times19\times401$

۱۳۲. همهٔ مقادیر صحیح n را بیابید، به‌طوری که حاصل $\frac{n^3+8}{n^2-4}$ مقداری صحیح داشته باشد.

$$n^3+8=n(n^2-4)+4(n+2)$$

$$\Rightarrow \frac{n^3+8}{n^2-4}=n+\frac{4}{n-2}\Rightarrow n-2|4$$

$$\Rightarrow n\in\{6,-2,4,0,3,1\}-\{\pm2\}$$

$$\Rightarrow n\in\{0,1,3,4,6\}$$

۱۳۳. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر $a+b$، a^2+b و $a+b^2$ گویا باشند و $a+b\neq1$، آن‌گاه ثابت کنید a و b گویا هستند.

چون a^2+b و $a+b^2$ گویا هستند، پس تفاضل آن‌ها یعنی $(a-b)(a+b-1)$ نیز گویاست. چون $a+b-1$ عدد گویایی غیرصفر است، پس $a-b$ نیز گویاست. نهایتاً چون $a+b$ و $a-b$ گویا هستند، جمع و تفاضل آن‌ها یعنی $2a$ و $2b$ گویا هستند. در نتیجه a و b نیز گویا هستند.

۱۳۴. a و b دو عدد حقیقی هستند. اگر a^2+b^2، a^3+b^3 و a^4+b^4 گویا باشند، ثابت کنید $a+b$ و ab گویا هستند.

از تساوی $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$ و مفروضات مسئله نتیجه می‌شود: $a^2b^2\in Q$. سپس از تساوی $(a^4+b^4)(a^2+b^2)=(a^6+b^6)+a^2b^2(a^2+b^2)$ نتیجه می‌شود: $a^6+b^6\in Q$. از طرف دیگر: $a^6+b^6=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3$. در نتیجه: $a^3b^3\in Q$. پس $ab\in Q$.

حال با توجه به تساوی $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$ نتیجه می‌شود: $a+b\in Q$.

۱۳۵. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $[2a]+[2b]\ge[a]+[b]+[a+b]$ ($[x]=$ جزء صحیح x).

اگر $\{x\}$ نشان‌دهندهٔ جزء اعشاری x، یعنی $x-[x]$ باشد، آن‌گاه $x=[x]+\{x\}$. با جای‌گذاری $[a]+\{a\}$ به‌جای a و $[b]+\{b\}$ به‌جای b داریم:

$[2a]+[2b]=2[a]+[2\{a\}]+2[b]+[2\{b\}]$

$[a]+[b]+[a+b]=2[a]+2[b]+[\{a\}+\{b\}]$

در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$[2\{a\}]+[2\{b\}]\ge[\{a\}+\{b\}]$

با حالت‌بندی روی مقادیر $\{a\}$ و $\{b\}$ (۴ حالت) در بازه‌های $[0,\frac{1}{2})$ و $[\frac{1}{2},1)$ نامساوی به‌راحتی ثابت می‌شود.

۱۳۶. ثابت کنید $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ عددی گویاست.

با فرض $A=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ و $B=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ داریم: $A^3+B^3=4$. از طرف دیگر: $AB=-1$. در نتیجه از تساوی $A^3+B^3=(A+B)((A+B)^2-3AB)$ و با فرض $S=A+B$ داریم: $S^3+3S-4=0$.

با تجزیهٔ عبارت داریم: $(S-1)(S^2+S+4)=0$ که نتیجه می‌دهد $S=1$. در نتیجه: $A+B=1$.

۱۳۷. x، y و z سه عدد حقیقی مختلف هستند. ثابت کنید:

$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq0$

می‌دانیم اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه: $a^3+b^3+c^3=3abc$ (درستی این نتیجه را ثابت کنید و نشان دهید برعکس، اگر $a^3+b^3+c^3=3abc$ آن‌گاه: $a=b=c$ یا $a+b+c=0$). براساس برهان خلف، فرض کنید:

$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}=0$

در نتیجه:

$0=x-y+y-z+z-x=\sqrt[3]{(x-y)(y-z)(z-x)}$

که نتیجه می‌دهد: $x=y$ یا $y=z$ یا $z=x$ که تناقض است. پس عبارت حکم برابر صفر نیست.

۱۳۸. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پیدا کنید که در تساوی $x^3+y^3+3xy=1$ صدق می‌کنند.

داریم: $x^3+y^3+(-1)^3=3xy(-1)$، در نتیجه: $x+y-1=0$ یا $x=y=-1$ یعنی مکان هندسی، یک خط راست و یک نقطه است. در اینجا نیز از نکتهٔ مسئلهٔ قبل استفاده کردیم.

۱۳۹. برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

با ساده کردن نامساوی به نامساوی $(ay-bx)^2\ge0$ می‌رسیم.

۱۴۰. به ازای هر عدد صحیح n، نشان دهید n^4-22n^2+9 مرکب است.

اگر n مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n^4-22n^2+9 مضرب ۹ و در نتیجه مرکب است. اگر n مضرب ۳ نباشد، n^2 به فرم $3k+1$ است و در نتیجه n^4-22n^2+9 مضرب ۳ خواهد شد که نشان می‌دهد مرکب است.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem

- **اسم:** Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem
- **تارنما:** cms.math.ca/crux/
- **ناشر:** «انجمن ریاضی کانادا»[1]
- **مکان انتشار:** اُتاوا در ایالت اُنتاریو کانادا
- **زبان:** انگلیسی و فرانسه
- **ISSN**[2]: 0705-0384
- **OCLC**[3]: 40397795072002
- **سال آغاز انتشار:** ۱۹۷۸
- **تعداد چاپ در هر دوره:** ۱۰ شماره
- **نشانی:**

Graham P. Wright, Managing Editor
Crux Mathematicorum
Canadian Mathematical Society
577 King Edward
Ottawa. Ontario K1N 6N5

احسان یارمحمدی

مجلهٔ «Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem» را می‌توان یکی از بهترین و ارزنده‌ترین مجله‌های ریاضی جهان نامید. چراکه هم از نظر شمارگان سالانه و هم از نظر ارائهٔ فایل‌های رایگان «پی‌دی‌اِف» متناظر با مقالات آن، و هم از نظر تنوع مقالات گنجانده شده در آن، گوی سبقت را از بیشتر مجلات ریاضی جهان ربوده است. ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی می‌توانند با مراجعه با تارنمای اینترنتی این مجله، فایل «پی‌دی‌اف» متناظر با مقالاتی را که از سال ۱۹۷۸ تا پنج سال قبل از هر تاریخ که به تارنما مراجعه کنند، دریافت دارند. البته افرادی که مایل‌اند شماره‌های جدید این مجلهٔ وزین را داشته باشند، می‌توانند با پرداخت حق اشتراک آن از این مهم بهره‌مند شوند.

مقالات گنجانده شده در این مجلهٔ کانادایی از تنوع و ساختاری منسجم برخوردار هستند و افراد متفاوتی از جای‌جای عالم هستی برای این مجله مقاله ارسال می‌کنند. اما شاید بتوان اذعان کرد که مقالات مربوط به موضوعات هندسه در این مجله دارای سبکی متفاوت و مدرن نسبت به مقالات مندرج در سایر مجلات جهان است. علاقه‌مندان به هندسه می‌توانند با مراجعه به آن‌ها، به افزایش دانش خود در زمینهٔ هندسه بپردازند. نحوهٔ ارسال مطالب و مقالات برای این مجله نیز اسلوب ویژه‌ای دارد که هم برای دست‌اندرکاران و گردانندگان مجلات ریاضی کشور (ایران)، و هم برای افرادی که قصد دارند با روش‌های نگارش و ارسال مقاله برای مجلات ریاضی کشور آشنا شوند، می‌تواند مفید باشد. دلیل این موضوع تاحدی به این نکته برمی‌گردد که مجلهٔ Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem از ادغام دو مجلهٔ Crux Mathematicorum و Mathematical Mayhem پدید آمده است که هر یک از آن‌ها در گذشته با داشتن خط‌مشی‌های ویژهٔ خود دست به چاپ و انتشار مقالات ریاضی می‌زده‌اند. در واقع، «انجمن ریاضی کانادا» با بررسی وضعیت این دو مجله و شرایط حاکم بر فضای ریاضیاتی موجود در کشور کانادا و نیز تلاش‌های انجمن ریاضی کانادا برای ارائهٔ یک مجله ریاضی ارزنده در عرصهٔ بین‌الملل، دست به تلفیق دو مجلهٔ مزبور زد و مجلهٔ Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem را به جامعه جهانی عرضه کرد.

در تارنمای این مجله و در قسمت «اطلاعاتی برای مشارکت‌کنندگان و مؤلفان» مشاهده می‌کنیم که مجله ساختار کلاسیک خود، یعنی دو بخش Crux Mathematicorum و Mathematical Mayhem را حفظ کرده است و هر یک از آن‌ها در ساختار کلی مجله دارای نقشی مجزا از هم هستند. بخش Crux Mathematicorum خود به چهار قسمت اصلی زیر با ویژگی‌ها و شرایط مندرج در هر یک از آن‌ها دسته‌بندی می‌شود.

مقالات

مقالات باید با دقت نگاشته شوند و به‌صورت معقول، کوتـاه و دارای توضیحات و تفسـیرهای لازم و طبیعی باشند. مؤلفان مقالاتی که مقالات آن‌ها برای چاپ توسط مجله مورد پذیرش قرار گیرد، می‌باید که رضایت خود را برای چاپ و نشـر مقالهٔ خود (مقالاتشان) به مجله اعلام کنند و نیز حق چاپ و نشر مقاله (مقالاتشان) را به مجله انتقال دهند. بعد از چاپ و نشر هر مقاله، انجمن ریاضی کانادا به مخاطبان خود اجازهٔ استفاده و در اختیار داشتن مقالات را می‌دهد. خوانـندگان و علاقه‌مندان می‌توانند مقالات خود را از طریق دو روش زیر به نشانی کلاسیک مجله یا نشانی الکترونیکی آن بفرستند:

Robert Dawson,
Dept. of Mathematics&Computing Science
St. Mary's University
923 Robie St.
Halifax, NS B3H 3C3
Canada
Or emailed to: crux-articles@cma.math.ca

مسائل و راه‌حل‌های کِراکس[4]

خوانندگان و علاقه‌مندان می‌توانند مسائل پیشنهادی خود را که حداکثر در سطح دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی باشـد، به همراه راه‌حل (راه‌حل‌های) آن‌ها به یکی از دو روش زیر برای مجله ارسال دارند:

Shawn Godin, Crux Mathematicorum
Cairine Wilson Secondary School
975 Orleans Blvd.
Orleans, ON KC 2Z5
Canada
Or emailed to: Crux-editors@cms.math.ca

اسکولاید[5]

ایـن قسـمت به ارائـهٔ نمونهٔ سـؤالات و مسـائلی اختصـاص دارد که در امتحانات مـدارس و آزمون‌های ریاضی به‌صورت تشـریحی و یـا به‌صورت چندگزینه‌ای در اختیـار دانش‌آموزان قرار گرفته‌انـد. به‌ویژه می‌تواند برای معلمان ریاضی که قصد دارند در طراحی سـؤالات امتحانـات ریاضـی از تنـوع و دگرگونی نوع سـؤالات بهره‌مند شوند، برای دست‌اندرکاران مجلات ریاضی که می‌خواهند سـاختار مجلهٔ آنان دربرگیرندهٔ پرسش‌ها و مسائل درسی متنوع باشد، و بالاخره ریاضی‌آموزانی که می‌خواهند توانایی ذهنی خود را در رابطه با شکل‌های گوناگون سؤالات و مسائل منطبق با سرفصل درسی‌شان محک بزنند، مفید و مؤثر باشد. البته معلمان و مدرسانی کـه می‌خواهند سـؤالات گنجانده شـده در امتحانات ریاضـی را کـه از دانش‌آموزان خود به‌عمـل آورده‌اند، برای مجله بفرسـتند و یا طراحان این دسته از سؤالات و پرسـش‌ها که می‌خواهند حاصل کار خود را از طریق مجله در اختیار علاقه‌مندان بگذارند، می‌توانند به یکی از دو روش زیر مطالب خود را برای مجله ارسال کنند:

Lily Yen and Mogens Hansen
7255 Hewitt Street
Burnaby, BC
V5A 3M3
Canada
Or emailed to: Crux-skoliad@cms.math.ca

بخش المپیاد[6]

این قسمت برای مسائلی که در المپیادهای ریاضی کاربـرد دارند، طراحی و تدوین شـده اسـت. مخاطبان می‌توانند در این قسمت نمونه مسائل المپیادهای ریاضی کشـورهای گوناگون و راه‌حل‌های آن‌ها را در سال‌های

متفاوت مشاهده کنند. علاقه‌مندان به ارسال مطلب در این زمینه می‌توانند به یکی از دو روش زیر با این قسمت مجله در ارتباط باشند:

Professor Nicolae Strungaru
Department of Mathematics and Statistics
Grant MacEwan University
10700-104 Avenue
Edmonton, AB T5J 4S2
Canada
Or emailed to: Crux-olympiad@cms.math.ca

بخش Mathematical Mayhem نیز دارای قسمتی است که علاقه‌مندان می‌توانند از طریق آن به یکی از دو روش زیر به ارائهٔ راه‌حل‌های خود برای سؤالات و مسائل این قسمت بپردازند:

Shawn Godin, Crux Mathematicorum
Cairine Wilson Secondary School
975 Orleans Blvd.
Orleans, ON KC 2Z5
Canada
Or emailed to: Crux-editors@cms.math.ca

البته مجله دارای قسمت‌های مفید دیگری نیز هست؛ از جمله قسمت «معرفی کتاب» که به معرفی کتاب‌های ریاضی ارزنده می‌پردازد. مترجمان چیره‌دست، علاقه‌مند و آشنا به ریاضی می‌توانند با مراجعه به این قسمت به ترجمهٔ آثار فاخر آن دست بزنند و جامعهٔ ریاضیات ایران را از آثار جدید و به روز جهان بهره‌مند سازند.

در پایان پیشنهاد تهیهٔ این مجله و مطالعهٔ یکایک مقالات آن را به جامعهٔ ریاضی ایران شامل دانش‌آموزان، معلمان، مدرسان، اساتید و... عرضه می‌داریم و از مترجمان علاقه‌مند و آشنا به ریاضی که به همکاری در زمینهٔ ترجمهٔ مقالات ریاضی تمایل دارند نیز تقاضا می‌کنیم، با ایجاد هماهنگی‌های لازم و کافی با اعضای هیئت تحریریه و نیز انتخاب مقالات مناسب و متناسب با خط‌مشی‌های مجلهٔ ریاضی «برهان دورهٔ دوم متوسطه»، دست به ترجمهٔ مقالاتی از این مجله کانادایی بزنند تا در راستای گسترش فرهنگ ریاضی‌خوانی و استفاده از منابع و مطالب ریاضی کارا از سایر کشورهای جهان، اقدامات ارزنده‌ای را انجام داده باشیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Canadian Mathematical Society
2. ISSN=International Standard Serial Number
3. OCLC=Online Computer Library Center
4. Crux
5. Skoliad
6. Olympiad Corner

۱ پرسش‌های پیکارجو!

دوایر $C(o,r)$ و $C'(o',r')$ در نقطهٔ A مماس داخل هستند. از o مماسی بر دایرهٔ کوچک‌تر (c') وارد می‌کنیم تا در نقطهٔ C بر دایره مماس شود و دایرهٔ c را نیز در نقطهٔ B قطع کند (B و C در یک طرف O هستند). اندازهٔ زاویهٔ BAC کدام است؟

الف) ۳۰° ب) ۴۵° ج) ۶۰°
د) ۵۰° هـ) مقدار این زاویه ثابت نیست.

در ریاضیات آن‌چه مهم است، فکر کردن است!
ریاضیات الفبایی است که خداوند جهان را بر مبنای آن خلق کرد.

گالیله

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

جدول زیر، یک جدول عددی کوچک (۴×۴) است که هیچ خانهٔ سیاه شده‌ای ندارد. تمام عناصر جدول عددهای چهار رقمی هستند که از چپ به راست یا از بالا به پایین نوشته می‌شوند. پس از حل کامل جدول، دو عدد چهار رقمی روی قطرهای اصلی و فرعی جدول (از بالا به پایین) به‌وجود می‌آید که سال تولد و وفات یک ریاضی‌دان به‌نام ایرانی براساس تقویم میلادی است. نام این ریاضی‌دان رمز جدول ماست. آن را برای ما بفرستید تا جایزه‌ای برایتان ارسال کنیم!

افقی

۱. مربع یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از سی و کوچک‌تر از چهل.
۲. عدد طبیعی که تنها دو عامل اول دارد که یکی از آن‌ها بین ۴۰ و ۵۰ است و دیگری یک رقمی است.
۳. حاصل‌ضرب دو عدد اول که یکی از آن‌ها یک رقمی و دیگری اندکی بیشتر از عدد مساحت مربعی است که محیط آن ۸۴ واحد است.
۴. صد برابر یک عدد اول.

	۱	۲	۳	۴
۱				
۲				
۳				
۴				

عمودی

۱. در این سال **بلز پاسکال**، ریاضی‌دان بنام و فیزیک‌دان فرانسوی دیده به جهان گشود.
۲. چهارمین عدد اول بزرگ‌تر از ۵۰۰۰.
۳. عدد مساحت مستطیلی که محیط آن ۲۵۴ واحد و طول آن ۸۷ واحد بیشتر از عرض آن است.
۴. در این سال **رنه‌دکارت**، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی درگذشت.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

آموزشی

۹

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

«اگر و فقط اگر»
یا
«قضیه‌های هم‌ارز»

گزاره‌های دارای اصطلاح «اگر و فقط اگر» نسبتاً متداول و در ریاضیات بسیار سودمند هستند. اگر ما بتوانیم نشان دهیم که «A اگر و فقط اگر B» ثابت کرده‌ایم که A و B گزاره‌هایی هم‌ارز هستند، زیرا وقتی یکی از آن‌ها درست (یا نادرست) باشد، دیگری نیز درست (یا نادرست) است. گزارهٔ «A اگر و فقط اگر B» به این معنی است که «A شرط لازم و کافی برای B است» و در عین حال «B شرط لازم و کافی برای A است.»

بنابراین برای اثبات درستیِ گزارهٔ «A اگر و فقط اگر B» ما باید ثابت کنیم که:

۱. اگر A آن‌گاه B.

(A یک شرط کافی برای B است؛ B یک شرط لازم برای A است.)

۲. اگر B آن‌گاه A.

(B یک شرط کافی برای A است؛ A یک شرط لازم برای B است.)

بنابراین اثبات یک گزارهٔ «اگر و فقط اگر» دارای دو قسمت است. می‌دانیم ما می‌توانیم با به‌کار بردن هر یک از این تکنیک‌ها (روش‌ها) هر قسمت را بسازیم. توجه کنید که گزاره‌های «اگر A، آن‌گاه B» و «اگر B، آن‌گاه A» عکس یکدیگرند.

"IF AND ONLY IF" OR "EQUIVALENCE THEOREMS"

Statements including the expression "if and only if" are rather common and very useful in mathematics. If we can show that "A if and only if B", we are proving that A and B are equivalent statements, because either one of them is true (or false) only when the other one is true (or false). The statement "A if and only if B" means that "A is a necessary and sufficient condition for B" and that at the same time "B is a necessary and sufficient condition for A."

Thus to prove that the statement "A if and only if B" is true, we must prove that:

1. If A, then B.

(A is a sufficient condition for B; B is a necessary condition for A.)

2. If B, then A.

(B is a sufficient condition for A; A is a necessary condition for B).

Therefore, the proof of an "if an only if" statement has two parts. We can use any one of the techniques we know to construct each part.

Notice that the statements "If A, then B" and "If B, then A" are converses of each other.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

لغات و اصلاحات جدید

1. Statements گزاره‌ها
2. Expression اصطلاح
3. If and only if اگر و فقط اگر
4. Useful مفید، سودمند
5. Equivalent هم‌ارز
6. Necessary لازم
7. Sufficient کافی
8. Condition شرط
9. Construct شکل دادن، ساختن
10. Converse عکس

ترجمه برای دانش‌آموز

EXAMPLE 1. A nonzero real number is positive if and only if its reciprocal is positive.

Proof. The two parts of this statement are the simple statements

A: A real number a is positive.

B: The reciprocal of a, denoted as a^{-1}, is positive

Part 1. If **A**, then **B**.

(The fact that the number a is positive is sufficient to imply that its reciprocal is positive.) By definition of reciprocal

$$a * a^{-1}=1.$$

So the number $a * a^{-1}$ is positive.

By the properties of operations of real numbers, the product of two numbers is positive only if the two numbers are either both positive or both negative. Because by hypothesis a is positive, it follows that a^{-1} is positive.

Part 2. If **B**, Then **A**.

(The fact that the number a is positive is necessary to imply that its reciprocal is positive.) By definition of reciprocal

$$a * a^{-1}=1$$

So the number $a * a^{-1}$ is positive.

By the properties of operations of real numbers, the product of two numbers is positive only if the two numbers are either both positive or both negative. Because by hypothesis, a^{-1} is positive, it follows that a is positive.

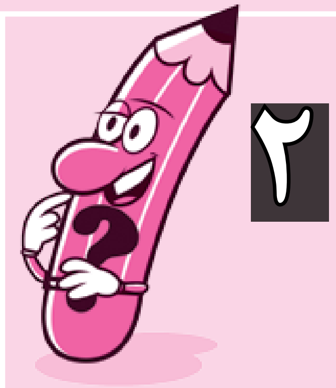
ابهام در نمادگذاری!

اگر $A=(۴,۶)$ و $B=[۴,۶]$، $A\times B$ کدام است؟!

الف) $A\times B=۲\times۱۲=۲۴$

ب) $A\times B=\{(x,y)\}\mid ۴<x<۶$ و $۴\leq y\leq ۶\}$

۲ پرسش‌های پیکارجو!



چندجمله‌ای f با ضرایب صحیح مفروض است. می‌دانیم f(۲) بر ۵ و f(۵) بر ۲ بخش‌پذیر است. در این صورت f(۷) بر کدام بخش‌پذیر است؟

الف) ۱۰ ب) ۷ ج) ۳

د) ۴ هـ) ۸

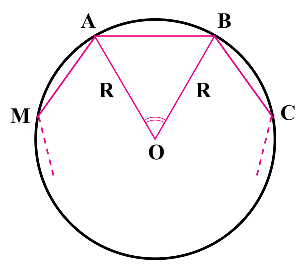
آموزشی

بحثی در باب مساحت چندضلعی‌های منتظم

حسین کریمی
دبیر ریاضی شهر تهران

می‌دانیم مساحت سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ و مساحت چهارضلعی منتظم (مربع) به ضلع a برابر است با: $a^{۲}$. اکنون می‌خواهیم برای به‌دست آوردن مساحت nضلعی منتظم یک رابطهٔ کلی به‌دست آوریم.

فرض کنیم nضلعی منتظم ABC...M، به ضلع a، محاط درون دایره‌ای به مرکز O باشد. پس: $A\hat{O}B=\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ (شکل ۱).



شکل ۱

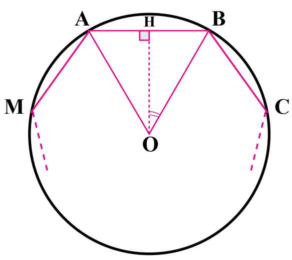
و چون مثلث AOB متساوی‌الساقین است، بنابراین OH هم‌ارتفاع، هم‌میانه و هم‌نیم‌ساز زاویهٔ AOB محسوب می‌شود (شکل ۲). بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} BH&=\frac{a}{۲}\\ \angle HOB&=\frac{۱۸۰^\circ}{n}\end{aligned}\right\}$$

در مثلث OBH داریم:

$$\tan H\hat{O}B=\frac{BH}{OH}\Rightarrow \tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}=\frac{\frac{a}{۲}}{OH}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{a}{۲\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$



شکل ۲

پس مساحت مثلث OAB از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}AB\times OH=\frac{۱}{۲}\times a\times\frac{a}{۲\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{a^{۲}}{۴\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که در nضلعی منتظم ABC...M، n مثلث یکسان به مانند AOB داریم، پس:

$$S_n = \text{مساحت nضلعی منتظم به ضلع a} = S_n = nS_{OAB}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{na^۲}{۴\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

● **مثال ۱.** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_۳ = \frac{۳a^۲}{۴\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۳}} = \frac{۳a^۲}{۴\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

● **مثال ۲.** مساحت مربع به ضلع a را به‌دست آورید.

$$S_۴ = \frac{۴a^۲}{۴\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۴}} = \frac{۴a^۲}{۴\times۱} = a^۲$$

اکنون برای به‌دست آوردن مساحت پنج‌ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم، هشت‌ضلعی منتظم و دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع a، به جدول زیر توجه می‌کنیم:

زاویه	$\frac{\pi}{۱۲}$ یا ۱۵°	$\frac{\pi}{۸}$ یا $۲۲^\circ۳۰'$	$\frac{\pi}{۶}$ یا ۳۰°	$\frac{\pi}{۵}$ یا ۳۶°	$\frac{\pi}{۴}$ یا ۴۵°	$\frac{\pi}{۳}$ یا ۶۰°
تانژانت	$۲-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۲}-۱$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۵-۲\sqrt{۵}}$	۱	$\sqrt{۳}$

◆ **مسئلهٔ ۱.** مساحت دوازده‌ضلعی منتظم به ضلع ۵ را به‌دست آورید.

$$S_{۱۲} = \frac{۱۲a^۲}{۴\tan۱۵^\circ} = \frac{۱۲\times۲۵}{۴(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۷۵}{۲-\sqrt{۳}} = ۷۵(۲+\sqrt{۳})$$

◆ **مسئلهٔ ۲.** مساحت هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ را به‌دست آورید.

$$S_۸ = \frac{۸a^۲}{۴\tan(۲۲^\circ۳۰')} = \frac{۸\times۱۶}{۴(\sqrt{۲}-۱)} = \frac{۳۲}{\sqrt{۲}-۱} = ۳۲(\sqrt{۲}+۱)$$

◆ **مسئلهٔ ۳.** مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۳ را به‌دست آورید.

$$S_۶ = \frac{۶a^۲}{۴\tan۳۰^\circ} = \frac{۶\times۹}{۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۸۱}{۲}\sqrt{۳}$$

◆ **مسئلهٔ ۴.** مساحت پنج‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ را به‌دست آورید.

$$S_۵ = \frac{۵a^۲}{۴\tan۳۶^\circ} = \frac{۵\times۴}{۴\sqrt{۵-۲\sqrt{۵}}} = \frac{۵}{\sqrt{۵-۲\sqrt{۵}}}$$

بدیهی است که هر قدر تعداد اضلاع را در nضلعی منتظم بیشتر کنیم (یعنی n را به سمت ∞ میل دهیم)، nضلعی منتظم به سمت دایره شدن میل خواهد کرد که از اینجا می‌توانیم به کمک ماشین‌حساب، تقریب‌های خوبی برای عدد π به‌دست آوریم.

با توجه به شکل ۲ داریم:

$$\sin H\hat{O}B = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} = \frac{\frac{a}{۲}}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{۲\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi R^۲ = \frac{\pi a^۲}{۴\sin^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

حال برای nهای بزرگ، مساحت nضلعی منتظم و مساحت دایره را هم‌ارز در نظر می‌گیریم که داریم:

$$S_n \equiv S_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{na^۲}{۴\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}} \equiv \frac{\pi a^۲}{۴\sin^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{n\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}}{\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}} \equiv \frac{\pi}{\sin^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}} \Rightarrow \pi \equiv n.\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}.\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

با توجه به اتحاد «$\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$» داریم:

$$\pi \equiv \frac{n}{۲}.\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

و برای مقادیر مختلف n داریم:

$$n = ۶ \rightarrow \pi \equiv \frac{۶}{۲}.\sin۶۰^\circ \Rightarrow \pi \equiv ۲/۵۹۸۰۷۶$$

$$n = ۱۵ \rightarrow \pi \equiv \frac{۱۵}{۲}.\sin۲۴^\circ \Rightarrow \pi \equiv ۳/۰۵۰۵۲۴$$

$$n = ۳۶ \rightarrow \pi \equiv \frac{۳۶}{۲}.\sin۱۰^\circ \Rightarrow \pi \equiv ۳/۱۲۵۶۶۷$$

$$n = ۱۸۰ \rightarrow \pi \equiv \frac{۱۸۰}{۲}.\sin۲^\circ \Rightarrow \pi \equiv ۳/۱۴۰۹۵۴$$

$$n = ۳۶۰ \rightarrow \pi \equiv \frac{۳۶۰}{۲}.\sin۱^\circ \Rightarrow \pi \equiv ۳/۱۴۱۴۳۳$$

$$n = ۱۰۰۰ \rightarrow \pi \equiv \frac{۱۰۰۰}{۲}.\sin\frac{۳۶۰^\circ}{۱۰۰۰} \Rightarrow \pi \equiv ۳/۱۴۱۵۷۲$$

$$n = ۱۰۰۰۰ \rightarrow \pi \equiv \frac{۱۰۰۰۰}{۲}.\sin\frac{۳۶۰^\circ}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow \pi \equiv ۳/۱۴۱۵۹۲$$

ابهام در نمادگذاری!

اگر f={(۲,۳), (۳,۴), (۴,۵), (۵,۶)} و g={(۲,۳), (۳,۶), (۵,۶), (۷,۲)} توابعی روی Z باشند، f-g کدام است؟

الف) f-g={(۳,۴), (۴,۵)}

ب) f-g={(۲,۰), (۳,-۲), (۵,۰)}

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مریم شاه‌محمدی
دبیر منطقهٔ یک
آموزش‌وپرورش شهر تهران

ارتباط بین آربلوس و نمایش هندسی اتحادهای جبری

چکیده

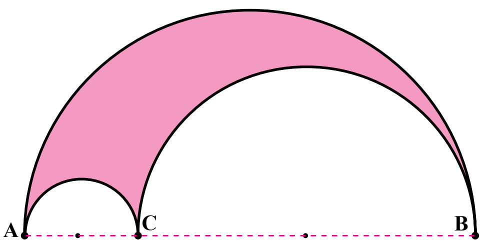
اهدف از نگارش مقالهٔ حاضر، طرح و بیان یک موضوع مرتبط با مباحث کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه، به‌عنوان یک پیشنهاد موردی به‌منظور تعمیق دانسته‌های فراگیرندگان و عینیت‌بخشیدن به مسائل انتزاعی در آموزش ریاضی است. «آربلوس»[۱] یکی از قدیمی‌ترین و جالب‌ترین اشـکال هندسی اسـت که متأسفانه در کتاب‌های درسی در مدارس ایران جایگاهی برای آن منظور نشده اسـت. در مقالهٔ حاضر، آربلوس و برخی از خواص آن معرفی شـده اسـت. همچنین، با در نظر گرفتن رویکرد هندسـی‌ـکاربردی در تألیف کتاب‌های درسـی ریاضی در سـال‌های اخیر، سعی شده است با بررسی موضوعی مسـاحت آربلوس و ارائهٔ روش‌های ترسیمی و محاسـباتی سـاده در نرم‌افزارهای «geogebra»،«math prof» و «calques 3D» و ارتباط بین آن و اتحادهای جبری به‌صورت شهودی نمایش داده شود.

کلیدواژه‌ها: آربلوس، مساحت، حجم، اتحاد جبری

مقدمه

آربلوس یک کلمهٔ یونانی به معنای چاقوی کفاشی است. همچنین، به تیغهٔ چاقویی که خرازان و پینه‌دوزان باستان از آن اسـتفاده می‌کردند، شباهت دارد. آربلوس یک شکل هندسی است که از سه نیم‌دایره ساخته شده اسـت (شکل ۱). یک نیم‌دایره با قطر AB و دو نیم‌دایرهٔ کوچک‌تـر که در یک نقطه روی قطر دایرهٔ بزرگ (C) با یکدیگر مماس بیرون و در راستای قطر AB بر نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر مماس درون هسـتند. مرکز هر سه نیم‌دایره در یـک امتداد و مجموع قطرهـای دو نیم دایرهٔ کوچک‌تر بـا قطر نیم‌دایرهٔ بزرگ برابر اسـت. در واقع دو نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر در نیم‌دایرهٔ بزرگ محاط شده‌اند. سطحی که توسـط سه نیم‌دایره توصیف شـده، محدود شده است، آربلوس نامیده می‌شود[۱].

ارشمیدس[۲]، ریاضی‌دان یونانی، اولین کسی بود که خواص ریاضی این کمان‌ها را مطالعه و بررسی کرد. البته خواص آربلوس مورد توجه ریاضی‌دانان مشـهوری چون **دکارت**[۳]، **فرما**[۴]، **نیوتن**[۵] و **ابوسـعید سـجزی** نیز بوده است.



شکل ۱. نمایش هندسی یک آربلوس

پیشینه‌ای برای نمایش هندسی اتحادهای جبری

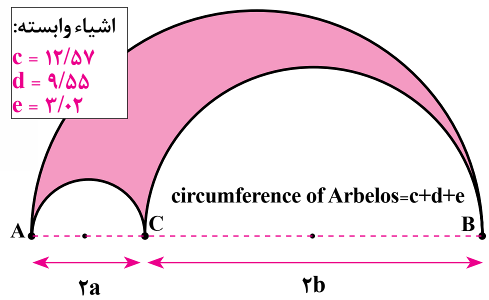
یونانیان باسـتان، فقط از صورت هندسی مسطحه مفاهیم جبری اسـتفاده می‌کردند. **اقلیدس**[۶]، در کتاب دوم اصـول خود، یک تعبیر هندسـی از اتحاد مربع دو جمله‌ای: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ و دیگر اتحادهای جبری درجـهٔ دوم پیشـنهاد می‌کنـد. ارشـمیدس در کتاب «مأخوذات» که **نصیرالدین محمد طوسی** تحریری بر آن نوشته است، تعبیر هندسی دیگری از اتحاد فوق ارائه می‌دهد. او ثابت می‌کند مکمل نیم‌دایره‌هایی با قطرهای a و b و نیم‌دایره‌ای با قطر (a+b)یا (آربلوس) برابر است با دایره‌ای به قطر $\sqrt{ab}$.

ابوسـعید سـجزی، در کتـاب «فی‌مسـاحئ الاکر

بالاکر»، صورت هندســی مسطحهٔ ارشمیدس و اقلیدس را بــا در نظر گرفتن آن در فضا تعمیــم می‌دهد. او یک تفســیر ســه‌بعدی از اتحاد: $(a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)$ ارائه می‌دهد. بدین صورت که یک مکعب را به دو مکعب و سه متوازی‌السطوح تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های آربلوس

آربلوس یک شکل هندسی خودمتشابه است. یکی از ویژگی‌های جالب آربلوس، همسانی محیط آن با محیط یک دایره معین است[۵] (شکل ۲).



شکل ۲. نمایش محاســبهٔ محیط آربلوس در نرم‌افزار جئوجبرا

در حالت کلی با فرض AC=۲a و CB=۲b داریم:

(۱) πa = طول کمان نیم‌دایره به قطر AC

(۲) πb = طول کمان نیم‌دایره به قطر CB

(۳) $\pi(a+b)$ = طول کمان نیم‌دایره به قطر AB

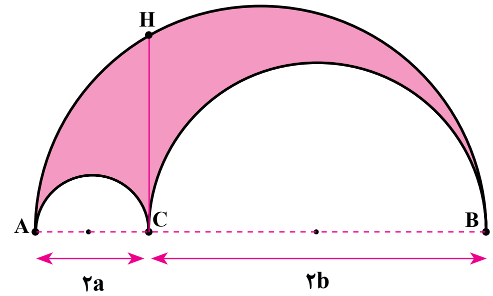
(۴) $\pi a+\pi b+\pi(a+b)$ = محیط آربلوس

(۵) $۲\pi(a+b)$ = محیط دایره به قطر $۲(a+b)$

از رابطه‌های فوق لم ۱ نتیجه می‌شود.

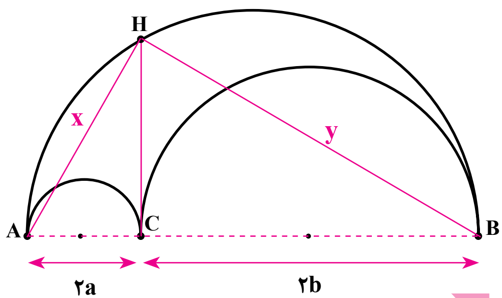
لم ۱. محیط یــک آربلوس بــا نیم‌دایره‌های داخلی به شــعاع‌های a و b، با محیط دایره‌ای به شــعاع $(a+b)$ برابر اســت. یکی دیگر از خواص جالب آربلوس، همسانی مساحت آن با مساحت یک دایرهٔ معین است.

لــم ۲. فرض کنید CH مماس مشــترک داخلی دو نیم‌دایره به شــعاع‌های a و b و محدود به کمان نیم‌دایره به قطر AB باشد (شــکل ۳). در این صورت اندازهٔ طول CH برابر است با: $۲\sqrt{ab}$.



شکل ۳. نمایش مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایرهٔ آربلوس

برهان: از نقطــهٔ H به نقاط A و B وصل می‌کنیم (شــکل ۴). با توجه به رابطهٔ فیثاغــورس در مثلث‌های ACH، BCH و AHB داریم:



شــکل ۴. تعییــن انــدازهٔ ممــاس مشــترک داخلی دو نیم‌دایرهٔ آربلوس

$(2a)^2+CH^2=x^2$ (۶)

$(2b)^2+CH^2=y^2$ (۷)

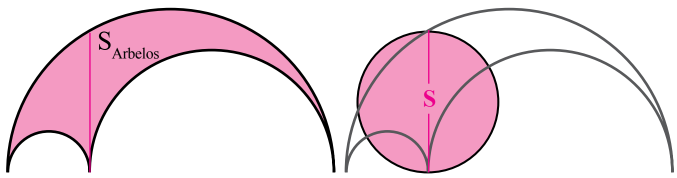
$x^2+y^2=4(a+b)^2$ (۸)

با جای‌گـذاری رابطه‌هـای (۶) و (۷) در رابطهٔ (۸) داریم:

$4a^2+4b^2+2CH^2=4a^2+4b^2+8ab$ (۹)

$$\Rightarrow CH^2 = 4ab \Rightarrow CH = 2\sqrt{ab}$$

قضیهٔ ۱. مساحت یک آربلوس (شکل ۵)، همواره با مساحت یک دایره برابر است.



شکل ۵. مساحت یک آربلوس

برهـان: با توجه به خاصیت مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایـرهٔ درونی آربلـوس و رابطهٔ هندسـی قضیهٔ فیثاغـورس در مثلـث قائم‌الزاویه (شـکل ۶) و انعکاس آربلوس داریم:

$AB^2=AD^2+BD^2$ (۱۰)

$BD^2=BC^2+CD^2$ (۱۱)

$S_{Arbelos}+A_1+A_2=B_1+B_2$ (۱۲)

بـا ضرب کردن روابـط (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) در $\frac{\pi}{8}$ داریم:

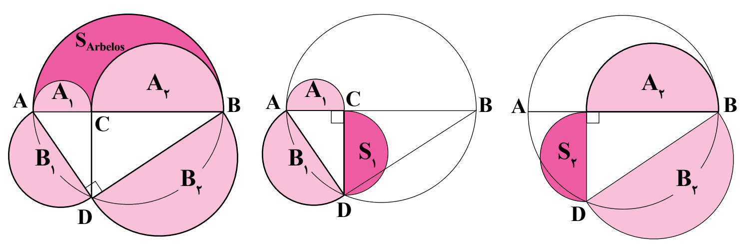
$B_1=A_1+S_1$ (۱۳)

$B_2=A_2+S_2$ (۱۴)

بـا جای‌گذاری روابـط (۱۳) و (۱۴) در رابطهٔ (۱۲) خواهیم داشت:

$S_{Arbelos}+A_1+A_2=A_1+S_1+A_2+S_2$ (۱۵)

$$\Rightarrow S_{Arbelos}=S_1+S_2=S$$

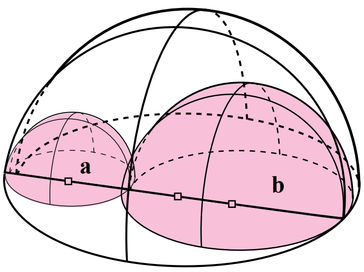


شکل ۶. رابطهٔ فیثاغورس در تعیین مساحت نیم‌دایره

از ترکیب لم ۲ و قضیهٔ ۱، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

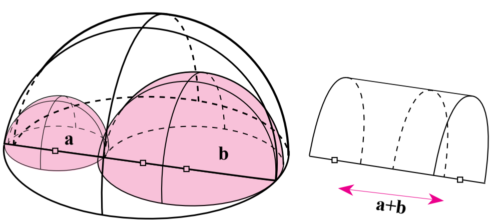
نتیجهٔ ۱. مسـاحت یـک آربلوس بـا نیم‌دایره‌های داخلی به شـعاع‌های a و b، با مساحت دایره‌ای به شعاع $\sqrt{ab}$ برابر است.

تعریف ۱. یک نیم‌کره به شـعاع (a+b) و دو نیم‌کره به شـعاع‌های a و b را که در آن مماس هسـتند (شکل ۷)، در نظـر بگیرید؛ به‌گونه‌ای که مرکز هر سـه در یک امتـداد، و مجموع قطرهای دو نیم‌کـرهٔ کوچک با قطر نیم‌کرهٔ بزرگ برابر باشـد. فضای هندسـی محصور بین دو نیم‌کرهٔ کوچک و نیم‌کرهٔ بزرگ را «مسـتدیر کروی آربلوس» می‌نامیم.



شکل ۷. مستدیر کروی آربلوس

قضیهٔ ۲. حجم مستدیر کروی آربلوس با شعاع‌های داخلی a و b، با نصف حجم استوانه‌ای به ارتفاع (a+b) و شعاع قاعدهٔ $2\sqrt{ab}$ برابر است (شکل ۸).



شکل ۸. حجم مستدیر کروی آربلوس

برهـان: حجم مسـتدیر کروی آربلـوس را با V_1 و حجم استوانهٔ مفروض را با V_2 نشان می‌دهیم.

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi(a+b)^3 - \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{2}{3}\pi b^3 \quad (۱۶)$$
$$= 2\pi ab(a+b)$$

$$V_2 = \pi(2\sqrt{ab})^2(a+b) = 4\pi ab(a+b) \quad (۱۷)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) حکم قضیه ثابت خواهد شد.

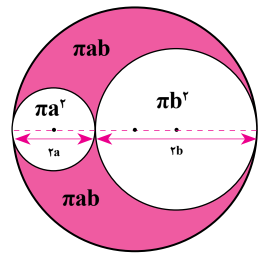
ارتباط بین نمایش هندسی اتحادهای جبری با آربلوس

مساحت دایره‌ای به شعاع (a+b) را با $S_{r=a+b}$ و مساحت دایره‌ها با شعاع‌های a و b را به‌ترتیب با $S_{r=a}$ و $S_{r=b}$ نشان می‌دهیم (شکل ۹).

$$S_{r=a+b}=S_{r=a}+S_{r=b}+2S_{Arbelos} \qquad (18)$$

$$\pi(a+b)^2=\pi a^2+\pi b^2+2\pi ab \qquad (19)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$



شکل ۹. ارتباط آربلوس و اتحاد مربع دو جمله

با در نظر گرفتن قضیهٔ ۲، می‌توان یک تعبیر هندسی برای اتحاد مکعب دو جمله‌ای مطرح کرد:

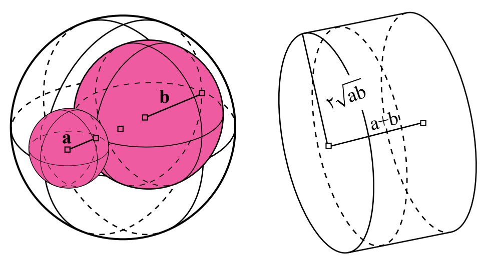
نتیجهٔ ۲. مکمل دو کره به شعاع‌های a و b و کره‌ای به شعاع (a+b)، یک استوانه به ارتفاع (a+b) و شعاع قاعدهٔ $2\sqrt{ab}$ است (شکل ۱۰).

اگر حجم کره‌ای به شعاع (a+b) را با $V_{r=a+b}$ و حجم کره‌هایی با شعاع‌های a و b را به‌ترتیب با $V_{r=a}$ و $V_{r=b}$ و حجم مخروطی به ارتفاع (a+b) و شعاع قاعدهٔ $2\sqrt{ab}$ را با V نشان دهیم، داریم:

$$V_{r=a+b}=V_{r=a}+V_{r=b}+3V \qquad (20)$$

$$\frac{4}{3}\pi(a+b)^3=\frac{4}{3}\pi a^3+\frac{4}{3}\pi b^3+3\left(\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{ab})^2(a+b)\right) \qquad (21)$$

$$\Rightarrow (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$



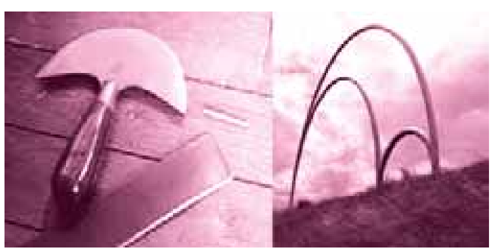
شکل ۱۰. ارتباط آربلوس و اتحاد مکعب دو جمله

نتیجهٔ ۳. مکمل دو کره به شعاع‌های a و b و کره‌ای به شعاع (a+b)، سه مخروط به ارتفاع (a+b) و شعاع قاعدهٔ $2\sqrt{ab}$ است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

بی‌شک یکی از عوامل تأثیرگذار بر عملکرد ریاضی فراگیرندگان، توانایی تصویرسازی مسائل و دانش هندسی آن‌هاست. لذا ایجاد ارتباط بین مسائل گوناگون ریاضی و بیان آن‌ها در تقویت قوهٔ تصویرسازی ذهنی دانش‌آموزان نقش بسزایی دارد. آربلوس یکی از ابزارهای موجود در زندگی روزمره است (شکل ۱۱) که به‌دلیل برخورداری از شکل هندسی خاص و ویژگی‌های ساختاری، در تصویرسازی بسیاری از مفاهیم ریاضی کاربرد دارد. همان‌گونه که مطرح شد، آربلوس مفاهیم هندسی چون دایره، مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره، دایره‌های مماس درون، مماس برون، مساحت، حجم و... (عناوین فصل دوم کتاب هندسهٔ سوم ریاضی) را دربرمی‌گیرد. نظر به اینکه علی‌رغم تغییرات کتاب‌های درسی در سال‌های اخیر، در نگارش و محتوای کتاب هندسهٔ ۲، تغییراتی صورت نگرفته است. بازنگری و اشاره به مواردی از این دست در تکمیل مباحثی از کتاب مذکور، پیشنهاد می‌شود.

از طرف دیگر، ارتباط آربلوس با تعبیر هندسی اتحادهای جبری، در جهت تعمیق دانسته‌های دانش‌آموزان (کتاب ریاضی ۱ متوسطه) موضوعی کاربردی و قابل تأمل به‌نظر می‌رسد.



شکل ۱۱. آربلوس در زندگی روزمره

پی‌نوشت‌ها

1. Arbelos
2. Archimedes
3. Descartes
4. Fermat
5. Newton
6. Euclid

منابع

1. Boas, H.P. (2006), Reflections on the Arbelos. The Mathematical Association of America, 236-249.
2. Glanville, D. (1948). Pappus of Alexandria on Architectural Studies. The University of Chicago Press, 197-200.
3. Greenberg, M.J. (1980). Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history. SanFrancisco: W.H. Freeman.
4. Hood, R.T. (1961). A chain of circles. National Council of Teachers of Mathematics, 134-137.
5. Rouhani, B. "The Arbelos" (2002) Retrieved June 19, 2008, from http://jwilson.coe.uga.edu
6. Weisstein, E. W, Arbelos; available at http://mathworld. wolfram. com/Arbelos. html.
7. Welch, M.G. (1949). The Arbelos, Master's thesis, University of Kansas.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

علیرضا پوئید
دبیر ریاضی و رایانهٔ
دبیرستان‌های شیراز

عدد کیت


مایک

اشاره

در تدریس کتاب ریاضی ۲ فصل اول، دانش‌آموزان با مفهوم «دنباله» آشنا می‌شوند. در اینجا عدد کیت را به آن‌ها معرفی می‌کنیم تا با زیبایی بعضی از دنباله‌ها آشنا شوند و به درس ریاضی علاقه پیدا کنند.

عدد ۱۹۷ را در نظر بگیرید و با استفاده از رقم‌های آن، دنبالهٔ اعداد زیر را تشکیل دهید:

۱۹۷ و ۱۰۷ و ۵۷ و ۳۳ و ۱۷ و ۷ و ۹ و ۱

همان‌طور که می‌بینیم، از جملهٔ چهارم به بعد، هر جمله از جمع سه جملهٔ ماقبل خود به‌دست می‌آید و جملهٔ آخر ۱۹۷ است. به اعدادی چون ۱۹۷ اعداد «کیت»[1] می‌گویند. به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف: عدد n رقمی $N=a_1a_2...a_n$ را یک عدد کیت گویند، هرگاه دنباله‌ای تشکیل دهیم که:

الف) n جملهٔ اول آن $a_1,a_2,...,a_n$ باشند.

ب) از جملهٔ n+۱-ام به بعد، هر جمله از جمع n جملهٔ قبلی به‌دست آید. آن‌گاه عدد N در دنباله ظاهر شود.

اعداد کیت برای اولین‌بار در سال ۱۹۸۷ توسط ریاضی‌دانی به‌نام **مایک کیت**[2] معرفی شدند. در جدول زیر فهرست اعداد کیت ۲ رقمی، ۳ رقمی، ۴ رقمی و ۵ رقمی را آورده‌ایم:

تعداد رقم‌ها	اعداد کیت
۲	۷۵ و ۶۱ و ۴۷ و ۲۸ و ۱۹ و ۱۴
۳	۷۴۲ و ۱۹۷
۴	۷۹۰۹ و ۷۶۴۷ و ۷۳۸۵ و ۴۷۸۸ و ۳۶۸۴ و ۲۵۸۰ و ۲۲۰۸ و ۱۵۳۷ و ۱۱۰۴
۵	۹۳۹۳۳ و ۸۶۹۳۵ و ۶۲۶۶۲ و ۵۵۶۰۴ و ۳۴۳۴۸ و ۳۴۲۸۵ و ۳۱۳۳۱

جمعاً ۹۴ عدد کیت کوچک‌تر از $۱۰^{۳۹}$ داریم. عدد ۲۷۸۴۷۶۵۲۵۷۷۹۰۵۷۹۳۴۱۳ کوچک‌ترین عدد کیتی است که در آن تمامی رقم‌های ۰ و ۱ و ۲ و... و ۹ حداقل یک بار به کار رفته‌اند و در سال ۲۰۰۴ کشف شد. در اینجا چند عدد کیت که اول هستند را می‌آوریم:

۷۴۵۹۸۹۳۷۳۰۲۴۷ و ۱۰۸۴۰۵۱ و ۱۹۷ و ۶۱ و ۴۷ و ۱۹

اکنون سؤال‌هایی را مطرح می‌کنیم که هنوز حل نشده باقی مانده‌اند:

۱. آیا بی‌نهایت عدد کیت وجود دارد؟

۲. نکتهٔ جالب اینکه عدد کیت ۱۰ رقمی وجود ندارد، آیا اعداد ۱۰ رقمی تنها این خاصیت را دارند یا اعداد n رقمی دیگری هم وجود دارند؟

*** پی‌نوشت‌ها**

1. Keith
2. Mike Keith
(ریاضی‌دان و مهندس نرم‌افزار آمریکایی ـ زادهٔ ۱۹۵۵)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دو معمای عددی جالب

معماهای عددی در میان معماهای ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارند، چرا که توانایی شما را برای حل معادله‌های گوناگون و محاسبات ریاضی می‌آزمایند. به‌همین دلیل تصمیم گرفتیم تا در این شماره، شما را به حل دو نمونهٔ بسیار جالب از آن‌ها دعوت کنیم. پاسخ‌ها را در همین شماره ببینید و با راه‌حل خودتان مقایسه کنید.

معمای اول

از یک ریاضی‌دان پرسیدند: چند سال داری؟ او در جواب گفت: میانگین سن من و همسرم و فرزندانمان ۲۵ سال است و دیگر چیزی نمی‌توانم بگویم! از همسر او پرسیدند: شما چند سال داری؟ و او جواب داد: میانگین سن من و فرزندانمان ۲۰ سال است و دیگر چیزی نمی‌توانم بگویم! از یکی از فرزندان پرسیدند: شما چند سال داری؟ و او گفت: میانگین سن ما بچه‌ها ۱۲/۵ سال است و مادرمان ۴۰ سال دارد. ریاضی‌دان چند سال دارد؟

معمای دوم

روزی دسته‌ای از کبوتران در پرواز بودند که به دسته‌ای از گنجشک‌ها برخوردند. سردستهٔ کبوتران به دستهٔ گنجشک‌ها نزدیک شد و از سردستهٔ آن‌ها پرسید: شما چندتایید؟ و گنجشک گفت: ما و ما... و کبوتر صحبت او را قطع کرد و گفت: آهان، همون معمای قدیمی*! پس سی‌وشش‌تایید! گنجشک گفت: نه بابا بذار حرفم را تمام کنم! ما بیشتر از سی‌وشش‌تاییم. داشتم می‌گفتم: ما و ما و شما و نصفه‌ای از شما و نصفه‌ای از نصفهٔ شما گر یکی افزون شود، جملگی صدتا شویم!

*** پی‌نوشت‌ها**
منظور معمایی بسیار قدیمی است که می‌گوید: ما و ما و نصفه‌ای از ما و نصفه‌ای از نصفهٔ ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صدتا شویم.

۳ پرسش‌های پیکارجو!

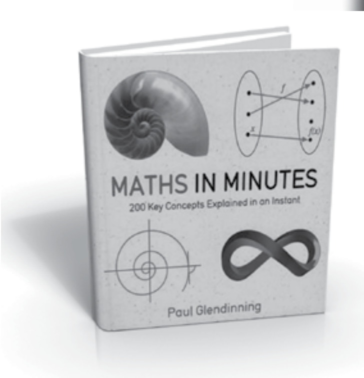
تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۶۳۰}x^{۹}-\frac{۱}{۲۱}x^{۷}+\frac{۱۳}{۳۰}x^{۵}-\frac{۸}{۶۳}x^{۳}+\frac{۳۲}{۳۵}x$ با برد R_f و دامنهٔ Z مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $R_f=Q$ **ب)** $R_f\subset(Q-Z)$ **ج)** $R_f=Z$
د) $R_f\subset Z, R_f\neq Z$ **هـ)** $R_f\subset N$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

ریاضیات در چند دقیقه



دستگاه‌های عددی

«دستگاه عددی» طریقی برای نوشتن اعداد است. برای مثال، در دستگاه دهدهی روزمره‌مان، اعداد را مثلاً به‌صورت ۴۳۴/۱۵ نمایش می‌دهیم. ارقام واقع در این عدد، یکان، دهگان، صدگان، یک دهم‌ها، یک صدم‌ها، یک هزارم‌ها، و غیره را مشخص می‌کنند، و به «ضرایب» (coefficients) موسوم‌اند.

بنابراین:

$$۴۳۴/۱۵=(۴\times۱۰۰)+(۳\times۱۰)+(۴\times۱)+(\frac{۱}{۱۰})+(\frac{۵}{۱۰۰})$$

این نمایش صرفاً توصیف اختصاری مجموعی از توان‌های ده است، و هر عدد حقیقی می‌تواند به این طریق نوشته شود.

اما مزیت خاصی در مورد دستگاه در «پایه یا مبنای ده» موجود نیست. یک عدد می‌تواند در مبنای هر عدد صحیح مثبت n‌ی، با استفاده از ضرایبی نوشته شود که از ۰ تا n-۱ تغییر می‌کنند. برای مثال، عدد $۸\frac{۵}{۱۸}$ در مبنای دو یا دودویی می‌تواند به‌صورت ۱۰۰۰/۰۱۰۱ نوشته شود. ضرایب سمت چپ ممیز نشانگر یک‌ها، دوها، چهارها و هشت‌ها، یعنی توان‌های ۲اند. موارد سمت راست نیم‌ها، ربع‌ها، یک هشتم‌ها و یک شانزدهم‌ها را نشان می‌دهند. اغلب رایانه‌ها از دستگاه دودویی استفاده می‌کنند، زیرا برای کار در این دستگاه الکترونیکی، دو ضریب (۰ و ۱) آسان‌ترند.

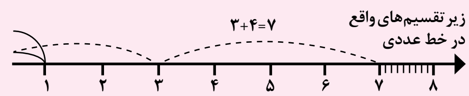
دودویی	دهدهی
۰	۰
۱	۱
۱۰	۲
۱۱	۳
۱۰۱۰	۱۰
۱۰۱۱	۱۱
۱۱۰۰	۱۲

خط عددی

خطِ عددی مفهومی سودمند برای اندیشیدن در مــورد معنی عملیات ریاضی اســت. خط مزبور خطی افقی با تقســیمات خاصی اســت که با اعداد درستِ مثبت و منفی در هر جهت آن از یکدیگر، به درازا کشیده می‌شوند. کل «اعداد درســت» (whole numbers) که توسط خط عددی پوشش داده شده‌اند، به‌عنوان *اعداد صحیح* شناخته می‌شوند.

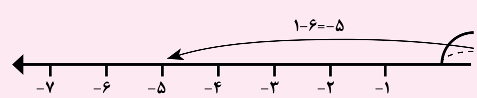
جمع یک عدد مثبت، متناظر با حرکت به سمت راســت خط عددی، به اندازۀ فاصلــه‌ای هم‌ارز با عدد مثبــت مفروضمان اســت. تفریق یک عــدد مثبت، متناظر با حرکت به سمت چپ، به اندازۀ فاصلۀ مثبت داده شده است.

به این ترتیــب، یک منهای ده به معنی ۱۰ واحد حرکت کردن به سمت چپ یک است که منهای نه را می‌دهد و ۹- نوشته می‌شود.



بین اعداد صحیح نشــان داده شده در شکل، اعداد دیگری، از قبیل نیم‌ها، یک‌سوم‌ها و یک‌چهارم‌ها وجود دارند. این اعداد نســبت‌های ساخته شده با تقسیم هر عدد صحیح بر یک عدد صحیح ناصفر هســتند. این‌ها همراه بــا اعداد طبیعی- صفر و اعداد صحیح مثبت که در واقع نســبت‌های تقسیم شده بر ۱ اند- *«اعداد گویا»* (rational numbers) را تشــکیل می‌دهنــد. این‌هــا با زیرتقسیم‌های ریزتر و ریزتر خط عددی مشخص می‌شوند.

ولی آیــا اعداد گویا خــط عددی‌مان را کامل می‌کننــد؟ آشــکار می‌شــود کــه تقریباً جمیع عددهــای بین صفــر و یک نمی‌تواننــد به صورت نســبت‌ها نوشــته شــوند؛ این اعداد به‌نام *«اعداد گنــگ»* (irrational numbers) معروف‌انــد؛ یعنی اعــدادی کــه نمایش دهدهی‌شــان هیچ‌گاه متوقف نمی‌شــود و ســرانجام تکرارشــونده نیستند. مجموعــۀ کامل اعــداد گویا و گنگ بــا هم به‌صورت *«اعداد حقیقی»* (real numbers) شناخته می‌شوند.



خانواده‌های اعداد

اعــداد را می‌توان در خانواده‌هایی رده‌بنــدی کرد که در ویژگی‌های معینی شــریک‌اند. به این طریق، راه‌های بســیاری برای قرار دادن اعداد در رده‌بندی‌هــا موجودند. در واقع، درســت همان‌طور که بی‌نهایت عدد وجــود دارد، بی‌نهایــت طریق گوناگون موجود اســت که ایــن اعداد را می‌توان زیر تقسیم و از یکدیگر متمایز کرد. برای مثال، *«اعداد طبیعی»* (natural numbers) یعنــی اعداد صحیحی که اشــیا را در دنیای واقعی با آن‌ها می‌شــماریم، تنها یکی از چنین خانواده‌هایی هستند؛ همان‌گونه که *«اعداد صحیح»* (integers) چنین‌اند، یعنی اعداد درســت، از جمله اعداد کمتر از صفر. *«اعداد گویا»* (rational numbers) خانوادۀ دیگری را تشکیل می‌دهند و به تعریف خانواده‌ای حتی بزرگ‌تر کمک می‌کنند؛ یعنی خانوادۀ *اعداد گنگ*.

خانواده‌هــای *«اعــداد جبــری»* (algebraic numbers) و *«اعــداد متعالــی»* (transcendental numbers) توســط رفتارهــای دیگــری تعریف شــده‌اند، در حالی‌که اعضــای جمیع ایــن خانواده‌های مختلف *«اعداد حقیقی»* (real numbers) هســتند که در مقابل *«اعداد موهومی»* (imaginary numbers) تعریف شده‌اند.

گفتن اینکه عددی عضو خانوادۀ معینی است، طریق مختصر توصیف ویژگی‌های گوناگون آن است و اینکه چه نوع پرسش‌های ریاضی می‌توان به طریقی سودمند دربارۀ آن مطرح کرد. غالباً خانواده‌های اعداد از تولید توابعی به‌وجود می‌آیند که چگونگی ســاخت دنباله‌ای از اعداد را توصیف می‌کننــد. به طریــق دیگر، می‌توانیم یک تابع یا قاعــده را برای توصیف خانواده‌هایی تشکیل دهیم که به‌طور شهودی آن‌ها را می‌شناسیم.

به‌عنوان نمونه، ما به‌طور غریزی اعداد زوج را می‌شناســیم، اما آن‌ها چیستند؟ از لحاظ ریاضی می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت *جمیع اعداد طبیعی به‌صــورت ۲×n ی کــه در آن‌ها n عــددی طبیعی اســت*، تعریف کنیم. همچنین، اعداد فرد اعدادی طبیعی به‌صورت ۲n+۱اند، در حالی‌که اعداد اول اعدادی بزرگ‌تر از ۱اند که تنها مقســوم‌علیه‌های آن‌ها ۱ و خودشان هستند.

خانواده‌های دیگری نیز به‌طور طبیعی در ریاضیات رخ می‌دهند. مثلاً در «اعداد فیبوناتچی» (... ،۳۴، ۲۱، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱) هر عدد مجموع دو عدد پیشــین آن اســت. این الگو به‌طور طبیعی در زیست‌شناســی و ریاضیــات، هــر دو رخ می‌دهد. اعــداد فیبوناتچی به‌طــور تنگاتنگی با **نسبت طلایی** نیز مرتبط‌اند.

مثال‌های دیگر شــامل جدول‌های ضرب‌اند که با ضرب عدد صحیح مثبتی در عدد خاص دیگری ساخته می‌شوند، و مربع‌ها که در آن‌ها هر عدد حاصل‌ضرب یک عدد طبیعی در خودش است؛ یعنی n ضرب در n یا n^2، یا مربع n.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

لطیفهٔ اول

ریاضی‌دانی برای تعطیلات آخر نیم‌سال به یکی

بـود. بی‌مقدمه رو به چوپان کـرد و گفت: «آهای آقا، ببخشـید این گوسـفند رو چند می‌فروشی؟» چوپان گفت: «اونا فروشی نیستن!»

ریاضی‌دان کمی سـکوت کـرد و بعد گفت: «من می‌تونـم بدون شـمارش بهت بگم، چند تا گوسـفند تو گله‌ات داری. اگر درسـت گفتم یکیشـون مال من! قبوله؟»

چوپان سری به علامت تأیید تکان داد. ریاضی‌دان گفت: «۳۸۷ تا!»

چوپان با تعجب گفت: «درسته! برام دوری از یکی از گوسفندهام خیلی سخته، ولی خب قول دادم و باید به قولم عمل کنم، برو یکی‌شون رو بردار!»

ریاضی‌دان به سـراغ حیوان‌ها رفته و یکی از آن‌ها را برداشـت و بر دوش انداخت و آمادهٔ رفتن شد که با صدای چوپان مکث کـرد. چوپان گفت: «من می‌تونم بگم شـغل تو چیه و اگر درسـت بگم، باید اونو به من

لطیفهٔ دوم

روزی گروهی از ریاضی‌دانان و گروهی از مهندسان برای شرکت در یک سمینار دربارهٔ کاربردهای ریاضیات در مهندسی با قطار به شهری مسافرت می‌کردند. مهندسان هر کدام یک بلیت گرفته بودند، در حالی‌که ریاضی‌دانان همگی فقط یک بلیت خریده بودند. مهندسان با خنده و استهزا داشتند دربارهٔ سرنوشت آن‌ها موقع ورود مأمور کنترل بلیت با هم می‌گفتند. در همین هنگام یکی از ریاضی‌دان‌ها فریاد زد: «مأمور کنترل بلیت!» و ناگهان همهٔ ریاضی‌دان‌ها به سمت دست‌شویی قطار هجوم بردند و وارد آن شدند و در را بستند!

کمی بعد مأمور کنترل بلیت‌ها وارد سالن شد و از همهٔ مهندسان بلیت خواست و بعد از کنترل، به طرف در دست‌شویی رفت و به در ضربه‌هایی زد و گفت: «بلیت لطفاً!» یکی از ریاضی‌دان‌ها آن یک بلیت را از زیر در به او نشان داد! و مأمور از آنجا رفت و چند دقیقهٔ بعد ریاضی‌دان‌ها از دست‌شویی به‌جای خودشان بازگشتند.

بعد از پایان سمینار و موقع بازگشت مهندسان همگی یک بلیت خریدند و ریاضی‌دان‌ها هیچ بلیتی نخریدند! هنگام حرکت قطار، ناگهان یکی از ریاضی‌دان‌ها فریاد زد: «مأمور کنترل بلیت!» و همهٔ مهندسان به سمت دست‌شویی هجوم بردند و در را بستند. بعد یکی از ریاضی‌دان‌ها به طرف در دست‌شویی رفت و گفت: «بلیت لطفاً!»

لطیفهٔ سوم

روزی یک ریاضی‌دان، یک فیزیک‌دان و یک مهندس در یک قطار در حال سفر بودند. ناگهان پرنده‌ای سیاه‌رنگ از مقابل پنجرهٔ قطار گذشت. مهندس گفت: «چه جالب! معلوم می‌شه همهٔ پرنده‌های اینجا سیاه‌رنگ هستند!»

فیزیک‌دان گفت: «نه، معلوم می‌شه بعضی از پرنده‌های این شهر سیاه‌رنگ هستند.»

و ریاضی‌دان گفت: «نخیر، می‌شود گفت که لااقل یک پرنده در این شهر هست که لااقل یک طرف بدنش سیاه‌رنگ است!»

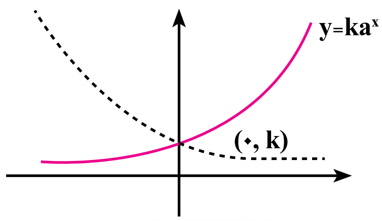
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مراد کریمی
دبیر ریاضی شهرکرد

نمـایی بـا جدول

اشاره

بـرای ورود به مطلـب، ابتدا به معرفی اجمالی تابع نمایی و بیان برخی از ویژگی‌های آن می‌پردازیم و سـپس روش تشـخیص تابع نمایـی را از روی جدول مطرح می‌کنیم و سـه روش یافتن ضابطهٔ تابع نمایی به کمک جدول را بیان خواهیم کرد.



تعریف تابع‌نمایی

هر تابعی به شکل کلی $y=f(x)=ka^x$ با شرایط $a>0$ و $a\neq 1$ و $k\neq 0$ یک تابع نمایی است.

ویژگی‌های تابع‌نمایی

۱. بـا توجه به تعریف تابع نمایی a نمی‌تواند منفی، صفر و یک باشد.

۲. دامنـهٔ تابع نمایی $y=ka^x$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

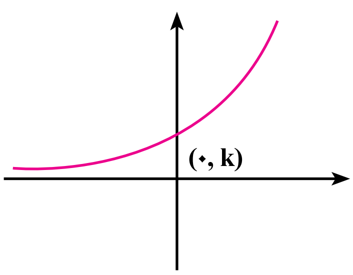
۳. برد تابع نمایـی $y=ka^x$ اگر $k>0$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، و اگر $k<0$ مجموعه اعداد حقیقی منفی است.

۴. تابـع نمایی $y=ka^x$ تابـع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

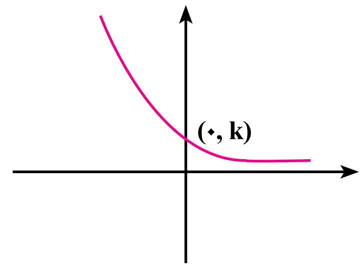
۵. تابع نمایـی $y=ka^x$ همـواره از ناحیه‌های اول و دوم، یا از ناحیه‌های سـوم و چهارم محورهای مختصات می‌گذرد.

۶. تابع نمایی $y=ka^x$ همواره از نقطهٔ $(0,k)$ می‌گذرد (محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض k قطع می‌کند).

۷. در تابـع $y=ka^x$ $(k>0\ ,\ a>1)$ بـا افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. بنابراین تابع افزایشـی است.



۸. در تابع $y=ka^x$ $(k>0\ ,0<a<1)$ با افزایش مقادیر x، مقادیـر y کاهـش می‌یابنـد. بنابراین تابعی کاهشی است.



الف) روش تشخیص تابع نمایی از روی جدول

می‌دانیم در توابع نمایی $y=ka^x$ ‏($a>۱$) همواره به ازای افزایش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی (متغیر مســتقل)، مقادیر خروجی (متغیر وابسته) در عدد ثابت و مثبت غیر یک ضرب می‌شوند. بنابراین، اگر در یک جدول مقادیر x و y از یک رابطه، داده شده باشد، چنانچه دامنهٔ تغییرات x به‌صــورت منظم و در یک فاصلهٔ معین باشــد (دنبالهٔ حسابی باشند) و میزان تغییرات مقادیر y بر اثر ضرب در یک عدد ثابت باشد (دنبالهٔ هندسی باشند)، داده‌های این جدول می‌توانند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشند.

● **مثال ۱.** مشخص کنید داده‌های مربوط به کدام‌یک از جداول زیر بیانگر تابع نمایی است.

	+۱	+۱	+۱	
x	۰	۱	۲	۳
y	۳	۶	۱۲	۲۴
	×۲	×۲	×۲	

جدول ۱.

حل جــدول ۱. با توجه به جدول، بــه ازای افزایش هــر واحد در مقادیر x (یک واحد)، مقادیر y در یک عدد ثابت (۲+) ضرب می‌شوند. پس جدول ۱ یک تابع نمایی را مشخص می‌کند.

	+۲	+۲	+۲	
x	۴	۶	۸	۱۰
y	۵	۹	۱۳	۱۷

جدول ۲.

حــل جدول ۲. با توجه به جدول، به ازای افزایش ۲ واحــدی در مقادیر x، مقادیر y در هیچ عدد ثابت مثبت غیر یک ضرب نمی‌شــوند. پس جدول ۲ یک تابع نمایی را مشخص نمی‌کند.

x	۱	۲	۴	۵
y	۲	۶	۱۸	۵۴
	×۳	×۳	×۳	

جدول ۳.

حــل جدول ۳. با توجه به جدول، با اینکه هر یک از مقادیــر y با ضــرب در یک عدد ثابــت (۳+) حاصل می‌شوند، ولی مقادیر x به مقدار ثابتی افزایش نمی‌یابند. پس جدول ۳ تابع نمایی را نمایش نمی‌دهد.

x	۱	۰	۱-	۲-
y	۴	۱	۲-	۵-

جدول ۴.

حــل جدول ۴. در جــدول ۴ دامنهٔ تغییرات x و y نامنظم اســت و علاوه بر آن، بعضی مقادیر y، عددهای منفی هســتند. بنابراین جدول ۴ تابع نمایی را نمایش نمی‌دهد.

ب) روش‌هــای پیدا کردن ضابطهٔ تابع نمایی از روی جدول

روش اول: قرار دادن مختصات دو نقطه در تابع:

در این روش مختصــات دو نقطهٔ دلخواه از جدول را در تابع $f(x)=ka^x$ قرار می‌دهیم و ســپس با تقســیم کردن جمله درجهٔ بیشتر بر جملهٔ با درجهٔ کمتر، ابتدا مقدار a و ســپس مقدار k را به‌دست می‌آوریم و در ضابطهٔ کلی تابع نمایی قرار می‌دهیم.

● **مثــال ۲.** ضابطهٔ تابع مربوط بــه جدول‌های زیر را به دست آورید.

x	۱	۳	۵
y	۱۹۲-	۲۴-	۳-

جدول ۵.

$$f(۱)=-۱۹۲ \Rightarrow f(۱)=ka^{۱}=-۱۹۲$$

$$f(۳)=-۲۴ \Rightarrow f(۳)=ka^{۳}=-۲۴$$

$$\Rightarrow \frac{f(۳)}{f(۱)}=\frac{ka^{۳}}{ka^{۱}}=\frac{-۲۴}{-۱۹۲} \Rightarrow a^{۲}=\frac{۱}{۸} \xRightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{\sqrt{۸}}$$

$$ka=-۱۹۲ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۸}}k=-۱۹۲$$

$$\Rightarrow k=\frac{-۱۹۲}{\frac{۱}{\sqrt{۸}}}=-۱۹۲\sqrt{۸}$$

$$f(x)=ka^x \Rightarrow f(x)=-۱۹۲(\sqrt{۸})(\frac{۱}{\sqrt{۸}})^x$$

x	۰	۱۰	۲۰
y	۸۰	۴۰	۲۰

جدول ۶.

$$f(۰)=۸۰ \Rightarrow f(۰)=ka^۰=۸۰$$

$$f(۱۰)=۴۰ \Rightarrow f(۱۰)=ka^{۱۰}=۴۰$$

$$\Rightarrow \frac{f(۱۰)}{f(۰)}=\frac{ka^{۱۰}}{ka^۰}=\frac{۴۰}{۸۰} \Rightarrow a^{۱۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}}$$

$$ka^۰=۸۰ \Rightarrow k=۸۰$$

$$f(x)=ka^x \Rightarrow f(x)=۸۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{x}{۱۰}}$$

روش دوم: استفاده از دنبالهٔ هندسی: می‌دانیم که بعضـی از مقادیر یک تابع نمایی، یک دنبالهٔ هندسـی با قدرنسبت مثبت و غیر یک و با دامنهٔ N و ضابطهٔ $y=ka^x$ است. زیرا جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=a_1.q^{n-1}$ یا به‌صورت $t_n=\frac{a_1}{q}.q^n$ نوشته می‌شود که همان $y=k.a^x$ با دامنهٔ N است. بنابراین، برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع نمایی از روی دنبالهٔ هندسی، کافی است x را به n و f(x) را به t_n تبدیل و سپس نقش n و x را عوض کنیم.

● **مثال ۳.** ضابطـهٔ تابع مربوط به جدول ۷ را به‌دسـت آورید.

x	۰	۱۰	۲۰
y	۸۰	۴۰	۲۰

جدول ۷.

$$t_{۱۰}=۴۰ \Rightarrow t_{۱۰}=aq^۹=۴۰$$

$$t_{۲۰}=۲۰ \Rightarrow t_{۲۰}=aq^{۱۹}=۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{t_{۲۰}}{t_{۱۰}}=\frac{aq^{۱۹}}{aq^۹}=\frac{۲۰}{۴۰} \Rightarrow q^{۱۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow q=\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}}$$

$$aq^۹=۴۰ \Rightarrow a\left[\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}}\right]^۹=۴۰ \Rightarrow a=\frac{۴۰}{\left[(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۰}}\right]^۹}=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۹}{۱۰}}}$$

$$t_n=a.q^{n-۱}=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۹}{۱۰}}}\left[(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۰}}\right]^{n-۱}=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۹}{۱۰}}}\left[(\frac{۱}{۲})\right]^{\frac{n}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}}$$

$$=۴۰\times(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۹}{۱۰}}=۴۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{n-۱۰}{۱۰}}=۴۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}-۱}$$

$$=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^۱}\times(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}}=۸۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}} \Rightarrow f(x)=۸۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{x}{۱۰}}$$

روش سـوم: استفاده از دستور ($y=k.q^{\frac{x}{d}}$): در این دسـتور، k ضریب، q قدرنسبت دنبالهٔ هندسی و d قدر نسـبت دنبالهٔ حسابی است (در این روش به کمک یک نقطهٔ دلخواه مقدار k را محاسبه می‌کنیم).

● **مثـال ۴.** ضابطهٔ تابع مربوط به جدول ۸ را به‌دسـت آورید.

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

جدول ۸.

قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مقادیر x $=d=۲۰-۱۰=۱۰$

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مقادیر y $=q=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$

$$y=k.q^{\frac{x}{d}} \Rightarrow ۱۶=k.(\frac{۳}{۴})^{\frac{۱۰}{۱۰}}=\frac{۳}{۴}k \Rightarrow k=\frac{۱۶}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۶۴}{۳}$$

$$y=k.q^{\frac{x}{d}} \Rightarrow y=\frac{۶۴}{۳}.(\frac{۳}{۴})^{\frac{x}{۱۰}}$$

تمریـن: ضابطهٔ مربوط به جدول ۹ را از سـه روش فوق به‌دست آورید.

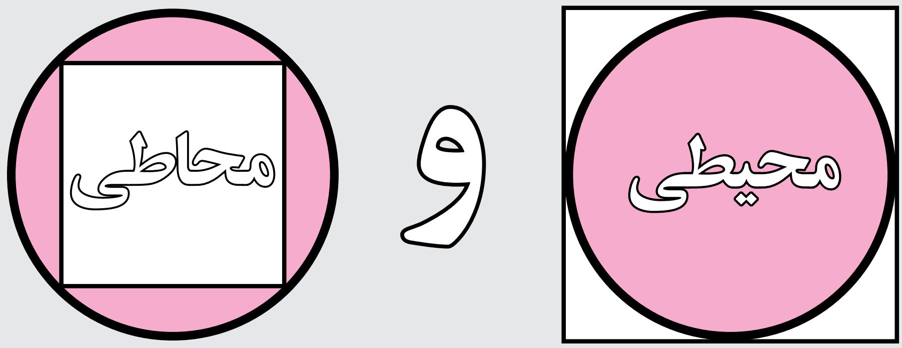
x	۱	۲	۳
y	۶	۳	$\frac{۳}{۲}$

جدول ۹.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هوشنگ شرقی

دربارۀ چهارضلعی‌های



بیشتر بدانیم

اشاره

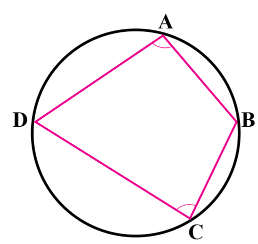
دربارۀ چهارضلعی‌های محیطی و محاطی در بحث دایره‌ها و در کتاب هندسۀ ۲ بحث شده است. اما قضایا و بحث‌های تکمیلی آن‌ها که می‌توانند به درک بهتر دانش‌آموزان از این موضوع منجر شوند، آن‌چنان که بایسته است مورد توجه قرار نگرفته‌اند. در اینجا می‌خواهیم به کنکاشی عمیق‌تر در این زمینه بپردازیم.

چهارضلعی‌های محاطی

چنانچه می‌دانید، چهارضلعی ABCD را محاطی گوییم، هرگاه از رئوس آن دایره‌ای بگذرد. از کتاب درسی نیز می‌دانیم که یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر، مجموع دو زاویۀ داخلی روبه‌روی آن 180° باشد:

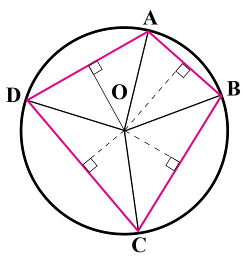
ABCD محاطی است $\Leftrightarrow$ $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ (یا $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$)

در مورد این چهارضلعی قضایای تکمیلی زیر برقرار هستند.

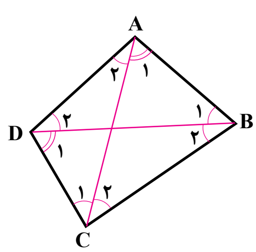


۱. در هر چهارضلعی محاطی، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه همرس‌اند. نقطۀ همرسی عمودمنصف‌ها مرکز دایرۀ محیطی چهارضلعی است.

OA=OB=OC=OD=R

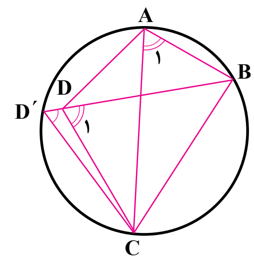


۲. هرگاه در یک چهار ضلعی، دو زاویۀ روبه‌رو به یک ضلع با هم برابر باشند، چهار ضلعی، محاطی است و برعکس. یعنی در شکل زیر، اگر $\hat{A}_1=\hat{D}_1$ (و یا $\hat{B}_2=\hat{A}_2$ و یا $\hat{B}_1=\hat{C}_1$ یا $\hat{D}_2=\hat{C}_2$) در این صورت ABCD محاطی است و از A و B و C و D دایره‌ای می‌گذرد و بر عکس؛ یعنی اگر ABCD محاطی باشد، آن‌گاه $\hat{A}_1=\hat{D}_1$ (و $\hat{B}_2=\hat{A}_2$ و...). اثبات قضیۀ عکس، با توجه به زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان، ساده است، اما برای اثبات قضیۀ اصلی، از برهان خلف استفاده می‌کنیم.



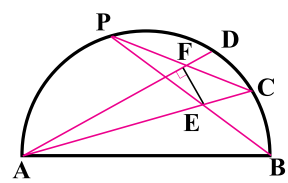
فرض کنیم در شکل داریم: $\hat{A}_1=\hat{D}_1$. می‌خواهیم نشان دهیم از A، B، C و D یک دایره می‌گذرد. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. (چگونه؟) اگر این دایره از D بگذرد که حکم ثابت شده است. اما اگر نگذرد، نقطهٔ D درون، یا بیرون این دایره واقع می‌شود. اگر D درون دایره باشد، مطابق شکل، امتداد BD دایره را در D´ قطع می‌کند. D´ را به C وصل می‌کنیم. حال با توجه به شکل داریم:

$$\hat{D}'=\hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \text{ و (فرض) } \hat{D}_1=\hat{A}_1 \Rightarrow \hat{D}'=\hat{D}_1$$

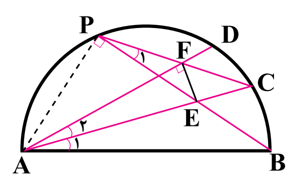


ولی مطابق شکل داریم: $\hat{D}_1>\hat{D}'$ (چرا؟) و این تناقض است. در حالتی هم که نقطهٔ D بیرون دایره بیفتد، نشان دهید به تناقضی مشابه می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است و باید ABCD محاطی باشد. به نمونه‌هایی از کاربردهای این قضیه توجه کنید.

● **مثال ۱.** در شکل زیر AB قطر نیم‌دایره و C وسط کمان BD است. اگر P نقطه‌ای دلخواه بر محیط نیم‌دایره باشد، اندازهٔ زاویه AFE را به دست آورید.

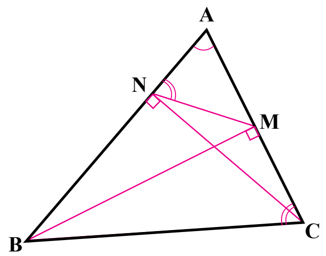


حل: طبق فرض: $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ و در نتیجه:



$\hat{A}_1=\hat{A}_2$. (چرا؟) همچنین $\hat{P}_1$ و $\hat{A}$ زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان و در نتیجه مساوی‌اند، پس $\hat{P}_1=\hat{A}_1=\hat{A}_2$. ولی $\hat{P}_1$ و $\hat{A}_2$ هر دو روبه‌رو به EF هستند، پس طبق قضیهٔ گفته شده، چهارضلعی PFEA محاطی است. در نتیجه: $A\hat{P}E=A\hat{F}E$. (چرا؟) ولی زاویهٔ APE (یا $A\hat{P}B$) در نیم‌دایره، محاطی روبه‌رو به قطر و در نتیجه قائمه است. پس: $A\hat{F}E=90^\circ$.

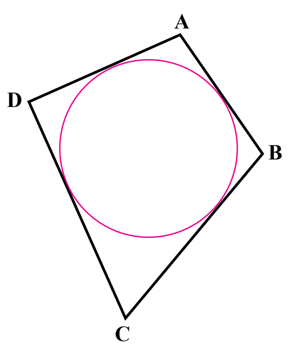
● **مثال ۲.** در مثلث ABC، ارتفاع‌های BM و CN را رسم کرده‌ایم. نشان دهید: $\Delta AMN\sim\Delta ABC$



حل: چون زوایای قائمهٔ M و N هر دو روبه‌رو به BC هستند، پس MNBC محاطی است و زوایای MNB و C مکمل هم هستند. چون $M\hat{N}B$ و $M\hat{N}A$ نیز مکمل هم هستند، پس: $\hat{C}=M\hat{N}A$ و چون زاویهٔ A در دو مثلث AMN و ABC مشترک است، لذا دو مثلث دو زاویهٔ برابر دارند و متشابهند.

چهارضلعی‌های محیطی

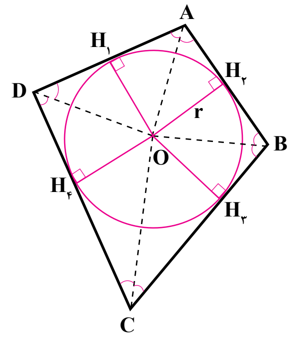
چنانچه می‌دانیم، یک چهارضلعی را محیطی گوییم، هرگاه مانند شکل زیر، اضلاع آن بر دایره‌ای مماس باشند و در این صورت، دایرهٔ مزبور را دایرهٔ محاطی می‌گوییم. از کتاب درسی می‌دانیم، یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن با هم مساوی باشند؛ یعنی ABCD⇔AB+CD=AD+BC محیطی.



اما قضیهٔ دیگری هم در مورد این چهار ضلعی‌ها وجود دارد که به آن اشاره می‌کنیم:

«در هر چهارضلعی محیطی نیم‌سازهای زوایای داخلی چهارضلعی در یک نقطه همرس‌اند و این نقطه، همان مرکز دایرهٔ محاطی است.»

$OH_1=OH_2=OH_3=OH_4=r$



عکس قضیهٔ فوق نیز برقرار است؛ یعنی:

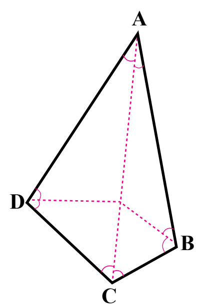
«هر چهارضلعی که در آن نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس باشند، یک چهارضلعی محیطی است و نقطهٔ همرسی نیم‌سازها، مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است.»

درستی این قضیه و قضیهٔ عکس را به‌عنوان تمرین اثبات کنید.

● **مثال**. در چهارضلعی ABCD، نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس‌اند. اگر AC و BD اقطار چهارضلعی باشند و AD=۲CD و AB=۳BC، CD چند برابر BC است؟

حل: چون نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس‌اند، پس چهارضلعی محیطی است و در نتیجه:

AD+BC=AB+CD

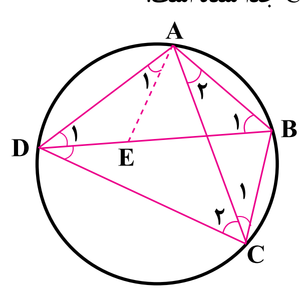


به کمک مفروضات مسئله داریم:

۲CD+BC=۳BC+CD⇒CD=۲BC

تمرین

۱. در شکل زیر ABCD چهارضلعی محاطی است و زاویهٔ DAE مساوی زاویهٔ CAB جدا شده است.



الف) نشان دهید:

ΔADE~ΔABC

و از آنجا نسبت تشابه را بنویسید و نتیجه بگیرید:

AD.BC=AC.DE (۱)

ب) نشان دهید:

ΔABE~ΔACD

و از آنجا نسبت تشابه را بنویسید و نتیجه بگیرید:

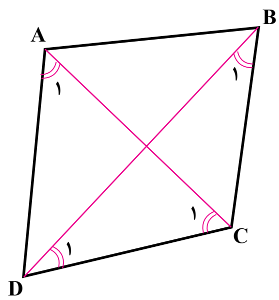
AB.CD=AC.BE (۲)

ج) از جمع کردن طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) ثابت کنید:

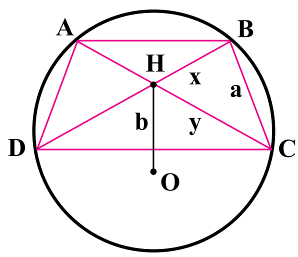
AD.BC+AB.CD=AC.BD (قضیهٔ بطلمیوس)

۲. به کمک قضیهٔ بطلمیوس مسائل زیر را حل کنید:

الف) در شکل زیر داریم: $\hat{A}_1=\hat{B}_1=\hat{C}_1=\hat{D}_1$، AB=۵ و BD=AC=BC+۲. طول‌های اضلاع و اقطار چهارضلعی را به‌دست آورید.



ب) در شکل زیر ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محاط در دایرهٔ واحد است. فرض کنید y>x، در این صورت y-x برابر است با:



الف) $(ab)^2$ ب) $a\sqrt{b}$ ج) ab

د) $b\sqrt{a}$ هـ) $\sqrt{ab}$

(مرحلهٔ اول پانزدهمین المپیاد ریاضی ایران)

راهنمایی: نشان دهید HBCO محاطی است.

۳. ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی با محیط ۲P و مساحت S، شعاع دایرهٔ محاطی از دستور $r=\frac{S}{P}$ به‌دست آید.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

سیمین افروزان و فریده کمالی‌محمدزاده
دبیران ریاضی منطقهٔ ۲ تهران

نمودار رابطه و تشخیص هم‌ارزی

چکیده

رابطهٔ هم‌ارزی R روی یک مجموعه ناتهی مانند A ($R\subseteq A\times A$)، رابطه‌ای است که دارای سه خاصیت «بازتابی» (به ازای هر $x\in A$، xRx)، «تقارنی» (اگر xRy آن‌گاه yRx) و «ترایایی» (اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz) باشد. یک افراز از A، مجموعه‌ای است که عضوهای آن زیرمجموعه‌های ناتهی از A هستند که اشتراک دو به دو این زیرمجموعه‌ها تهی، و اجتماع آن‌ها A است. هر رابطهٔ هم‌ارزی روی A، آن را به زیرمجموعه‌هایی افراز می‌کند که این رابطه بین عضوهای هر کدام از آن زیرمجموعه‌ها برقرار است. هر یک از این زیرمجموعه‌ها یک «کلاس هم‌ارزی» نامیده می‌شوند. مجموعهٔ این کلاس‌ها یک افراز از آن مجموعه است.

«یک رابطه روی یک مجموعه هم‌ارزی است، اگر و تنها اگر آن بتواند مجموعه را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز کند.»

در این مطالعه با استناد به قضیهٔ دو شرطی فوق به بررسی رابطهٔ هم‌ارزی و معرفی افراز متناظر آن با به تصویر کشیدن کلاس‌های هم‌ارزی پرداخته شده است. بالاخص در صفحهٔ R^2 شهود افرازها نشان می‌دهد که چگونه می‌توان صفحه را با حرکت در کلاس‌های هم‌ارزی جارو کرد. در پایان راهکاری آسان و سریع برای تشخیص هم‌ارزی‌های مطرح شده در کتاب‌های دبیرستانی که روی R^2 و یا بخشی از آن تعریف شده‌اند، ارائه خواهد شد.

روش‌های بررسی هم‌ارزی بودن یک رابطه

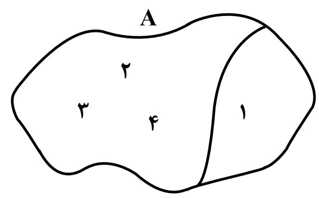
احراز سه ویژگی «بازتابی» (انعکاسی)، «تقارنی» و «ترایایی» (تعدی) در یک رابطه، نشان می‌دهد که آن رابطه هم‌ارزی است. بدون بررسی مستقیم سه ویژگی مذکور در کتاب‌های درسی دبیرستان سه روش برای بررسی هم‌ارزی بودن یک رابطه وجود دارد:

۱. تبدیل رابطه به یک گراف جهت‌دار.
۲. تبدیل رابطه به یک ماتریس مجاورت.
۳. تبدیل رابطه به یک افراز با تشکیل کلاس‌های هم‌ارزی در صورت امکان.

به دو روش اول که تنها در فضاهای گسسته قابل استفاده‌اند، در کتاب ریاضیات گسستهٔ سال چهارم به‌خوبی پرداخته شده است. آنچه خواهید خواند روش سوم برای تشخیص هم‌ارزی‌ها به‌ویژه در فضای پیوستهٔ R^2 است.

افراز یک مجموعه

زیرمجموعه‌های ناتهی و مجزای A که اجتماع آن‌ها A است، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که آن را یک افراز از آن مجموعه گویند. برای مثال، اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، آن‌گاه: $P=\{\{۱\},\{۲,۳,۴\}\}$ یک افراز دوبخشی از مجموعهٔ A است (شکل ۱).



شکل ۱.

کلاس‌های هم‌ارزی

اگر R یک رابطه هم‌ارزی در مجموعهٔ ناتهی A باشد، مجموعهٔ $\{x\in A|xRa\}$ شامل a[۱] را که با نماد $[a]$ نشان می‌دهند، کلاس هم‌ارزی a گویند.

خواص کلاس‌های هم‌ارزی

اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ ناتهی A باشد:

۱. به ازای هر $x\in A$، $x\in[x]$.

۲. اگر $y\in[x]$، $x\in[y]$ و آن‌گاه $[x]=[y]$.

۳. به ازای هر $x,y\in A$، $[x]=[y]$ یا $[x]\neq[y]$.

هم‌ارزی و افراز

قضیهٔ بنیادی زیر حکم می‌کند که یک رابطهٔ هم‌ارزی بین اعضای یک مجموعه، افرازی طبیعی به مجموعه می‌دهد.

قضیه: فرض کنید P یک افراز دلخواه از مجموعهٔ ناتهی A باشد. اگر رابطهٔ R در A به صورت:

یک مجموعه از عضوهای P مانند S وجود داشته باشد به‌طوری‌که $xRy \Leftrightarrow x,y\in S$

تعریف شود، آن‌گاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی و افراز P مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی R است.

● **مثال ۱.** اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $P=\{\{۱\},\{۲,۳,۴\}\}$ یک افراز دو بخشی از مجموعهٔ A باشد، رابطهٔ هم‌ارزی مربوط به آن را مشخص کنید و همهٔ کلاس‌های هم‌ارزی آن را بنویسید.

حل:

$R=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$[۱]=\{x\in A,xR۱\}=\{۱\},$

$[۲]=\{x\in A,xR۲\}=\{۲,۳,۴\}=[۳]=[۴]$

$\rightarrow P=\{[۱],[۲]\}$

● **مثال ۲.** نشان دهید رابطهٔ $xRa\Leftrightarrow ۲|x-a$، $x,a\in Z$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ اعداد صحیح است.

حل: $۲|x-a\rightarrow x-a=۲k,\ k\in Z\rightarrow x=۲k+a$

با تغییر a روی اعداد صحیح دو کلاس هم‌ارزی روی Z خواهیم داشت. اگر a زوج باشد، x هم زوج است و اگر a فرد باشد، x هم فرد است. لذا رابطهٔ تعریف شده روی Z آن را به مجموعهٔ اعداد فرد و مجموعهٔ اعداد زوج افراز می‌کند:

$[۰]=\{...,-۴,-۲,۰,۲,۴,...\},\ [۱]=\{...,-۳,-۱,۱,۳,...\},$

$P=\{[۰],[۱]\},\ Z=[۰]\cup[۱].$

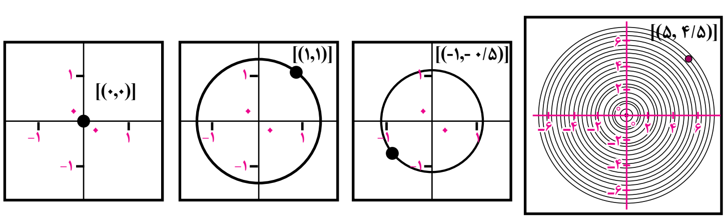
برای تشخیص هم‌ارزی بودن یک رابطه در $R^۲$، با توجه به رابطهٔ تنگاتنگ هم‌ارزی و افراز، می‌توان به قابلیت افراز صفحه توسط آن رابطه با رسم نمودار مربوط به آن پرداخت. اگر یک رابطه روی $R^۲$ یا بخش پیوسته‌ای از آن، یک افراز متشکل از منحنی‌های دوبه‌دو مجزا پدید آورد که تمام صفحه را جارو کند، آن رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید:

● **مثال ۳.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی $R^۲$ تحقیق کنید[۲].

$(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow x^۲-b^۲=a^۲-y^۲$

حل: با مرتب کردن تساوی به‌طوری‌که جملاتی که تنها شامل x و y هستند در یک طرف آن، و جملاتی که تنها شامل a و b هستند در طرف دیگر تساوی باشند، داریم:

$(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow x^۲+y^۲=a^۲+b^۲$. اگر $a^۲+b^۲=c$، آن‌گاه $x^۲+y^۲=c,\ c\geq ۰$ معادلهٔ یک دسته دایره است. این دایره‌ها تمام صفحه را می‌پوشانند، بنابراین R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و هر دایره یک کلاس هم‌ارزی از این افراز است (شکل ۲).



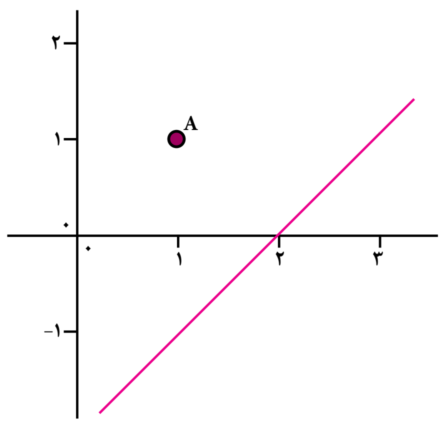
شکل ۲. از چپ به راست: کلاس هم‌ارزی $[(۰,۰)]$، کلاس $[(۱,۱)]$، کلاس $[(-۱,-۰/۵)]$ و نمایی از همهٔ کلاس‌ها که تمام صفحه را می‌پوشانند.

توجه کنید که اگر $F(x,y)=x^2+y^2$، آن‌گاه رابطهٔ هم‌ارزی $F(x,y)=F(a,b)$ یک افراز از صفحهٔ R^2 است.

● **مثال۴.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی R^2 تحقیق کنید.

حل:

□ $(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow x-b=$ **حل:** $x-b=y+a\to x-y=a+b$. اگر $F(x,y)=x-y$، آن‌گاه از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود: $F(x,y)\neq F(a,b)$. تنها در حالتی که b مساوی صفر باشد، تساوی برقرار است. هر نقطهٔ دلخواه مانند (a,b) در صفحه با نقاط خط $y=x-b-a$ در رابطه است، ولی خط مذکور از آن نقطه نمی‌گذرد. این مطلب نشان می‌دهد که رابطه خاصیت بازتابی ندارد. نقطه فقط در حالتی که روی محور طول‌ها باشد، روی خط موردنظر قرار می‌گیرد. همچنین، خواص دیگر هم‌ارزی برای رابطهٔ R برقرار نیست (شکل ۳).



شکل۳. نقطهٔ $A(1,1)$ با نقاط خط $y=x-2$ در رابطه است، ولی نقطه روی خط قرار ندارد.

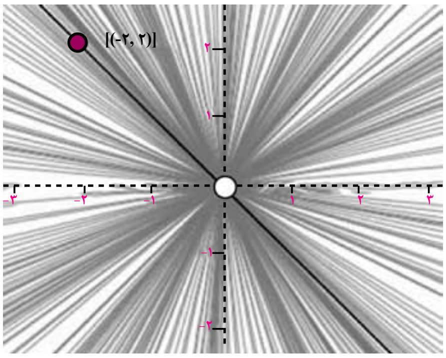
● **مثال۵.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی مجموعه $R\times(R.\{0\})$ بررسی کنید.

$(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow xb=ya$

حل:

$$xb = ya \to \frac{x}{y}=\frac{a}{b}, y,b\neq 0 \to F(x,y)=\frac{x}{y}=F(a,b)$$

R یک رابطهٔ هم‌ارزی است. تمام خطوطی که از مبدأ می‌گذرند (غیر از محور طول‌ها) ولی شامل مبدأ نیستند، کلیهٔ کلاس‌های هم‌ارزی را تشکیل می‌دهند. این خطوط اشتراکی ندارند و تمام $R\times(R-\{0\})$ را جارو می‌کنند (شکل ۴).

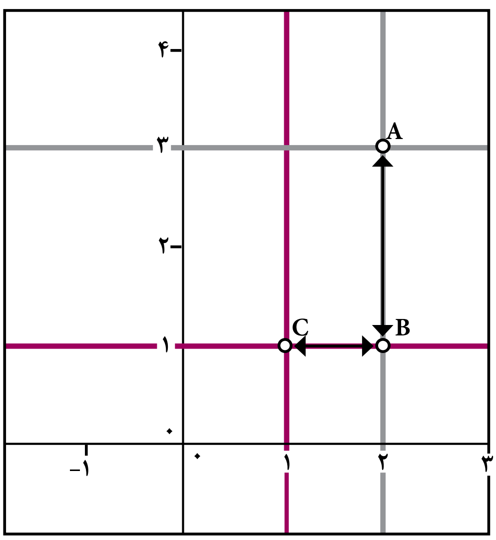


شکل ۴. افراز R روی $R\times(R-\{0\})$

● **مثال۶.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی R^2 بررسی کنید.

$(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow(x-a)(y-b)=0$

حل: $(x-a)(y-b)=0\to x=a$ یا $y=b$. هر نقطه در صفحه با نقاط دو خط موازی محورهای مختصات که از آن نقطه عبور می‌کند، در رابطه است. این خطوط صلیبی یکدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه یک افراز از صفحهٔ R^2 نیستند (شکل ۵).



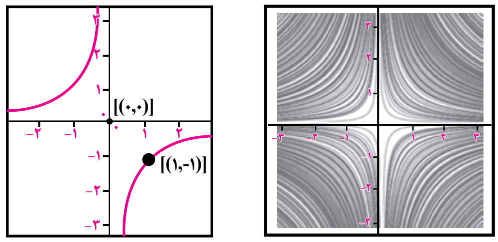
شکل۵. رابطهٔ R خاصیت ترایایی ندارد.

A R B, B R C; A~~R~~C

● **مثال۷.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی R^2 بررسی کنید.

$(x,y)R(a,b)\Leftrightarrow xy=ab$

حل: $xy=ab\to F(x,y)=xy=F(a,b)$. رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است. محورهای مختصات کلاس هم‌ارزی $[(0,0)]$ است (شکل ۶).

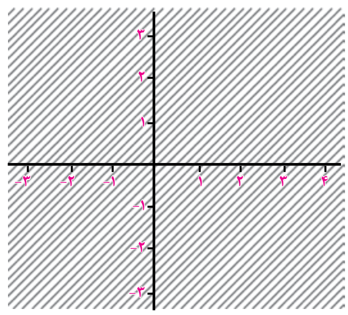


شکل ۶. از چپ به راست: دو کلاس از رابطهٔ R، تمامی کلاس‌های هم‌ارزی

● **مثال ۸.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی R^2 بررسی کنید.

$(x,y)R(a,b) \Leftrightarrow x+b=y+a$

حل: چون $x+b=y+a \rightarrow x-y=a-b$، R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و صفحه را به خطوط موازی افراز می‌کند (شکل ۷).

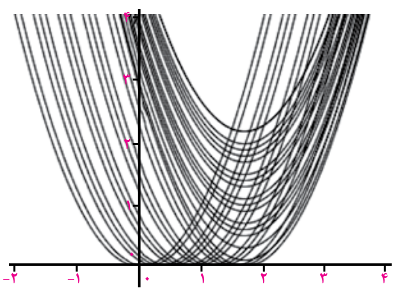


شکل ۷.

● **مثال ۹.** هم‌ارزی بودن رابطهٔ زیر را روی R^2 بررسی کنید.

$(x,y)R(a,b) \Leftrightarrow y-b=(x-a)^2$

حل: در این مثال نمی‌توان x و y را از a و b جدا کرد و به یک طرف تساوی انتقال داد. رابطهٔ R متضمن انتقال منحنی $y=x^2$ در صفحه است. منحنی‌های حاصل یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا R یک رابطهٔ هم‌ارزی نیست (شکل ۸).

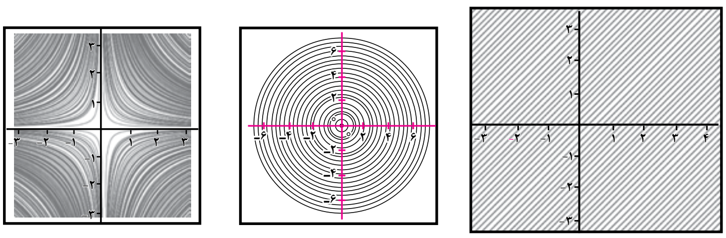


شکل ۸. نمایی از برخی از منحنی‌های حاصل از رابطهٔ R.

نتیجه‌گیری نهایی: تشخیص هم‌ارزی بودن رابطه در صفحه به روایت شهود

برای تشخیص هم‌ارزی بودن یک رابطه در R^2 می‌توان به قابلیت افراز صفحه با رسم نمودار مربوط به آن پرداخت. برخی از روابط تعریف شده در R^2 به‌سادگی به معادلهٔ (*) $F(x,y)=F(a,b)$ و یا (**) $F(x,y)\neq F(a,b)$ تبدیل می‌شوند. روابطی که در کتاب‌های دبیرستانی مطرح شده‌اند، از این دست روابط هستند. رابطهٔ متناظر (*) یک رابطهٔ هم‌ارزی است، ولی رابطهٔ مربوط به (**) هم‌ارزی نیست.

هر رابطهٔ هم‌ارزی در صفحه را می‌توان به توانایی نقاش زبردستی تشبیه کرد که هربار که قلم‌مو را بر صفحه می‌کشد، یک کلاس را ترسیم می‌کند؛ بدون آنکه هیچ کلاسی قطره رنگی از کلاس دیگر به خود گیرد و به این کار ادامه می‌دهد تا تمام صفحه رنگین شود.



شکل ۹.

پی‌نوشت‌ها

۱. هر عضو با خودش در رابطه است؛ پس $a\in[a]$.

۲. در این مثال‌ها، برای ملموس شدن نمودار مربوط به رابطه، یکی از زوج‌های مرتب رابطه با حروف (x,y) مشخص شده است.

۴ پرسش‌های پیکارجو!

معادلهٔ $2x^2 - 4\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{4}{3}} + 8x + 16x^{\frac{2}{3}} = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

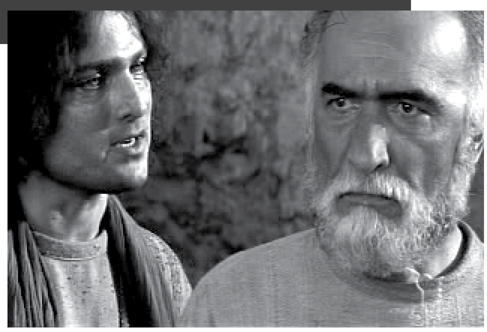
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

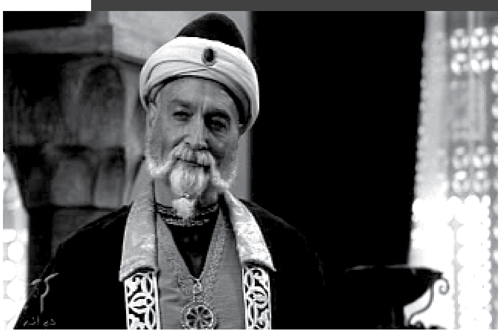
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

احسان یارمحمدی

شهرآشوب

- **نام فیلم:** شهرآشوب
- **کارگردان:** یدالله صمدی
- **تهیه کننده:** محسن علی اکبری
- **نویسنده:** فریدون دانشمند
- **بازیگران:** حسین یاری، جعفر دهقان، محمود پاکنیت، سام درخشانی، الهام حمیدی، سعید نیک‌پور، محمد صادقی، رویا تیموریان و بهزاد خداویسی
- **موسیقی:** محمدرضا درویشی
- **فیلم‌برداری:** حسن پویا
- **تدوین:** مهرداد خوشبخت
- **مدت فیلم:** ۹۰ دقیقه
- **محصول:** ایران
- **سال تولید:** ۱۳۸۴
- **زبان:** فارسی





موضوع فیلم «شهرآشوب» رسالهٔ $\sin 1^\circ$ **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** است که توسط دوست و شاگرد همیشگی وی، **معین‌الدین کاشانی** حفظ و نگهداری می‌شود. در این بین فرد بد سرشتی وجود دارد که می‌کوشد قتل جمشید کاشانی را به معین‌الدین کاشانی نسبت دهد، رسالهٔ $\sin 1^\circ$ را از وی با استفاده از هر روش غیرانسانی برباید و افتخار تألیف این رساله را از آن **اُلُغ بیگ** سازد. اما از آنجا که تماشای این فیلم نیازمند آگاهی از مواردی دربارهٔ دوران زندگی، دستاوردها و نیز جایگاه علمی جمشید کاشانی نزد جهانیان است، بنابراین نخست به شرح آن‌ها می‌پردازیم و سپس موضوع فیلم را پی‌می‌گیریم.

تیموریان دودمانی ترک تبار بودند که بین سال‌های ۱۳۷۰ تا ۱۵۰۶ میلادی بر قسمت عمده‌ای از آسیای میانه فرمانروایی می‌کردند. این امپراتوری توسط **تیمور[1] گورکان**، مقلب به «تیمور لنگ» بنیان نهاده شد و نقش مهمی را در اعتلای فرهنگ و دانش در آن دوره از خود بر جای نهاد. تیمور مردی بود که به دانش و هنر علاقهٔ فراوان داشت و همواره به دانشمندان و هنرمندان احترام بسیار می‌گذاشت. این ویژگی‌های او باعث شده بود که وی افراد زیادی از برجسته‌ترین نقاشان، معماران، شاعران، فقها و دانشمندان را در محافل و دربار خود داشته باشد.

بعد از تیمور پسرش **معین‌الدین شاهرخ تیموری** ملقب به «شاهرخ شاه» فرمانروای سلسلهٔ تیموریان شد. او نیز به‌مانند پدر فردی هنرپرور، ادب دوست و دانش مسلک بود و با رفتار و منش خود باعث ایجاد تحولات بزرگ فرهنگی و هنری در عصر بعد از تیمور لنگ شد. بعد از شاهرخ شاه فرزندش غیاث‌الدین بایسُنقُر مشهور به «بایسُنقُر میرزا» که او نیز مانند پدر و پدربزرگش از حامیان و مشوقان بزرگ هنر، معماری، فرهنگ و دانش بود، فرمانروای تیموریان شد. او یکی از برجسته‌ترین و ممتازترین خوش‌نویسان دوران خود به‌شمار می‌آید.

با مرگ بایسُنقُر میرزا، برادرش **الغ بیگ** به حکمرانی تیموریان رسید. اُلُغ بیگ را از عجایب تاریخ بشریت دانسته‌اند. او در حالی که پادشاه یکی از بزرگ‌ترین امپراتوری‌های زمان خود بود، ریاضی‌دانی برجسته، اخترشناسی

زبردست، و ادب دوست و دانش پروری بی‌بدیل بود. الغ بیـگ کتابی با عنوان «زیج[2] اُلُغ بیگ» تألیف کرد که از آن به عنوان دقیق‌ترین تقویم اسلامی یاد می‌شود. جایگاه علمی او در زمینهٔ ستاره‌شناسی تا این اندازه برجسته است که نام وی را در کرهٔ ماه در کنار بزرگ‌ترین دانشمندان علم اخترشناسی قرار داده‌اند.

دوران تولد و زندگانی غیاث‌الدین جمشید کاشانی مقارن با به قدرت رسیدن تیمور لنگ و حکمرانی جانشینان وی تا زمان اُلُغ بیگ بود. هر چند که زمان تولد و کودکی جمشید کاشانی با قتل و غارت امرای تیموری گذشـت، اما همان گونه که اشـاره کردیم، به دلیل علاقهٔ حاکمان تیموری به دانش و هنر، او توانسـت به صورت جسـته و گریختـه به مطالعه و کسـب دانش بپردازد و در نهایت به دربار اُلُغ بیگ راه پیدا کند و به این واسطه و با استفاده از حمایت‌های مالی و معنوی حکومت و شخص اُلُغ بیگ، به پژوهش و کنکاش در امور مورد علاقه‌اش بپردازد.

جمشـید بن مسـعود بن طبیب کاشانی، ملقب به غیاث‌الدین جمشـید کاشانی که در کشورهای غربی به «الکاشی» معروف است، از ز بردست‌ترین حساب‌دانان و آخرین ریاضی‌دان برجستهٔ دورهٔ اسـلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌آید. او اگرچه فیزیک‌دان بود، اما علاقه و اشـتیاقش بـه ریاضیات باعث شـد که به شمارشـگری ماهر تبدیل شود. به سبب همین اشتیاق، جمشید کاشانی بعدها به دسـتاوردهای ارزنده‌ای در ریاضیات نائل آمد و خدمات شایسته‌ای را در اخترشناسی از خود به جای گذاشت.

از مهم‌ترین دسـتاوردها و نوآوری‌های جمشید کاشـانی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱. گسـترش و ترویج کسـرهای اعشـاری به قیاس با کسـرهای شـصتگانی که در اخترشناسی متداول بود.

۲. محاسـبهٔ عدد π. جمشـید کاشـانی در «الرسالئ المُحیطیه» عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال پس از وی بدون رقیب ماند، محاسبه کرد.

۳. محاسـبهٔ $\sin 1^\circ$. جمشـید کاشـانی سـینوس (جیب) یک درجه را با استفاده از روش‌های خلاقانـه‌ای با کمک معادلهٔ درجهٔ سوم تا هفده رقم اعشار تعیین کرد، به گونه‌ای که هفده رقم اعشاری به دست آمده بـا مقداری که امروزه و با اسـتفاده از رایانه‌های پیشـرفته به دسـت می‌آید، یکسان است.

۴. تکمیـل و تصحیـح روش‌هـای قدیمی انجـام چهار عمل اصلی و ابداع روش‌های جدید برای آن‌ها. در واقع جمشید کاشانی بنیان‌گذار روش‌هـای کنونی چهار عمل اصلی و به ویژه دو عمل ضرب و تقسـیم است.

۵. دسته‌بندی معادلات درجهٔ اول، دوم، سوم و چهارم و نیز حل عددی معادلات درجهٔ چهارم و بالاتر.

۶. ابداع روش‌هـای کنونی برای پیدا کردن ریشـهٔ n- اُم عددی دلخواه که سـالیان بعد توسـط ریاضی‌دان ایتالیایی، **پائولو روفینـی**[3] (۱۸۲۲- ۱۷۶۵) و ریاضی‌دان انگلیسـی، **ویلیـام جـورج هورنـر**[4] (۱۸۳۷- ۱۷۸۶) مجدداً ابداع شد.

۷. نگارش مهم‌ترین کتاب دربارهٔ حساب در آن روزگار به نام «مفتاح الحساب».

۸. ساخت یک ابزار رصد برای اجرام آسمانی و محاسـبهٔ طول سـتارگان به نام «طَبَقُ المَناطِق» که جمشـید کاشـانی دربارهٔ چگونگـی کار بـا آن نیز رسـالهٔ «نُزهَئِ الحَدائِق» را به رشتهٔ تحریر درآورد.

۹. تصحیح زیج ایلخانی.

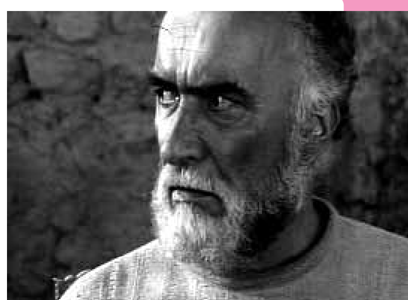
جمشـید کاشـانی در همهٔ آثارش خود را چنیـن معرفی کرده اسـت: «کم‌ترین بندگان خداوند (یا نیازمندترین بندگان خدا به رحمت او)، جمشید، پسر **مسـعود طبیب کاشانی**، پسر **محمود** پسر **محمد**.»

نظر پژوهشگران و بزرگان تاریخ علم دربارهٔ غیاث‌الدین جمشید کاشانی به این شرح است:

پاول لوکی[5] (۱۹۴۹ - ۱۸۸۴): پژوهشگر برجستهٔ آلمانی که بیش از هر تاریخ شناس دیگری در راه شناساندن ارزش آثار ریاضی این دانشمند بزرگ به جهانیان تلاش کرده، دربارهٔ آثار جمشید کاشانی چنین گفته است: پس از پژوهش دربارهٔ برخی آثار کاشانی که خوش‌بختانه بیشتر آن‌ها در کتابخانه‌های شرق و غرب موجود است، او را ریاضی‌دانی هوشمند، مخترع، نَقّاد و صاحب افکار عمیق یافتم. کاشانی از آثار ریاضی‌دانان پیش از خود آگاه و به ویژه در فن محاسبه و به کاربستن روش‌های تقریبی چیره‌دست بود. اگر الرساله المُحیطیهٔ او به دست ریاضی‌دانان غربی معاصر وی رسیده بود، از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل دربارهٔ اندازه‌گیری دایره (محاسبهٔ عدد π) بی‌نیاز می‌شدند. اگر نظریهٔ واضح و روش علمی وی در مورد شناساندن کسرهای اعشاری انتشار یافته بود، **فرانسوا وی‌یت**، **اِستِون** و **بورگی** ناچار نمی‌شدند که یک قرن و نیم پس از کاشانی نیروی فکری و عملی خود را برای از نو یافتن این کسرها به کار اندازند.

اِدوارد اِستورات کِندی[6]: پژوهشگر برجستهٔ آمریکایی دربارهٔ جمشید کاشانی چنین گفته است: پیش از هر چیز باید گفت که کاشانی حاسبی زبردست بود و در این فن مهارت شگفت‌انگیزی داشت. شاهد این ادعا آن است که وی با اعداد شصتگانی خالص به آسانی و روانی حساب می‌کرد. او کسرهای اعشاری را ابداع کرد و روش تکراری را در حساب به‌طور کامل و پیگیر به کار می‌بست. با چیره‌دستی مراحلی را تنظیم می‌کرد که بتواند حداکثر مقدار خطا را پیش‌بینی کند و در هر جا درستی اعمال را بیازماید.

آدولف- آندری پاولوویچ یوشکِویچ[7]: پژوهشگر برجستهٔ روسی در کتاب «تاریخ ریاضیات در سده‌های میانی» دربارهٔ جمشید کاشانی چنین گفته است: مفتاح‌الحساب کتابی درسی، دربارهٔ ریاضیات مقدماتی است که استادانه تألیف شده و مؤلف آنچه را که طبقات مختلف خوانندگان کتاب به آن نیاز داشته‌اند، در نظر گرفته است. این کتاب از حیث فراوانی و گوناگونی موارد، مطالب و روانی بیان تقریباً در میان همهٔ آثار ریاضی سده‌های میانه یگانه است.



فیلم شهرآشوب با این نوشته آغاز می‌شود:

«در سال ۸۳۲ هجری قمری رصدخانهٔ سمرقند به درخواست الغ بیگ، فرزند شاهرخ شاه و حاکم سمرقند، به دست غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان و اخترشناس جهان علم احداث شد. حاسدان و مغرضان او را به قتل رساندند و قتل او را به نزدیک‌ترین دوستش- طبیب و خوش‌نویس- معین‌الدین کاشانی نسبت دادند.»

موضوع فیلم شهر آشوب دربارهٔ دو رساله از غیاث‌الدین جمشید کاشانی است که بعد از مرگ وی توسط دوست و همکارش معین‌الدین کاشانی حفظ و نگهداری می‌شود. معین‌الدین کاشانی از سوی یکی از عمال دربار الُغ بیگ به نام **سوباتای**، متهم به قتل جمشید کاشانی می‌شود و برای حفظ جان خود و حراست از رسالهٔ $\sin 1^\circ$ از شهر سمرقند می‌گریزد و به شهر هرات می‌رود تا با بایسُنقُر میرزا، شاهزادهٔ تیموری- برادر الُغ بیگ- ملاقات کند. اما بین راه و هنگام ورود به هرات، اتفاقاتی رخ می‌دهند که زمینه را برای متهم شدن وی از جانب سوباتای به‌عنوان قاتل جمشید کاشانی و سارق رسالهٔ $\sin 1^\circ$ به‌صورت فزاینده‌ای مهیا می‌سازد.

در ادامه معین‌الدین کاشانی توسط سوباتای به شدت مجروح می‌شود و در آستانهٔ مرگ قرار می‌گیرد، اما در نهایت **آبتین** که دخترش توسط سوباتای به قتل رسیده است و دوست معین‌الدین کاشانی نیز هست، سوباتای را از پای درمی‌آورد و معین‌الدین نجات می‌یابد. بایسُنقُرمیرزا نیز در نامه‌ای به برادر خود الُغ بیگ، آنچه را که رخ داده است، بیان می‌کند و بدین‌وسیله معین‌الدین از قتل غیاث‌الدین جمشید کاشانی و نیز سرقت رسالهٔ $\sin 1^\circ$ تبرئه می‌شود.

البته در این مقاله سعی شد از پرداختن به روایت و جزئیات فیلم اجتناب شود تا علاقه‌مندان هنگام تماشای آن از هیجان و انگیزش کافی برخوردار باشند.

پی‌نوشت‌ها

۱. تیمور در زبان ازبکی به معنای آهن است.

۲. زیج در اخترشناسی دوران قدیم کاربرد فراوان داشت. در واقع زیج کتابی بود شامل مجموعه‌ای از جداول و اطلاعاتی دربارهٔ سیاره‌ها، ستاره‌های مشهور و نیز زمان طلوع و غروب خورشید در روزهای متفاوت سال در یک محل خاص. از جداول زیج برای آگاهی از موقعیت و رصد اجرام آسمانی، تعیین طول روز و شب، تهیهٔ تقویم‌ها، جهت‌یابی و دیگر اهداف اخترشناسی استفاده می‌شد.

3. Paolo Ruffini
4. William George Horner
5. Paul Luckey
6. Edward Stewart Kennedy
7. Adolph- Andrei Pavlovich Yushkevich

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

خواصی جالب از تابع هموگرافیک

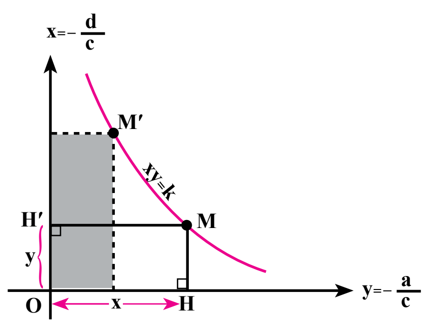
مراد کریمی
دبیر ریاضی شهرکرد

می‌دانیم، هر تابعی به‌صورت $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن شرایط $c\neq 0$ و $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ برقرار باشد، یک تابع هموگرافیک است. اگر محورهای مختصات را به موازات خودشان به‌گونه‌ای انتقال دهیم که روی مجانب‌ها ($x=\frac{-d}{c}$ مجانب قائم و $y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی) قرار گیرند، معادلهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به $y=\frac{k}{x}$ یا xy=k تبدیل می‌شود که در آن داریم: $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ و به کمک آن می‌توان ویژگی‌های تابع هموگرافیک را به‌سادگی بررسی کرد.

خاصیت اول: اگر از هر نقطهٔ دلخواه روی تابع هموگرافیک xy=k دو عمود بر مجانب‌ها رسم کنیم، مساحت مستطیل‌های حاصل، برابر و مساوی مقدار ثابت |k| است $(k=\frac{bc-ad}{c^2})$.

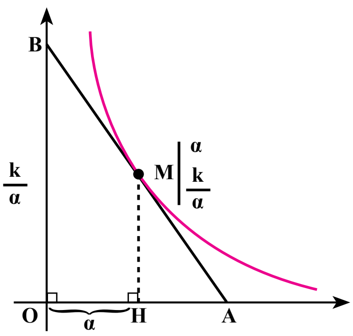
اثبات: با توجه به شکل زیر، اگر از نقطهٔ M روی نمودار xy=k دو عمود MH و ´MH را بر مجانب‌ها رسم کنیم، در این صورت مساحت مستطیل ´MHOH برابر است با:

$$S_{MHOH'}=|OH.OH'|=|x.y|=|k|$$



خاصیت دوم: اگر از هر نقطهٔ دلخواه M به‌طول α روی تابع xy=k مماسی طوری رسم شود که محورهای مختصات (مجانب‌ها) را در نقطه‌های A و B قطع کند، ثابت می‌شود مساحت مثلث حاصل برابر مقدار ثابت ۲|k| است.

حل: اگر نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \frac{k}{\alpha}\end{array}\right.$ روی منحنی $y=\frac{k}{x}$ در نظر گرفته شود و AB در نقطهٔ M بر منحنی مماس باشد، در این صورت داریم:



شیب خط مماس $y=\frac{k}{x}\Rightarrow y'=-\frac{k}{x^2}\Rightarrow y'(\alpha)=-\frac{k}{\alpha^2}\Rightarrow m=\frac{-k}{\alpha^2}$

معادلهٔ خط مماس $y-\frac{k}{\alpha}=-\frac{k}{\alpha^2}(x-\alpha)\Rightarrow y=-\frac{k}{\alpha^2}x+\frac{2k}{\alpha}$

$$\left|\begin{array}{l}\text{اگر } y=0\Rightarrow 0=-\frac{k}{\alpha^2}x+\frac{2k}{\alpha}\Rightarrow\frac{k}{\alpha^2}x=\frac{2k}{\alpha}\\ \Rightarrow x=2\alpha\Rightarrow A\left|\begin{array}{l}2\alpha\\ 0\end{array}\right.\\ \text{اگر } x=0\Rightarrow y=\frac{2k}{\alpha}\Rightarrow B\left|\begin{array}{l}0\\ \frac{2k}{\alpha}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$S_{OAB}=\left|\frac{OA\times OB}{2}\right|=\left|\frac{2\alpha.\frac{2k}{\alpha}}{2}\right|=|2k|=2|k|$$

خاصیت سوم: در خاصیت دوم، اگر از نقطهٔ M بر مجانب افقی (محور xها) عمود کنیم، ثابت می‌شود: $\frac{OH}{OA}=\frac{MH}{OB}=\frac{1}{2}$.

حل: با توجه به شکل خاصیت دوم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{MH}{OB}=\frac{\frac{k}{\alpha}}{\frac{2k}{\alpha}}=\frac{k\alpha}{2k\alpha}=\frac{1}{2}\\ \frac{OH}{OA}=\frac{\alpha}{2\alpha}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{OH}{OA}=\frac{MH}{OB}=\frac{1}{2}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مسائل برای حل

۲ ریاضی

۱. نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ را بکشید و از روی آن، نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۲^{۱+x}-۱}{۴}$ را رسم کنید.

۲. الف) ثابت کنید:

$$\mathrm{Log}_b^a=\frac{\mathrm{Log}_m^a}{\mathrm{Log}_m^b}$$

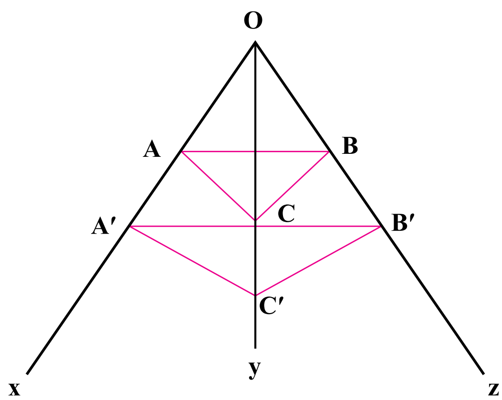
ب) ثابت کنید:

$$\frac{\mathrm{Log}_a^N}{\mathrm{Log}_{ab}^N}=\mathrm{Log}_a^b+۱$$

۳. x را طوری به‌دست آورید که سه عدد $\mathrm{Log}_۲(۲^x-۳)$، $\mathrm{Log}_۲(۲^x-۲)$ و $\mathrm{Log}_۲(۲^{x-۱}+۲)$ یک دنبالهٔ حسابی تشکیل بدهند.

۱ هندسه

۱. در شکل زیر می‌دانیم: AC||A'C' و BC||B'C'. ثابت کنید: AB||A'B'.



۲. در مثلث ABC، از نقطهٔ M روی BC دو خط به موازات دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا AC را در D و AB را در E قطع کند. ثابت کنید:

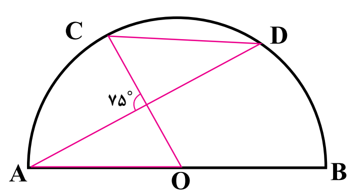
AE.AC+AB.AD=AB.AC

۳. در مثلث ABC از نقطهٔ دلخواه D روی BC خطی موازی میانهٔ AM رسم کرده‌ایم که AC را در E و امتداد AB را در F قطع کرده است. ثابت کنید طول‌های DE و AM و DF جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند.

۲ هندسه

۱. AB و CD دو قطر عمود بر هم در دایره‌ای به شعاع ۵ هستند و CH وتری از دایره در یک طرف CD است و CH=۸. اگر K نقطهٔ برخورد CH و AB و بین مرکز دایره و A باشد، طول AK را به‌دست آورید.

۲. در شکل زیر O مرکز نیم‌دایره و AB||CD اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید.



۳. طول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای را به‌دست آورید که مجموع اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۴ واحد بزرگ‌تر از طول وتر آن است.

حسابان

۱. ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x+[x]$ وارون‌پذیر است و ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید.

۲. زوج یا فرد بودن تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\left[\frac{2}{x+1}\right]+\left[\frac{x+1}{1-x}\right]$ را بررسی کنید.

۳. نشان دهید هر تابع f با دامنهٔ اعداد حقیقی که نمودار آن دارای دو محور تقارن موازی محور yها باشد، متناوب است.

(**راهنمایی:** اگر خط x=a محور تقارن نمودار تابع f باشد، آن‌گاه: $f(a+x)=f(a-x)$).

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. مقادیر a و b و c و d را طوری به دست آورید که تابع با ضابطهٔ زیر در x=۱ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-a[x]}{x-1} & x>1\\ c & x=1\\ \dfrac{b+\cos\pi x}{d\sin^2\pi x} & x<1\end{cases}$$

۲. اگر خط راست y=x-۱ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(a-1)x^2+bx+c}$ باشد، a و b و c را به‌دست آورید.

۳. ثابت کنید معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{2}$ یک ریشهٔ حقیقی در بازهٔ (۲ و ۱) و یک ریشهٔ حقیقی دیگر در بازهٔ (۳ و ۲) دارد.

مسائل جبر و احتمال

۱. نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را رسم کنید:

الف) $R_1=\{(x,y)\in R^2 | y\le x^2 \text{ و } x^2+y^2\le 4\}$

ب) $R_2=\{(x,y)\in R^2 | (x-1)^2+(y-2)^2\ge 4 \text{ و } y\ge x^2\}$

۲. رابطهٔ R روی Z به صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید R هم‌ارزی است.

$x,y\in Z$ ؛ $xRy \Leftrightarrow 3|x-y$

۳. رابطهٔ R روی R^2 به صورت زیر تعریف شده است. شکل کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه را مشخص و [(۱,۱)]را رسم کنید.

$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2$

مسائل ریاضیات ۳ تجربی

۱. وجود حد تابع به معادلهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<2\\ x^2+x-1 & x>2\\ 0 & x=2\end{cases}$ در نقطهٔ $x_0=2$ را بررسی کنید.

۲. حد هر یک از تابع‌ها به معادله‌های $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ و تابع‌های fog(x) و gof(x) را در $x_0=0$ بررسی کنید.

۳. هر یک از حدهای زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 2x}{\sin^3 3x}$

ب) $\lim_{x\to 1} g(x)$ که $x^2+2\le g(x)\le \frac{x^3-1}{x-1}$

مسائل ریاضیات گسسته

۱. ابتدا ثابت کنید: $(a,b)=(a,ka\pm b)$ و سپس نشان دهید که اگر $a=bq+r$، آن‌گاه: $(a,b)=(b,r)$.

۲. اگر داشته باشیم: $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$، ثابت کنید: $d=(a+b,c)$.

۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(\sum_{K=1}^{1394}K!)^1+(\sum_{K=1}^{1394}K!)^3+(\sum_{K=1}^{1394}K!)^9+(\sum_{K=1}^{1394}K!)^4$ را بر ۵ بیابید.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

احسان یارمحمدی

کاشانی‌نامه

(زندگی‌نامه غیاث‌الدین جمشید کاشانی)

- **مؤلف:** ابوالقاسم قربانی با مقدمهٔ بهمن مهری
- **ناشر:** انتشارات زعیم (به سفارش مؤسسهٔ آموزش عالی غیاث‌الدین جمشید کاشانی)
- **نوبت چاپ:** اول، ۱۳۹۰

کتاب «کاشانی‌نامه» به قلم زنده‌یاد **ابوالقاسم قربانی** به شرح قسمتی از زندگی و احوال او و نیز تألیفات و آثار به‌جای مانده از این ریاضی‌دان بزرگ ایران پرداخته است. این کتاب دارای شش بخش به شرح زیر است.

- **بخش اول:** آنچه دربارهٔ زندگی کاشانی می‌دانیم
- **بخش دوم:** تألیفات کاشانی
- **بخش سوم:** بحثی دربارهٔ کتاب «مفتاح‌الحساب»
- **بخش چهارم:** سیری در «رسالهٔ محیطیه»
- **بخش پنجم:** بررسی «رسالهٔ وتر و جیب»
- **بخش ششم:** کاشانی نخستین مخترع کسرهای اعشاری

در ادامه به ارائهٔ چند سطر از این کتاب ارزشمند می‌پردازیم و تمامی شما ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان را به مطالعهٔ آن تشویق می‌کنیم:

* در بخش اول (آنچه دربارهٔ زندگی کاشانی می‌دانیم) می‌خوانیم:

«... دانشمندِ خاورشناس و ریاضی‌دان آلمانی، **پاول لوکی**[1] نخست در سال ۱۹۴۴ میلادی کتابی در شرح و تفسیر قسمتی از **مفتاح‌الحساب** کاشانی نوشت. کتاب اول (متأسفانه بعد از مرگش) در ۱۹۵۱ میلادی و کتاب دوم در ۱۹۵۳ میلادی به چاپ رسید.

اینک وصف «رسالهٔ وتر و جیب» کاشانی را از زبان لوکی بشنوید: **هانکل** در کتاب **تاریخ ریاضیات** خود شرح می‌دهد که چگونه یک منجم و ریاضی‌دان مسلمان (کاشانی) در قرن پانزدهم میلادی جیب یک درجه را از روی جیب سه درجه با دقت فراوان حساب کرده است، و چگونه معادلهٔ درجهٔ سوم مربوط به آن مسئله را تشکیل داده و با روش استادانه‌ای آن را حل کرده است. **هانکل** می‌گوید که این روش زیبای حل معادلات عددی، از حیث دقت و ظرافت دست کمی از روش‌های تقریبی که از زمان **فرانسوا ویت**[2] به بعد در مغرب زمین متداول شده است، ندارد. بعد از روش استخراج جذر و کعب که در اصل با آن شباهت‌هایی دارد، این نخستین روش محاسبهٔ تقریبی است که در تاریخ ریاضیات بدان برمی‌خوریم. به حق می‌توان این روش را بدیع‌ترین و جالب‌ترین روشی دانست که در همهٔ نوشته‌های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. مخترع چنین روش تحسین‌آمیزی یک نفر ایرانی بود که در نیمهٔ اول قرن پانزدهم میلادی در انجمن دانشورانی که نزد **الغ‌بیگ** گرد آمده بودند، می‌زیست و در آثارش خود را جمشیدبن‌مسعودبن طبیب کاشانی نامیده است.

* در بخش سوم (بحثی دربارهٔ کتاب مفتاح‌الحساب) می‌خوانیم:

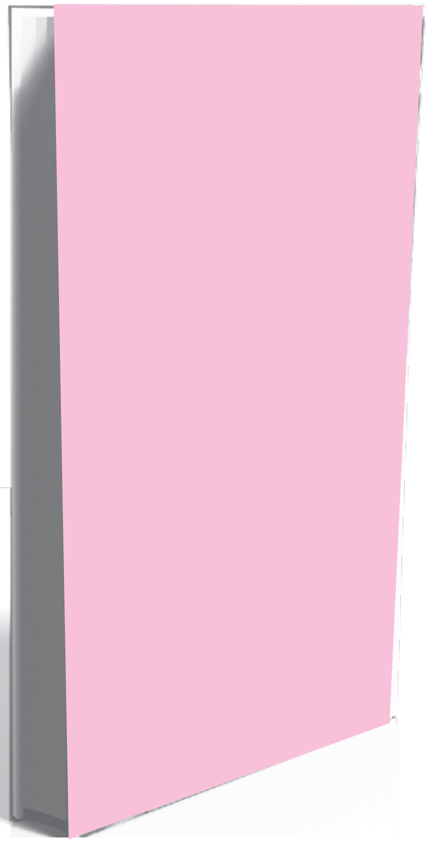
«... موضوع مقالهٔ چهارم، مفتاح‌الحساب، اندازه‌گیری ابعاد، سطح و حجم شکل‌های **هندسی**[3] است. در این مقاله کاشانی علاقهٔ خود را به فن محاسبه و مهارت خود را در این باب بار دیگر نشان داده و از جمله، سطح هر یک از چندضلعی‌های منتظم مهم و حجم چندوجهی‌های منتظم را، هم در دستگاه‌شمار شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی حساب کرده است...

کاشانی جدول جیب را درجه به درجه (از یک درجه تا نود درجه) و روش به‌کار بردن آن‌ها و بسیاری جدول‌های مفید دیگر را در این مقاله آورده و جدول مضرب‌های عدد پی (π) را که خود با دقتی که سال‌ها بعد از زمان وی بی‌رقیب ماند، حساب کرده و نتیجه را، هم در دستگاه شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی، به اختصار ثبت کرده است...

باب سوم از مقالهٔ چهارم مفتاح‌الحساب مربوط به چندضلعی‌های منتظم است. کاشانی **قطر**[4] دایرهٔ محاطی چندضلعی منتظم را **قطر اقصر** و قطر دایرهٔ محیطی آن را **قطر اطول** چند ضلعی منتظم نامیده است. همچنین، برای محاسبهٔ **شعاع**[5] دایرهٔ محاطی (r) و شعاع دایرهٔ محیطی (R) برحسب ضلع چندضلعی (a) و تعداد اضلاع آن (n)دستورهایی داده است که با علائم و اصطلاحات کنونی به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$R=\frac{a}{۲\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}},\quad r=\frac{a}{۲}\cot\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

و برای محاسبهٔ مساحت (S) چندضلعی منتظم از دستور: $\frac{S}{a^۲}=\frac{n}{۴}\cot\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ استفاده کرده و مقدار $\frac{n}{۴}\cot\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ را برای پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی، هشت‌ضلعی،نُه‌ضلعی،ده‌ضلعی،دوازده‌ضلعی،پانزده‌ضلعی و شانزده‌ضلعی منتظم، هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم با کسرهای اعشاری که خود مبدع آن‌هاست، حساب کرده و در جدول قرار داده است تا برای محاسبهٔ مساحت (S)، مربع طول ضلع ($a^۲$) چندضلعی‌های منتظم را در اعداد مذکور ضرب کنند. ...»



پی‌نوشت

1. Paul Luckey
2. Francois Viete
3. Geometric
4. Diagonal
5. Radius

پرسش‌های پیکارجو!

زاویهٔ $x\hat{o}y=۳۰^\circ$ مفروض است. نقطهٔ دلخواه M را طوری درون این زاویه در نظر می‌گیریم که فاصلهٔ آن از O کمتر از ۱۲ سانتی‌متر باشد. احتمال آنکه مجموع فواصل این نقطه از اضلاع زاویه کمتر از ۶ سانتی‌متر باشد، چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{\pi}$ ب) $\frac{۲}{\pi}$ ج) $\frac{۳}{\pi}$ د) $\frac{۱}{۲\pi}$ هـ) $\frac{۹}{۴\pi}$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

عنایت‌الله راستی‌زاده، دبیر ریاضی (استان فارس ـ شیراز)

خانه‌تکانی ریاضیات! برای سال ۲۰۱۶

اشاره

در رقابت‌های سالانهٔ ریاضی، معمولاً مسائلی طرح می‌شوند که نشانه‌هایی از سال برگزاری مسابقه را به صورت غیرمستقیم در خود دارند، از آنجا که چند روزی بیشتر به آغاز سال نوی میلادی (۲۰۱۶) باقی نمانده است، مسائل زیر با ایده گرفتن از نمونه مسائلی که اغلب در رقابت‌های ریاضی مطرح شده‌اند و با تغییراتی در صورت آن‌ها و با تأکید بر جنبهٔ آموزشی و نزدیکی آن‌ها به سرفصل‌های کتاب‌های درسی انتخاب و یا طراحی شده‌اند. این مسائل پاسخ‌دهندگان را آماده می‌کنند تا ضمن تقویت قدرت استدلال و خلاقیت خود، توانایی حل نمونه‌هایی متنوع را به چالش بکشند و با این خانه‌تکانی ریاضیات، برای رقابت‌های ۲۰۱۶ آماده شوند!

نمونهٔ ۱. اگر $(10^{2016}+25)^2-(10^{2016}-25)^2=10^x$، مقدار x را حساب کنید.

پاسخ:

روش اول: با استفاده از اتحاد $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ و انتخاب $a=10^{2016}$ و $b=25$ داریم:

$$4(25)(10^{2016})=10^x \Rightarrow 10^{2018}=10^x \Rightarrow x=2018$$

روش دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ و انتخاب $a=10^{2016}+25$ و $b=10^{2016}-25$ داریم:

$$[(10^{2016}+25)-(10^{2016}-25)][(10^{2016}+25)-(10^{2016}-25)]$$
$$=50\times2\times10^{2016}=10^{2018}$$

و در نتیجه: $x=2018$.

نمونهٔ ۲. چه تعداد عدد صحیح در دنبالهٔ $1,2016,2016^2,\dots,2016^{2015}$ هم مربع کامل و هم مکعب کامل‌اند؟

پاسخ:

از آنجا که: $2016=2^5\times3^2\times7$، پس:

$$2016^k=(2^5\times3^2\times7)^k=2^{5k}\times3^{2k}\times7^k$$

لازمهٔ مربع کامل بودن اعداد صحیح بزرگ‌تر از یک این است که همهٔ توان‌ها زوج باشند و برای اینکه عدد صحیح بزرگ‌تر از یک مکعب کامل باشد، باید همهٔ توان‌ها مضرب ۳ باشند. با توجه به تجزیهٔ ۲۰۱۶، لازم است k مضرب ۶ باشد. بزرگ‌ترین عدد مضرب ۶ کوچک‌تر از ۲۰۱۵ عدد ۲۰۱۰ است به این صورت: $6\times335=2010$. در دنبالهٔ

$1,2,3,\dots,2014,2015$

۳۳۵ عدد مضرب ۶ هستند. این بیان می‌دارد که ۳۳۵ عدد صحیح از دنبالهٔ $2016,2016^2,\dots,2016^{2015}$ هم‌زمان مربع کامل و مکعب کامل هستند. علاوه بر این، عدد یک (جملهٔ اول دنبالهٔ صورت مسئله) نیز به وضوح هم مربع کامل و هم مکعب کامل است. بنابراین $335+1=336$ عدد صحیح از دنباله، هم مربع کامل و هم مکعب کامل‌اند.

نمونهٔ ۳. فرض کنیم n عدد صحیح مثبت باشد، nامین عدد مثلثی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n=1+2+\dots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

همـــهٔ زوج اعـــداد صحیـــح مثلثی را پیـــدا کنید که اختلاف آن‌ها از هم ۲۰۱۶ شود.

پاسخ:

جواب‌های مسئله، پاسخ‌های معادلهٔ زیرند:

$$\frac{۱}{۲}n(n+۱)-\frac{۱}{۲}m(m+۱)=۲۰۱۶$$

که معادل است با: $n^{۲}-m^{۲}+n-m=۲\times ۲۰۱۶$

یا: $(n-m)(n+m+۱)=۲^{۶}\times ۳^{۲}\times ۷$

توجه کنیم که: $n+m+۱>n-m$. همچنین یکی از دو عـدد $n-m$ و $n+m+۱$ زوج و دیگری باید فرد باشـــد، زیرا حاصل جمع آن‌ها $۲n+۱$ و عددی فرد است. لذا باید تمام حالاتـــی را که عدد $۷\times ۳^{۲}\times ۲^{۶}$ را می‌توان به صورت ضرب یـــک عدد فرد در یک عدد زوج نوشـــت، معین کرد. پنج حالت زیر امکان‌پذیرند:

	n−m	n+m+۱	n	m
۱	۱	۴۰۳۲	۲۰۱۶	۲۰۱۵
۲	۳	۱۳۴۴	۶۷۳	۶۷۰
۳	۷	۵۷۶	۲۹۱	۲۸۴
۴	۹	۴۴۸	۲۲۸	۲۱۹
۵	۲۱	۱۹۲	۱۰۶	۸۵

توجـــه کنیـــم، حالت‌هـــای $n-m=۶۳$ و $n+m+۱=۶۴$ غیرممکن‌اند، زیـــرا در این حالـــت $n=۶۳$ و $m=۰$ خواهد شـــد. بنابراین پنج زوج عدد مثلثی پاســـخ این مسئله‌اند که عبارت‌اند از:

$$(T_{۲۰۱۶},T_{۲۰۱۵}),(T_{۶۷۳},T_{۶۷۰}),(T_{۲۹۱},T_{۲۸۴}),$$
$$(T_{۲۲۸},T_{۲۱۹}),(T_{۱۰۶},T_{۸۵})$$

نمونـهٔ ۴. می‌دانیم: $\log ۲\approx ۰/۳۰۱$. معلوم کنید $۵^{۲۰۱۶}$ چند رقمی است؟

پاسخ:

از آنجا که: $\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}$ پس:

$$\log ۵=\log ۱۰-\log ۲\approx ۰/۶۹۹$$

اما:

$$\log ۵^{۲۰۱۶}=۲۰۱۶\times\log ۵\approx ۲۰۱۶\times ۰/۶۹۹\approx ۱۴۰۹/۱۸$$

پس عدد $۵^{۲۰۱۶}$ دارای ۱۴۱۰ رقم است.

نمونهٔ ۵. تابع f بـــرای همهٔ اعداد صحیح مثبت تعریف شده است و داریم:

$f(۱)=۲۰۱۶$ و برای هر $n>۱$:

$$f(۱)+f(۲)+...+f(n)=n^{۲}f(n)$$

در این صورت مقدار $f(۲۰۱۶)$ را حساب کنید.

پاسخ:

ابتدا توجه کنیم که:

$$f(۲)=\frac{۱}{۲^{۲}-۱}f(۱)$$

$$f(۳)=\frac{۱}{۳^{۲}-۱}(f(۱)+f(۲))=\frac{۱}{۳^{۲}-۱}\left[f(۱)+\frac{۱}{۲^{۲}-۱}f(۱)\right]$$

$$\Rightarrow f(۳)=\frac{۱}{۲^{۲}-۱}\times\frac{۲^{۲}}{۳^{۲}-۱}\times f(۱)$$

و اگر به‌همین صورت ادامه دهیم، می‌توان دید:

$$f(۴)=\frac{۱}{۲^{۲}-۱}\times\frac{۲^{۲}}{۳^{۲}-۱}\times\frac{۳^{۲}}{۴^{۲}-۱}\times f(۱)$$

می‌توان حدس زد:

$$f(n)=\frac{۱}{۲^{۲}-۱}\times\frac{۲^{۲}}{۳^{۲}-۱}\times\frac{۳^{۲}}{۴^{۲}-۱}\times...\times\frac{(n-۱)^{۲}}{n^{۲}-۱}\times f(۱)$$

که پس از ساده کردن به $f(n)=\frac{۱\times ۲}{n(n+۱)}\times f(۱)$ خواهیم رســـید. (این حدس را می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت کرد.) در این صورت:

$$f(۲۰۱۶)=\frac{۱\times ۲}{۲۰۱۶\times ۲۰۱۷}\times ۲۰۱۶=\frac{۲}{۲۰۱۷}$$

نمونهٔ ۶. دنبالهٔ فیبوناتچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{۱}=F_{۲}=۱,\ \ F_{n}=F_{n-۱}+F_{n-۲}(n\geq ۳)$$

در این صورت ثابت کنید:

$$F_{۱}^{۲}+F_{۲}^{۲}+...+F_{۲۰۱۵}^{۲}=F_{۲۰۱۵}\times F_{۲۰۱۶}$$

اثبات:

جملات دنباله به صورت زیر است:

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,...

دیده می‌شود که:

$$F_{۱}^{۲}+F_{۲}^{۲}+F_{۳}^{۲}=۶=F_{۳}\times F_{۴}$$

$$F_{۱}^{۲}+F_{۲}^{۲}+F_{۳}^{۲}+F_{۴}^{۲}=۱۵=F_{۴}\times F_{۵}$$

$$F_{۱}^{۲}+F_{۲}^{۲}+F_{۳}^{۲}+F_{۴}^{۲}+F_{۵}^{۲}=۴۰=F_{۵}\times F_{۶}$$

به استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد:

$$F_{۱}^{۲}+F_{۲}^{۲}+...+F_{n}^{۲}=F_{n}\times F_{n+۱}$$

و بنابراین حکم ثابت شد.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

ریاضی ۲

۱. با نقطه‌یابی، نمودار تابع‌نمایی $y=۲^x$ را رسم کنید و برای رسم نمودار $g(x)$ آن را به صورت زیر تغییر دهید:

$$g(x)=\frac{۲^{۱+x}}{۲^۲}-\frac{۱}{۴}=۲^{x-۱}-\frac{۱}{۴}$$

حال کافی اســت نمودار f را یک واحد در جهت مثبت محــور xها به جلو و $\frac{۱}{۴}$ واحد در جهــت منفی محور yها بــه پایین منتقل کنید. (نمــودار با خط $y=-\frac{۱}{۴}$ مجانب می‌شود.)

۲. الف)

$$\mathrm{Log}_b^a=c\Rightarrow a=b^c$$
$$\Rightarrow \mathrm{Log}_m^a=\mathrm{Log}_m^{b^c}=c\mathrm{Log}_m^b$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Log}_m^a}{\mathrm{Log}_m^b}=c=\mathrm{Log}_b^a$$

ب) از نتیجهٔ (الف) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{Log}_a^N}{\mathrm{Log}_{ab}^N}=\frac{\dfrac{\mathrm{Log}_c^N}{\mathrm{Log}_c^a}}{\dfrac{\mathrm{Log}_c^N}{\mathrm{Log}_c^{ab}}}=\frac{\mathrm{Log}_c^{ab}}{\mathrm{Log}_c^a}$$
$$=\frac{\mathrm{Log}_c^a+\mathrm{Log}_c^b}{\mathrm{Log}_c^a}=۱+\frac{\mathrm{Log}_c^b}{\mathrm{Log}_c^a}=۱+\mathrm{Log}_a^b$$

۳. با توجه به فرض مسئله، نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{Log}_۲(۲^x-۳)+\mathrm{Log}_۲(۲^{x-۱}+۲)=۲\mathrm{Log}_۲(۲^x-۲)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Log}_۲(۲^x-۳)(۲^{x-۱}+۲)=\mathrm{Log}_۲(۲^x-۲)^۲$$
$$\Rightarrow (۲^x-۳)(۲^{x-۱}+۲)=(۲^x-۲)^۲$$

و با فرض $t=۲^{x-۱}$ داریم:

$$(۲t-۳)(t+۲)=(۲t-۲)^۲\Rightarrow ۲t^۲+۴t-۳t-۶$$
$$=۴t^۲-۸t+۴\Rightarrow ۲t^۲-۹t+۱۰=۰\quad \Delta=۸۱-۸۰=۱\Rightarrow$$
$$t=\frac{۹\pm۱}{۴}\Rightarrow t=۲ \text{ یا } t=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۲^{x-۱}=۲ \text{ یا } ۲^{x-۱}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=۲$$
$$\text{یا } x=\mathrm{Log}_۲^{\frac{۵}{۲}}+۱$$

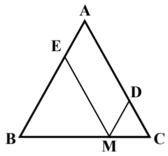
هندسه ۱

۱. از قضیــهٔ تالس در مثلث‌هــای OA'C' و OB'C' نتیجه می‌شود:

$$AC\parallel A'C'\Rightarrow\frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'}\quad(۱)$$
$$BC\parallel B'C'\Rightarrow\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}\quad(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}\Rightarrow AB\parallel A'B'$$

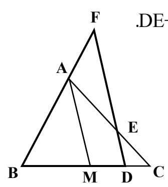
(عکس قضیهٔ تالس در مثلث OA'B')

۲. از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:



$$\left.\begin{aligned}ME\parallel AC\Rightarrow\frac{MC}{BC}=\frac{AE}{AB}\\ MD\parallel AB\Rightarrow\frac{MB}{BC}=\frac{AD}{AC}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\frac{\overbrace{MB+MC}^{BC}}{BC}=\frac{AE}{AB}+\frac{AD}{AC}=۱$$
$$\Rightarrow AE.AC+AB.AD=AB.AC$$

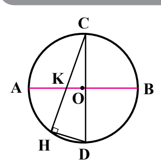
۳. باید نشان دهیم: DE+DF=۲AM. به این منظور از قضیهٔ تالس و نیز فرض MB=MC به صورت زیر استفاده می‌کنیم:



$$\frac{DE}{AM}=\frac{DC}{MC}\ ,\ \frac{DF}{AM}=\frac{BD}{MB}$$
$$\Rightarrow\frac{DE}{AM}+\frac{DF}{AM}=\frac{DC}{MC}+\frac{BD}{MB}=\frac{DC+BD}{MB}=\frac{BC}{MB}=۲$$
$$\Rightarrow DE+DF=۲AM$$

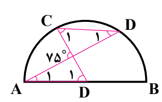
هندسه ۲

۱. H را بــه D وصــل می‌کنیم. و در نتیجه: $\hat{H}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=۹۰^\circ$ و از $\triangle COK\sim\triangle CHD$ آنجا:



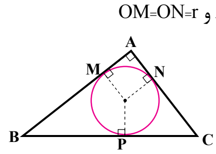
$$\frac{OK}{DH}=\frac{CO}{CH}=\frac{CK}{CD}\Rightarrow\frac{۵}{۸}=\frac{OK}{DH}\ ,$$
$$DH=\sqrt{CD^۲-CH^۲}=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=۶$$
$$\Rightarrow OK=\frac{۱۵}{۴}\ ,\ AK=OA-OK=۵-\frac{۱۵}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

۲.



$$CD\parallel AB\Rightarrow\hat{D}_۱=\hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲},$$
$$\hat{C}_۱=\hat{O}_۱=\overset{\frown}{AC}\ ,\ \hat{O}_۱+\hat{A}_۱=۷۵^\circ$$
$$\Rightarrow\overset{\frown}{AC}+\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=۷۵^\circ\Rightarrow\frac{۳\overset{\frown}{AC}}{۲}=۷۵^\circ\ ,\ \overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ,$$
$$\overset{\frown}{BD}=۲\hat{A}_۱=\overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{CD}=۱۸۰-(۵۰+۵۰)=۸۰^\circ$$

۳. مطابق شکل، AM=AN و OM=ON=r و $\hat{N}=\hat{M}=\hat{A}=۹۰^\circ$ در نتیجــه ANOM مربع است و r=AN.



همچنین می‌توان نوشت:

CN=CP , BM=BP , AM=AN
⇒BP+CP=CN+BM⇒BC=AB-AM+AC-AN⇒AM+AN=AB+AC-BC=۴⇒۲AN=۴⇒AN=۲⇒r=۲

حسابان

۱. نشان می‌دهیم که f یک به یک است:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱+[x_۱]=x_۲+[x_۲]$$
$$\Rightarrow[x_۱+[x_۱]]=[x_۲+[x_۲]]\Rightarrow[x_۱]+[x_۱]=[x_۲]+[x_۲]$$

(توجــه دارید کــه به ازای هــر $k\in Z$، $[x+k]=[x]+k$ و $[x_۱],[x_۲]\in Z$)

$$\Rightarrow ۲[x_۱]=۲[x_۲]\Rightarrow[x_۱]=[x_۲] \text{ و } x_۱+[x_۱]=x_۲+[x_۲]$$
$\Rightarrow x_۱=x_۲\Rightarrow$ f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

و بــرای یافتن ضابطــهٔ وارون f، در ضابطهٔ آن نقش x و y را عــوض می‌کنیم و از دو طرف تســاوی حاصل، جزء صحیح می‌گیریم:

$$y=x+[x]\Rightarrow x=y+[y]\Rightarrow[x]=[y+[y]]$$
$$\Rightarrow[x]=۲[y]\Rightarrow[y]=\frac{[x]}{۲}\Rightarrow x=y+\frac{[x]}{۲}\Rightarrow$$
$$y=x-\frac{۱}{۲}[x]\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{۲}[x]$$

۲. $D_F=R-\{۱,-۱\}$. پــس دامنــهٔ تابع، متقارن اســت. حال می‌نویسیم:

$$f(-x)=\left[\frac{۲}{۱-x}\right]+\left[\frac{۱-x}{۱+x}\right]=\left[\frac{۲}{۱-x}-۱\right]+\left[\frac{۱-x}{۱+x}+۱\right]$$
$$=\left[\frac{۱+x}{۱-x}\right]+\left[\frac{۲}{۱+x}\right]=f(x)\Rightarrow$$ f زوج است.

۳. فرض می‌کنیــم دو خط x=a و x=b (a>b) محورهای تقارن منحنی تابع f باشند. بنابراین:

۱) f(a-x)=f(a+x) و ۲) f(b-x)=f(b+x)

در تساوی اول به جای x، a-x قرار می‌دهیم:

f(a-a+x)=f(a+a-x) ⇒ f(x)=f(۲a-x)

حال در تساوی اخیر به جای x، b-x قرار می‌دهیم:

f(b-x)=f(۲a-b+x)

اکنون از تساوی (۲) نتیجه می‌شود:

f(b+x)=f(۲a-b+x)

و در این تساوی به جای x، x-b قرار می‌دهیم:

f(x)=f(x+۲a-۲b)

و با توجه به تعریف تابع متناوب، نتیجه می‌شــود که f متناوب و دورهٔ تناوب آن (۲a-۲b) است.

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. چون x=۱ ریشهٔ مخرج کسر تابع f در همسایگی راست است، پس برای آنکه f در این نقطه پیوسته باشد، باید x=۱ ریشهٔ صورت کسر هم باشد. بنابراین a=۱ و از آنجا:

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۳-[x]}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۳-۱}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱^+}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x-۱}=۳$$

و در همسایگی چپ f هم، به ازای x=۱، مخرج کسر صفر می‌شود، پس باید x=۱ ریشهٔ صورت کسر هم باشد و از آنجا b=۱ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1+\cos\pi x}{d\sin^2\pi x}=\lim_{t\to0^-}\frac{1+\cos\pi(1+t)}{d\sin^2\pi(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0^-}\frac{1+\cos(\pi+\pi t)}{d\sin^2(\pi+\pi t)}=\lim_{t\to0^-}\frac{1-\cos\pi t}{d\sin^2\pi t}=$$

$$\lim_{t\to0^-}\frac{2\sin^2(\frac{\pi t}{2})}{d\sin^2(\pi t)}=\lim_{t\to0}\frac{2(\frac{\sin(\frac{\pi t}{2})}{(\frac{\pi t}{2})})^2\times\frac{\pi^2t^2}{4}}{d(\frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)})^2\times\pi^2t^2}=\frac{1}{2d}$$

بنابراین: $c=\frac{1}{2d}=3$ و در نتیجه: c=۳ و $d=\frac{1}{6}$.

۲. چون تابع دارای مجانب مایل است، پس باید درجهٔ مخرج برابر ۱ باشد. لذا: a-۱=۰ و a=۱. و چون ضریب زاویهٔ مجانب مایل ۱ است، پس b=۱. با این فرض برای یافتن معادلهٔ مجانب مایل، عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+1 & x+c \\ \cline{2-2} & x+(1-c) \\ \underline{x^2+cx} & \\ (1-c)x+1 & \\ \underline{(1-c)x+c-c^2} & \\ c^2-c+1 & \end{array}$$

بنابراین، y=x+(۱-c) مجانب مایل تابع است و در نتیجه ۱-c=-۱ و c=۲ که به ازای آن: $c^2-c+1\neq0$.

۳. معادله را به صورت $f(x)=2\sin x-\sqrt{x^2-3x+5}=0$ تغییر می‌دهیم. حال داریم:

$$f(1)=2\sin1-\sqrt{3}=2(\sin1-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

و چون $\frac{\pi}{3}>1$، پس: $\sin\frac{\pi}{3}>\sin1$ (تابع سینوس، در ناحیهٔ اول مثلثاتی، صعودی است) و در نتیجه: $\sin1<\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin1-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$.

بنابراین: $f(1)<0$

$$f(2)=2\sin2-\sqrt{3}=2(\sin2-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

و چون: $\frac{2\pi}{3}>2$، پس: $\sin\frac{2\pi}{3}<\sin2$ (تابع سینوس، در ناحیهٔ دوم مثلثاتی، نزولی است) و در نتیجه: $\sin2>\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin2-\frac{\sqrt{3}}{2}>0$.

بنابراین: $f(2)>0$ و طبق «قضیهٔ بولتزانو» لااقل یک $x\in(1,2)$ وجود دارد که f(x)=۰ و این معادل با حکم است.

همچنین داریم:

$$f(3)=2\sin3-\sqrt{5}=2(\sin3-\frac{\sqrt{5}}{2})$$

و چون: $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$، پس: $\sin3-\frac{\sqrt{5}}{2}<0$ و در نتیجه: $f(3)<0$. پس معادله یک ریشهٔ حقیقی دیگر در بازهٔ (۳ و ۲) دارد. به عنوان تمرین، با رسم نمودارهای دو تابع $f_1(x)=2\sin x$ و $f_2(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$ نشان دهید که معادلهٔ فوق فقط همین دو ریشه را دارد.

جبر و احتمال

۱. این مسئله نمونهٔ مسائل حل شدهٔ کتاب درسی است. با استفاده از نقطه‌یابی برای هر نامساوی، مجموعهٔ جواب را مشخص و اشتراک مناطق قابل قبول را هاشور بزنید.

۲. سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را برای این رابطه بررسی کنید.

I) $xRx \Leftrightarrow 3|x-x$ (انعکاسی)

II) $xRy \Rightarrow 3|x-y \Rightarrow 3|-(x-y)=y-x \Rightarrow yRx$ (تقارنی)

III) $xRy\ ,\ yRz \Rightarrow 3|x-y$ و $3|y-z \Rightarrow 3|(x-y)+(y-z)$
$\Rightarrow 3|x-z \Rightarrow xRz$ (تراگذری)

۳. طبق تعریف کلاس‌های هم‌ارزی داریم:

$[(a,b)]=\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)R(a,b)\}$

$\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=a^2+b^2\}\Rightarrow$

دایره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{a^2+b^2}$.

$[(1,1)]=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=2\}$

ریاضی ۳ تجربی

۱. برای محاسبهٔ حد چپ از ضابطهٔ $f(x)=x^2+1$ و برای محاسبهٔ حد راست از $f(x)=x^2+x-1$ استفاده می‌کنیم و...

۲. $\lim_{x\to0} f(x)=-1$ و چون تابع g در صفر تعریف نشده است و برای این تابع نمی‌توانیم حد چپ و راست در صفر تعریف کنیم، لذا g در صفر حد ندارد. fog و gof را تشکیل دهید و حد آن‌ها را در صفر به دست آورید.

۳. برای (الف) به عدد $\frac{8}{27}$ و برای (ب) به عدد ۳ می‌رسیم (از قضیهٔ فشردگی استفاده کنید).

ریاضیات گسسته

۱. فرض کنید: $(a,b)=d_1$ و $(a,ka\pm b)=d_2$. ثابت کنید $d_1|d_2$ و $d_2|d_1$ و نتیجه بگیرید که: $d_1=d_2$.

$a=bq+r \Rightarrow r=a-bq$

$(a,b)=(b,a)=(b,-bq+a)=(b,r)$

۲. می‌دانیم اگر (a,b)=d، در این صورت d|a و d|b یا a=a'd و b=b'd.

$$(a,b)=d\Rightarrow(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$$
$$\Rightarrow(\frac{a+b}{d},\frac{ab}{d^2})=1$$
$$\xRightarrow{\times d}(a+b,\frac{ab}{d})=d\Rightarrow(a+b,c)=d$$

(در حالت کلی، اگر (a,b)=۱، آن‌گاه: (a+b,ab)=۱.)

۳. با توجه به اینکه برای هر $n\geq5$ همواره $n!\overset{5}{\equiv}0$، پس داریم:

$$\sum_{k=1}^{1394}k!\overset{5}{\equiv}1+2+6+24+0+0+\dots+0\overset{5}{\equiv}$$
$$1+2+1+4\overset{5}{\equiv}3$$
$$\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}3^1+3^3+3^9+3^4\overset{5}{\equiv}3+2+3+1\overset{5}{\equiv}4$$

دولت و ملت، همدلی و همزبانی

برگ اشتراک رشد

نحوهٔ اشتراک:
پس از واریز مبلغ اشتراک به شمارهٔ حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجلهٔ شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شمارهٔ ۰۲۱-۷۷۳۳۹۱۹۲. لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

◆ عنوان مجلات درخواستی:
◆ نام و نام خانوادگی:
◆ تاریخ تولد:
◆ میزان تحصیلات:
◆ تلفن:
◆ نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان:
خیابان:
پلاک: شمارهٔ پستی:
شمارهٔ فیش بانکی:
مبلغ پرداختی:
◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:
امضا:

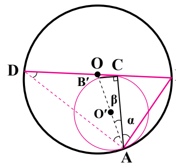
◆ نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۶۵۹۵/۱۱۱
◆ تلفن امور مشترکین: ۰۲۱-۷۷۳۳۹۷۱۳-۱۴ و ۷۷۳۳۵۱۱۰ و ۷۷۳۳۶۶۵۶
◆ هزینهٔ اشتراک سالانهٔ مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانهٔ مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

پاسخ‌ها

پاسخ پرسش‌های پیکارجو!

۱. مطابق شکل و با رسم خطوط اضافی خواهیم داشت:



$$\hat{\alpha} = B\hat{A}O - C\hat{A}O' = B\hat{A}O - \hat{\beta}$$

$$DO = OA \Rightarrow D\hat{A}O = O\hat{D}A$$

$$\Rightarrow C\hat{O}A = ۲D\hat{A}O \Rightarrow D\hat{A}O = \frac{C\hat{O}A}{۲} = \frac{\hat{\theta}}{۲}$$

$$B\hat{A}O = B\hat{A}D - D\hat{A}O = ۹۰^\circ - \frac{\hat{\theta}}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{\theta}}{۲} - \hat{\beta},\ \hat{\beta} = ۹۰^\circ - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \hat{\beta} = ۹۰^\circ - A\hat{C}B$$

$$= ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - A\hat{C}O) = A\hat{C}O - ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ - \hat{\beta} - \hat{\theta} - ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = ۹۰^\circ - \hat{\beta} - \hat{\theta} \Rightarrow ۲\hat{\beta} = ۹۰^\circ - \hat{\theta} \Rightarrow \hat{\beta} = ۴۵^\circ - \frac{\hat{\theta}}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{\theta}}{۲} - (۴۵^\circ - \frac{\hat{\theta}}{۲}) = ۴۵^\circ$$ (گزینهٔ ب)

۲. با توجه به تعریف تابع چندجمله‌ای و اینکه همواره $x-y \mid x^n - y^n$، می‌توانید تحقیق کنید که برای هر تابع چندجمله‌ای f، همواره: $a-b \mid f(a)-f(b)$. بنابراین، با توجه به فرض مسئله و رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$۷-۲ \mid f(۷)-f(۲) \Rightarrow ۵ \mid f(۷)-f(۲),\ ۵ \mid f(۲) \Rightarrow ۵ \mid f(۷)$$

$$۷-۵ \mid f(۷)-f(۵) \Rightarrow ۲ \mid f(۷)-f(۵), ۲ \mid f(۵) \Rightarrow ۲ \mid f(۷)$$

$$\Rightarrow ۱۰ \mid f(۷)$$ (گزینهٔ الف)

۳. با مخرج مشترک‌گیری و تجزیهٔ صورت کسر خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{x(x-۱)(x+۱)(x+۲)(x-۲)(x-۳)(x+۳)(x+۴)(x-۴)}{۶۳۰}$$

لذا صورت کسر حاصل‌ضرب ۹ عدد صحیح متوالی و بر ۶۳۰ بخش‌پذیر است (زیرا بر ۹، ۷، ۲ و ۵ بخش‌پذیر است). پس حاصل f(x) همواره عددی صحیح است و در نتیجه: $R_f \subset Z$. ولی: $R_f \neq Z$، زیرا مثلاً: $f(x) \neq ۱$. (چرا؟)

پس پاسخ صحیح گزینهٔ (د) است.

۴. با توجه به‌صورت معادله و به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توان نوشت:

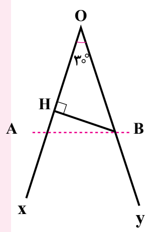
$$(x^۲ - ۸x^{\frac{۴}{۳}} + ۱۶x^{\frac{۲}{۳}}) + (x^۲ - ۴\sqrt{۲}x^{\frac{۳}{۲}} + ۸x) = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۴x^{\frac{۱}{۳}})^۲ + (x - ۲\sqrt{۲}x^{\frac{۱}{۲}})^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۴x^{\frac{۱}{۳}} = ۰ \\ \text{و} \\ x - ۲\sqrt{۲}x^{\frac{۱}{۲}} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۳ = ۶۴x \\ \text{و} \\ x^۲ = ۸x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ یا } x = \pm ۸ \\ \text{و} \\ x = ۰ \text{ یا } x = ۸ \end{cases}$$

بنابراین ۸ یا x=۰ و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد (گزینهٔ ب).

۵. با توجه به اینکه OM کوچک‌تر از ۱۲ است، لذا مکان هندسی M، نقاط درون قطاعی به شعاع ۱۲ سانتی‌متر و به مرکز O است (قطاع OAB). حال در مثلث متساوی‌الساقین OAB (OA=OB=۱۲)، می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه روی قاعدهٔ AB، از دو ساق مثلث، مساوی ارتفاع وارد بر ساق، یعنی BH است (این ویژگی در کتاب هندسهٔ ۲ دبیرستان اثبات شده است).



اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، BH روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° و نصف وتر OB، یعنی مساوی ۶ سانتی‌متر است.

بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی AB، از دو ساق مثلث و یا از ox و oy مساوی ۶cm است و در نتیجه برای هر نقطه درون این مثلث، مجموع این فاصله‌ها از ۶cm کمتر است. (چرا؟) پس فضای نمونهٔ این پیشامد تصادفی مجموعه نقاط درون قطاع OAB و پیشامد مطلوب مجموعه نقاط درون مثلث OAB است و بنابراین احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{OAB\ \text{قطاع}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۲ \times \sin ۳۰^\circ}{\frac{۱}{۱۲} \times \pi \times ۱۲^۲} = \frac{۳}{\pi}$$ **(گزینهٔ ج)**

پاسخ معماهای عددی ایستگاه دوم

معمای اول: اگر سن پدر را x و سن مادر را ۴۰ و تعداد فرزندان را n و مجموع سن آن‌ها را y در نظر بگیریم، به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{x+۴۰+y}{n+۲} = ۲۵,\ \frac{۴۰+y}{n+۱} = ۲۰,\ \frac{y}{n} = ۱۲/۵$$

و از معادلهٔ سوم داریم: y=۱۲/۵n که با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: ۴۰+۱۲/۵n=۲۰n+۲۰ و در نتیجه: ۷/۵n=۲۰ و $n = \frac{۸}{۳}$ که غیرقابل‌قبول است!

اما کجای کار اشکال دارد؟ واضح است! ریاضی‌دان، پدر خانواده نیست! مادر خانواده است و ۴۰ سال سن دارد! و با این فرض همهٔ معادله‌ها سازگار و به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{x+۴۰+y}{n+۲} = ۲۵,\ \frac{x+y}{n+۱} = ۲۰,\ \frac{y}{n} = ۱۲/۵$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: x+y=۲۰n+۲۰ و با جای‌گذاری در معادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $\frac{۲۰n+۶۰}{n+۲} = ۲۵ \Leftarrow$ n=۲، y=۲۵ و x=۳۵

معمای دوم: اگر عدهٔ گنجشک‌ها را x و عدهٔ کبوترها را y فرض کنیم، طبق گفتهٔ گنجشک داریم: $x+x+y+\frac{y}{۲}+\frac{x}{۴}+۱=۱۰۰$ و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{۹x}{۴} + \frac{۳y}{۲} = ۹۹ \Rightarrow \frac{۳x}{۴} + \frac{y}{۲} = ۳۳ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۱۳۲$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۳۲ - ۲y}{۳} = ۴۳ - \frac{۲y}{۳}$$

بنابراین y باید مضرب ۳ باشد و چون x>۳۶، پس: y≤۹ و لذا: ۳ یا ۶ یا y=۹. اما چون y زوج است، پس: y=۶ و x=۴۰. یعنی چهل گنجشک و ۶ کبوتر بودند.

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی
به صورت ماه‌نامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
رشد کودک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی
رشد نوآموز برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی
رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی
به‌صورت ماه‌نامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطهٔ اول
رشد برهان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطهٔ اول
رشد جوان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطهٔ دوم
رشد برهان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطهٔ دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی
به صورت ماه‌نامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی ◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:
به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
◆ رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان‌های خارجی ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کار دانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش‌وپرورش، پلاک ۲۶۶.
◆ تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ـ۰۲۱
◆ وبگاه: www.roshdmag.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

تاریخ ریاضی چه فایده‌ای دارد؟

تاریخ ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد که ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و بدون اینکه گذشتهٔ خود را نفی کند، همیشه به سمت دقت بیشتر و کارایی بیشتر پیش رفته است. تاریخ ریاضیات به ما نشان می‌دهد که دانش ریاضی، بر خلاف آنچه برخی گمان می‌کنند، در درون خود متحجر نشده و با قانون‌های جامد و بی‌تغییر سروکار ندارد. ریاضیات هم، مثل هر دانش دیگری، قانونمند است، تکامل می‌پذیرد، گذشتهٔ خود را اصلاح می‌کند و همیشه در تلاش برای «بهتر شدن»، «دقیق‌تر شدن» و «نزدیکی بیشتر با واقعیت‌های جهان خارج» است. ریاضیات دانشی انسانی است، بر خرد آدمی تکیه دارد و در خدمت بشر و جامعهٔ بشری است. به همین مناسبت، تاریخ ریاضیات روحیهٔ انسان‌دوستی و هم‌یاری را تقویت می‌کند و نشان می‌دهد که، تلاش اهریمنی نفاق‌افکنان و جنگ‌افروزان، تا چه حد مانع پیشرفت انسان و رسیدن به آرمان‌های متعالی اوست.

تاریخ ریاضیات، ما را با شیوهٔ کار ریاضی‌دانان و انگیزه‌های علمی آن‌ها آشنا می‌کند. ما می‌توانیم به یاری تاریخ ریاضیات، جایی خاص را در دانش جهان بیابیم، که از آن جایگاه به زندگی فکری بشری سروسامان ببخشیم... از همین حالا، که روی نیمکت‌های دبیرستان نشسته‌اید، مطالعهٔ خود را در تاریخ ریاضیات بیشتر کنید و برای هر موضوعی و هر مفهومی، هر قضیه‌ای و هر مسئله‌ای، در جست‌وجوی تاریخچهٔ آن باشید.

«زنده‌یاد، استاد پرویز شهریاری»

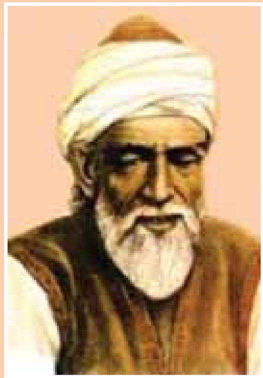
ریاضیات
در استان کرمان

چو بگذشت یک چند بر هفتواد
مر آن حصن را نام کرمان نهاد
(فردوسی)

استان کویری کرمان در اعتلای دانش ریاضی کشورمان، جایگاهی ژرف دارد. از دیرباز و از اوایل دوران تمدن ایرانی ـ اسلامی، ریاضی‌دانان و منجمان زیادی از این خطه برخاسته‌اند که یکی از برجسته‌ترین آن‌ها *ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی*، ریاضی‌دان و منجم قرن سوم هجری بوده است. وی در حدود سال ۲۱۰ در ماهان کرمان زاده شد. تخصص اصلی وی در هندسه و ریاضیات محض بود و آثار متعددی در این زمینه‌ها دارد که از جمله می‌توان به کتاب «تفسیرالمقاله العاشره من کتاب اقلیدس» اشاره کرد. یکی از کارهای وی تحقیق دربارهٔ معادلهٔ درجه سوم به‌صورت $x^3+c^2b=cx^2$ است که به معادلهٔ ماهانی شهرت دارد. وی همچنین در زمینهٔ مهندسی و ساختن واژه‌ها و اصطلاحات فنی آثاری دارد و در عرصهٔ نجوم کارهای بسیاری انجام داده که از جمله آن‌ها رصد چندین خسوف و کسوف و مقارنهٔ اجرام آسمانی است.

در دوران معاصر نیز ریاضی‌دانان نام‌آوری از استان کرمان برخاسته‌اند که ستارهٔ درخشان این استان، *زنده‌یاد پرویز شهریاری*، از اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ برهان و از بنیان‌گذاران آن است. دربارهٔ این استاد فرزانه بسیار گفته و نوشته‌اند و ما نیز در این مجله دربارهٔ کارهای ایشان مطالب فراوانی داشته‌ایم.

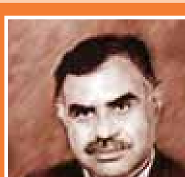
اما اثرگذاران بسیار دیگری هم در کارنامهٔ ریاضی کرمان وجود دارند که از آن جمله می‌توان به زنده‌یاد دکتر *عباس ریاضی کرمانی* (که در شمارهٔ ۳ به ایشان اشاره داشتیم) و استاد گران‌قدر، پروفسور *مهدی رجبعلی‌پور* (دکترای ریاضی از دانشگاه تورنتوی کانادا، استاد ریاضی دانشگاه کرمان- نگارنده مقالات متعدد ریاضی در نشریات معتبر بین‌المللی- چهرهٔ ماندگار و استاد نمونهٔ کشور) اشاره کرد. در حال حاضر فعالیت‌های زیادی در زمینه ترویج ریاضیات در این استان انجام می‌گیرد که فعالیت‌های وسیع خانهٔ ریاضیات کرمان از جملهٔ آن‌هاست. از میان این فعالیت‌ها می‌توان به جشنواره‌های ریاضی، کارگاه‌های پارک، لیگ بازی و اندیشه، مسابقهٔ تورنمنت شهرها، جلسات سرگذشت ریاضیات و کارگاه‌های حل مسئله اشاره کرد. به منظور معرفی خانهٔ ریاضیات کرمان و فعالیت‌های آن گزارشی مشروح در یکی از شماره‌های آینده خواهیم داشت.



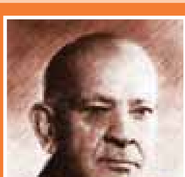
ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی

خانه ریاضیات کرمان ۱۳۷۹

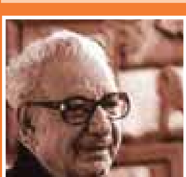
Kerman Mathematics House



دکتر مهدی رجبعلی‌پور



دکتر عباس ریاضی کرمانی



استاد پرویز شهریاری

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)