



دوره بیست و چهارم  
شماره پی در پی ۸۸  
آبان ۱۳۹۴  
شماره ۲  
صفحه ۴۸  
۱۰۰۰۰ ریال



ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی  
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری  
سر دبیر: حمیدرضا امیری  
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی  
ویراستار ادبی: بهروز راستانی  
طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی  
تصویرگر: میثم موسوی  
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری،  
محمد هاشم رستمی،  
دکتر ابراهیم ریحانی،  
احمد قندهاری،  
میرشهرام صدر،  
هوشنگ شرقی،  
سید محمد رضا هاشمی موسوی،  
غلامرضا یاسی پور،  
دکتر محرم نژاد ایردموسی  
وبگاه: www.roshdmag.ir

پیام نگار:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir  
نشانی وبلاگ مجله:  
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-  
motevaseteh2

پیام گیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ - ۲۱  
پیامک: ۳۰۰۸۹۹۵۰۶

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی:  
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۸۸۳۰۵۸۶۲ - ۲۱  
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۲۱  
۷۷۳۳۶۶۵۵ - ۲۱

شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه  
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

**حرف اول/** با ما در ارتباط باشید! / حمیدرضا امیری ۲

**آموزشی/** دو نگاه متفاوت به دوجمله‌ای خیام - پاسکال! / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳

حدس، کشف، اعلام! / هوشنگ شرقی ۶

آموزش ترجمه متون ریاضی (۷) / حمیدرضا امیری ۱۰

اجسام صلب و ویژگی‌های هندسی آن‌ها / آیدین منظوری ۱۲

ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۲۲

یک اثبات و یک تعمیم بر قضیه حمار / هوشنگ شرقی ۲۶

پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳۰

استدلال! / آسیه رضائی گرجی ۴۰

**ریاضیات در سینمای جهان/** قُبَّه‌ای برای جمشید کاشانی / احسان یارمحمدی ۸

**برگی از تاریخ ریاضیات /** ماجرای پیدایش کتاب‌های درسی ریاضی در ایران عصر قاجار / دکتر فرید قاسملو ۱۸

**مجلات ریاضی جهان /** Mathematical Spectrum / احسان یارمحمدی ۲۸

**گفت‌وگو /** مصاحبه با دکتر محمد علی آلام / ۳۶

**ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی /** ایستگاه اول: ستاره و وفقی! / هوشنگ شرقی ۱۱

ایستگاه دوم: معمای جام شربت و جام زهر! (۲) ۲۴

ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی ۳۵

**مسائل برای حل /** آمادگی برای آزمون‌های مستمر ۱۵

**معرفی کتاب /** روش سریع تراختنبرگ در حساب / احسان یارمحمدی ۴۴

**پرسش‌های پیکارجو! /** ۷-۱۷-۲۵-۴۳-۴۵

**پاسخ‌ها/** راهنمای حل مسائل، آمادگی برای آزمون‌های مستمر / ۴۶

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی (ایستگاه دوم) / ۴۷

پاسخ پرسش‌های پیکارجو! / ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:  
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲)  
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان  
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

● مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.  
● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.  
● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

### توضیح درباره طرح روی جلد:

**ریاضیات و هنر:** استفاده از ریاضیات در خلق آثار هنری سابقه‌ای دیرینه داشته و بیانگر جلوه‌های زیبای ریاضی نیز می‌باشد.  
نقاشی روی جلد از آثار موریس اشتر ریاضی‌دان و نقاش معاصر هلندی است که به کمک تبدیل‌های هندسی آثار ماندگاری را خلق کرد. درباره روش این هنرمند در شماره‌های ۸۳ و ۸۴ مجله قبلاً مطالبی داشته‌ایم.

# با ما در ارتباط باشید!

آیا شماره ۱ ماهنامه برهان را دریافت و مطالعه کرده‌اید؟ از کدام مقاله‌های آن استفاده کردید؟ آیا مایلید با ما ارتباط داشته باشید و برای ما مطالبی ارسال کنید؟ آیا پیشنهادی یا نظری درباره مطالب شماره ۱ دارید؟ حتماً راه ارتباط با ما را هم می‌دانید. خب پس چرا معطلید؟! شما با استفاده از تجربه‌های دبیران محترم و مطالعه بیشتر به راحتی می‌توانید مقاله‌هایی (در حداکثر ۴ صفحه) تهیه و تدوین کنید و برای ما بفرستید. حتی حل یک مسئله از روش‌های دیگر و متفاوت با روش کتاب درسی و یا کاربردهای مسائل کتاب درسی می‌تواند برای دوستان شما مفید باشد. سعی کنید مطالب ارسالی تا حد امکان کوتاه، جدید و با توضیح کافی همراه باشند. حتماً هم قبل از ارسال، مطلب را به دبیر محترم درس ریاضی خود نشان دهید و راهنمایی‌های ایشان را به کار بگیرید. راستی اگر خاطره‌ای از کلاس درس ریاضی دارید که فکر می‌کنید جالب و آموزنده است و دوستان شما می‌توانند از آن استفاده کنند، برای ما بفرستید. ان شاء الله با همکاری شما دانش‌آموزان فرهیخته و علاقه‌مند و دبیران محترم ریاضی در سراسر کشور، در هر شماره به تنوع و غنای علمی مطالب مجله افزوده شود.

هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان متوسطه ۲ امیدوار است، آن‌قدر مطالب ارسالی از طرف خوانندگان مجله افزایش یابد که همه مقالات چاپ شده از طرف شما باشد و اعضای هیئت تحریریه فقط مطالب و مقالات رسیده به دفتر مجله را داوری و انتخاب کنند و پس از ویرایش در نوبت چاپ قرار دهند.

## دوستان عزیز و فرهیخته!

مطالعه ریاضی، و تمرین کردن و ریاضی ورزیدن باعث رشد تفکر منطقی شما می‌شود و کمک خواهد کرد با مسائل برخورد منطقی‌تری داشته باشید و آن‌ها را از بهترین و کوتاه‌ترین راه، حل کنید. در این مسیر دو عاملِ علاقه و پشتکار، بسیار مؤثر و عنصر تمرکز می‌تواند سریع‌تر شما را به هدف برساند.

مؤید و پیروز باشید

سردبیر

# دو نگاه متفاوت به دو جمله ای خیام - پاسکال

مقدمه

شاید برای شما هم اتفاق افتاده باشد که در حل یک مسئله به راه حل های متفاوتی برخورد کرده باشید و این راه حل های متفاوت به بخش های مختلفی از ریاضیات تعلق داشته باشند. آیا به پیدا کردن و آموختن یک راه حل اکتفا می کنید، یا اینکه سعی می کنید روش های مختلف را بیاموزید؟ مطمئناً یادگیری چند روش حل شما را قادر می سازد که در مسائل مشابه دست بازتری برای حل مسئله داشته باشید. اتحاد دو جمله ای خیام - پاسکال یکی از همین مسئله هاست. در این مقاله قصد داریم با دو نگاه «جبری» و «ترکیبیاتی» به سراغ این اتحاد مفید برویم.

با ارائه چند مسئله به طرح موضوع می پردازیم:

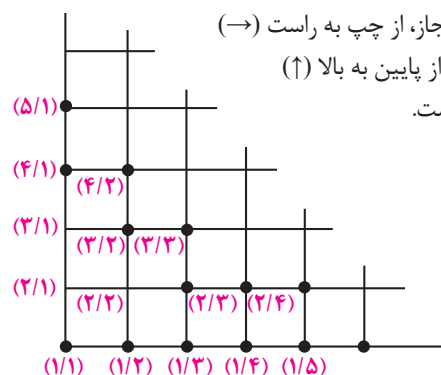
◆ **مسئله ۱.** در شهر صد تقاطع، خیابان ها یا شمالی -

جنوبی هستند و یا شرقی - غربی و چون این شهر ۱۰ خیابان عمودی و ۱۰ خیابان افقی دارد، به «شهر صد تقاطع» مشهور شده است. شهرداری این شهر خیابان افقی  $i$ ام، خیابان عمودی  $j$ ام و تقاطع این دو خیابان را به ترتیب با اسامی رود  $i$ ام، سرو  $j$ ام و تقاطع  $(i, j)$  نام گذاری کرده است. شاید برای هر شهروند این شهر مهم باشد که بداند چند مسیر متفاوت برای رفتن از منزل به محل کارش وجود دارد. برای مثال، از تقاطع  $(1, 1)$  به تقاطع  $(2, 3)$ ، ۳ مسیر به طول ۳ وجود دارد (بشمارید) و از تقاطع  $(1, 1)$  به تقاطع  $(3, 3)$ ، ۶ مسیر به طول ۴ وجود دارد. چند مسیر متفاوت از تقاطع  $(1, 1)$  به تقاطع  $(i+1, j+1)$  وجود دارد؟ دقت کنید که در این شمارش، کوتاه ترین مسیرها را می خواهیم بشماریم. یعنی تنها حرکتهای

مجاز، از چپ به راست ( $\rightarrow$ )

و از پایین به بالا ( $\uparrow$ )

است.



◆ **مسئله ۲.** علی می خواهد حاصل عبارت  $(x+y)^n$  را

برای عدد طبیعی  $n$  محاسبه کند. او به جای  $n$  مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را جایگزین می کند تا بتواند درباره  $(x+y)^n$  حدس بزند. برای  $n=1$  می نویسد:  $(x+y)^1 = x^1 + y^1$  و برای  $n=2$  می نویسد:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) \\ = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

برای  $n=3$  می نویسد:

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = x(x+y)^2 + y(x+y)^2$$

و از نتیجه قبل استفاده می کند:

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3 \\ = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

● **تمرین ۱.** حاصل  $(x+y)^4$  را از روی  $(x+y)^3$  و حاصل

$(x+y)^5$  را از روی  $(x+y)^4$  به دست آورید.

علی به حدس های زیر در انتهای این محاسبات می رسد:

**حدس اول:** تعداد جملات  $(x+y)^n$  برابر است با  $n+1$ .

**حدس دوم:** ضرایب جملات  $x^i y^{n-i}$  و  $x^{i-1} y^{n-i+1}$  یکسان

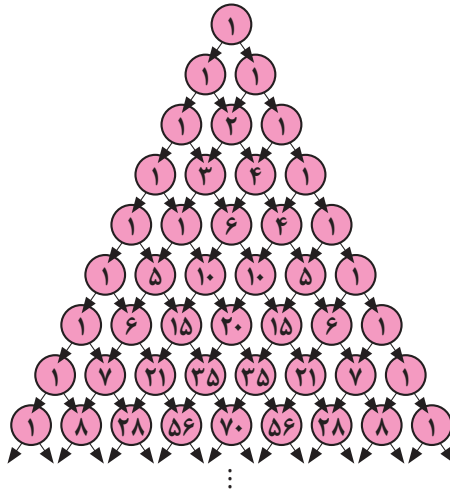
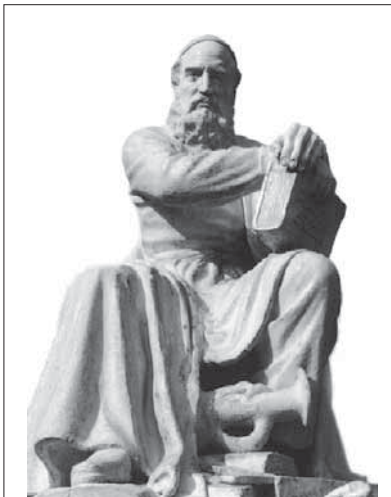
هستند. به عنوان مثال، در حاصل عبارت  $(x+y)^5$ ، ضریب جملات  $x^5 y^0$  و  $x^4 y^1$  برابر ۵ است.

**حدس سوم:** جملات  $(x+y)^{n+1}$  را می توان از روی

جملات  $(x+y)^n$  با یک محاسبه ساده به دست آورد. اما

سؤال اصلی برای علی این است که ضریب جمله  $x^i y^j$  در

حاصل عبارت  $(x+y)^n$  چه قدر است؟ ( $i+j=n$ ).



اما علی با توجه به حدس‌های خود نتایج جالب دیگری هم پیدا کرد. او با توجه به حدس سوم خود به این تساوی رسید:

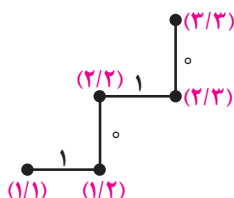
$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \quad (1)$$

این رابطه، به اتحاد خیام - پاسکال معروف است، چرا که این دو ریاضی‌دان معروف، اولین کسانی بودند که به درستی این رابطه پی بردند.

#### ● سؤال ۴. اثبات رابطه فوق به کمک تساوی

$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$  انجام می‌شود. راه حل علی را پیدا کنید.

حال فرض کنید شما ساکن شهر صد تقاطع هستید و از راه‌حل‌های علی و پارسا اطلاع دارید. با توجه به شباهت‌های این سه مسئله، شاید بتوانید تعداد مسیرهای مورد نظر بین دو تقاطع  $(1,1)$  و  $(i+1,j+1)$  را پیدا کنید. اگر هر حرکت افقی را با رقم یک و هر حرکت عمودی را با رقم صفر نمایش دهید، آن‌گاه هر مسیر از  $(1,1)$  به  $(i+1,j+1)$ ، یک کد به طول  $i+j+1$  را مشخص می‌کند که شامل  $i$  رقم یک و  $j$  رقم صفر است. برای مثال، کد  $1010$  مسیر زیر را از تقاطع  $(1,1)$  به تقاطع  $(3,3)$  نشان می‌دهد.



● **مسئله ۳.** با استفاده از ارقام صفر و یک می‌توان  $2^n$  کد  $n$  رقمی تولید کرد (چرا؟). برای مثال چهار کد دو رقمی وجود دارد که عبارت‌اند از  $00$ ،  $01$ ،  $10$  و  $11$ . پارسا به دنبال کدهایی است که تعداد رقم‌های یک در آن‌ها برابر  $i$  و در نتیجه تعداد رقم‌های صفر در آن‌ها برابر  $j=n-i$  است. برای مثال،  $6$  کد چهار رقمی داریم که دقیقاً  $2$  رقم یک دارند:  $0011$ ،  $0101$ ،  $0110$ ،  $1010$ ،  $1100$  و  $1110$ . چند کد  $n$  رقمی وجود دارد که هر کدام شامل دقیقاً  $i$  رقم یک باشند؟

#### ● سؤال ۱. آیا ارتباطی بین این سه مسئله وجود دارد؟

پارسا به دنبال حل مسئله ۳، به این نکته پی برد که در یک کد  $n$  رقمی کافی است که جای رقم‌های یک را انتخاب کند. با این کار به‌طور یکتایی جای ارقام صفر نیز مشخص می‌شود. بنابراین، پارسا نتیجه گرفت که تعداد کدهای  $n$  رقمی شامل  $i$  رقم یک برابر است با انتخاب  $i$  مکان از  $n$  مکان که برابر است با:

$$\frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}$$

#### ● سؤال ۲. آیا پارسا می‌توانست به جای انتخاب مکان

رقم‌های یک، به سراغ رقم‌های صفر برود و ابتدا مکان رقم‌های صفر را مشخص کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

علی با دیدن راه حل مسئله ۳، راه‌حلی برای مسئله

۲ پیدا کرد و به همان جواب  $\binom{n}{i}$  رسید.

#### ● سؤال ۳. علی برای حل مسئله ۲ به کمک راه حل

مسئله ۳، چه راهی را رفته است؟

۱					
۱	۵				
۱	۴	۱۰			
۱	۳	۶	۱۰		
۱	۲	۳	۴	۵	
۱					

### ● سؤال ۹. اتحاد (۳) در این شکل بیانگر چه ویژگی

است؟ اتحاد (۱) چه طور؟ علی به روش جبری حدس دوم خود را ثابت می کند:  $(i+j=n)$

$$\begin{aligned} \text{ضریب } x^i y^j &= \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!j!} \\ &= \frac{n!}{j!(n-i)!} = \binom{n}{j} = \text{ضریب } x^j y^i \\ \text{بنابراین: } \binom{n}{i} &= \binom{n}{n-i} \quad (۶) \end{aligned}$$

اما پارسا که به راه حل های ترکیبیاتی بیشتر علاقه مند است، به کمک مسئله ۳، اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۶) پیدا می کند.

### ● سؤال ۱۰. اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۶) پیدا

کنید. آیا می توانید به کمک مسئله ۱ یا ۳، اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۱) پیدا کنید. اکنون که به پایان این مقاله نزدیک می شویم، مسئله ای برای شما مطرح می کنیم. بررسی کنید که چه روشی (جبری یا ترکیبیاتی) برای حل این مسئله مفیدتر است؟

### ◆ مسئله ۴. اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

مقاله را به پایان می بریم در حالی که علی (که به روش جبری علاقه مند است)، تساوی زیر را می نویسد و شروع به حل مسئله می کند:

$$(x+y)^n (x+y)^n = (x+y)^{2n}$$

و پارسا که به روش ترکیبیاتی علاقه دارد، به کدهای  $2n$  رقی که شامل  $n$  رقم صفر و  $n$  رقم یک هستند، فکر می کند.

شما چه طور؟ بیایید با هم از تقاطع  $(1,1)$  به تقاطع  $(n+1, n+1)$  برویم!

بنابراین، تعداد مسیرهای مورد نظر برابر است با:  $\binom{n}{i}$ . با توجه به راه حل های سه مسئله فوق برابری زیر به دست می آید:

$$(x+y)^n = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{0} y^n \quad (۲)$$

این اتحاد (که به ازای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  برقرار است)، اتحاد دوجمله ای خیام - پاسکال نامیده می شود. پارسا با توجه به تعداد کدهای به طول  $n$  که شامل  $i$  رقم یک هستند، به نتیجه زیر رسیده است که خود یک اتحاد ترکیبیاتی است:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (۳)$$

### ● سؤال ۵. استدلال پارسا برای این تساوی چیست؟

اما علی برای اثبات تساوی فوق راه حل دیگری دارد و به این موضوع اشاره می کند که در اتحاد دو جمله ای خیام - پاسکال می توان به جای  $x$  و  $y$  اعداد دلخواهی قرار داد.

### ● سؤال ۶. علی به جای $x$ و $y$ در اتحاد (۲) چه اعدادی

قرار داده است تا بتواند اتحاد (۳) را نتیجه بگیرد؟ علی با توجه به روش جبری خود و با تغییر مقدارهای  $x$  و  $y$  توانسته است اتحاد زیر را هم به دست آورد:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n} = 0 \quad (۴)$$

(ضریب جمله آخر در سمت چپ یا مثبت است یا منفی که بستگی به  $n$  دارد).

### ● سؤال ۷. مقادیر طلایی $x$ و $y$ برای اثبات اتحاد (۴) از

روی (۲) چه هستند؟

### ● سؤال ۸. از اتحادهای (۳) و (۴) نتیجه بگیرید:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1} \quad (۵)$$

اگر تعداد مسیرها از تقاطع  $(1,1)$  به تقاطع های دیگر را بنویسیم، شکل زیر حاصل می شود:

اگر بگوییم روزی نیست که در نقطه‌ای از جهان بزرگ ما، فردی مدعی کشف یک حکم جدید و راهی تازه و یا اثباتی برای یک حدس ثابت نشده، نشود، شاید اغراق نکرده‌ایم! کافی است سری به دنیای مجازی بزنید تا ببینید چه قدر از این ادعاها در آنجا اعلام شده است. از این شماره قصد داریم به بعضی از این ادعاها بپردازیم و آن‌ها را نقد کنیم.

پیش از شروع بحث این شماره، یک نکته مهم را یادآور می‌شویم. هدف ما از این کار به هیچ عنوان تخریب یا اثبات کم‌سوادی دیگران نیست. هدف ما این است که با نقد این ادعاها، بر دانش خودمان بیفزاییم و چه بسا از این نقدها، کشفیات تازه‌ای را بیرون بیاوریم! اما توصیه ما به همه دوستان و به خصوص نوجوانان و جوانان دانش دوست این است که هر چه کشف می‌کنند و یا هر رابطه‌ای را که حدس می‌زنند، قبل از راستی آزمایی اعلام نکنند.

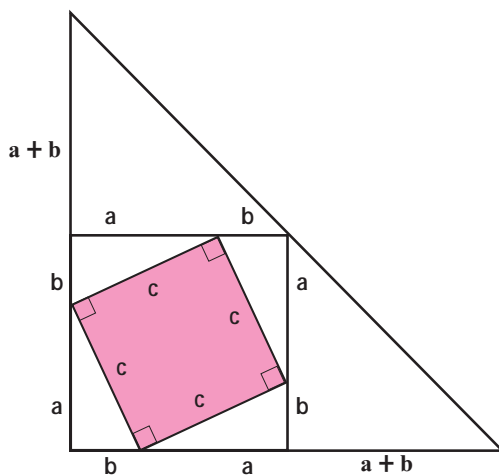
یادمان نرود، اگرچه کشف کردن در ریاضیات، برخلاف علوم تجربی و آزمایشگاهی، چندان محتاج ابزارهای دقیق و پرهزینه نیست، اما به همین سادگی هم نیست. معمولاً کارهای بزرگ به صورت گروهی انجام می‌گیرند، و نیز ممکن است آنچه که شما امروزه کشف می‌کنید، سال‌ها قبل به دست آمده باشد. پس بیشتر دقت کنید و قبل از اعلام، درباره آن با متخصصان آن حوزه به اندازه کافی مشورت کنید.



اگرچه کشف کردن  
در ریاضیات،  
برخلاف علوم تجربی  
و آزمایشگاهی  
چندان محتاج  
ابزارهای دقیق و  
پرهزینه نیست، اما  
به همین سادگی هم  
نیست!

c محاط در درون آن را ملاحظه کنید (البته توضیح نداده‌اند که این مربع را به چه صورت در مربع بزرگ محاط کرده‌اند و چرا این کار همیشه مقدور است). این شکل برایتان آشنا نیست؟! بله همان اثبات معروف تاریخی قضیه فیثاغورس است که در کتاب درسی هندسه ۱ و در بسیاری منابع دیگر نیز آمده است. پس این اثبات تازه‌ای برای قضیه فیثاغورس نیست. می‌توان به مربع فوق هر شکل دیگری را اضافه کرد و یک روش جدید ابداع کرد! مثلاً روش زیر:

مساحت مثلث قائم‌الزاویه زیر را از دو راه به‌دست آورید و با هم مساوی قرار دهید، تا به تساوی  $a^2 + b^2 = c^2$  برسید!

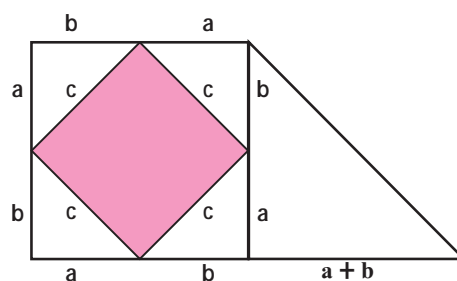


## ● یک خبر، یک کشف!

دانش آموز ۱۶ ساله ایرانی، روش جدیدی برای اثبات قضیه فیثاغورس کشف کرد!

این خبر که بیش از یک سال است در سایت‌های گوناگون آمده، اثبات جدید زیر را برای قضیه فیثاغورس اعلام کرده است:

نحوه اثبات: دوزنقه قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که قاعده کوچک آن  $a+b$  و قاعده بزرگ آن  $2a+2b$  و همچنین ارتفاع آن  $a+b$  باشد. مربعی را در داخل آن به ضلع c محاط می‌کنیم. داریم:



مساحت مثلث کوچک  $\times 4$  + مساحت مربع = مساحت دوزنقه  
«مساحت مثلث متساوی‌الساقین +

$$4 \times (\text{یک ضلع})^2 = \frac{(\text{ارتفاع})(\text{قاعده کوچک} + \text{قاعده بزرگ})}{2}$$

$$\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} + \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$$

$$\frac{(a+b+a+b+a+b)(a+b)}{2} = c^2 + 4 \times \frac{a \times b}{2} + \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$\frac{(3a+3b)(a+b)}{2} = c^2 + 2ab + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

طرفین رابطه بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$(3a+3b)(a+b) = 2c^2 + 4ab + a^2 + 2ab + b^2$$

$$3a^2 + 3ab + 3b^2 + 3ab = 2c^2 + 6ab + a^2 + b^2$$

پس از ساده کردن طرفین داریم:  $2a^2 + 2b^2 = 2c^2$

حال طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و داریم:  $c^2 = a^2 + b^2$

یعنی در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با

مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

نقد اثبات: به‌نظر می‌آید که استدلال فوق بی‌نقص

باشد! و همین‌طور هم هست، اما...

کمی به شکل دقت کنید. مثلث قائم‌الزاویه سمت

راست را حذف کنید، مربع به ضلع  $a+b$  و مربع به ضلع

پرسش‌های  
پیکارجو!



$a_1, a_2, \dots, a_{1395}$  تعدادی عدد صحیح هستند و  $b_1, b_2, \dots, b_{1395}$  هم همان عددها هستند ولی به ردیفی دیگر. درباره عدد  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{1395} - b_{1395})$  همواره می‌توان گفت:

- (الف) مربع کامل است. (ب) زوج است. (ج) فرد است.  
(د) منفی است. (ه) مثبت است.



# فیلم قبه‌ای برای جمشید کاشانی

\* نام فیلم: قبه‌ای برای جمشید کاشانی

\* طراح و نویسنده: ایوونه دولد - سمپلونیوس<sup>۱</sup>

\* تولید شده تحت نظارت و حمایت دانشگاه هیدلبرگ<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۵

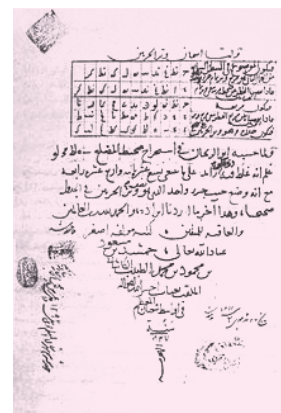
\* صداگذاری و دوبلاژ: امین محمدی \* تهیه و توزیع در ایران: خانه ریاضیات اصفهان در سال ۱۳۸۵

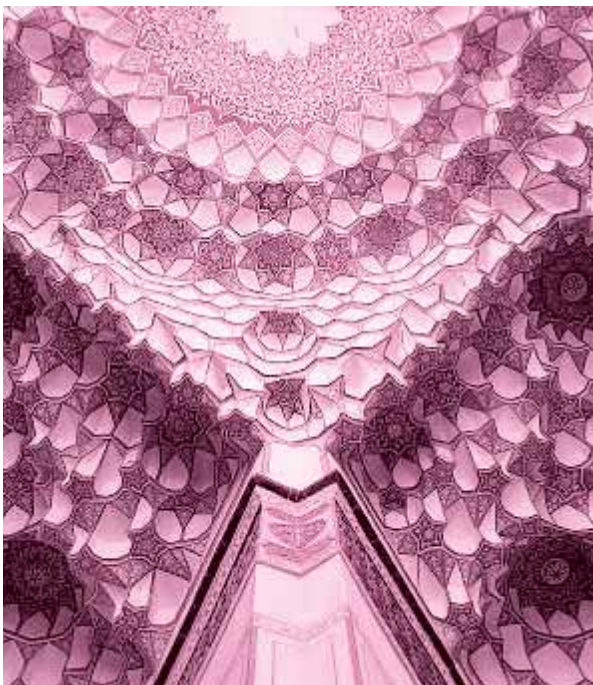
ادامه می‌یابد: از روش‌هایی برای محاسبه حجم استوانه، مخروط، مخروط ناقص، تقاطع مخروطات و کره گرفته تا محاسبات مربوط به اجزای ساختمان. در نهمین (آخرین) فصل کتاب، درباره ساختارها و بناها، هدف عمل‌گرایانه، محاسبه سطح و حجم نمادهای مشخصه معماری دوره اسلامی است: کمان‌ها، طاق‌ها، گنبدها و مقرنس‌ها. به این منظور غیاث‌الدین جمشید کاشانی، با استفاده از پنج ترسیم هندسی برای کمان‌ها که فقط از خط‌کش و پرگار استفاده می‌کنند، برای این ساختارها ترسیم‌های هندسی تقریبی ارائه می‌دهد. دوران یک کمان حول محورش یک گنبد ایجاد می‌کند، که در این فیلم ویدیویی روش‌های ترسیم کمان‌ها و گنبدهای

دانشگاه لیدن در هلند نگهداری می‌شود. علاقه به محاسبه سطح و حجم مربوط به قسمت‌های یک بنا به‌خاطر کاربردهای آن است. در ایتالیای قرون وسطا معمول بود که دستمزد استادکار را متناسب با مساحت کاری که انجام می‌داد، می‌پرداختند. رسم مشابهی هم می‌توانست در دوره اسلامی وجود داشته باشد. به‌صورت مشابه مفید است که بدانیم چه‌قدر مصالح نیاز است. برای مثال، مقدار طلای موردنیاز برای طلاکاری، مقدار آجر مورد نیاز برای بنا، یا رنگ و غیره. البته معماری اسلامی توسط این عناصر ویژه مشخص می‌شوند: مقرنس، قبه (گنبد) و با اهمیت کم‌تر، کمان‌ها و طاق‌ها. کتاب چهارم از مفتاح الحساب با چند شکل مسطح شروع می‌شود و با محاسبه شکل‌های سه‌بعدی

و هندسه کاربردی می‌توانند با تماشای این فیلم با گوشه‌ای از تلاش‌های این دو تن از نام‌داران ایران‌زمین آشنا شوند. بنابراین در ابتدای مقاله به ارائه مطالبی که در این فیلم ویدیویی هم به آن‌ها اشاره شده است، می‌پردازیم تا علاقه‌مندان به تماشای این فیلم با پیش‌زمینه‌ای مناسب‌تر به دیدن آن بنشینند. در واقع فیلم قبه‌ای برای جمشید کاشانی، برپایه ابداعات ستاره‌شناس و ریاضی‌دان عصر تیموری، غیاث‌الدین کاشانی که در کتاب چهارم (درباره اندازه‌گیری) از کار اصلی او - مفتاح الحساب - شرح داده شده، تهیه و تدوین شده است. تا آنجا که ما می‌دانیم، قدیمی‌ترین نسخه این کتاب تاریخ ۱۵۵۸ میلادی را دارد و در کتابخانه

فیلم «قبة‌ای برای جمشید کاشانی» به شرح پنج روش ترسیمی ریاضی‌دان پرافتخار ایران، غیاث‌الدین جمشید کاشانی برای احداث گنبدهایی که در دوره اسلامی ساخته شده‌اند و نیز اقدامات تحسین برانگیز الغ بیگ، فرمانروای دانش‌دوست دوره تیموری در آن دوره، اشاره دارد. علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات





متناظر توسط رایانه اجرا شده‌اند و برای ساختن طرح مقبره‌ای به افتخار جمشید کاشانی در نزدیکی رصدخانه الغیبیگ، جایی که جمشید کاشانی در سال ۱۴۹۲ میلادی فوت کرد، به کار رفته‌اند. برای کامل کردن مجموعه، یک بازسازی ساده از این رصدخانه (که در بیرون سمرقند واقع بوده)، ارائه شده است. این بازسازی براساس متون معاصر است، چون رصدخانه در ابتدای قرن ۱۶ میلادی کاملاً ویران شد.

۱۵۰ سال پس از شروع فرمانروایی مغول‌ها، شهر سمرقند مجدداً روبه ترقی نهاد. چون سردار مغول، تیمور لنگ از ۱۳۶۹ میلادی به قدرت رسید و شهر سمرقند را به عنوان پایتخت امپراتوری مرتباً روبه گسترش خود برگزید، زیباسازی شهر سمرقند تحت حکومت تیمور شروع شد و در زمان حکومت نوۀ او - الغیبیگ - ادامه یافت؛ به خصوص با ساخت قصر سلطنتی و رصدخانه معروف وی. خان بزرگ (خاقان) الغیبیگ (۱۳۹۴-۱۳۴۹ میلادی) در دربار پدر بزرگ خود پرورش یافت و از سال ۱۴۰۹ تا ۱۴۴۹ فرمانروایی کرد. برخلاف تیمور، الغیبیگ به فتح سرزمین‌ها و کشور گشایی علاقه‌مند نبود، اما به عنوان دانشمند مشهور شد و به طور ویژه به خاطر جدول‌های نجومی (زیج‌هایی) که تحت حمایت او در رصدخانه سمرقند تهیه شدند،

شهرت یافت. در سال ۱۴۱۷ او در سمرقند مدرسه‌ای تأسیس کرد که محلی برای مطالعات پیشرفته در علوم الهی، ریاضیات و علوم طبیعی بود و نجوم در آن مهم‌ترین مبحث به‌شمار می‌آمد. این مدرسه از دیگر مدارس زمان خود، چه از نظر محتوای درس‌ها و چه از نظر تدریس متفاوت بود. اندکی بعد از تکمیل مدرسه، الغیبیگ ساخت یک رصدخانه سه طبقه را آغاز کرد. برای کار در مدرسه و رصدخانه، الغیبیگ تعداد زیادی از دانشمندان را به خدمت خویش درآورد؛ از جمله منجم و ریاضی‌دان سرشناس ایرانی، غیاث‌الدین جمشید کاشانی.

یک ربع قرن قبل از ترور الغیبیگ در سال ۱۴۴۹ و شروع حرکت‌های ارتجاعی سیاسی و ایدئولوژیک، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی مشرق‌زمین محسوب می‌شد. جمشید کاشانی فعالانه در مطالعات ریاضی و نجومی آنجا شرکت کرد و نقش مهمی در شکل‌گیری رصدخانه و تجهیز آن با بهترین وسایل داشت. او مهم‌ترین جایگاه را بین دانشمندان دربار الغیبیگ به‌دست آورد. جمشید کاشانی از تبحر و توانایی ریاضی الغیبیگ بسیار تمجید می‌کند، به خصوص از توانایی او در انجام ذهنی محاسبات پیچیده. اما دربارهٔ ۶۰ تا ۷۰ همکار او با تمسخر چنین می‌گوید: «... واقعیت این است که گرچه تعداد آن‌ها زیاد است و با ریاضیات سروکار دارند،

اما هیچ‌یک چنان نیستند که جایگاهی واقعی در علوم نظری و علم رصد داشته باشند. چون هیچ‌یک المجستی را نمی‌دانند. فقط یک نفر هست که علم المجستی را می‌داند که نامش قاضی‌زادهٔ رومی (الرومی) است. ولی او مردی عمل‌گرا نیست و هیچ کاری در رابطه با کاربردها انجام نداده است. با وجود این، او با معلومات‌ترین آن‌هاست.» قاضی‌زادهٔ رومی (۱۴۳۶-۱۳۶۴ میلادی) بعد از مرگ کاشانی سرپرست رصدخانه شد. جمشید کاشانی مثال‌های متعددی از مسائل نجومی که در نشست‌های متعدد علمی که توسط سلطان ترتیب داده می‌شد، ارائه می‌دهد. این مسائل که برای دیگران بیش از حد دشوار بودند، توسط کاشانی به‌سادگی حل

می‌شدند. با خشنودی فراوان، کاشانی برای پدرش دربارهٔ ستایش‌ها و تمجیدی‌های الغیبیگ از او (که از طریق دوستانش به او گفته می‌شد) صحبت می‌کند. جمشید کاشانی بر آزادی کامل فضای گفت‌وگوهای علمی که در حضور سلطان برگزار می‌شد، تأکید می‌کند. در ضمن نامه‌های کاشانی شامل اطلاعات جالبی دربارهٔ ساخت ساختمان رصدخانه و وسایل کار در آن است و مشخص می‌سازد که جمشید کاشانی نزدیک‌ترین همکار و مشاور الغیبیگ بوده است.

#### \* پی‌نوشت‌ها

1. Yvonne Dold-Samplonius
2. University of Heidelberg
۳. در فرهنگ لغت «عمید» دربارهٔ واژهٔ قُبّه چنین آمده است: گنبد، قباب یا قُبّ جمع آن است.



# آموزش ترجمه متون ریاضی

27. Let  $p$  be a prime number. If  $p$  divides the product  $ab$ , then  $p$  divides either  $a$  or  $b$ .

*Proof.* If  $p$  does not divide  $a$ , then  $\text{GCD}(a, p) = 1$ . (Explain why.)

Therefore,  $1 = sa + pt$

for some integers  $s$  and  $p$ .

(See Exercise 26.) Thus

$$\begin{aligned} b &= b(sa + pt) \\ &= (ab)s + bpt \\ &= (kp)s + bpt \\ &= p(ks + bt). \end{aligned}$$

This implies that  $p$  divides  $b$ .

28. Let  $p$  be a prime number. Then  $\sqrt{p}$  is an irrational number. ■

*Proof.* We assume that  $\sqrt{p}$  is a rational number, that is

$$\sqrt{p} = \frac{n}{q}$$

with  $n \neq 0$ ,  $q \neq 0$ ,  $n$  and  $q$  integers, with the fraction written in reduced form. (See the front of the book on rational numbers.) Therefore,

$$p = \frac{n^2}{q^2}.$$

Thus

$$n^2 = pq^2.$$

As  $n^2$  is a multiple of  $p$ , which is a prime number, then  $n$  must be a multiple of  $p$ .

۲۷. فرض کنیم  $p$  یک عدد اول باشد. اگر  $p$  حاصل ضرب  $ab$  را عاد کند (بشمارد)، آن گاه  $a$ ،  $p$  یا  $b$  را می شمارد. اثبات: اگر  $p$  عاد نکند،  $a$  را، در این صورت:  $\text{GCD}(a, p) = 1$  (توضیح دهید چرا). بنابراین، برای اعدادی صحیح چون  $s$  و  $t$  داریم:

$$\begin{aligned} 1 &= sa + pt \quad (\text{تمرین ۲۶ را ملاحظه کنید}) \\ \Rightarrow b &= b(sa + pt) = (ab)s + (bp)t = (kp)s + bpt \\ &= p(ks + bt). \end{aligned}$$

تساوی اخیر نشان می دهد که  $p$ ،  $b$  را عاد می کند.

۲۸. فرض کنیم  $p$  عدد اول باشد. در این صورت  $\sqrt{p}$  عددی گنگ است.

اثبات: فرض می کنیم که  $\sqrt{p}$  یک عدد گویا باشد، به طوری که:  $\sqrt{p} = \frac{n}{q}$  و  $n \neq 0$  و  $q \neq 0$  و  $n$  و  $q$  اعدادی صحیح هستند به قسمی که کسر (حاصل از آن ها) تحویل ناپذیر (به ساده ترین صورت نوشته شده) است. بنابراین:  $p = \frac{n^2}{q^2}$  در نتیجه  $n^2 = pq^2$

چون  $n^2$  مضرب  $p$  و  $p$  اول است، پس  $n$  باید مضرب  $p$  باشد. (تمرین ۲۷ را ملاحظه کنید). بنابراین می توانیم بنویسیم:  $n = pk$  برای عددی صحیح و مثبت مانند  $k$ ، این نشان می دهد:  $p^2 k^2 = pq^2$  یا:  $pk^2 = q^2$ . حال چون  $q^2$  مضرب  $p$  و  $p$  اول است، بنابراین  $q$  باید مضرب  $p$  باشد (تمرین ۲۷ را ملاحظه کنید). بنابراین برای عددی صحیح و مثبت مانند  $m$  می توانیم بنویسیم:  $q = pm$  پس:

$$\frac{n}{q} = \frac{pk}{pm} = \frac{k}{m}$$

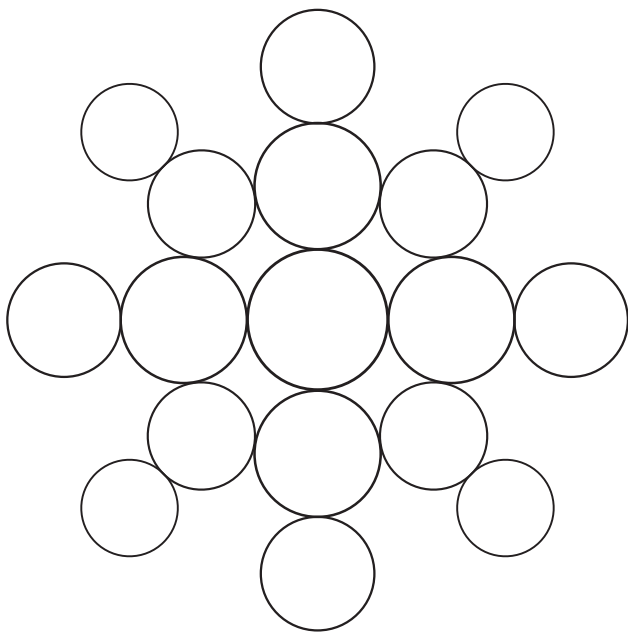
این موضوع با فرض تحویل ناپذیر بودن کسر  $\frac{n}{q}$  تناقض دارد و لذا ثابت می شود که  $\sqrt{p}$  عددی گنگ است.



کلمه‌ها و اصطلاحات مهم

1. Prime number عدد اول
2. Divides عاد می‌کند
3. Product حاصل ضرب
4. Irrational گنگ، ناگویا
5. Rational number عدد گویا
6. Fraction کسر
7. Multiple مضرب
8. Positive integer صحیح مثبت
9. Contradict تناقض

برای ایستگاه اول اندیشه می‌خواهیم شما را به یک چالش عددی دعوت کنیم! عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و... و ۱۷ را در هفده خانه شکل زیر طوری قرار دهید که مجموع اعداد روی هر پنج خانه یک ردیف با هم برابر باشند. یعنی پنج خانه‌ای که روی یک خط راست قرار دارند، دارای مجموع ثابتی باشند. آیا می‌توانید برای این کار یک ایده ریاضی ارائه دهید؟ یا این کار را با روش سعی و خطا انجام می‌دهید؟ در هر حال اگر به جواب نرسیدید، برای مشاهده پاسخ به صفحه ۴۷ مراجعه کنید.



(See Exercise 27.) Therefore we can write  $n=pk$  for some positive integer  $k$ . This implies

$$p^2k^2=pq^2$$

or

$$pk^2=q^2.$$

As  $q^2$  is a multiple of  $p$ , which is a prime number, then  $q$  must be a multiple of  $p$ . (See Exercise 27.) Therefore we can write  $q=pm$  for some positive integer  $m$ . Therefore

$$\frac{n}{q} = \frac{pk}{pm} = \frac{k}{m}.$$

This contradicts the fact that the fraction  $n/q$  is already in reduced form, and proves that  $\sqrt{p}$  is an irrational number.

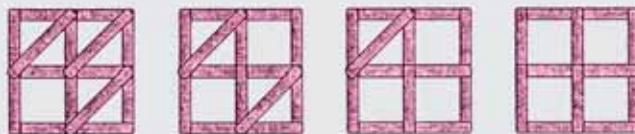


# اجسام صلب و ویژگی‌های هندسی آنها

## اشاره

یکی از پرسش‌های آزمون سی‌امین المپیاد ریاضی ایران، مرحله اول، به صورت زیر بود:

فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه چوبی به طول‌های یک متر و  $\sqrt{2}$  متر، چهار شکل زیر را ساخته‌ایم، به طوری که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چقدر از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟ (سی‌امین المپیاد ریاضی دانش آموزی، مرحله اول، ۵ اسفند ۱۳۹۰، بخش سؤالات پنج‌گزینه‌ای، سؤال ۷.)\*



الف) هیچ‌کدام      ب) ۱      ج) ۲      د) ۳      ه) ۴

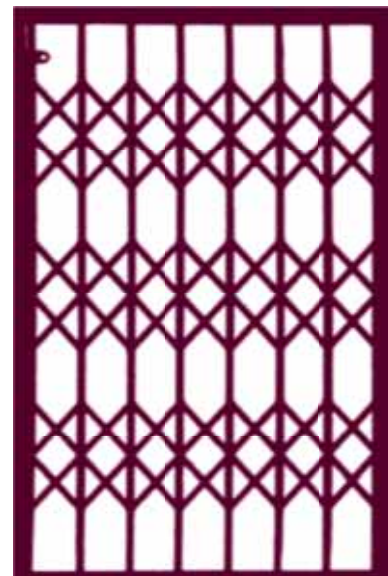
آب موجود در یک لیوان، و یا حتی هوای اطراف ما! هیچ‌کدام از این اجسام شکل ثابتی ندارند، بلکه در اثر نیروهای وارده به آنها تغییر شکل می‌دهند. برخی از آنها مانند پارچه و کاغذ، جامداتی هستند که قابلیت انعطاف و تغییر شکل دارند، حال آنکه برخی دیگر از آنها مثل آب و هوا اساساً جامد نیستند، بلکه «سیال» هستند، و سیالات نیز خود به دو دسته مایعات و گازها تقسیم می‌شوند.

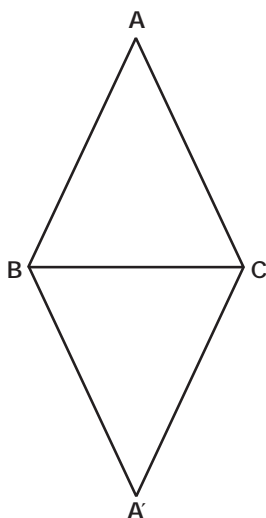
اکنون بگذارید درباره خواص اجسام صلب اندکی بیشتر صحبت کنیم. فرض کنید که چند جسم صلب، مثلاً تعدادی قطعه چوبی مکعب مستطیل شکل با ضخامت یکسان و طول‌های متفاوت در اختیار داریم. ابتدا فرض کنید که تعدادی از این قطعات را به طور پراکنده روی زمین قرار داده باشیم. واضح است که در این حالت، حرکت هر کدام از قطعه‌ها مستقل از حرکت سایر قطعات است. اما می‌توان این قطعه‌ها را به روش‌های گوناگون به یکدیگر متصل کرد. مثلاً یک روش این است که دوتا از آنها را با چسب چوب و یا با کوبیدن دو میخ در دو نقطه متفاوتشان، محکم به هم بچسبانیم، طوری که نتوانند نسبت به هم جابه‌جا شوند. در این صورت مجموعه این دو قطعه محکم چسبیده به یکدیگر، تشکیل یک جسم صلب مرکب جدید را خواهد داد.

در حالت سوم، فرض کنید که دو قطعه یکسان را انتخاب کنیم، به نحوی که طول هر دو قطعه مساوی یک متر باشد، و سپس انتهای آنها را به یکدیگر لولا کنیم، به نحوی

به بیان ساده، جسم صلب جسمی است که موقعیت ذرات تشکیل‌دهنده آن نسبت به یکدیگر در شرایط متفاوت تقریباً ثابت بماند، و در نتیجه کل جسم همواره شکل ثابت و غیرقابل تغییری داشته باشد. اگر به اطراف خود نگاهی بیندازیم، می‌توانیم مثال‌های زیادی هم از اجسام صلب و هم از اجسام غیرصلب پیدا کنیم. مثلاً، قاشق و چنگال فولادی، در چوبی، پنجره شیشه‌ای، عصای چوبی و لیوان شیشه‌ای را می‌توانیم نمونه‌هایی از اجسام صلب بدانیم، زیرا سخت و محکم‌اند و همیشه شکل ثابت خود را حفظ می‌کنند. می‌دانید که اگر چنگال فلزی خود را در یک تکه از میوه فرو کنید، دندان‌های آن خم نمی‌شوند، و این به خاطر صلب بودن چنگال است. اما در مقابل، نمونه‌های فراوانی هم از اجسام غیرصلب داریم، مانند پیراهنی که می‌پوشیم، کیسه پلاستیک، یک تکه کاغذ، سیم برق، گوجه‌فرنگی، برگ درخت،

شرح و پاسخ به این پرسش، انگیزه نگارش مقاله حاضر شد. ابتدا مختصری درباره اجسام صلب و ویژگی‌های آنها توضیح می‌دهیم، سپس با توجه به نتایج به دست آمده، پاسخ این پرسش را می‌دهیم.





شکل ۴

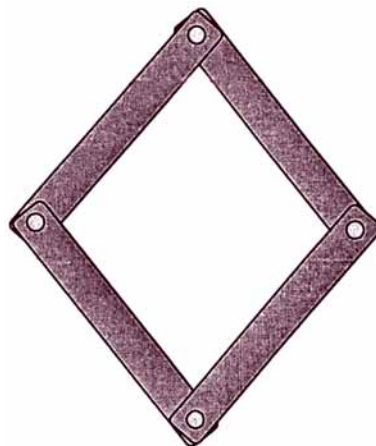
می‌کند. پس برای مطالعه تغییرات لوزی  $ABA'C$  کافی است که تغییرات مثلث  $ABC$  را پیگیری کنیم.

از طرف دیگر، چون تمام لولاها در لوزی ما می‌توانند آزادانه باز و بسته شوند، پس هیچ محدودیتی از قبل روی  $\hat{A}$  گذاشته نشده است. به علاوه، چون هیچ مانع فیزیکی روی قطرهای لوزی قرار ندارد، پس قطرهای لوزی نیز از قبل محدود نشده‌اند. نتیجه آنکه هم زاویه  $A$  و هم قطر  $BC$  در شکل ۳ مجاز به تغییر هستند. اما توجه داشته باشید که بر طبق روابط طولی که در بالا دیدیم، تغییرات این دو وابسته به یکدیگرند و تناظری یک‌به‌یک بین اندازه‌های  $\hat{A}$  و  $BC$  وجود دارد؛ یعنی با تغییر کردن یکی، اندازه دیگری به‌طور یکتا تعیین می‌شود. خلاصه آنکه در لوزی  $ABA'C$  با وجود آنکه طول اضلاع ثابت است، اما مقادیر زاویه‌ها و اندازه‌های قطرهای آن متغیرند، و بنابراین لوزی ما شکل ثابت و معینی ندارد.

شاید برایتان جالب باشد که بدانید، چنین سیستمی در زندگی روزمره کاربرد مهمی دارد. به احتمال زیاد تا به حال درهای فلزی آکاردئونی را دیده‌اید. از این درها به‌عنوان یک پوشش محافظ در جلوی در اصلی ساختمان‌ها استفاده می‌شود. آیا هیچ

به مرکز  $A$  و به شعاع یک متر. به‌عنوان یک تمرین ساده این موضوع را خودتان ثابت کنید. همچنین نشان دهید که طول قاعده  $BC$  از رابطه  $BC = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2}$  به‌دست می‌آید و از آنجا داریم:  $\hat{A} = 2 \text{Arcsin} \frac{BC}{2}$ . این بدان معناست که مقدار عددی هر کدام از  $\hat{A}$  و  $BC$  از روی دیگری به‌طور یکتا تعیین می‌شود و در نتیجه، تناظری یک‌به‌یک میان آن دو وجود دارد. این موضوع را به‌خاطر بسپارید، زیرا در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

حالا فرض کنیم که چهار تا از قطعه‌های یک متری را طوری به‌هم لولا کرده‌ایم که یک چهارضلعی تشکیل داده‌اند (شکل ۳).

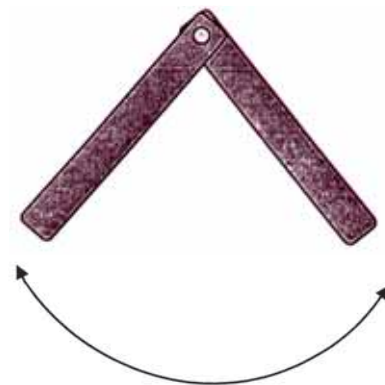


شکل ۳

چهارضلعی حاصل یک لوزی با طول ضلع ثابت یک متر است، زیرا تمام اضلاع آن با هم برابرند؛ اما در حالت کلی زاویه‌ها و قطرهای آن تغییر می‌کنند. برای درک بهتر موضوع، این لوزی را به‌صورت همان مثلث  $ABC$  به همراه بازتاب آن نسبت به قاعده  $BC$  در نظر بگیرید (شکل ۴).

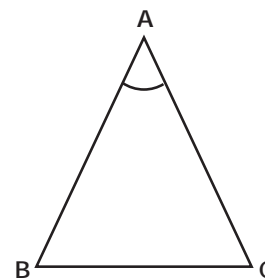
ابتدا دقت کنید که مثلث  $A'BC$  دقیقاً قرینه مثلث  $ABC$  است، بنابراین  $A'BC$  کاملاً هماهنگ با تغییرات  $ABC$  تغییر

که این دو قطعه بتوانند آزادانه دور لولا بچرخند (شکل ۱).



شکل ۱

جسم مرکب حاصل، جسمی است که از ترکیب اجسام صلب کوچک‌تری تشکیل شده، اما خودش دارای مقداری آزادی برای تغییر شکل است. اگر نقطه مرکز لولا را با حرف  $A$  و دو سر دیگر این قطعات را به‌ترتیب با حروف  $B$  و  $C$  نام‌گذاری کنیم، به یک مثلث متساوی‌الساقین به رأس  $A$  می‌رسیم که طول ساق‌های آن برابر با مقدار ثابت یک متر، و زاویه  $A$  در آن متغیر است (شکل ۲).



شکل ۲

مثلث  $ABC$  ثابت نیست، زیرا اگرچه  $AB=AC=1\text{m}$  مقدارهای ثابتی هستند، ولی زاویه  $\hat{A}$  متغیر است، و در نتیجه طول ضلع  $BC$  و اندازه زاویه‌های  $B$  و  $C$  نیز تغییر می‌کند. در واقع، واضح است که مکان هندسی رئوس  $B$  و  $C$  عبارت است از دایره‌ای

دقت کرده‌اید که طرز کار این چگونگی است؟ این درهای آکاردئونی، در واقع از تعداد زیادی عناصر لوزی شکل، کاملاً مشابه با آنچه که ما در بالا بررسی کردیم، تشکیل شده‌اند که همگی به‌طور هماهنگ با هم جمع و باز می‌شوند. نکته کلیدی در مورد طرز کار این درها همان موردی است که ما نتیجه گرفتیم: اینکه این عناصر لوزی شکل با وجود آنکه طول ضلع ثابتی دارند (و در حقیقت از قطعات صلب تشکیل شده‌اند)، ولی اندازه زوایا و اقطار ثابتی ندارند، و در نتیجه در آکاردئونی می‌تواند جمع و باز شود.

سرانجام، حالتی را در نظر بگیرید که بخواهیم با قرار دادن یک قطعه چوب (به طول دلخواه) روی قطر BC، لوزی ABA'C را مقید کنیم تا نتواند آزادانه تغییر شکل دهد. اول ببینیم که طول قطعه چوبی که قرار است روی قطر قرار دهیم، حداقل و حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد. واضح است که حداقل این مقدار برابر صفر است، یعنی حالتی که دو رأس B و C روی هم منطبق شوند و مقدار زاویه A برابر صفر شود. از سوی دیگر، حداکثر طول ممکن برای قطر عبارت است از مقدار ماکسیمم عبارت  $\frac{\hat{A}}{2} \cdot BC = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2}$  می‌شود که مقدار سینوس برابر یک شود که متناظر است با زمانی که مقدار زاویه  $\hat{A}$  برابر  $180^\circ$  باشد، و از آنجا:

$$0 \leq BC \leq 2 \times \sin \frac{\pi}{4} = 2m$$

دقت کنید که این مقدار ماکسیمم در حقیقت برابر است با مجموع اضلاع AB و AC؛ مطلبی که به سادگی از قضیه حمار نتیجه می‌شود. در نتیجه، قطعه چوبی که قرار است در محل قطر قرار داده شود، می‌تواند هر مقداری بین صفر تا دو متر داشته باشد.

تصور کنید که اندازه آن را برابر با یک متر بگیریم. در این حالت هر دوی مثلث‌های ABC و A'BC به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع

به ضلع واحد تبدیل می‌شوند، و خواهیم داشت:

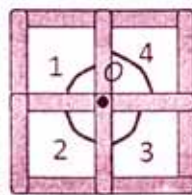
$$\hat{A} = \hat{A}' = 2 \times \text{Arcsin} \frac{1}{2} = 60^\circ$$

آیا می‌توانیم از قطعه‌ای به طول  $\sqrt{2}$  متر استفاده کنیم؟ بله، زیرا داریم:  $2 < \sqrt{2} < 2.0$  در این حالت مقدار زاویه A برابر خواهد بود با:

$$\hat{A} = 2 \times \text{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} = 90^\circ$$

ضمناً، مقدار زاویه A را به کمک قانون کسینوس‌ها در مثلث نیز می‌توانستیم محاسبه کنیم. در نتیجه، لوزی ABA'C به یک مربع به ضلع واحد تبدیل می‌شود. این مربع دیگر قابلیت تغییر شکل ندارد، زیرا قطر BC و به دنبال آن زوایای چهارضلعی و همچنین قطر AA' همگی مقید شده و براساس اندازه BC معین شده‌اند. این مربع را می‌توان مثال دیگری از جسم (مرکب) صلب در نظر گرفت. حالا می‌توانیم به پرسش مطرح شده پاسخ دهیم:

بیا بید شکل‌های پرسش آزمون را یکی یکی بررسی کنیم. اولین شکل از سمت راست از چهار لوزی تشکیل شده است که در آن هیچ یک از زوایا یا اقطار مقید نشده‌اند. در نتیجه، هر چهار لوزی می‌توانند تغییر شکل دهند. (دقت کنید که اگرچه این شکل به‌صورت مربع رسم شده است، اما هیچ الزامی برای وجود زوایای قائمه در آن نیست و زوایای آن آزادانه تغییر می‌کنند). نکته‌ای که باید به آن دقت داشت، وضعیت لولای مرکزی است؛ یعنی همان نقطه مرکزی شکل که فصل مشترک هر چهار لوزی کوچک نیز هست. اگر این نقطه را با حرف O، و زوایای آن را به ترتیب با  $\hat{O}_1, \dots, \hat{O}_4$  نام‌گذاری کنیم.



شکل ۵

داریم:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 360^\circ \quad (*)$$

نتیجه می‌شود که تغییر زوایای این چهار لوزی، با تساوی فوق به یکدیگر وابسته است.

در شکل دوم روی یکی از لوزی‌ها یک قطعه مقیدکننده قطر به طول  $\sqrt{2}$  گذاشته شده و آن لوزی را واقعاً به یک مربع تبدیل کرده است. با همان نمادگذاری شکل اول، علاوه بر شرط (\*) در اینجا یک شرط اضافی دیگر هم داریم، و آن هم عبارت است از اینکه  $\hat{O}_1 = 90^\circ$  مقداری ثابت است. این مربع خودش تغییر شکل نمی‌دهد، اما لوزی‌های اطراف آن می‌توانند تغییر کنند. اگر زاویه قائمه و تغییرناپذیر  $\hat{O}_1$  را از تساوی (\*) کم کنیم، شرط تغییر سایر زوایا به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 270^\circ$$

وضعیت مشابهی نیز در مورد شکل سوم برقرار است، با این تفاوت که در اینجا دو مربع ثابت و دو لوزی متغیر داریم. در اینجا داریم:

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 90^\circ \text{ و در نتیجه:}$$

$$\hat{O}_2 + \hat{O}_4 = 180^\circ$$

اما وضعیت در شکل آخر متفاوت است. در این شکل سه مربع مقید و یک لوزی دیده می‌شود. یعنی داریم:  $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^\circ$  پس باید داشته باشیم:

$$\hat{O}_2 = 90^\circ$$

و این یعنی آنکه تمام لوزی‌های این شکل در واقع مربع‌های تغییرناپذیر هستند. پس شکل چهارم قابلیت تغییر ندارد و کاملاً صلب است.

بنابراین، می‌بینیم که گزینه صحیح گزینه (د) است، یعنی دقیقاً سه تا از این شکل‌ها می‌توانند تغییر شکل دهند.

\* پی‌نوشت

\* سؤال و تصویر مربوط به آن را از: [www.iryse.com](http://www.iryse.com) برگرفته‌ایم.

## مسائل برای حل

۳.  $a$ ،  $b$  و  $c$  را طوری به دست آورید که رابطه  $f$  یک تابع وارون پذیر باشد. سپس  $f^{-1}$  را به دست آورید.  
 $f = \{(-1, a+b), (a-2b, 2), (2, -2), (-1, 2), (a+c, a-b), (4, 0)\}$

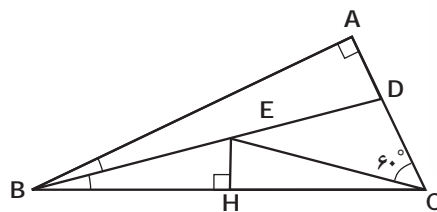
۱

### هندسه

۱. در مثلث  $ABC$  ( $BC > AB$ )، نیم سازه زاویه  $B$  را رسم می کنیم تا ضلع مقابل را در نقطه  $D$  قطع کند و آن را تا نقطه  $E$  در خارج از مثلث امتداد می دهیم، به طوری که:  $BE = BC$ . سپس  $E$  را به  $A$  وصل می کنیم.  
 ثابت کنید اگر  $\hat{AEB} = \hat{ACB}$ ، آن گاه:  
 $DE = BC - AB$

۲. ثابت کنید هر دوزنقه ای که دو زاویه مجاور به دو ساق آن با هم برابر باشند، متساوی الساقین است.

۳. در شکل زیر مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائم الزاویه و  $BD$  نیم سازه زاویه  $B$  است. همچنین، عمود منصف  $BC$ ،  $BD$  را در  $E$  قطع کرده است.  
 اگر:  $\angle ECD = 60^\circ$ ، اندازه های  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  را به دست آورید.



۲

### هندسه

۱. اگر طول های اضلاع مثلثی با سه عدد  $x$  و  $x-y$ ،  $x+y$  و  $xy$  بیان شده باشند، ثابت کنید:  $x > 2y$ .

۲. ثابت کنید در هر دوزنقه دارای ساق های نابرابر، زاویه حاده مجاور به ساق کوچک تر، بزرگ تر از زاویه حاده مجاور به ساق بزرگ تر است.



۲

### ریاضی

۱.  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که رابطه زیر یک تابع باشد:

$$f = \{(2a+b, a+b), (-1, a-b), (a-b, 3), (3a, 4), (2, 5), (-1, 0)\}$$

۲. ضابطه تابع خطی  $f$  را به گونه ای بیابید که نمودار آن محورهای مختصات را در دو نقطه  $A$  و  $B$  با طول و عرض مثبت قطع کند و مساحت مثلث  $OAB$ ،  $4$  واحد سطح باشد ( $O$  مبدأ مختصات است و  $f(-1) = 6$ ).

می‌فروشد و با این قیمت در هر ماه ۵۰۰ دستگاه از آن رادیو به فروش می‌رساند. اگر بدانیم که با هر ۲۰۰ تومان تخفیفی که بدهد، ۱۰۰ دستگاه بیشتر می‌فروشد، هر دستگاه را به چه قیمتی بفروشد تا سود او ماکزیمم شود؟

## حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. الف) ثابت کنید دنباله  $a_n = 2^n$  هم‌گرا نیست.  
ب) ثابت کنید این دنباله واگرا به  $+\infty$  است.

۲. ثابت کنید دنباله  $b_n = 2^{-n}$  هم‌گرا به صفر است.

۳. دنباله  $a_n$  با ویژگی‌های  $a_1 = 2$  و  $a_n + 1 = 2a_{n-1}$  مفروض است. نشان دهید که این دنباله نزولی و هم‌گراست.

## جبر و احتمال

۱. با استفاده از «استدلال بازگشتی» نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (a, b, c > 0)$$

$$\text{ب)} \quad |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به شکل  $6q \pm 1$  است که در آن:  $q \in \mathbb{Z}$ .

۳. با فرض گنگ بودن  $\sqrt{7}$  ثابت کنید  $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7}$  گنگ است.

## هندسه تحلیلی

۱. اگر  $e_1$  و  $e_2$  دو بردار یک‌ناهم‌راستا باشند و  $|e_1 + e_2| = \sqrt{3}$ ، در این صورت حاصل  $(e_1 + e_2) \cdot (e_1 + 2e_2)$  را به دست آورید.



۳. از نقطه  $M$  واقع بر نیم‌ساز زاویه خارجی رأس  $A$  مثلث  $ABC$  به رأس‌های  $B$  و  $C$  وصل می‌کنیم. ثابت کنید محیط مثلث  $MBC$  از محیط مثلث  $ABC$  بزرگ‌تر است.

## حسابان

۱.  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که چندجمله‌ای  $2x^2 + x^2 + ax + b$  بر  $x^2 + x + 2$  بخش‌پذیر باشد.

۲. تعدادی دانش‌آموز در یک اردوی تفریحی چند روزه شرکت کرده‌اند و ۳۶ عدد کیک به عنوان سهمیه تغذیه به آنان داده شده است. اما قبل از خوردن کیک‌ها سه دانش‌آموز دیگر به اردو آمدند. دوباره کیک‌ها را بین آنان تقسیم کردند و این‌بار به هر دانش‌آموز ۲ کیک کمتر رسید. چند دانش‌آموز در اردو بودند؟

۳. فروشنده لوازم برقی، یک رادیوی کوچک را به قیمت ۵۰۰۰ تومان می‌خرد و به قیمت ۱۰۰۰۰ تومان

۲. هرگاه  $a$  و  $b$  دو بردار هم‌اندازه باشند، ثابت کنید:  
 الف)  $|a + b| = 2|a| \cos \frac{\theta}{2}$   
 ب)  $|a - b| = 2|a| \sin \frac{\theta}{2}$

۳. فرض کنید  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است. اگر  $M$  روی  $BC$  چنان باشد که:  $BM = \frac{1}{3}BC$ ، و  $N$  روی  $DC$  چنان باشد که:  $DN = \frac{1}{3}DC$ ، ثابت کنید:

۳. اگر  $f(x) = x + 1$  و  $g(x) = \frac{2x-1}{1-3x}$ ، ثابت کنید  $\text{gof}$  در دامنه خودش وارون‌پذیر است و ضابطه وارون آن را بیابید.

### ریاضی ۳ تجربی

۱. با توجه به مجموعه‌های  $A = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 7\}$ ،  $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$  و  $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 9\}$  هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت یک بازه مشخص کنید.

الف)  $(A \cap B)$  ب)  $(A - B)$   
 ج)  $(B - C)$  د)  $(A - C)$

۲. با توجه به فرمول‌های محاسبه  $\cos 2a$ ،  $\sin(a+b)$  و  $\sin 2a$  برای محاسبه  $\sin 3a$  فرمولی را به دست آورید.

۳. درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید:  
 الف)  $\cos^4 x \cos x + \sin^4 x \sin x = \cos^3 x$   
 ب)  $\sin^4 x \cos x - \cos^4 x \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

### ریاضیات گسسته

۱. آیا دنباله زیر می‌تواند دنباله درجات رئوس یک گراف باشد؟ چرا؟ آیا این گراف، ساده و هم‌بند است؟  
 $S: 4, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$   
 ۲. دنباله درجات رئوس درخت  $T$  به صورت زیر است. اولاً مشخص کنید این گراف چند رأس درجه ۱ دارد و ثانیاً این درخت را رسم کنید.  
 $S: 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, \dots, 1$

۳. ماتریس مجاورت گراف  $G$  به صورت زیر است.  
 الف) این گراف را رسم کنید. ب) دنباله درجات رئوس این گراف را با توجه به ماتریس  $A^2$  بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### ریاضیات عمومی ۱ و ۲

۱. بیشترین مقدار تابع به معادله  $y = -x^2 + 4x - 6$  را به دو روش (مربع کامل و استفاده از مختصات نقطه ماکزیمی) به دست آورید.

۲. اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = |x+4| - x$  (الف) ضابطه توابع

پرستش‌های  
پیکار جو!



چند سه‌تایی صحیح از  $(x, y, z)$  در تساوی  $x^2 + 2y^2 = 3z^2$  صدق می‌کنند؟

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

# ماجرای پیدایش کتاب‌های درسی ریاضی در ایران عصر قاجار

## مقدمه‌ای مطول در تاریخ:



همه کتاب‌ها روی شبکه نیز قرار دارند تا اگر مایل به داشتن نسخه الکترونیک هر کتابی بودید، بتوانید آن را از وبسایت «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش و پرورش دریافت کنید.

این مقدمه را از آن جهت نوشتم که ذهن خوانندگان را به سمت موضوع بسیار مهمی سوق دهم و آن، موضوع سابقه نهادهای مدنی مربوط به کتاب‌های درسی است. این موضوع که در یک جامعه «نهادهی» وجود داشته باشد که وظیفه خاصی را بر عهده داشته باشد و بر اساس سنت تاریخی وجود خود، درگذشت سالیان، بر اساس آزمون و خطا یا بر اساس چشم‌انداز مطالعاتی، توانسته باشد کار خود را یاد گرفته و به بهترین شکل ممکن به انجام برساند، یکی از موضوع‌هایی است که در بررسی‌های هر جامعه باید به دقت مورد توجه قرار گیرد.

همه ما کمابیش واژه «دیوان‌سالاری»<sup>۱</sup> به گوشمان خورده است. اولین تصور ما از این کلمه یک دستگاه عریض و طویل اداری است که تنها فایده‌اش ضایع کردن وقت مردمان است. اما این تمام واقعیت نیست. نباید فراموش کنیم که تشکیل دیوان، یا به عبارت دیگر، ترتیب دادن دستگاه اداری یک مملکت، از جمله مهم‌ترین دستاوردهای دولت، جامعه مدنی و سنت تاریخی در هر سرزمین است. ترتیب دادن نوعی دستگاه حکومتی که انتظام امور کشور را در همه شئون، از مالی، اقتصادی، نظامی، آموزشی، بهداشتی، قضایی و... برعهده داشته باشد و بتواند کار خود را به بهترین شکل ممکن به انجام برساند، از جمله عوامل خوش‌بختی هر ملتی است.<sup>۲</sup> نباید زیاد حاشیه برویم. فرض از همه این نوشته‌ها آن است که اگر اکنون در کشور ما دستگاهی مدنی هست که نیاز این همه دانش‌آموز را در همه رشته‌ها و پایه‌ها به کتاب‌های درسی برآورده می‌سازد و می‌کوشد کتاب‌ها به‌موقع و مقارن شروع سال تحصیلی به دست دانش‌آموزان برسد، نتیجه سال‌ها سعی و تلاش، پشت

یکی از شیرین‌ترین خاطرات همه ما و مربوط به سال‌های تحصیل، خاطره خرید کتاب‌های درسی است. همه هم‌سن و سالان من، کسانی که طی سال‌های دهه ۱۳۵۰ خورشیدی به دبستان می‌رفتند، خاطره اعطای کتاب‌های پرنقش و نگار را به‌خاطر دارند و پس از آن، در سال‌های راهنمایی، خاطره کتاب‌هایی که باید از کتابفروشی‌ها خریداری می‌شدند. و مقارن با سال‌های جنگ تحمیلی، خاطره دیر رسیدن کتاب‌ها، ثبت‌نام پشت در کتابفروشی‌ها برای دریافت نوبت خرید کتاب و هزار ماجرای دیگر. بلای واقعی وقتی نازل می‌شد که فلک‌زده‌ای به دلیلی یک کتاب درسی خود را از دست می‌داد. مثلاً آن را جایی جا می‌گذاشت یا به هر دلیلی نمی‌توانست از آن نگهداری کند. به‌دست آوردن یک کتاب تکی از یک درس خاص، تقریباً به‌سختی معافیت سربازی بود!

با تمام این تفصیل، وقتی که تاریخ تدوین کتاب‌های درسی را بیشتر می‌کاویم، دست کم یک نکته مثبت در آن سال‌ها وجود داشت که ما از روی بی‌خبری قدر آن را نمی‌دانستیم: «حداقل می‌دانستیم طرف حسابمان کیست!» به عبارت دیگر، اگر کتابی را گم می‌کردیم، می‌دانستیم باید دنبال کتاب فلان درس از سال تحصیلی فلان در پایه فلان بگردیم. اما وقتی در لابه‌لای صفحات تاریخ به دنبال ماجرای تألیف کتاب‌های درسی هستیم و این همه ماجرا (که در سطرهای آینده بخش کوتاهی از آن را توضیح خواهیم داد) را می‌بینیم، باز احساس خوش‌حالی می‌کنیم که انسان آن روزها نیستیم.

در این میان، به‌نظر می‌رسد وضع کودک امروز از همه بهتر است و این در ذات روزگار امروز ماست. دیگر از صبح‌های علی‌الطلوع از خانه بیرون زدن و پشت در کتابفروشی‌ها صف کشیدن خبری نیست. و البته



**ادبیات علمی  
دربارهٔ ماجرای  
تولید کتاب  
درسی در ایران  
قدمتی زیاد  
دارد و بسیاری  
از پویندگان  
عرصهٔ تولید  
کتاب‌های درسی  
در کشورمان  
کوشیده‌اند  
دغدغه‌ها،  
مشکلات و  
آرمان‌های خود را  
به قلم در آورند**

با روزآمد کردن برنامه‌های آموزشی، مواد آموزشی جدیدی را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند. بر این اساس، با تغییر برنامه (پروگرام) لازم بوده است، در همهٔ سطح‌های متون آموزشی نیز تغییر کنند و کتاب‌های جدیدی روانهٔ مدارس شوند. در اینجا موضوع صنعت چاپ و چگونگی رساندن این کتاب‌ها و مواد درسی به دانش‌آموزان سراسر کشور نیز خود را نشان می‌دهد.

● اقتصاد نشر همواره عامل بسیار مهم و تأثیرگذاری بر تدوین کتاب‌های درسی بوده است. شمارگان بسیار زیاد چاپ کتاب‌های درسی در دوره‌ای که دولت وظایف را به بنگاه‌های انتشاراتی گوناگون می‌داده، باعث تدابیر مختلفی برای به‌دست آوردن فرصت چاپ کتاب‌های درسی از سوی ناشران می‌شده است. نگاهی به گزارش‌های موجود در این زمینه<sup>۵</sup> نشان می‌دهد، خط سیری که ما را از گذشته به اکنون رسانده و نهاد تدوین کتاب‌های درسی را به دستگاهی دولتی تبدیل کرده، نوعی واکنش اجتماعی ناخواسته و از روی جبر بوده است. موضوع چاپ کتاب‌های درسی در ایران حتی پای سفارت‌های خارجی را هم به این عرصه باز می‌کرده است [امین ریاحی، ۱۳۷۷: ۶۷ به بعد].

● با گسترش نظام‌های آموزشی، رشد جمعیت، اقبال عمومی برای درس خواندن و کوشش دولتی برای محو بی‌سوادی، تعداد دانش‌آموزان کشور رشد می‌کند و در پی آن تعداد عرضهٔ کتاب‌های درسی نیز روزافزون می‌شود. این چرخه خودبه‌خود شبکه‌ای از تولیدکننده-مصرف کننده پدید می‌آورد که با توجه به اقتصاد نشر، مجبور به رفع حوائج

سر گذاشتن صدها مانع و رشد کردن از دل آزمون‌ها و خطاهاست.

خوش بختانه ادبیات علمی دربارهٔ ماجرای تولید کتاب درسی در ایران قدمتی زیاد دارد و بسیاری از پویندگان عرصهٔ تولید کتاب‌های درسی در کشورمان کوشیده‌اند دغدغه‌ها، مشکلات و آرمان‌های خود را به قلم درآورند. بر این اساس مقالات متعددی وجود دارند که هر یک بخشی از تاریخ تدوین کتاب‌های درسی کشورمان و رسیدن به وضع کمابیش متناسب و ثابت کنونی را به بحث گذاشته‌اند.<sup>۳</sup>

بر این اساس و با تکیه بر این پشتوانه، به‌نظر مؤلف این سطور اکنون وقت آن است در حوزهٔ کتاب‌های درسی پا را از تاریخ‌نگاری عام فراتر بگذاریم و به سرفوت بخش‌های تخصصی برویم. به عبارت دیگر، وقت آن است که شاخه‌های تخصصی تدوین کتاب‌های درسی را مورد پژوهش قرار دهیم و از دل این پژوهش، بخش تاریخ رسمی آموزش علوم در کشورمان را بررسی و واکاوی کنیم. علت اینکه این بخش از پژوهش احتمالی را «تاریخ رسمی آموزش علوم» نام نهادم نیز آن است که در هر صورت مطالعهٔ این دستاوردها تنها بخش «رسمی» و «دولتی» آموزش علوم را در کشور دربرمی‌گیرد و پرداختن به بخش غیردولتی-غیررسمی آموزش علوم در کشورمان، خود ماجرای دیگری است که باید در موقعیتی دیگر بدان پرداخت. پیش از ورود به ماجرای تدوین کتاب‌های درسی ریاضی در کشورمان، لازم است به اصولی کلی دربارهٔ تدوین کتاب‌های درسی نگاهی افکنیم تا درک روابط مربوط به چگونگی تدوین کتاب‌های درسی ریاضی برایمان روشن‌تر شود:

● در هر صورت این یک اصل بدیهی است که تشکیل دیوان‌سالاری ملی و دستگاه اداری مملکت و گرداندن امور آن، به افراد تحصیل کرده نیاز دارد. افراد تحصیل کرده در مدارس علم می‌آموزند و این انتقال علم به دانش‌آموزان باید با تکیه بر کتاب‌های درسی صورت پذیرد.

● در کنار استفاده از کتاب‌های درسی، مواد آموزشی باید بر اساس یک برنامهٔ درسی (که در ایران قدیم به آن «پروگرام آموزشی» می‌گفتند) به دانش‌آموزان منتقل شود. به عبارت دیگر، متون آموزشی باید در قالب برنامه‌های هدف‌دار آموزشی تدوین و به‌وسیلهٔ معلمان به دانش‌آموزان تدریس می‌شدند.<sup>۴</sup>

● دولت‌ها و نظام‌های آموزشی همواره می‌کوشیده‌اند،



کشور (اعم از نظامی، پزشک، مهندس، قاضی و...) را بر دوش بکشد؟ هم‌زمان با کوشش ایرانیان برای تغییر در وضع کشور، و تحت تأثیر عوامل اجتماعی بسیاری، نهضت تأسیس مدارس جدید در کشور به‌وجود آمد و مدارس متعددی در اقصا نقاط ایران تأسیس شدند.<sup>۷</sup> طبیعی است که این مدارس به کتاب‌های درسی متفاوت نیاز داشتند و در نبود یک دستگاه منظم‌کننده تدوین کتاب‌های درسی، هر کدام از مناطق کشور خود دست‌اندر کار تدوین کتاب‌های درسی می‌شدند.

از دیگر سو و در ادامه همان رویکرد اصلاحی که پیش از این چند بار بدان اشاره کردیم، چند دهه پس از تأسیس دارالفنون و از حدود سال ۱۳۲۸ هجری قمری، نهادی به‌نام شورای عالی معارف مسئول سروسامان دادن به امور آموزش و تحصیلات در ایران شد و شروع به تدوین برنامه‌های آموزشی کشور کرد. بر این اساس، یک دغدغه دیگر بر شئون مربوط به تدوین کتاب‌های درسی افزوده می‌شود و آن تطبیق کتاب‌های درسی با این برنامه‌هاست. همه این موارد آشفتگی‌های بسیاری به وضع کتاب‌های درسی می‌دادند. گزارشی که ریاحی بیش از نیم‌قرن پیش درباره این آشفتگی‌ها به دست می‌دهد، به خوبی شمه‌ای از این اوضاع را نشان می‌دهد [ریاحی، ۱۳۴۲: ۷ به بعد]

ریاحی به ویژه روی موضوعی انگشت می‌نهد که در همه علوم باید به آن توجه داشت، و آن موضوع یکسان‌سازی واژگان و اصلاحات علمی هر دانش است.

یکدیگر بوده‌اند.

اکنون با این مقدمات می‌توانیم قدمی دیگر به جلو برداریم. به‌طور کلی و با توجه به دگرگون شدن فضای کشورمان در اواسط حکومت قاجار و درک لزوم دست زدن به اصلاحات در کشور، نیاز به ایجاد مدارس در کشور احساس شد و کوشش برای تأسیس مدارس جدید در کشور آغاز شد که نماد آغازین آن، تأسیس «دارالفنون» در تهران در سال ۱۲۶۸ هجری قمری بود. برپایی دارالفنون تدوین کتب درسی آن را نیز در پی داشت.

با توجه به این موضوع که قرار نیست وارد بازی مرغ و تخم‌مرغ شویم، در پاسخ به این پرسش احتمالی که: بر این اساس، نخستین معلمان دارالفنون کتاب‌های درسی خود را از کجا آورده‌اند؟ باید گفت ماجرای ورود علوم نوین به ایران ماجرای است که فقط یک سر در مدارس عالی (از جمله دارالفنون) ندارد، بلکه عوامل زیادی دست به دست هم دادند تا علوم جدید وارد کشور ما شوند. یکی از این عوامل اعزام محصل به خارج از کشور بود. بسیاری از کتاب‌های درسی دارالفنون به‌وسیله این محصلان تألیف یا ترجمه می‌شدند. یک عامل دیگر ورود علوم نوین به کشورمان، معلمان اروپایی بودند که دولت وقت قاجار آن‌ها را برای تدریس در دارالفنون به استخدام خود درآورده بود.<sup>۸</sup>

بسیار خب، شما که توقع ندارید فقط یک مدرسه (دارالفنون) بتواند به تنهایی بار تربیت همه دیوان سالاران

**چند دهه پس از تأسیس دارالفنون و از حدود سال ۱۳۲۸ هجری قمری، نهادی به‌نام شورای عالی معارف مسئول سروسامان دادن به امور آموزش و تحصیلات در ایران شد و شروع به تدوین برنامه‌های آموزشی کشور کرد**

گزارش ریاحی به‌ویژه از این نظر قابل تأمل است که مثال‌های او در این حوزه همگی مربوط به ریاضیات هستند. طبق این گزارش در اواخر قرن چهاردهم هجری قمری چند دسته کتاب درسی هم‌زمان در چند نقطه کشور تدوین می‌شدند که عموماً نویسندگان آن‌ها از دستاوردهای یکدیگر بی‌خبر بودند و از منابع متفاوت بهره می‌گرفتند. لذا در کتاب‌های درسی ریاضی آن دوره نابسامانی خاصی در سطح واژگانی وجود داشته است. ریاحی می‌نویسد در یک زمان واحد، در جایی نویسندگان واژگانی را در کتاب‌های درسی ریاضی به‌کار می‌بردند و همان موقع، در جایی دیگر نویسندگانی دیگر، واژگانی دیگر را که شرح آن در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. کاربرد اصطلاحات متفاوت برای یک مفهوم در کتاب‌های درسی ریاضی اواخر قرن چهاردهم

واژه ۱	واژه ۲	واژه ۱	واژه ۲
ضرب	بس‌شماری	زاویه	گوشه
تقسیم	بخش	مثلاً	سهر
تفریق	کاهش	قابل قسمت	بخش‌پذیر
کسر	برخه	مقسوم‌علیه	بخش‌یاب

گذشته از این نابسامانی واژگانی، رقابت ناشران برای جذب خریدار کتاب‌های درسی، از جمله آنان را وامی‌داشت این‌گونه تبلیغ کنند که تنها کتاب آنان است که با پروگرام‌های درسی (برنامه‌های درسی) تطبیق دارد و کتاب‌های دیگر فاقد این ویژگی هستند. این رقابت آن‌قدر آش را شور کرد که در سال ۱۳۳۴ هجری قمری، شورای عالی معارف در دستوری همه ناشران را ملزم کرد، فقط در صورتی مجاز به درج عبارت «مطابق پروگرام وزارت معارف» در پشت کتاب‌های خود هستند که این کتاب‌ها را قبلاً به شورای عالی معارف داده باشند و مجوز لازم را نیز از شورا گرفته باشند. سندی<sup>۸</sup> که در این زمینه در دست است خود دلیل مهمی بر اثبات هرج‌ومرج نشر کتاب‌های درسی در این دوران است. وزارت معارف همه ناشران را ملزم کرده بود گواهی دهند که این دستور دولتی را رؤیت کرده‌اند. در حاشیه این دستور نامه، امضای ۲۲ ناشر دیده می‌شود.

با پایان یافتن عمر سلسله قاجار در سال ۱۳۰۴ شمسی/ ۱۳۴۴ قمری، اوضاع کشور ایران دگرگون شد و نهادهای دیگری متولی انتشار کتاب‌های درسی ایران شدند که پرداختن به آن‌ها از حوصله نوشته حاضر خارج است.

## \* پی‌نوشت‌ها

### ۱. Bureaucracy

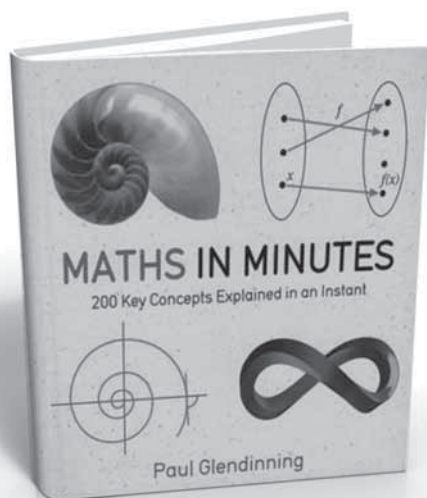
۲. بی‌حکمت نیست، کوششی که در دوره قاجار برای اصلاح امور کشور آغاز شد، از جمله نگاهی به تدوین دیوان و دستگاه اداری کشور داشت. چراکه مصلحان اجتماعی دوره قاجار به درستی دریافته بودند که بدون در اختیار داشتن دستگاه اداری مناسب، سر و سامان دادن به امور کشور تقریباً محال است. برای گزارشی درباره این کوشش دوران قاجار مراجعه کنید به: رینگر، ۱۳۸۱: ۲۲-۲۶.

۳. برای نمونه به این مقالات می‌توان اشاره کرد:

- ریاحی، محمدامین (۱۳۴۲). «داستانی به نام کتاب درسی». ماهنامه آموزش و پرورش. شماره ۴. سال ۳۳. خردادماه. (۱۳۷۷).
- «ماجرای کتاب‌های درسی، ورقی از تاریخ فرهنگ ایران». مجله بخارا. شماره ۲. مهرماه ۱۳۷۷.
- معتمدی، اسفندیار (۱۳۸۲). «کتاب‌های درسی ایران، از تأسیس دارالفنون تا انقلاب اسلامی» (۱۳۵۷-۱۳۳۰). تاریخ معاصر ایران. سال ۷. شماره ۲۷. پاییز.
- صادقی، محمدعلی و عسگرانی، محمدرضا (۱۳۸۶). «درآمدی تاریخی بر روند تدوین و چاپ نخستین کتاب‌های درسی». مجله دانشکده ادبیات و علوم انسانی دانشگاه اصفهان. دوره دوم. شماره ۵۰. پاییز.
- مجیدی، موسی (۱۳۶۴). «تاریخچه مختصر کتاب‌های درسی و سیر تطور آن در ایران از دارالفنون تا به امروز». فصل‌نامه تعلیم و تربیت. سال ۱. شماره ۴. زمستان.
- احمدی، محمودطاهر (۱۳۷۳). «نخستین کوشش‌ها برای تدوین کتب درسی». گنجینه اسناد. سال ۴. دفتر ۳. پاییز.
- ۴. گزارش بسیار خوبی وجود دارد که تغییر این برنامه‌های درسی را در بخش وسیعی از دانش‌آموزان ایران (و از آن میان تغییر در برنامه‌های درسی ریاضی را) به بحث گذاشته است. برای مطالعه آن مراجعه کنید به: حسینی روح‌الامینی، جمیله‌سادات (۱۳۸۰). سیر تحول برنامه‌های درسی ابتدایی و راهنمایی (۱۳۸۰-۱۳۰۱ شمسی). تهران.
- ۵. از جمله: امین ریاحی، ۱۳۷۷: ۶۴ به بعد.
- ۶. برای مطالعه گزارشی درباره معلمان دارالفنون و نیز محصلان اعزامی رجوع کنید به: رینگر، ۱۳۸۱: ۴۳-۳۹ و ۱۲۱-۸۱.
- ۷. برای مطالعه گزارشی درباره تأسیس مدارس جدید در ایران رجوع کنید به: رینگر، ۱۳۸۱: ۲۰۴-۱۶۳.
- ۸. سند موجود در معاونت اسنادی، سازمان اسناد و کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران به شماره ۲۹۷-۳۶۵۳۷.

## \* منابع

۱. ریاحی، محمدامین (۱۳۴۲). «داستانی به نام کتاب درسی». ماهنامه آموزش و پرورش. شماره ۴. سال ۳۳. خردادماه.
۲. ریاحی، محمدامین (۱۳۷۷). «ماجرای کتاب‌های درسی، ورقی از تاریخ فرهنگ ایران». مجله بخارا. شماره ۲. مهرماه.
۳. پسندیده، محمد (۱۳۸۶). «آموزش ریاضی در دارالفنون (عصر قاجار)». پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته تاریخ علم. دانشگاه تهران.
۴. درایتی، مصطفی (۱۳۹۰). دست‌نوشته‌های ایران. تهران.
۵. رینگر، مونیکا (۱۳۸۱). آموزش، دین و گفتمان اصلاح فرهنگی در دوران قاجار. ترجمه مهدی حقیقت‌خواه. تهران.
۶. سلطانفر، صدیقه (۱۳۷۶). فهرست کتب درسی چاپ سنگی موجود در کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران. تهران.
۷. شجک‌لوا، المپیا پاولونا (۱۳۸۸). تاریخ چاپ سنگی در ایران. ترجمه پروین منزوی. تهران.
۸. شمس اردکانی، محمدرضا و قاسملو، فرید (۱۳۸۷). «درباره نسخه‌ها، شرح‌ها و ترجمه‌های کتاب خلاصه الحساب شیخ‌بهای موجود در کتابخانه‌های ایران». در: مجموعه مقالات به مناسبت بزرگداشت مقام علمی دانشمند فرهیخته استاد دکتر پرویز دوامی. تهران.



### پارادوکس سلمانی

پارادوکس علی الظاهر گزاره‌ای راست است که خودش را نقض می‌کند، یا به وضعیتی منجر می‌شود که به نظر می‌رسد از منطق سرپیچی کرده است. در سال ۱۹۰۱، برتراند راسل<sup>۱</sup>، ریاضی‌دان بریتانیایی، از پارادوکس سلمانی برای مطرح کردن نقض‌های موجود در نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها استفاده کرد.

جمع مردان دهکده‌ای یا صورتشان را خودشان اصلاح می‌کنند یا توسط یک سلمانی (که خودش یکی از مردان دهکده است) اصلاح می‌شوند. سلمانی بر این ادعاست که تنها صورت دهکده‌نشین‌های مذکوری را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. در این صورت چه کسی صورت خود سلمانی را اصلاح می‌کند؟

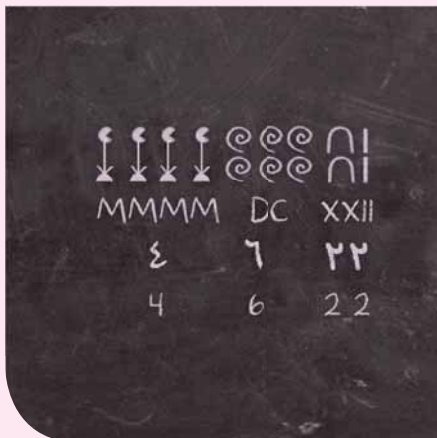


پارادوکس مزبور بر حسب مجموعه‌ها از ما می‌خواهد مجموعه‌ای را در نظر بگیریم که دارای جمع زیرمجموعه‌هایی باشد که خودشان را به‌عنوان عضو ندارند. در این صورت آیا خود این مجموعه یک عضو خودش است؟ راه‌حل فوری چنین پارادوکس‌هایی این بود که نظریهٔ مجموعه‌ها را با یک سری قاعده یا «اکسیوم»<sup>۲</sup> با ایجاد سلسله‌مراتبی از مجموعه‌هایی که مجازند تنها اعضای مجموعه‌های بالای خودشان در این سلسله‌مراتب باشند، محدود کند. با این همه چنین نیست که ظریف‌ترین راه‌حل‌های نظریه‌های اکیسوماتیک مجموعه‌ها به‌گونه‌ای وسیع مورد پذیرش واقع شده باشند.

اگر سلمانی مورد بحث صورت خودش را خودش اصلاح کند، در این صورت ادعایش که تنها صورت کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند، دروغ است. اما اگر صورت خودش را اصلاح نکند، در این صورت ادعایش این است که صورت خود را اصلاح می‌کند! به این ترتیب به هر طریق آن را مطرح کنید، تناقضی به‌وجود می‌آید.

## اعداد

اعداد در ابتدایی‌ترین صورتشان، تنها صفت‌هایی هستند که کمیت را توصیف می‌کنند. به‌عنوان نمونه، می‌توانیم بگوییم «سه صندلی» یا «دو گوسفند». اما حتی به‌عنوان یک صفت، به‌طور غریزی توجه داریم که «دو و نصفی بز» بی‌معنی است. در این صورت، اعداد می‌توانند کاربردها و معانی متفاوت داشته باشند. اعداد، از آنجا که مردمان باستانی آن‌ها را به طرق مختلف به کار می‌بردند، معانی نمادین به خود اختصاص داده‌اند؛ نظیر «نیلوفر آبی» که در هیروگلیف‌های مصری عدد ۱۰۰۰ را توصیف می‌کند. گرچه این شیوهٔ بصری



از لحاظ زیبایی‌شناسی خوشایند است، به کار عملیات جبری نمی‌آید. پس با بیشتر شدن کاربردهای اعداد، نمادهاشان ساده‌تر می‌شدند. رومی‌ها برای نمایش حوزهٔ وسیعی از اعداد، از حوزهٔ کوچکی از علائم اساسی استفاده می‌کردند. اما انجام محاسبات با استفاده از اعداد بزرگ، همچنان پیچیده بود. دستگاه مدرن اعداد امروزی‌مان از تمدن‌های مسلمانان هزارهٔ اول بعد از میلاد به ارث رسیده است. استفاده از ۱۰ به عنوان پایه، انجام محاسبات پیچیده را بسیار آسان‌تر می‌کند.

## اعداد طبیعی

اعداد طبیعی اعداد شمارش ساده‌اند (۱، ۲، ۳، ۴، ...). مهارت در شمارش به گونه‌ای تنگاتنگ با توسعهٔ جوامع پیچیده از طریق تجارت، فناوری و کاربرد مدارک و اسناد مرتبط است. گرچه شمارش به چیزی بیشتر از اعداد نیاز دارد. این عمل شامل جمع و در نتیجهٔ آن تفریق نیز می‌شود. به مجرد اینکه شمارش را معرفی کردیم، عملیات روی اعداد نیز قسمتی از فرهنگمان می‌شود. یعنی اعداد، دیگر توصیف‌کننده‌ای ساده نیستند و به اشیایی تبدیل می‌شوند که می‌توانند یکدیگر را تغییر دهند. زمانی که عمل جمع درک شود، به دنبال آن ضرب، به‌عنوان راهی برای نگرستن به مجموعه‌ات مجموعه‌ها،



می‌آید. مثلاً اینکه چند شیء در پنج گروه شش‌تایی وجود دارند؟ - در حالی که تقسیم راهی برای توصیف عمل مقابل ضرب مطرح می‌کند - مثلاً اینکه اگر سی شیء به پنج گروه مساوی تقسیم شوند، چند شیء در هر گروه وجود دارند؟

اما در این مورد پرسش‌هایی به وجود می‌آیند. تقسیم ۳۱ به ۵ گروه مساوی، به چه معنی است؟ حاصل تقسیم ۱ بر ۱۰ چیست؟ برای معنی دادن به این پرسش‌ها نیاز داریم که به بیرون از «اعداد طبیعی»<sup>۲</sup> قدم بگذاریم.

\* پی‌نوشت‌ها .....

1. Bertrand Russell
2. axiom
3. natural numbers

معمای منطق شماره قبل را که فراموش نکرده‌اید؟ یادآوری می‌گوییم که داستان ما در یک سرزمین افسانه‌ای کاملاً مشابه را که حاوی شربت یا زهر بود، می‌نوشتند. روی جملات نوشته شده و درستی یا نادرستی آن‌ها توضیحاتی می‌حاوی زهر باشد. محکومین با توضیحات قاضی می‌توانستند و از اعدام‌هایی یابند. پنج معما از این دست در شماره مهر ما برای این شماره داریم.

#### معمای ششم

با ورود ششمین محکوم، دو جام زهر پیش روی او گذاشته شد بکشید!

روی دومی نوشته شده بود: «در جام دیگر، شربت وجود دارد» و ق معمای پنجم قاضی گفته بود: «اگر جام اول شامل شربت باشد، جمل اما در جام دوم برعکس است. یعنی اگر شامل زهر باشد، جمله روی آ بار هم قاضی همین را گفت. محکوم ششم چه باید بکند؟

#### معمای هفتم

برای محکوم هفتم نیز دو جام آوردند. روی اولی نوشته شده بود: «بهرتر است، جام دیگر را سر نکشید!» و قاضی همان توضیح را داد

#### معمای هشتم

برای محکوم هشتم نیز دو جام آوردند. ولی عجیب بود که روی فراموش کرده‌اند نوشته‌ها را بنویسند، ولی اشکالی ندارد، من آن‌ها را، «هر دو جام حاوی زهر هستند.» محکوم پرسید: «کدام نوشته مربوط نیست!» ولی مثل محکومین قبل، اگر در جام اول شربت باشد، نوشت و در جام دوم برعکس. حالا محکوم بینوا چه باید بکند؟ آیا راهی برای

#### معمای نهم

برای محکوم نهم سه جام آوردند! و قاضی گفت در یکی از سه جام «این جام حاوی زهر است»، روی دومی نوشته بود: «این جام حاوی قاضی توضیح داد که حداکثر یکی از سه نوشته درست است. محکوم جام بودند:

#### معمای دهم

برای محکوم دهم هم سه جام آوردند و باز هم گفته شد که قاضی گفت که جمله روی جامی که در آن شربت باشد، درست است جام بودند:

جام اول: «در جام دوم زهر ریخته شده است!»

جام دوم: «در این جام زهر وجود دارد!»

جام سوم: «در جام اول زهر وجود دارد!»

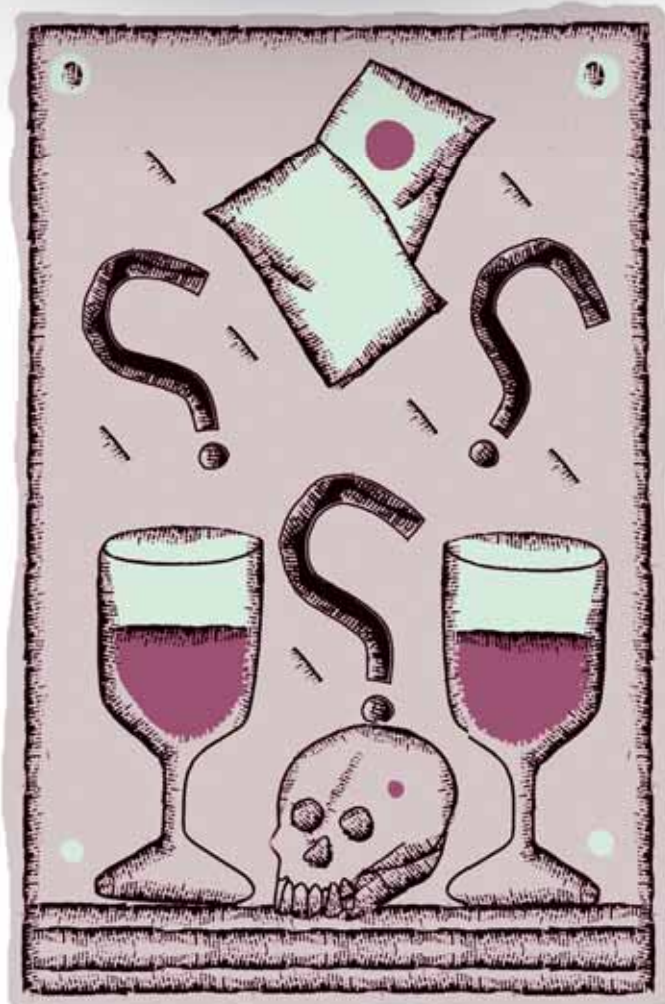
محکوم باید کدام جام را بنوشد؟

برای ملاحظه پاسخ معماها به صفحه ۴۷ مراجعه کنید. این را هر ویژه آذرماه ملاحظه کنید و از آن‌ها واقعاً لذت ببرید، چرا که به راستی



چند معمای منطقی

(ادامه ماجرای محکومین به جام زهر یا شربت!)





می‌خواهیم چند معمای دیگر در همان قالب معرفی کنیم. برای ریخ می‌داد که در آن محکومین به اعدام، باید یکی از دو جام هر جام جمله‌ای نوشته شده بود و قاضی برای تکمیل، در مورد داد. در ضمن ممکن بود که هر دو جام حاوی شربت و یا هر دو نوشیص دهند که جام حاوی شربت کدام است و آن را بنوشند ه داشتیم، و حالا پنج‌تای دیگر که از آن معماها قوی‌تر هستند،

د. روی اولی نوشته شده بود: «فرقی نمی‌کند که شما کدام جام را سر

اضی همان توضیح معمای پنجم را داد. برای یادآوری می‌گوییم که در ؤ روی آن درست و اگر شامل زهر باشد، جمله روی آن نادرست است. ن درست و اگر شامل شربت باشد، جمله روی آن نادرست است.» این

فرق می‌کند که شما کدام جام را سر بکشید!» روی دومی نوشته شده د. محکوم هفتم چه باید بکند؟

هیچ کدام نوشته‌ای نبود! بعد از اعلام محکوم، قاضی گفت: مثل اینکه می‌گوییم: یکی این بود: «این جام حاوی زهر است.» و دیگری این بود: به جام اول بود و کدام روی جام دوم؟» قاضی گفت: «این را دیگر یادم ؤ روی آن درست است و اگر زهر باشد، نوشته روی آن نادرست است ن نجات دارد؟!»

نام شربت و در دوتای دیگر زهر وجود دارد! روی جام اول نوشته بود: شربت است» و روی سومی نوشته بود: «در جام دوم زهر وجود دارد.» باید کدام جام را بنوشد؟

نط در یکی از آن‌ها شربت و در دوتای دیگر زهر وجود دارد. به‌جز آن ، و لااقل یکی از دو جمله دیگر نادرست است. این‌ها جملات روی سه

م یادآور شویم که معماهای محکومین یازدهم و دوازدهم را در شماره ن چالش‌برانگیز هستند.

## پرسش‌های پیکارجو!



معادله  $\frac{1}{8} = (2x^3 - x)(8x^4 - 8x^2 + 1)$  در بازه  $[0, 1]$  چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) ۱      ب) ۰      ج) ۲      د) ۳      ه) ۴

# یک اثبات و یک تعمیم بر قضیه حمار

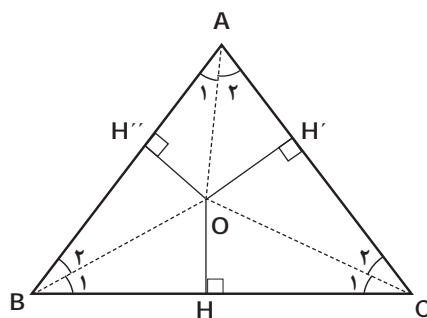
## مقدمه

اثباتی که در کتاب درسی هندسه ۲ برای «قضیه حمار» ارائه شده، اثباتی ساده و دقیق است. در اینجا می‌خواهیم اثباتی دیگر از این قضیه ارائه دهیم و نیز تعمیمی از آن را معرفی کنیم که کاربردهایی هم در مسائل هندسه نابرابری‌ها دارد و نمونه‌هایی از آن را نیز ذکر می‌کنیم.

## اثبات قضیه حمار

♦ **قضیه حمار:** در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع، از ضلع سوم مثلث بزرگ‌تر است.

● **اثبات:** پیش از این در قضیه‌ای از کتاب درسی دیده‌ایم که نیم‌سازهای زوایای داخلی هر مثلث، در نقطه‌ای واقع در درون مثلث، هم‌رس‌اند و می‌دانیم هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین اگر  $O$  نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث  $ABC$  و  $OH$ ،  $OH'$  و  $OH''$  فواصل  $O$  از سه ضلع مثلث باشند، داریم:



$$OH = OH' = OH'', \\ \triangle OAH' \cong \triangle OAH'',$$

$$\triangle COH' \cong \triangle COH, \\ \triangle BOH' \cong \triangle BOH''$$

(وتر و یک زاویه حاده)

و بنابراین:

$$AH = AH'', CH = CH, BH = BH'' \\ \Rightarrow CH + BH'' = CH + BH = BC$$

اما واضح است که  $CH < AC$  و  $BH < AB$

پس:

$$AB + AC > CH + BH = BC$$

تمرین: در همین شکل نشان دهید:

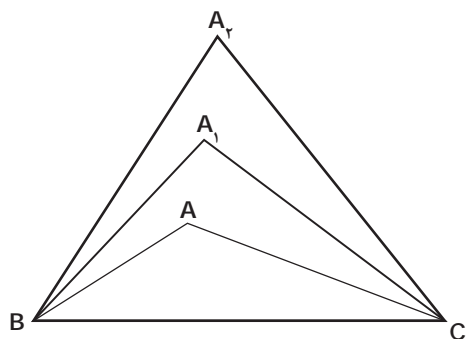
$$AB + BC > AC, AC + BC > AB$$

## تعمیم قضیه حمار

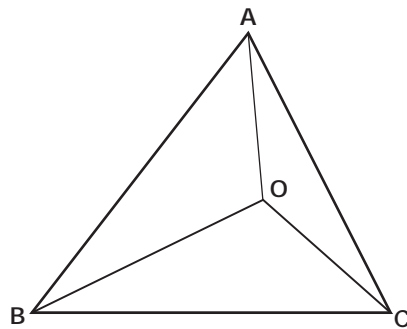
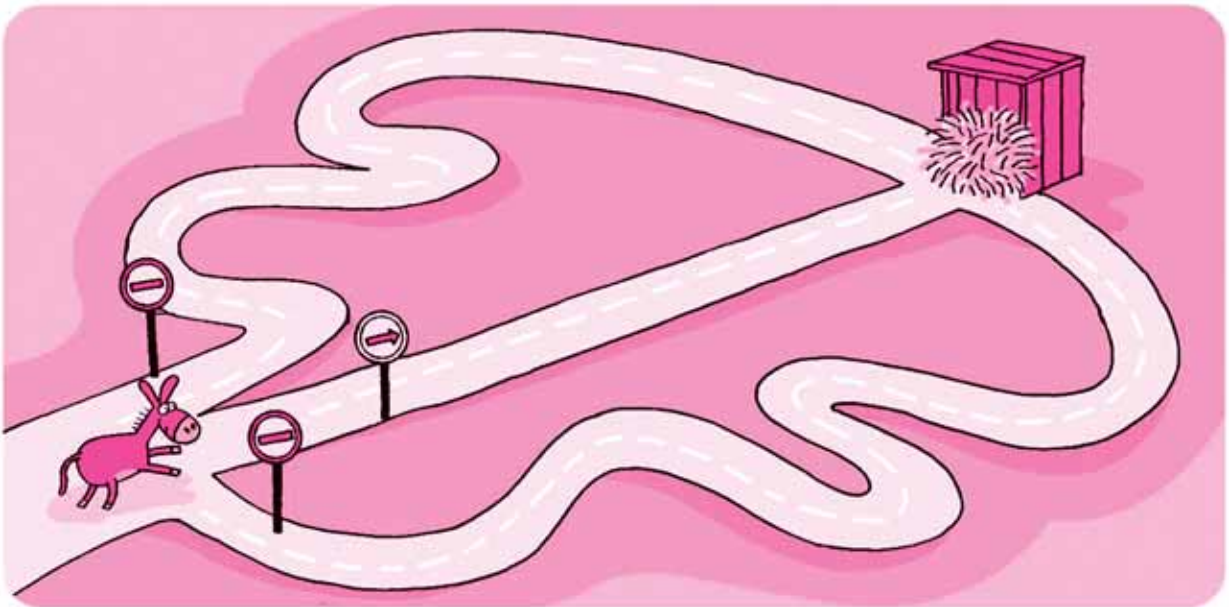
هرگاه چند مثلث، در یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع دیگر آن‌ها نقطه برخورد دیگری نداشته باشند و رأس دیگر این مثلث‌ها در یک طرف این ضلع مشترک باشد، مجموع اضلاع مثلثی بزرگ‌تر است که رأس آن از این ضلع مشترک دورتر باشد.

یعنی در شکل زیر داریم:

$$\dots > A_1B + A_1C > A_2B + A_2C > AB + AC$$



● **اثبات:** کافی است ثابت کنیم:  $A_1B + A_1C > AB + AC$  (چرا؟)



♦ **حل:** نقطه دلخواه O را درون مثلث ABC در نظر می گیریم. اثبات اینکه  $OA+OB+OC$  از نصف محیط مثلث بزرگ تر است، نیازی به تعمیم قضیه حمار ندارد و به کمک خود این قضیه و به سادگی انجام می شود:

$OB+OC > BC$ ,  $OA+OC > AC$ ,  $OA+OB > AB$

اکنون با جمع کردن این نابرابری ها می توانید به درستی حکم برسید. اما اثبات اینکه این مجموع از محیط مثلث کوچک تر است، باید به کمک تعمیم قضیه حمار و به صورت زیر انجام شود:

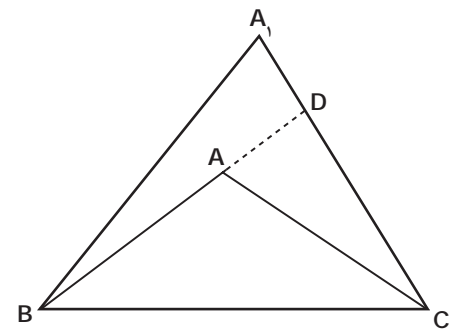
$$\begin{aligned} OB+OC &< AB+AC \\ OA+OB &< AC+BC \\ OA+OC &< AB+BC \end{aligned}$$

و با جمع کردن طرفین این نابرابری ها نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} 2(OA+OB+OC) &< 2(AB+AC+BC) \\ \Rightarrow OA+OB+OC &< AB+AC+BC \end{aligned}$$

به این منظور AB را امتداد می دهیم تا  $A_1C$  را در نقطه D قطع کند. حال به کمک قضیه حمار می نویسیم:

$$\begin{aligned} AD+DC &> AC \Rightarrow AD+DC+AB > AC+AB \\ \Rightarrow DB+DC &> AB+AC \quad (1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_1B+A_1D &> BD \Rightarrow A_1B+A_1D+DC > BD+DC \\ \Rightarrow A_1B+A_1C &> BD+DC \quad (2) \end{aligned}$$

و از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$A_1B+A_1C > AB+AC$$

### مثال هایی از کاربرد تعمیم قضیه حمار

♦ **مثال ۱.** ثابت کنید در هر مثلث مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از سه رأس آن، از محیط مثلث کوچک تر و از نصف محیط بزرگ تر است.

● اسم مجله: Mathematical Spectrum

● تارنما: ms.appliedprobability.org

● ناشر: Applied Probability Trust

● مکان انتشار: دانشگاه شفیلد انگلستان

● زبان: انگلیسی

● سال آغاز انتشار: ۱۹۶۸

● نشانی:

Mathematical Spectrum

Applied Probability

School of Mathematics and Statistics

The University of Sheffield

Sheffield S37RH

● تلفن و فکس:

Telephone Number: +44-(0)114-222-3920

Fax Number: +44-(0)114-222-3920



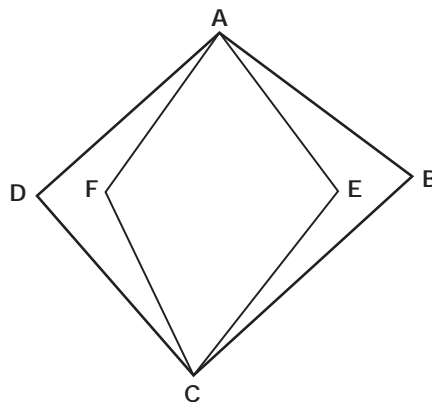
فرانک مورلی  
(۱۸۶۰-۱۹۳۷)

مجله ریاضی «Mathematical Spectrum»

یکی از بهترین و سرشناس‌ترین مجلات ریاضی جهان در عرصه ریاضیات دوره دوم دبیرستان است که در تمام شاخه‌های ریاضی مانند: جبر<sup>۱</sup>، مثلثات<sup>۲</sup>، نظریه اعداد<sup>۳</sup>، ترکیبیات<sup>۴</sup>، هندسه<sup>۵</sup>، آمار<sup>۶</sup>، تاریخ ریاضیات<sup>۷</sup> و... دست به چاپ و انتشار مقاله می‌زند. این مجله از جایگاه برجسته‌ای بین مقاله‌نویسان ریاضی برخوردار

♦ مثال ۲. در شکل زیر ثابت کنید محیط

چهارضلعی ABCD از محیط چهارضلعی AECF بزرگ‌تر است.

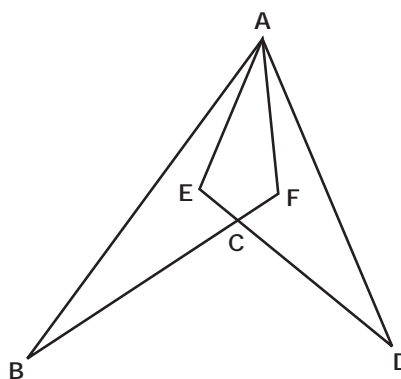


♦ حل: به کمک تعمیم قضیه حمار در مثلث‌های

ABC و ACD داریم:  $AB+BC > AE+EC$  و  $AD+CD > AF+CF$  با جمع کردن طرفین این نابرابری‌ها به‌سادگی می‌توانید درستی حکم را اثبات کنید.

### تمرین

۱. در شکل زیر ثابت کنید:  $AB+AD$  از نصف محیط چهارضلعی AECF بزرگ‌تر است.



۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، از نقطه O دلخواه درون مثلث عمودهای OM، ON، و OP را بر اضلاع مثلث وارد کرده‌ایم. ثابت کنید محیط مثلث MNP از ارتفاع مثلث ABC بزرگ‌تر است.

# Mathematical Spectrum



آگوستس دمورگن  
(۱۸۰۶-۱۸۷۱)

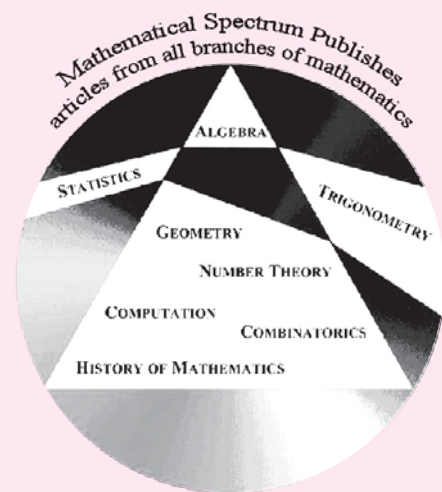
است و همواره توجه آن‌ها را برای ارائه مقاله به این مجله به خود معطوف می‌کند. دانش‌آموزان، معلمان و علاقه‌مندانی که مایل به ارسال مقاله برای این مجله هستند می‌توانند مقالات خود را از طریق نشانی پستی که در ابتدای مقاله آورده‌ایم، ارسال کنند. البته می‌باید در ابتدای آدرس عبارت The Editor را نیز اضافه کنند تا مقالاتشان به‌دست ویراستار مجله برسد و یا اینکه از طریق رایانامه این مجله که عبارت است از: «E-Mail: spectrum@sheffield.ac.uk» اقدام کنند. مجله ریاضی Mathematical Spectrum را می‌توانید هم به‌صورت مجلد و هم به‌صورت فایل «پی‌دی‌اف» دریافت کنید. اما از آنجا که دست‌اندرکاران آن بیشتر رویکرد فروش مجله را به علاقه‌مندان به ریاضیات

## \* پی‌نوشت‌ها

1. Algebra
2. Trigonometry
3. Number Theory
4. Combinatorics
5. Geometry
6. Statistics
7. History of Mathematics
8. Slow Runners also Have a Chance
9. M. A. Khan
10. Probability
11. The Life and Works of Augustus De Morgan
12. Scott H. Brown
13. Counting the Perfect Powers
14. M. A. Nyblom
15. Number Theory
16. A Simple Geometric Proof of Morley's Trisector Theorem
17. Brian Stonebridge

مقاله‌ای با عنوان «دوندگان گند نیز شانس دارند»<sup>۸</sup> به قلم **ام. ای. خان** در سال ۲۰۰۴ در این مجله چاپ شده است که ریاضی‌آموزان علاقه‌مند به مباحث «احتمال»<sup>۱۰</sup> می‌توانند این مقاله را پیگیری کنند. همچنین، علاقه‌مندان به **آگوستس دمورگن** و کارهای او می‌توانند مقاله «زندگی و کارهای آگوستس دمورگن»<sup>۱۱</sup> اثر **اسکات ایچ. براون**<sup>۱۲</sup> را که در سال ۲۰۰۶ منتشر شده است، مطالعه کنند. در سال ۲۰۰۸ مقاله‌ای با عنوان «شمارش توان‌های کامل»<sup>۱۳</sup> نوشته **ام. ای. نیبلم**<sup>۱۴</sup> در مجله به چاپ رسید که برای علاقه‌مندان به مباحث «نظریه اعداد»<sup>۱۵</sup> جالب توجه است. در سال ۲۰۰۹ مقاله‌ای با عنوان «یک اثبات هندسی ساده از قضیه تثلیث [زاویه] مورلی»<sup>۱۶</sup> به قلم **براین استون بریج**<sup>۱۷</sup> در مجله درج شد که می‌تواند برای علاقه‌مندان به هندسه مفید باشد.

هرچند همان‌گونه که اشاره کردیم، بهترین راه دریافت این مجله پرداخت حق اشتراک آن است و نمی‌توان به آسانی به فایل‌های رایگان «پی‌دی‌اف» آن دست یافت، اما از آنجا که مقالات مندرج در این مجله دربرگیرنده مطالب و موضوعات متنوع و ارزنده‌ای هستند، مطالعه و بررسی آن را به منظور ارتقای سطح دانش و بینش ریاضیات به تمامی ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضی پیشنهاد می‌کنیم.



پیش‌روی خود نهاده‌اند، امکان دارد که به آسانی نتوانید فایل‌های «پی‌دی‌اف» رایگان متناظر با مقالات گنجانده شده در مجله را در اینترنت به‌دست آورید. اما چون که مطالعه این دست از مجلات ریاضی معتبر و مطرح در عالم ریاضیات می‌تواند افق‌های روشن و جدیدی را پیش‌روی شما قرار دهد، مطالعه آن را به ریاضی‌آموزان پیشنهاد می‌کنیم.



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکته آخر اینکه در چند شماره اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به تدریج پررنگ‌تر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

۱۴۶. اگر  $\{a_n\}$  دنباله‌ای حسابی با جملات مثبت باشد،

ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1 a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_n}{2}$$

۱۴۷. فرض کنید  $S_n$  مجموع همه اعداد طبیعی بین  $3^n$  و  $2^{n+1}$  باشد. ثابت کنید  $S_n$  مضرب ۳ است.

۱۴۸. خانه‌های جدول زیر را با اعداد طبیعی پر کنید

که اعداد هر سطر و اعداد هر ستون یک تصاعد حسابی باشند.

	۷۴			
				۱۸۶
		۱۰۳		
.				

## ■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۴۱. برای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$$

۱۴۲. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

$$A = (x+y)^5 - (x^5 + y^5)$$

$$B = (x+y)^7 - (x^7 + y^7)$$

۱۴۳.  $x, y$  و  $z$  سه عدد حقیقی هستند و  $x \neq y$  است،

به‌طوری که داریم:  $x^2(y+z) = y^2(x+z) = z^2(x+y)$  مطلوب

است مقدار عددی  $z^2(x+y)$

۱۴۴. اگر  $\{a_n\}$  یک دنباله حسابی باشد، بررسی کنید که

کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی است:

$$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 \quad (\text{الف})$$

$$c_n = a_n^2 + b \quad (\text{ب})$$

$$d_n = a_n^2 \quad (\text{ج})$$

۱۴۵. ثابت کنید دنباله  $\{a_n\}$  یک دنباله حسابی است،

اگر و تنها اگر اعداد حقیقی  $A$  و  $B$  موجود باشند؛

به‌طوری که:  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = An^2 + Bn$

۱۴۹. تصاعد هندسی  $\{a_n\}$  را بیابید، به طوری که برای هر

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$$

۱۵۰. برای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$  ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$$

## بخش دوم: راه حل ها

۹۱. (فرستنده: عطا طهوری، دانش آموز دبیرستان

علامه طباطبایی تبریز)

اگر داشته باشیم:

$$\log_{1/2}^a = b \text{ و } \log_{1/2}^b = a \text{ حاصل } \log_{1/2}^{24}$$

بر حسب  $a$  و  $b$  به دست آورید.

$$\log_{1/2}^{24} = \log_{1/2}^{144} - \log_{1/2}^6 = \log_{1/2}^{12} - \frac{1}{\log_{1/2}^2} = \frac{2 \log_{1/2}^{12} - 1}{2 \log_{1/2}^2} \quad (1)$$

$$\log_{1/2}^a = \frac{\log_{1/2}^{b+2}}{2 \log_{1/2}^{b+1}} \Rightarrow \log_{1/2}^b = \frac{b-2}{1-2b} \Rightarrow \log_{1/2}^b = \frac{b-2}{-b-1}$$

$$\Rightarrow \log_{1/2}^b = \frac{3}{b+1} \quad (2)$$

$$\log_{1/2}^b = \log_{1/2}^a + \log_{1/2}^b \Rightarrow \log_{1/2}^b = a - \log_{1/2}^a = a - \log_{1/2}^a \times \log_{1/2}^b$$

$$= a - \frac{1-2b}{-b-1} \Rightarrow \log_{1/2}^b = \frac{a+1+ab-2b}{b+1} \quad (3)$$

از روابط (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می شود:

$$\log_{1/2}^{24} = \frac{7-b}{2a+2+2ab-4b}$$

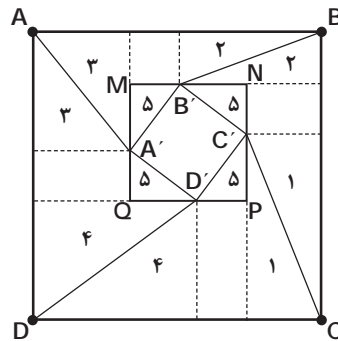
۹۲. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش آموز دبیرستان

فرزانگان چهار دانگه)

مربعی را داخل مربع دیگری انداخته ایم. ثابت

کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به هم وصل کنیم، از چهار ناحیه حاصل، مجموع مساحت دو ناحیه ای که مجاور به دو ضلع روبه روی مربع هستند، با مجموع مساحت دو ناحیه دیگر برابر است.

از رئوس مربع کوچک تر خطوطی به موازات اضلاع مربع بزرگ تر رسم می کنیم تا مربع  $MNPQ$  ایجاد شود. در شکل، مثلث های هم مساحت با شماره یکسان، شماره گذاری شده اند که اثبات آن را به خواننده واگذار می کنیم. همچنین، مجموع مساحت های دو مستطیل مجاور به دو ضلع  $AD$  و  $BC$  برابر است با:  $A'Q(DC-MN)$  (چون  $A'Q=C'N$ ) و مجموع مساحت های دو مستطیل مجاور به دو ضلع  $AB$  و  $CD$  برابر است با:  $B'M(AD-MQ)$ . از طرف دیگر:  $A'Q=B'M$  در نتیجه حکم ثابت می شود.



۹۳. (فرستنده: نفیسه آغویی، دانش آموز دبیرستان

فرزانگان چهار دانگه)

با فرض  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ، معادله  $f(f(x)) = 0$  چند

ریشه در مجموعه اعداد حقیقی دارد؟

معادله  $x - \frac{1}{x} = k$  به ازای هر  $k$  همواره دو ریشه

دارد، چون:

$$x - \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = k^2 + 4 > 0$$

اکنون معادله  $f(f(x)) = 1$  را در نظر بگیرید.

$$f(f(x)) = 1 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{f(x)} = 1$$

در نتیجه دو مقدار مانند  $a$  و  $b$  برای  $f(x)$  به دست

می آید. بنابراین با فرض  $f(x) = a$  دو ریشه و با فرض

$f(x) = b$  دو ریشه دیگر خواهیم داشت. در نتیجه چهار

ریشه برای معادله  $f(f(x)) = 1$  به دست می آید. چهار

ریشه به دست آمده متمایز هستند. کافی است جمع و

ضرب ریشه ها در معادله  $x^2 - kx - 1 = 0$  را در نظر بگیرید.

۹۴. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش آموز دبیرستان

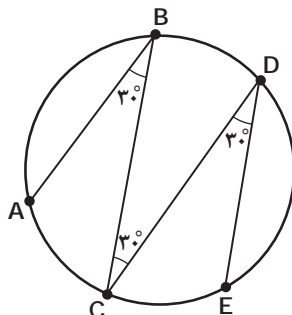
علامه طباطبایی تهران)

مطابق شکل زاویه های بین هر دو وتر

متوالی برابر است با  $30^\circ$  درجه. ثابت کنید اگر

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2, \text{ آن گاه کمان } AB, 90^\circ$$

درجه است.



بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$AB^2 + BE^2 - AB \cdot BE = AE^2 \quad \text{چون: } BE = CD$$

$$\text{پس: } AB^2 + CD^2 - AB \cdot CD = AE^2$$

$$\text{همچنین: } AD^2 + DE^2 - AD \cdot DE = AE^2 \quad \text{که با توجه}$$

$$\text{به } AD = BC \text{ داریم: } BC^2 + DE^2 - BC \cdot DE = AE^2$$

پس:

$$AB^2 + CD^2 - AB \cdot CD = BC^2 + DE^2 - BC \cdot DE$$

$$\text{از طرف دیگر داریم: } BC^2 + DE^2 = AB^2 + CD^2 \quad \text{در}$$

$$\text{نتیجه: } AB \cdot CD = BC \cdot DE \quad \text{و یا: } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD} \quad \text{چون:}$$

$$\angle ABC = \angle CDE = 30^\circ \quad \text{پس دو مثلث } ABC \text{ و } CDE$$

$$\text{متشابه‌اند و در نتیجه: } \angle ACB = \angle DCE \quad \text{حال از آنجا}$$

$$\text{که: } 360 = 2(\hat{ACB} + \hat{DCE} + 30 + 30 + 30) \quad \text{خواهیم}$$

$$\text{داشت: } \hat{ACB} = 45^\circ \quad \text{که نشان می‌دهد: } AB = 90$$

**۹۵. (فرستنده: محمد طبیعی، دانش‌آموز دبیرستان**

علامه طباطبائی تهران)

مربع  $ABCD$  مفروض است. دایره  $S$  را به

مرکز  $B$  و به شعاع  $AB$ ، و نیم‌دایره  $L$  را به قطر

$AB$  و داخل مربع رسم می‌کنیم. روی نیم‌دایره

$L$  نقطه  $M$  را در نظر بگیرید و  $BM$  را رسم

کنید تا دایره  $S$  را در  $T$  قطع کند. ثابت کنید:

$$\angle DAT = \angle TAM$$

فرض کنید:  $\angle BAM = a$  و  $\angle TAM = b$ . چون  $AB$

قطر نیم‌دایره  $L$  است، پس:  $\hat{BMA} = \hat{AMT} = 90^\circ$  و:

$$\hat{ATM} = 90 - b \quad \text{از طرف دیگر، چون: } AB = BT \text{، مثلث}$$

$ABT$  متساوی‌الساقین است و:  $\hat{BAT} = \hat{BTA}$  در

نتیجه:  $90 - b = a + b$  و بنابرین:  $2b + a = 90^\circ$ . همچنین

چون:  $\hat{DAB} = 90^\circ$ ، پس:  $\hat{DAT} + b + a = 90^\circ$  و طبق

تساوی مذکور داریم:  $\hat{DAT} + a + b = 2b + a$  که

نتیجه می‌دهد:  $\hat{DAT} = b$  و حکم نتیجه می‌شود.

**۹۶. در معادله  $5(x^2 + y^2 + z^2) = 1250 - 2xyz$ ، همه**

متغیرها اعدادی اول هستند. معادله را حل کنید.

ابتدا نتیجه بگیرید که  $2xyz$  مضرب ۵ است و چون

$x$ ،  $y$  و  $z$  اول هستند، پس یکی از آن‌ها باید برابر ۵ باشد.

(چرا؟) بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم:

$x = 5$ . با جای‌گذاری و ساده کردن معادله، به تساوی

$$(y+z)^2 = 225 - 2yz \quad \text{در نتیجه: } y^2 + z^2 = 225 - 2yz$$

و یا:  $y+z = 15$ . با توجه به اول بودن  $y$  و  $z$  تنها جواب

ممکن مقادیر ۲ و ۱۳ هستند.

**۹۷. در یک ساعت دیجیتالی که ساعت را با  $h$ ، دقیقه**

را با  $m$  و ثانیه را با  $s$  نمایش می‌دهد، در چند زمان

متفاوت  $h+m=s$  اتفاق می‌افتد؟ ( $0 \leq h \leq 23$ )

$$(0 \leq s \leq 59, 0 \leq m \leq 59)$$

به ازای هر مقدار  $h$ ،  $m$  می‌تواند در بازه  $h - 59 \leq m \leq 59$

تغییر کند. پس  $h - 60$  مقدارهای متفاوت برای  $m$  (و در

نتیجه برای  $s$ ) ایجاد می‌شود که تعداد کل حالت‌های

$$\text{ممکن برابر است با: } \sum_{h=0}^{23} (60 - h) \quad \text{این مقدار پس از}$$

ساده کردن برابر است با: ۱۱۶۴.

**۹۸. بزرگ‌ترین مقدار  $\lambda$  را طوری پیدا کنید که**

نامساوی زیر به ازای همه مقادیر حقیقی  $a$ ،  $b$ ،  $c$

و  $d$  برقرار باشد:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + \lambda bc + cd$$

با فرض  $a=d=0$  و  $b=c$  داریم:  $2b^2 \geq \lambda b^2$ . در نتیجه:

$\lambda \leq 2$ . ثابت می‌کنیم با فرض  $\lambda=2$  نامساوی به ازای همه

مقادیر حقیقی  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  برقرار است.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$$

$$\geq |ab + cd| + \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$$

$$\geq ab + cd + \sqrt{c^2 b^2} \geq ab + cd + bc$$

**۹۹. سه مورچه روی رئوس مثلث  $ABC$  هستند و**

طول اضلاع  $AB$ ،  $BC$  و  $CA$  به ترتیب برابر است

با ۳، ۵ و ۴. اگر سه مورچه با سرعت یک واحد در

ثانیه و در جهت  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  حرکت کنند،

در چه لحظه‌ای از ۳ ثانیه اول، مساحت مثلثی که

سه رأس آن توسط مورچه‌ها مشخص می‌شود،

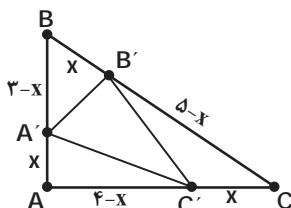
مینی‌مم است؟

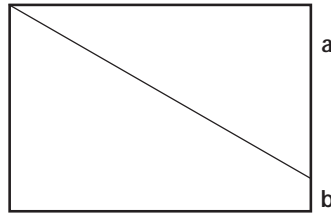
$$S(A'B'C') = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} (x \cdot (4-x) +$$

$$+ x \cdot (3-x) \cdot \sin B + x \cdot (5-x) \sin C)$$

$$= 6 - \frac{1}{2} (4x - x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{4}{5}x^2 + 3x - \frac{3}{5}x^2)$$

$$= \frac{6}{5}x^2 - \frac{47}{10}x + 6$$





با توجه به مفروضات مسئله، نسبت مساحت مثلث به مساحت کل مستطیل برابر است با:  $\frac{3}{11}$ . در نتیجه اگر ضلع افقی مستطیل را  $c$  در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{\frac{1}{2}ac}{c(a+b)} = \frac{3}{11} \quad \text{چون: } 132 = a+b$$

پس:  $a=72$  و  $b=50$ .

**۱۰۴.** از دنباله اعداد طبیعی، مضارب ۷ را حذف کرده ایم. در دنباله جدید، جمله  $n$ ام را بیابید. برای مثال، جمله هفتم این دنباله ۸ و جمله پانزدهم ۱۷ است.

برای به دست آوردن جمله  $n$ ام کافی است تعداد مضارب هفت کوچک تر یا مساوی  $n$  را به دست آوریم که

برابر است با:  $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ . در نتیجه با حذف این جملات جمله  $n$ ام برابر با  $n + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$  خواهد بود.

**۱۰۵.** چند مثلث متساوی الساقین وجود دارد که متساوی الاضلاع نیست و طول ساق های آن عددی طبیعی، کوچک تر یا مساوی  $n$  است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

در این مسئله فرض طبیعی بودن همه اضلاع لازم است. اگر طول ساق ها برابر  $k$  باشد، آن گاه برای طول قاعده مقادیر ۱ تا  $2k-1$ ، به جز  $k$  قابل قبول است. پس  $2k-2$  مقدار برای طول قاعده وجود دارد.

در نتیجه تعداد کل مثلث های مذکور برابر است با:

$$\sum_{n=1}^n (2k-2) = n(n+1) - 2n = n(n-1)$$

**۱۰۶.** دوزنقه متساوی الساقین PQRS دارای دو قاعده  $PQ=6$  و  $RS=10$  است. فاصله دو قاعده ۱۲ است. شعاع کوچک ترین دایره ای که دوزنقه را می پوشاند، چه قدر است؟

در نتیجه در رأس سهمی  $y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{47}{10}x + 6$  مساحت مثلث مینی مم خواهد شد، یعنی در لحظه

$$t = \frac{\frac{47}{10}}{2 \times \frac{6}{5}} = \frac{47}{24}$$

**۱۰۰.** مجموعه  $S = \{1, 2, \dots, 2013\}$  مفروض است. چند سه تایی از زیر مجموعه های  $S$  مانند  $(A, B, C)$  می توان ساخت به طوری که:  $A \cup B \cup C = S$  و  $B \subseteq A \cup C$ ؟

برای هر عضو  $a$  از  $S$ ، شش حالت وجود دارد، چرا که از ۳ حالت ممکن، دو حالت زیر قابل قبول نیست.

۱.  $a$  عضو هیچ کدام از سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  نباشد. ۲.  $a$  عضو  $B$  باشد، اما عضو  $A$  و  $C$  نباشد. در نتیجه طبق اصل ضرب، کل حالت های ممکن برای تمام اعضای  $S$  برابر است با:  $N = 6^{2013}$ .

**۱۰۱.** اعداد سه رقمی  $\overline{ab4}$  و  $\overline{4ab}$  در تساوی زیر صدق می کنند. عدد دو رقمی  $\overline{ab}$  را بیابید.

$$400 - \overline{ab4} = \overline{4ab} - 400$$

$$400 - 100a - 10b - 4 = 400 + 10a + b - 400$$

$$\Rightarrow 10a + b = 36 \Rightarrow \overline{ab} = 36$$

**۱۰۲.** عدد ۲۰۱۳ دارای این خاصیت است که ارقام آن چهار رقم متوالی هستند. قبل از سال ۲۰۱۳، نزدیک ترین سالی که این خاصیت را داشته، چه سالی بوده است؟

اگر صفر جزو رقم ها باشد، به اعداد ۲۰۱۳، ۲۰۳۱، ۲۱۰۳ و... می رسیم که هیچ کدام قبل از ۲۰۱۳ نیستند. پس رقم صفر جزو رقم ها نیست. در نتیجه سال مورد نظر قبل از ۲۰۰۰ است و رقم ۱ را حتماً جزو رقم ها داریم. بنابراین چهار رقم مورد استفاده ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند که نزدیک ترین آن ها به ۲۰۱۳ و قبل از آن سال ۱۴۳۲ است.

**۱۰۳.** با یک خط، مستطیلی را به دو بخش افراز کرده ایم، به طوری که  $a > b$  و نسبت مساحت دو بخش ۸ به ۳ است. اگر  $a+b=132$ ، مقدار  $a$  را بیابید.

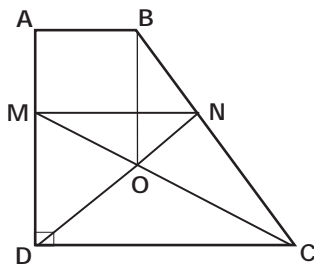
زوج یک مثال از چهار عدد حقیقی پیدا کنید.

گرافسی از مرتبه ۴ تعریف می‌کنیم. اعداد  $a, b, c$  و  $d$  را همان رئوس در نظر بگیرید. اگر دو رأس متناظر با دو عدد با اختلاف بین ۱ تا ۲ بودند، آن دو رأس را به هم وصل می‌کنیم. نشان می‌دهیم این گراف مثلث (۳ رأس دوه‌دو مجاور) ندارد. سه رأس  $x, y$  و  $z$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $x < y < z$ . اگر:  $1 < z - y < 2$  و  $1 < y - x < 2$  آن‌گاه:  $2 < z - x < 4$  که نشان می‌دهد سه رأس دوه‌دو مجاور وجود ندارند. بنابراین گراف ساخته شده با چهار رأس، هیچ مثلثی ندارد. چنین گرافسی حداکثر ۴ یال دارد. (در حالت کلی هر گراف بدون مثلث از مرتبه  $n$  حداکثر  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  یال دارد.)

۱۱۰. (ارائه شده توسط هوشنگ شرقی از اعضای هیئت تحریریه مجله)

در دوزنقه قائم‌الزاویه  $ABCD$ ،  $M$  و  $N$  روی  $AD$  و  $BC$  چنان قرار دارند که  $MN$  موازی قاعده‌های دوزنقه است. اگر  $O$  نقطه برخورد  $DN$  و  $CM$  باشد و  $BO \parallel AD$ ، ثابت کنید:

$$\frac{AD}{AM} = \left( \frac{CD}{MN} \right)^2$$



نقطه برخورد  $BO$  و امتداد آن را با  $MN$  و  $CD$  به ترتیب  $P$  و  $Q$  بنامید و از  $O$  عمود  $OH$  را بر  $AD$  رسم کنید. با استفاده از قضیه تالس در مثلث‌های  $DMN$  و  $CDM$  و  $OH = \frac{MN \cdot CD}{MN + CD}$  (نشان دهید:  $OH \parallel MN \parallel CD$ ) و در نتیجه  $AB = \frac{MN \cdot CD}{MN + CD}$  (۱) از طرف دیگر داریم:  $\frac{AD}{AM} = \frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{NP} = \frac{CD - AB}{MN - AB}$  با جایگذاری  $AB$  از رابطه (۱) در تساوی بالا، حکم نتیجه می‌شود.

اگر  $O$  مرکز دایره محیطی دوزنقه باشد، این نقطه از چهار رأس دوزنقه به یک فاصله است. بنابراین روی عمود منصف  $PQ$  و  $QR$  واقع است. اگر فاصله  $O$  از  $RS$  برابر  $x$  باشد، خواهیم داشت:

$$OR = OQ \Rightarrow x^2 + 5^2 = (12 - x)^2 + 3^2 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

۱۰۷. عدد طبیعی  $N$  را  $k$ -ویژه می‌نامیم، هرگاه مجموع ارقام  $N$  به علاوه  $k$  برابر حاصل ضرب ارقام  $N$ ، برابر با خود عدد  $N$  باشد. برای مثال، ۲۹، ۱- و ۹-ویژه است، چون  $2+9+2 \times 9 = 29$ .

الف) همه اعداد دو رقمی ۱-ویژه را پیدا کنید.  
ب) ثابت کنید (به روش جبری) که رقم اول همه جواب‌های (الف) یکسان است.  
ج) نشان دهید هیچ عدد دو رقمی وجود ندارد که ۲-ویژه باشد.

د) برای چه مقادیری از  $k$ ، عدد دو رقمی  $k$ -ویژه وجود دارد؟

(الف) و (ب)  $10a + b = a + b + ab \Rightarrow 10a = a + ab$

$$\Rightarrow 10 = 1 + b \Rightarrow b = 9$$

در نتیجه همه اعداد دو رقمی با رقم یکان ۹، ۱-ویژه هستند.

(ج)  $10a + b = a + b + 2ab \Rightarrow 10a = a + 2ab$

$$\Rightarrow 10 = 1 + 2b \Rightarrow b = \frac{9}{2}$$

پس  $b$  عددی غیر صحیح است و بنابراین هیچ دورقمی ۲-ویژه‌ای وجود ندارد.

(د)  $10a + b = a + b + kab \Rightarrow 10a = a + kab \Rightarrow kb = 9$

$$\Rightarrow k = 1, 3, 9$$

برای مثال ۱۳، ۳-ویژه و ۱۱، ۹-ویژه است.

۱۰۸. ثابت کنید سه عدد حقیقی گنگ نمی‌توان یافت که مجموع هر دوتای آن‌ها گویا باشد.

(برهان خلف) فرض کنید  $a, b$  و  $c$  سه عدد گنگ باشند که مجموع هر دوتای آن‌ها گویاست. در نتیجه چون:  $a + b + c = \frac{1}{2}((a+b) + (b+c) + (c+a))$ ، مجموع آن‌ها عددی گویاست. و چون:  $a = (a+b+c) - (b+c)$ ، پس  $a$  نیز گویاست که تناقض دارد.

۱۰۹. چهار عدد حقیقی  $a, b, c$  و  $d$  مفروض‌اند. ثابت کنید حداکثر ۴ زوج مانند  $\{x, y\}$  میان آن‌ها می‌توان یافت، به طوری که:  $2 < |x - y| < 1$ . برای ۴

## ایستگاه سوم:

لطیفه ریاضی

بعد از چالش با معماهای منطقی،  
حالا شنیدن چند لطیفه لذت بخش است!

### لطیفه اول

فقط دو هفته از شروع ترم اول گذشته بود که در کلاس درس حساب دیفرانسیل و انتگرال یک دانشگاه، دانشجویی دستش را بالا برد و پرسید: «استاد، واقعاً در زندگی روزمره، ما چه نیازی به یادگیری این مباحث داریم؟!»

و استاد با لبخند جواب داد: «البته اگر زندگی واقعی شما در همبرگر پیچیدن در یک رستوران زنجیره‌ای خلاصه شود، هیچ نیازی ندارید!»



### لطیفه دوم

یک شرکت تجاری و سرمایه‌گذاری بزرگ برای استخدام یک نفر آشنا با ریاضیات و امور مالی، به روزنامه آگهی داد. در پی مراجعه چند نفر و پس از مصاحبه‌های اولیه، سه نفر انتخاب شدند: یک استاد ریاضی محض، یک استاد ریاضی کاربردی، و یک کارشناس حسابداری. برای استخدام نهایی آن‌ها را دعوت کردند تا براساس حقوق پیشنهادی‌شان یک نفر را انتخاب کنند. استاد ریاضی محض حقوق ماهانه سه میلیون تومان را پیشنهاد کرد. استاد ریاضی کاربردی دو برابر این مبلغ، یعنی شش میلیون تومان خواست. وقتی از کارشناس حسابداری سؤال کردند، او گفت که ماهانه ۳۰ میلیون تومان می‌خواهد! رئیس کارگزینی حیرت‌زده از او پرسید: «هیچ می‌دانی که یک استاد ریاضی محض حاضر است با یک‌دهم این حقوق، همین کار را انجام دهد؟!»

کارشناس حسابداری بدون اینکه خود را ببازد و با خونسردی گفت: «چه عالی! پس سیزده و نیم میلیون تومان مال من و سیزده و نیم میلیون تومان مال تو و سه میلیون تومان را هم می‌دهیم به استاد ریاضی محض!»



### لطیفه سوم

باز هم یک مجموعه، ولی این بار یک مؤسسه آموزشی می‌خواست یک نفر را برای کارهای تحقیقی ریاضی استخدام کند. باز هم سه نفر به مرحله نهایی رسیدند: اولی استاد ریاضی محض، دومی استاد ریاضی کاربردی و سومی استاد آمار بود. برای آزمون نهایی از آن‌ها پرسیدند که: « $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$  چه می‌شود؟»

استاد ریاضی محض گفت: «۱.» استاد ریاضی کاربردی ماشین حساب خود را بیرون آورد و بعد از فشار چند دکمه گفت: «۰/۹۹۹۹۹۹» اما استاد آمار پرسید: «جواب را برای چه می‌خواهید؟»

مصاحبه با دکتر محمدعلی آقام  
رئیس کمیته المپiad رایانه ایران



# المپیاد پلي برای رسیدن به اهداف بعدی است!

## مقدمه

در یکی از روزهای پایانی سال ۱۳۹۳، دو تن از اعضای هیئت تحریریه ماهنامه، برای گفت و گو با یکی از نخبگان این سرزمین راهی «دانشگاه صنعتی شریف» شدند و در طبقه هفتم دانشکده مهندسی رایانه این دانشگاه، گفت و گویی کوتاه، اما صمیمی را با محمدعلی آقام، عضو هیئت علمی این دانشکده و رئیس کمیته المپیاد رایانه ایران انجام دادند. نکته جالب توجه آن است که یکی از این دو نفر گفت و گوکننده، دکتر محرم نژاد ایردموسی، معلم کلاسهای آمادگی المپیاد ریاضی دوران دبیرستان آقای آقام بوده است.

محمدعلی آقام در دوران دانش آموزی در المپیاد ریاضی کشور شرکت کرد و موفق شد در تیم المپیاد ریاضی کشورمان در المپیاد ۱۹۹۵ کانادا عضو شود.<sup>۱</sup> وی از آن رقابت بین المللی با مدال برنز به کشور بازگشت. سپس وارد دانشگاه صنعتی شریف شد و در رشته مهندسی رایانه به ادامه تحصیل پرداخت. آقام پس از اخذ مدرک کارشناسی ارشد برای ادامه تحصیل به کشور هلند عزیمت کرد و در بازگشت به عضویت هیئت علمی همان دانشکده و سپس به ریاست «کمیته المپیاد کامپیوتر» کشورمان منصوب شد. با هم قسمت اول این مصاحبه را که توسط آقایان هوشنگ شرقی و محرم نژاد ایردموسی، اعضای هیئت تحریریه ماهنامه برهان انجام شده است، مرور می کنیم.

در سفری که به مشهد داشتم، به منزل ایشان در مشهد رفتم و با خانواده اش آشنا شدم. خانواده اش، معلمان بودند، اهل مشهد و ساکن آنجا بود. نکته قابل توجهی که در مورد شخصیت او می توانم بگویم، هوش استثنایی اش بود. به جرئت می توانم بگویم که هیچ یک از اعضای تیم باهوش تر از او نبودند. در دوره های آمادگی، مسائلی را حل می کرد که حتی خانم مریم میرزاخانی هم نمی توانست حل کند. در این زمینه خاطره جالبی هم دارم:

«بعد از انتخاب تیم نهایی المپیاد، و در دوره های آمادگی قبل از اعزام به کانادا، امتحان های متفاوتی از ما گرفته می شد. در یکی از این امتحان ها مسئله ای داده بودند که خلاصه آن چنین بود که با این چهار شرط، آیا عدد  $n > n_0$  وجود دارد که در این شرایط صدق کند، یا خیر. من خودم ضمن حل مسئله، به یکی از شروط توجه نکردم و در نهایت نتیجه گرفتم

**رشد برهان:** امروز دوشنبه بیست و پنجم اسفندماه

۱۳۹۳، ساعت شش بعد از ظهر، در خدمت دکتر محمدعلی آقام، عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی رایانه دانشگاه صنعتی شریف، عضو سابق تیم های المپیاد ریاضی کشور و رئیس فعلی کمیته المپیاد کامپیوتر ایران هستیم. برای شروع مصاحبه اگر موافق باشید، من گریزی به گذشته و حدود ۲۰ سال پیش می زنم. در آبان ماه ۱۳۷۳ آزمون انتخابی اعضای تیم المپیاد ریاضی ایران (دوازدهمین دوره) برگزار شد که شما یکی از برگزیدگان آن بودید. اعضای آن تیم شش نفر بودند که بعداً در سال ۱۹۹۵ به المپیاد ۱۹۹۵ کانادا اعزام شدند. برای شروع صحبت می خواهم به دو نفر از اعضای آن تیم اشاره کنم که اولین آن ها زنده یاد رضا صادقی<sup>۲</sup> است. لطفاً اگر خاطره ای از ایشان دارید و یا نکته قابل ذکری هست، بفرمایید.

**آقام:** من با رضا تا قبل از عضویت در تیم المپیاد آشنایی نداشتم. اما بعداً که از کانادا برگشتیم، من

محمدعلی  
آبام در دوران  
دانش آموزی در  
المپیاد ریاضی  
کشور شرکت  
کرد و موفق شد  
در تیم المپیاد  
ریاضی کشورمان  
در المپیاد ۱۹۹۵  
کانادا عضو شود.  
وی از آن رقابت  
بین المللی با مدال  
برنز به کشور  
بازگشت



چنین عددی برای  $n$  وجود دارد و آن را به دست آوردم. بعد ورقه‌ام را دادم و بیرون رفتم و رضا را دیدم و درباره آن مسئله بحث کردیم. به او گفتم که من این عدد را پیدا کرده‌ام. رضا گفت نه چنین عددی وجود ندارد و اثبات خودش را که کاملاً دقیق و منطقی بود، به من گفت و ثابت کرد که  $n$  وجود ندارد.

بعداً که بقیه بچه‌ها آمدند، همه به اتفاق گفتند که عدد  $n$  را به دست آورده‌اند! حتی خانم میرزاخانی هم با اطمینان همین را می‌گفت، اما من و رضا به هم نگاه می‌کردیم و فقط می‌خندیدیم! فقط یک نفر به نام محمد جواهری که از استان کردستان آمده بود، ثابت کرده بود که  $n$  وجود ندارد، ولی جرئت نمی‌کرد که نظرش را بگوید. بعداً که مسئله حل شد، فهمیدیم نظر رضا درست بوده است. روز شنبه که همه آمدیم، به خانم میرزاخانی هم گفتیم که راه حل او هم نادرست بوده است و  $n$  به دست نمی‌آید.

**رشدبزرگ:** اتفاقاً دومین فردی که از اعضای آن

تیم مدنظر من بود، همین خانم مریم میرزاخانی بود...

**آبام:** در مورد رضا گفتم که نقطه مثبت او هوشش بود، اما نقطه مثبت خانم میرزاخانی، تلاش و پشتکارش بود. در آن زمان دوره آمادگی ما در همین دانشگاه شریف، و در دانشکده ریاضی برگزار می‌شد...

**رشدبزرگ:** سرپرست دوره، آقای دکتر تابش

بودند؟

**آبام:** بله و چون کلاس‌ها در دانشکده ریاضی تشکیل می‌شد، ما می‌توانستیم در کلاس‌های ریاضی دانشگاه هم شرکت کنیم. در ساعت‌های تفریح که ما می‌رفتیم دنبال گردش و یا فوتبال، خانم میرزاخانی در کلاس‌های ریاضی دانشگاه شرکت می‌کرد! از جمع ما پسرها فقط آقای کیوان ملاحی گاهی در این کلاس‌ها شرکت می‌کرد. همیشه هر وقت که ما خانم میرزاخانی را می‌دیدیم، چشم‌هایش نشان می‌داد که دیشب تا دیروقت روی مسائل کار می‌کرده است. البته تک‌بعدی هم نبود و مثلاً بعدها در دانشگاه، نمره درس تربیت‌بدنی‌اش بالای ۱۹ بود. اما واقعیتش را بخواهید، ما این‌طور نبودیم. او در عین سخت‌کوشی، اصلاً خودش را نمی‌گرفت و متواضع بود. البته باهوش هم بود، ولی رضا باهوش‌تر بود. رضا بازیگوش بود و خیلی برای ریاضیات وقت نمی‌گذاشت.

**رشدبزرگ:** در مسابقه نهایی (۱۹۹۵ کانادا)، مریم

مدال طلا و رضا نقره گرفت؟

**آبام:** رضا هم طلا گرفت، اما طلای خانم میرزاخانی

کامل بود و طلای رضا صادقی، طلای آخر بود! کسانی که نمره‌ای بین ۳۷ تا ۴۲ بگیرند، مدال طلا کسب می‌کنند. خانم میرزاخانی نمره ۴۲ و رضا نمره ۳۷ گرفت.

**رشدبزرگ:** و شما هم که مدال برنز گرفتید.

**آبام:** بله.

**رشدبزرگ:** نمره هندسه را کامل گرفتید، اما نمره نامساوی را نگرفتید!

**آبام:** بله نمره نامساوی را به‌طور کامل از دست دادم. البته توی دوره که بودیم، یک نامساوی دادند که جایزه‌اش هم یک بستنی بود! و من آن نامساوی را حل کردم. این نامساوی شبیه به همان بود و اگر کمی با دقت فکر کرده بودم، می‌توانستم حلش کنم. اما متأسفانه راه‌حلی که داشتم و فکر می‌کردم به جواب می‌رسد، نزدیک یک ساعت وقتم را گرفت و به جواب نرسید و کم‌کم استرس هم بر من غالب شد و در نتیجه مجبور شدم که آن را کنار بگذارم.



از راست به چپ:  
هوشنگ شرقی،  
محرم نژاد ایرد موسی،  
دکتر محمدعلی آبام

دشوارتر بود. البته به لحاظ علمی هم وضع ما خوب بود و این طور هم نبود که بی‌گدار به آب زده باشیم. یادم هست که وقتی سال سوم بودیم و من در اولین المپیاد ریاضی خودم شرکت کردم، در مرحله اول قبول نشدم و چون قبل از آن خیلی تلاش کرده بودم، از این موضوع خیلی سرخورده شدم و تصمیم گرفتم المپیاد را کنار بگذارم. اما بعداً که با مدیر دبیرستان (نمونه رشد)، آقای زندیه و با آقای ایردموسی مشورت کردم - ما سه نفر بودیم: من، آقای کثیری و آقای شکری - تصمیم گرفتیم المپیاد ریاضی را ادامه دهیم و در سال چهارم در کلاس‌های درس شرکت نکنیم و فقط به المپیاد ریاضی بپردازیم. البته ریسک بالایی داشت و خب احتمال آنکه جزو نه یا ده نفری باشیم که مدال طلا می‌گیرند و از کنکور معاف می‌شوند، خیلی کم بود. الان اگر کسی بخواهد این کار را بکند، من اصلاً چنین توصیه‌ای به او نمی‌کنم، ولی ما این کار را کردیم. ما تاحدودی هم به خودمان اطمینان داشتیم، چون خیلی کار کرده بودیم.

به هر حال از تابستان همان سال زیر نظر آقای ایردموسی شروع به کار کردیم، تا در آزمون مرحله اول قبول و در آزمون مرحله دوم هم، من فکر می‌کنم نفر سوم شدم. از ۴۲ نمره آزمون، خانم میرزاخانی (که سابقه عضویت در تیم سال قبل را هم داشت) نمره ۳۵/۲، زنده‌یاد رضا صادقی نمره ۳۵ و من نمره ۳۴/۵ گرفته بودم.

**رشدبر/دکتر:** اصل سؤال من در واقع این بود که اگر ما امروز بخواهیم به دانش‌آموزی انگیزه بدهیم که به دنبال المپیاد برود، با توجه به اینکه شما خودتان المپیادی بوده‌اید و امروز هم سرپرست تیم المپیاد رایانه هستید، به نظر شما چه طور می‌توانیم این کار را بکنیم؟

اما راه‌حلی برای مسئله هندسه ارائه دادم که بعدها دکتر کرم‌زاده به من گفت جزو بهترین راه‌حل‌ها شناخته شد و می‌خواستند به‌خاطر آن، جایزه ویژه را به من بدهند، ولی چون مدال برنز گرفته بودم، آن را به من ندادند.

**رشدبر/دکتر:** انگیزه‌تان از رفتن به سمت المپیاد ریاضی چه بود؟

**آبام:** واقعیت این است که من تاحدود زیادی به دنبال یافتن راهی برای رفتن به دانشگاه بودم و به‌همین خاطر وقتی مدال طلای کشوری را گرفتم و رفتنم به دانشگاه تضمین شد، تاحدودی انگیزه‌ام را از دست دادم. در حالی که تا قبل از آن روزی یازده دوازده ساعت کار می‌کردم و مسئله‌های گوناگون ریاضی را حل می‌کردم. اما خانم میرزاخانی این طور نبود و برای او مدال طلای المپیاد ریاضی تازه قدم اول بود!

**رشدبر/دکتر:** آیا ورود بدون کنکور به دانشگاه می‌تواند امروزه به یک دانش‌آموز برای شرکت در المپیاد انگیزه بدهد؟ آیا کنکور دادن آسان‌تر نیست؟

**آبام:** بله، الان این طور است، ولی زمان ما کنکور



اعضای تیم المپیاد  
ریاضی ایران تورنتو کانادا  
(۱۹۹۵)



اعضای تیم المپiad  
ریاضی ایران (۱۹۹۵)  
«نفر اول سمت راست  
مریم میرزاخانی و  
نفر اول سمت چپ  
محمدعلی آدام  
می باشند.

#### \* بی‌نوشت‌ها

۱. اعضای تیم المپiad  
کشورمان در المپiad  
ریاضی ۱۹۹۵ کانادا  
عبارت بودند از آقایان:  
رضاصادقی، محمدعلی آدام،  
محمد جواهری،  
حسین زیوری پیران،  
کیوان ملاحتی کارای،  
و خانم مریم میرزاخانی  
۲. در اسفند ۱۳۷۶،  
اتوبوس حامل دانشجویان  
ریاضی شرکت کننده در  
بیست و دومین مسابقه  
ریاضی کشور، هنگام  
بازگشت از شهر اهواز،  
در یک سانحه رانندگی  
به دره سقوط کرد و  
متأسفانه شش تن از  
دانشجویان نخبه ریاضی  
که اغلب از برگزیدگان  
المپیادهای ریاضی بودند  
به نام‌های فرید کلبلی،  
مرتضی رضایی،  
آرمان بهرامیان،  
علی حیدری منفرد،  
علیرضا سایه بان،  
رضا صادقی  
و دکتر مجتبی لطفی زاده  
مهرآبادی در این سانحه  
جان باختند.

## مریم میرزاخانی از همان اول، هدفش مشخص بود. شک نداشت که می‌خواهد در رشته ریاضی تحصیل کند و ریاضی‌دان شود

**آدام:** در مورد خودم گفتم که در آن دوره انگیزه‌ام دور زدن کنکور بود. در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد هم آن کارها کمک زیادی به من نکرد، چون اهل تحقیق نبودم و باید تعدادی درس (واحد) را می‌گذراندم که این کار را به سادگی انجام دادم. اما وقتی وارد دوره دکترا شدم، تجربه المپiad خیلی به من کمک کرد. در واقع ذهنم آماده کار تحقیقی بود و سابقه و زمینه این کار را داشتم. از ایده‌هایی استفاده می‌کردم که تقریباً همان ایده‌هایی بودند که در مرحله المپiad از آن‌ها استفاده کرده بودم. مثلاً استاد خودم که رشته‌اش رایانه بود و دانش ریاضی خیلی قوی نداشت، مسئله‌ای را به من داد که خودش سال‌ها نتوانسته بود حل کند. اما من که تجربه المپiad داشتم، توانستم در مدت دو سه هفته آن را حل کنم. او همیشه به این موضوع به مناسبت‌های متفاوت اشاره می‌کرد.

وقتی شما می‌خواهید مسئله‌ای را حل کنید، باید ایده‌های قبلی داشته باشید و از همان‌ها استفاده کنید و یا حداقل آن‌ها را ارتقا دهید. اما اینکه بخواهید ایده جدیدی ابداع کنید، معمولاً کار سخت و یا غیرممکنی است. هر قدر در حوزه‌های مختلف مسائل متنوعی را دیده باشید، توانایی برخورد با مسائل جدید در شما افزایش می‌یابد.

**رشد در:** به عبارت دیگر می‌توان گفت که دانش آموز المپiad به لحاظ توانمندی و با داشتن یک پایه خوب برای آینده‌ای دور دست، بر دیگران مزیت دارد...

**آدام:** بله باید آینده‌نگر باشند. خب هدف ما از برگزاری المپiad رایانه چیست؟ اولاً خود مسابقه جاذبه خوبی دارد. ثانیاً اینکه دانش آموزان مستعد جذب دانش رایانه شوند. المپiad رایانه بهانه‌ای برای این منظور است. یکی از اهداف برگزاری المپiad در هر رشته‌ای جذب دانش آموزان مستعد به سمت آن رشته است و دانش آموزان کم‌کم متوجه اهمیت این کارها می‌شوند. اما مثلاً خانم میرزاخانی از همان اول هدفش مشخص بود. شک نداشت که می‌خواهد در رشته ریاضی تحصیل کند و از ابتدا می‌خواست ریاضی‌دان شود. مسیر مشخصی داشت و المپiad در واقع پلی برای

رسیدن به اهداف بعدی‌اش بود. اصلاً هدفش دور زدن کنکور و این حرف‌ها نبود و خب نتیجه‌اش را هم دید. هرچه اهداف انسان عمیق‌تر باشند، نتایج بهتری هم به دست می‌آید. مثلاً من هدفم فقط ورود به دانشگاه بود و دور دست‌تر را نمی‌دیدم، در نتیجه وقتی مدال طلای کشور را گرفتم و از کنکور معاف شدم، تقریباً انگیزه‌ام را از دست دادم و به همین دلیل در المپiad جهانی نتیجه خیلی خوبی نگرفتم.

**رشد در:** شما که این همه در ریاضی فعال بودید، چه‌طور شد که به رشته رایانه رفتید؟

**آدام:** واقعیت این است که اطرافیان در انتخاب رشته دانشگاهی خیلی مؤثرند. آن موقع هم، جو غالب در مورد انتخاب رشته، جو رایانه بود، و خیلی از نخبگان، رشته رایانه را به عنوان انتخاب اول در نظر می‌گرفتند. اما من بین ریاضی و رایانه مردد بودم و از رایانه وحشت داشتم، چون فکر می‌کردم توانایی برنامه‌نویسی رایانه را ندارم. حتی وقتی هم که انتخاب رشته کردم و وارد دانشگاه شدم، تا سال اول هنوز مردد بودم که آیا انتخاب درستی کرده‌ام یا نه. اما بعداً دیدم که یک رشته محض دانشگاهی به نام «علوم رایانه» یا «computer science» داریم که پس زمینه ریاضی دارد و مطالب و بحث‌های خیلی جالبی هم در آن مطرح می‌شود که با ایده‌های ریاضی سروکار دارد و به لحاظ علمی هم اقبال شدم. این رشته مباحث محض علمی هم دارد، ولی به اندازه ریاضی، محض نیست. مثلاً در طراحی الگوریتم‌های مرتبط با حرکات روبات‌ها، مباحثی از هندسه مطرح می‌شود که بسیار جالب هستند و ارتباط نزدیکی هم با ریاضیات دارند. این بحث‌ها مرا کاملاً جذب خود کرد و باعث شد که احساس کنم، انتخاب درستی کرده‌ام.



# استدلال

## مقدمه

ارسطو کشف کرد که تمام فعالیت‌های ذهن بشر، علی‌رغم گستردگی و پیچیدگی آن، یا برای این است که تصورات مجهول را با اندوخته‌های تصویری‌اش روشن کند، و یا برای آن است که احکام و قضیه‌ها را آن‌گونه سازمان‌دهی کند که به نتایج جدید برسد و این یعنی «استدلال».

شیوه دیگر تفکر، استدلال است؛ نعمتی که خداوند بلندمرتبه از ابتدای زندگی انسان در اختیار او قرار داد. نوزاد به تدریج صداهای مختلف را می‌شنود، به اطراف خود می‌نگرد، پدر، مادر و اطرافیان خود را می‌بیند و... این احساسات بر اثر تکرار روی او تأثیر می‌گذارند و در ذهن او باقی می‌مانند.

استدلال کردن و دلیل آوردن عالی‌ترین فعالیت ذهن بشر است. بشر از همان دوران کودکی، پیش از آنکه چیزی را از جایی بیاموزد، با توجه به اطلاعاتی که در اختیار دارد، برای کارهایی که انجام می‌دهد دلیل می‌آورد و با طی کردن مسیر تکاملی لازم، می‌تواند استدلال‌های قوی‌تر و پیچیده‌تری را انجام دهد. بنابراین، استدلال فعالیت طبیعی ذهن آدمی است، اما گاهی در روند دلیل آوردن دچار اشتباهاتی می‌شویم که با شناخت دقیق استدلال، می‌توان از اشتباهات کاست و به بهره‌برداری سریع‌تر، درست‌تر و آسان‌تر دست یافت.

در تدریس درس‌هایی مانند «جبر و احتمال» و «هندسه»، مفاهیم مربوط به استدلال مطرح می‌شوند و در حین تدریس سؤالاتی برای دانش‌آموزان پیش می‌آید. بهتر دیدم که برای آشنایی آنان از کتاب‌های گوناگون منطق موجود استفاده کنم و این مفاهیم را برای آنان روشن سازم. به دلیل شیوا بودن و بی‌نقص بودن جملات موجود در این کتاب‌ها، سعی کردم که از جملات این کتاب‌ها غالباً بدون تغییر استفاده کنم. فهرست این کتاب‌ها را در پایان مقاله زیر عنوان منابع آورده‌ام.

## تعریف استدلال

چیز با چیز دیگر معلوم می‌کنند. به عبارت دیگر، وقتی دو چیز وجه اشتراک و یا وجه شباهتی داشته باشند، حکم می‌کنیم که در نتیجه آن وجه اشتراک همانند خواهند بود. بنابراین، تمثیل نوعی استدلال است که در آن فقط به دلیل تشابهی که میان دو موضوع وجود دارد، حکم یکی را به دیگری نسبت می‌دهیم.

نخستین استدلال‌های کودکان از راه تمثیل است. استدلال تمثیلی در بسیاری از موارد مفید است، اما استدلال قابل اطمینانی نیست. زیرا گاهی وقت‌ها ممکن است نتایج غلطی به دست آید. در ادامه مثال‌هایی مطرح شده‌اند که بعضی از آن‌ها نتایج درستی نخواهند داشت:

۱. «چون آب و هوای کرهٔ مریخ مانند آب و هوای زمین است،

حکم می‌کنیم مریخ هم مانند زمین دارای حیات است.»

۲. «چون دارویی روی میمون اثر خوبی دارد، حکم می‌کنیم که

روی انسان نیز اثر خوبی دارد.»

۳. با فرض طبیعی بودن  $m$  و  $n$  به سادگی داریم:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  و

حکم می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{2}{n}} = a^{\frac{3}{n}} = \sqrt[n]{a^3}$$

استدلال آن چیزی است که ذهن انسان در برخورد با دنیای اطراف خود انجام می‌دهد و پاسخ «چرایی» است که برای او پیش می‌آید. تمام پیشرفت‌های علمی، اجتماعی، فلسفی و دینی به استدلال وابسته‌اند و تابع قوانینی هستند که ذهن انسان به‌طور طبیعی آن‌ها را به کار می‌برد. علم و ادراک انسان به دو دسته «تصور» و «تصدیق» تقسیم می‌شود. نام دیگر تصدیق «قضیه» است. محتوای قضیه ممکن است از راه‌های گوناگونی چون احساس، تجربه، حدس علمی و قرارداد به دست آید.

استدلال عبارت است از: ترکیب قانونمند قضایای معلوم برای رسیدن به قضیه جدید.

## اقسام استدلال

انسان برای رسیدن به معلومات جدید معمولاً از سه نوع استدلال استفاده می‌کند: ۱. تمثیل؛ ۲. استقرا؛ ۳. قیاس.

### ۱. تمثیل

تمثیل در لغت به معنای مثال آوردن و یا تشبیه کردن چیزی به چیزی دیگر است. در تمثیل، حکمی را برای چیزی از راه شباهت آن

## استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن با مشاهده چند مورد جزئی، یک حکم کلی نتیجه می‌شود



### استقرا

استقرا در لغت به معنای جست‌وجو و کاوش است. استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن با مشاهده چند مورد جزئی، یک حکم کلی نتیجه می‌شود؛ یعنی در آن ذهن انسان از جزئی به کلی سیر می‌کند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

- انسان در چند مورد جزئی آب را حرارت می‌دهد و می‌بیند که آب در صد درجه به جوش می‌آید. نتیجه می‌گیرد که هر آبی در صد درجه به جوش می‌آید.
- تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$۱+۳=۴ \text{ و } ۱+۳+۵=۹ \text{ و } ۱+۳+۵+۷=۱۶$$

فرد با دیدن این چند مورد جزئی نتیجه می‌گیرد که مجموع تعدادی عدد فرد متوالی با شروع از ۱، برابر است با مربع تعداد آن‌ها. بنابراین نتیجه یک استقرا به‌طور حتم یک قضیه کلی است. استقرا بر دو قسم است:

۱. استقرای ناقص (ضعیف)؛ ۲. استقرای تام (قوی)

### ۱. استقرای ناقص (ضعیف)

افراد و یا چیزهایی که مورد استدلال قرار می‌گیرند، نامحدودند. ما در این استدلال، اگر تعدادی از آن‌ها را متصف به صفتی بیابیم و

مثال دیگری در زمینه ریاضیات مطرح می‌کنیم و با استفاده از این استدلال به بررسی آن می‌پردازیم: می‌دانیم که «منفی ضرب در منفی» همواره مثبت است. برای اثبات، اگر شخصی عقب عقب راه برود که یک عمل منفی است و از او فیلم‌برداری کنیم، سپس فیلم را به صورت عقب‌عقب نشان دهیم که این هم عملی منفی است، می‌بینیم که شخص به جلو حرکت می‌کند که یک عمل مثبت است. بیشترین و مفیدترین استفاده از استدلال تمثیلی در امر آموزش، محاوره، شعر و ادبیات است. بنابراین افرادی که در امر آموزش قرار می‌گیرند، تلاش می‌کنند با استفاده از تمثیل مطالب را بهتر و ساده‌تر به‌طرف مقابل خود انتقال و یا آموزش دهند.

تمثیل یعنی سرایت دادن یک موضوع به موضوع دیگر، به‌دلیل مشابهت آن دو با هم.

در علوم تجربی نیز استدلال تمثیلی در القای فرضیه به ذهن عالم حائز اهمیت است. برای مثال، پاستور متوجه شد که تخمیر مشروبات الکلی به‌سبب موجودات ریز جان‌دار است. او از راه تمثیل به این فرض رسید که ممکن است علت بیماری‌های عفونی نیز ذرات ریز جان‌داری باشد و با آزمایش‌های متعدد فرض خود را به اثبات رساند.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(n): 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(k): 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{فرض استقرا})$$

$$\begin{aligned} P(k+1): 1+2+3+\dots+(k+1) &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

می‌خواهیم از درستی  $P(k)$  درستی  $P(k+1)$  را نتیجه بگیریم. برای این منظور به طرفین برابری فرض عبارت  $(k+1)$  را اضافه می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ \text{طبق فرض استقرا} &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

**استقرا قهقرایی:** این استقرا برگرفته از استقرا ضعیف است. گاهی به سادگی می‌توان از  $P(k+1)$  برقراری  $P(k)$  را نتیجه گرفت و ثابت کرد که مجموعه  $k$ هایی که  $P(k)$  برقرار است، نامتناهی است.

**اصل استقرا قهقرایی:** فرض کنید  $P(n)$  به ازای  $n \geq m$  تعریف شده باشد و:

**الف)** به ازای هر  $n \geq m$  اگر  $P(n)$  آن‌گاه  $P(n-1)$ ؛  
**ب)** مجموعه  $n$ هایی که  $P(n)$  برقرار است، نامتناهی است.  
 در این صورت به ازای هر عدد صحیح  $n \geq m$   $P(n)$  برقرار است.

## ۲. استقرا تام (قوی)

اگر افراد و یا چیزهایی که مورد استدلال قرار می‌گیرند، محدود باشند و هر یک جداگانه مورد بررسی قرار گرفته باشند و پس از آن حکم کلی صادر شود، استدلال از نوع تام است. دو مثال زیر نمونه‌هایی از کاربرد استدلال استقرا تام است:

• مدار یک‌یک ستارگان منظومه شمسی را ملاحظه می‌کنیم و می‌بینیم که بیضی است. آن‌گاه حکم می‌کنیم که همه ستارگان منظومه شمسی دارای مدار بیضی‌اند.

آن‌گاه این حکم را تعمیم دهیم و بگوییم کل دارای این صفت است، از استدلال استقرایی ناقص استفاده کرده‌ایم. بنابراین در استقرای ناقص برخی از موارد جزئی را می‌آزمایند و سپس نتیجه به‌دست آمده را به کل موارد سرایت می‌دهند.

در ریاضیات، فرض کنید  $P(n)$  ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی)  $n$  باشد؛ برای مثال:  $P(n): 2^n \geq n$ . این عبارت یعنی  $P(n)$  به معنی  $2^n \geq n$  باشد.

در ریاضیات این استدلال تحت‌عنوان اصل استقرای ضعیف مطرح می‌شود و به کار می‌رود. در اینجا به بیان این اصل می‌پردازیم:

**اصل استقرای ضعیف:** اگر  $m$  عددی صحیح و  $P(n)$  ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی)  $n$  باشد به‌طوری که:

**الف)**  $P(m)$  برقرار است.  
**ب)** اگر  $k \geq m$  و  $P(k)$  برقرار باشد، آن‌گاه  $P(k+1)$  برقرار است.  
 در این صورت به ازای هر عدد صحیح  $n \geq m$   $P(n)$  برقرار است.

به‌طور معمول  $m$  را ابتدای استقرا می‌نامند. در اکثر مسائل  $m=1$  است و ما برای هر عدد طبیعی  $n$  برقراری  $P(n)$  را ثابت کنیم. با توجه به اصل استقرای ضعیف دو چیز باید ثابت شود:

۱. برقراری  $P(1)$ ؛  
 ۲. نتیجه‌گیری  $P(k+1)$  از  $P(k)$ .  
 در اصل فوق  $P(k)$  را «فرض استقرا» می‌نامند و  $P(k+1)$  را «حکم استقرا» می‌نامند. برای اثبات بخش ۲، معمولاً برقراری  $P(k)$  را فرض می‌گیرند و  $P(k+1)$  را از آن طی مراحل و با تمهیداتی نتیجه می‌گیرند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

• دانشمندان دارویی را در چند مورد آزمایش می‌کنند و هنگامی که اثر شفا بخش آن را می‌بینند، حکم کلی می‌کنند که آن دارو برای درمان این بیماری مفید است.

• سگ، گربه، خرگوش، شتر، انسان و... هنگام جویدن خوراک، فک زیرین خود را حرکت می‌دهند. سپس این حکم را به نحو کلی عمومیت می‌بخشیم و می‌گوییم: «همه حیوانات هنگام خوردن، فک پایین خود را حرکت می‌دهند.»

درباره مثال دوم از لحاظ منطقی می‌توان گفت که ممکن است طبیعت استثناهایی داشته باشد و حکم کلی ما درست نباشد. این نوع استدلال کاربرد فراوانی در علوم تجربی و ریاضیات دارد و مبنای اعتماد به علوم تجربی است. در مثال زیر کاربرد استقرای ضعیف در ریاضیات را مشاهده می‌کنید:

● معلم در کلاس از یک یک دانش آموزان می پرسد که آیا تمرین خود را حل کرده اند یا نه، و چون می بیند که همه حل کرده اند، اعلام می کند که «همه تمرین خود را حل کرده اند».

این نوع استقرا نتیجه درستی دارد، اما به دلیل محدود و کوچک بودن موضوعات کاربرد چندانی ندارد. در ریاضیات نیز گاهی اوقات نتیجه گیری  $P(k+1)$  تنها با استفاده از  $P(k)$  ممکن نیست، بلکه می توان از برقراری  $P(m)$  تا  $P(k)$  نتیجه گرفت که  $P(k+1)$  برقرار است.

مانند استقرای ضعیف، اصلی به نام اصل استقرای قوی مطرح می شود:

**اصل استقرای قوی:** اگر  $m$  عددی صحیح و  $P(n)$  ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی)  $n$  باشد، به طوری که:

الف)  $P(m)$  برقرار است.  
ب) اگر  $k \geq m$  و اگر  $P(m), P(m+1), \dots, P(k)$  برقرار باشند، آن گاه  $P(k+1)$  برقرار است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح  $n, n \geq m$  برقرار است.

## قیاس

قیاس مهم ترین و قاطع ترین شکل استدلال و تنها راه رسیدن به یقین است. این استدلال از کلی به جزئی و مرکب است از حداقل دو قضیه، به نحوی که با دانستن درستی آن دو قضیه، بدون هیچ تردیدی قضیه دیگری به نام نتیجه به دست می آید. قیاس مجموع قضایایی است که هرگاه آن ها را قبول کنیم، ناچار باید نتیجه آن ها را نیز قبول کنیم؛ چون در غیر این صورت رفتار تناقض خواهیم شد. این نوع استدلال در کتاب های جبر و احتمال سال سوم ریاضی، هندسه ۱ و هندسه ۲ زیرعنوان «استدلال استنتاجی» مطرح شده است. مشهورترین مثال هایی که در منطق درباره قیاس مطرح می شوند، مثال های زیر هستند:

● سقراط انسان است، هر انسان فانی است، پس سقراط فانی است.

● هوا جسم است، هر جسمی جرم و وزن دارد، پس هوا جرم و وزن دارد.

بنابراین می توانیم استدلال قیاسی را به این صورت تعریف کنیم: «استدلال قیاسی، استدلالی است از کلی به جزئی که اگر مقدمات آن صادق باشد، نتیجه به دست آمده حتماً صادق است.»

قیاس دو جنبه دارد: یکی صورت و دیگری ماده. منظور از صورت قیاس، همان قالب های منطقی است که شکل و چارچوب استدلال را تشکیل می دهند که از این نظر مانند ریاضیات است. برای مثال، فرمول ها و روابط ریاضی که در مسائل ظاهر می شوند، همان قالب

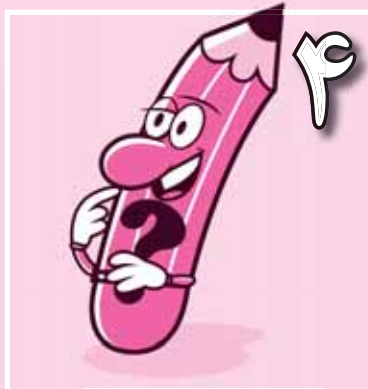
و صورت هستند. اما منظور از ماده در قیاس، مقادیری است که به جای متغیرها و مجهولات در معادلات و روابط قرار می دهیم. برای مثال، تابع  $f(x)=2x-1$  را در نظر بگیرید. این رابطه همان قالب و صورت است و مقادیری که به جای  $x$  گذاشته می شوند، همان ماده این صورت نام دارند. در کل می توانیم یکی از مهم ترین صورت های قیاس را که شکل اول قیاس نام دارد، به این صورت بیان کنیم: «هر

الف ب است و هر ب پ است، پس هر الف پ است.»  
ماده چیزی است که جای الف، ب و ج گذاشته می شود که می تواند انسان، فانی، هوا و... باشد. در محاوره و در آثار ادبی، غالباً قیاس به معنی تمثیل به کار می رود؛ مانند اینکه: هر انسانی ناطق است، هر ناطقی می رنده است، پس هر انسانی می رنده است.  
همچنان که در ریاضی « $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ » قالب و شکل است و مقادیری که به جای  $a$  و  $b$  گذاشته می شوند، ماده آن صورت نام دارند؛ برای مثال:  $(2+3)^2=4+9+12=25$ .

## \* منابع

۱. خوانساری، محمد (۱۳۸۳). منطق صوری. آگاه.
۲. مظفر، محمد رضا (۱۳۹۲). منطق. دارالعلم.
۳. عالمی، روح الله (۱۳۹۲). منطق. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی.
۴. بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۶). مباحثی در ریاضیات گسسته. مبتکران.

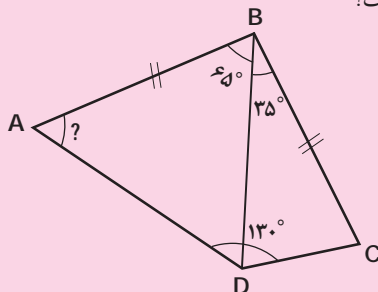
## پرسش های پیکار جو!



در شکل مقابل داریم:

$AB=BC$ ،  $\angle ADC = 130^\circ$ ،  $\angle ABD = 65^\circ$  و  $\angle CBD = 35^\circ$ .

اندازه  $\angle BAD$  چند درجه است؟



- الف)  $60^\circ$   
ب)  $57^\circ$   
ج)  $57/5^\circ$   
د)  $67/5^\circ$   
ه)  $55^\circ$

روش تراختنبرگ  
که خیلی آسان تر از  
حساب معمولی است،  
به افراد عادی که هیچ  
سروکاری با ریاضیات  
نداشته‌اند، امکان  
دستیابی به چنان  
نتایجی را می‌دهد که  
عموماً از نواغ ریاضی  
انتظار می‌رود

## روش سریع تراختنبرگ در حساب

• مؤلف: یاکوف تراختنبرگ<sup>۱</sup>  
• مترجمان به انگلیسی: آن کاتلر<sup>۲</sup> و رودولف مک شین<sup>۳</sup>  
• مترجم به فارسی: محمد باقری  
• تعداد صفحات: ۳۱۲  
• ناشران: دانشمند  
(چاپ اول: ۱۳۷۱، چاپ دوم: ۱۳۷۱ و چاپ سوم: ۱۳۷۳) و فرهنگان (چاپ چهارم: ۱۳۷۷)

احساس توانایی ایجاد شده در آن‌ها به زودی موجب شد که خصلت‌های ناهنجار خود را از دست بدهند. تأثیرات جنبی فراگیری روش جدید بر این کودکان نیز به‌همین اندازه مهم بود. ضمن اینکه بچه‌ها مهارتی در کار با اعداد به‌دست می‌آوردند، آرامش و اطمینانی در آنان پدید می‌آمد که شخصیتشان را دگرگون می‌کرد و کم‌کم در سایر درس‌ها هم پیشرفت محسوسی می‌کردند. احساس توانایی، تلاش‌ها و پیروزی‌های بعدی را با خود به دنبال می‌آورد. تراختنبرگ برای آنکه نشان دهد هر کسی قادر است طرز حل سریع و ساده مسائل را فرا گیرد، روش خود را با موفقیت به کودک ۱۰ ساله‌ای که عقب‌افتاده محسوب می‌شد، یاد داد. نه تنها این کودک شیوه محاسبه کردن را فرا گرفت، بلکه ضریب هوشی او نیز فزونی یافت. چون همه مسائل به‌طور ذهنی حل می‌شد، کودک نیروی حافظه چشم‌گیری به‌دست آورد و قدرت تمرکزش زیاد شد. روش تراختنبرگ متکی بر دستورالعمل‌هایی است که با آنچه در روش‌های معمولی وجود دارد، اساساً متفاوت است. از جدول ضرب و از عمل تقسیم خبری نیست. برای یادگیری این روش کافی است شمردن را بلد باشید. این

می‌کرد، این بود که کودکان مزبور کسانی بودند که بارها در درس حساب رد شده بودند، تا آنکه بالاخره والدینشان در عین ناامیدی آن‌ها را برای یاد گرفتن این روش فرستاده بودند. روش تراختنبرگ، افزون بر سریع بودن، ساده هم هست. با فراگرفتن دستورهای آن، انجام محاسبات برق‌آسا، به راحتی قصه خواندن خواهد بود. ظاهراً این کار نوعی جادوگری است، ولی دستورهای مذکور از پایه منطقی استواری برخوردارند. تراختنبرگ کودکان را دوست داشت و شیوه جدید و ساده خود را برای انجام عملیات حساب نخستین‌بار به آنان آموخت. او همواره بر این اعتقاد بود که هر انسانی با هوش سرشار زاده می‌شود و حالا می‌خواست این نظر را ثابت کند. تعمداً کودکانی را برای این کار برگزید که در مدرسه تنبل به‌شمار می‌آمدند. این بچه‌ها، عموماً وامانده، خجالتی و گوشه‌گیر، یا درست در نقطه مقابل، یعنی پررو و سرکش بودند. به هر حال، همه آن‌ها کودکان ناسازگاری بودند که بد تربیت شده بودند.

واکنش این کودکان نسبت به شیوه آسان محاسبات آنی بود. این روش‌ها به نظر آنان همچون سرگرمی دل‌پذیری جلوه می‌کرد.

«نگاه کن و پیرس؛ دوست بدار و گذشت کن؛ یاد بگیر و پیش برو.»  
یاکوف تراختنبرگ (۱۸۸۸-۱۹۵۱)

آموزگار پسرپنجه‌نه‌ساله‌ای را که با گام‌های استوار راه می‌رفت، به‌سوی تخته سیاهی که رویش ستونی از اعداد به ارتفاع یک متر نوشته شده بود، فراخواند. پسرک برای آنکه قدش به اعداد بالایی برسد، روی پنجه پا بلند شد و مجموع آن‌ها را با سرعت برق به‌دست آورد. از دخترکی با گیس‌های روبان بسته شده خواسته شد که حاصل ضرب ۷۳۵۳۵۲۳۱۴ در ۱۱ را پیدا کند. او جواب درست را - که ۸۰۸۸۷۵۴۵۴ باشد - در زمانی کوتاه‌تر از زمان لازم برای بر زبان آوردن عبارت «جدول ضرب اعداد»، یافت. به پسرپنجه لاغراندازی که عینک قاب نقره‌ای به چشم داشت، گفته شد ۵۱۳۲۴۳۷۲۰۱ را در ۴۵۲۷۳۶۵۰۲۷۸۵ ضرب کند. پسرک فوراً کار را آغاز و جواب ۲۳۲۳۶۴۱۶۶۹۱۴۴۳۷۴۱۰۴۷۸۵ را در هفتاد ثانیه محاسبه کرد.

اینجا کلاسی بود که در آن روش ریاضی «تراختنبرگ» تدریس می‌شد. آنچه این نمایش شعبده‌بازی ریاضی را شگفت‌انگیزتر



- \* پی‌نوشت‌ها**
1. Jakow Trachtenberg
  2. Ann Cutler
  3. Rudolph McShane

روش‌های ریاضی آسان تراختنبرگ می‌توانند از عهده‌گذراندن امتحانات دشواری که برای تکمیل دوره آنان اجباری است، برآیند. یکی از کارشناسان برجسته معماری در سوئیس تنها پس از شرکت کردن در کلاس‌های مؤسسه ریاضی و فراگرفتن روش تراختنبرگ توانست در رشته انتخابی خود ادامه تحصیل دهد.

آنچه که شرح دادیم، گوشه‌ای از رخدادهای و تحولاتی بود که کتاب «روش سریع تراختنبرگ در حساب» در جهان ریاضیات پدید آورده است. امیدواریم که شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان نیز با مطالعه و یادگیری کتاب مزبور در راستای اعتلای دانش و بینش محاسباتی خود در اعمال اصلی حساب گام‌های استواری بردارید تا هنگام مواجهه با افرادی که در انجام این اعمال برای اعداد دارای مقادیر بزرگ از مهارت ویژه‌ای برخوردارند، دچار تعجب و سردرگمی نشوید.

چون ممکن است آن‌ها زودتر از شما به مطالعه این کتاب و یادگیری روش‌های مندرج در آن برای محاسبه دست زده باشند.

روش مبتنی بر کلیدهایی است که آن‌ها را باید به‌خاطر سپرد. با یاد گرفتن این‌ها، حساب به‌صورت موضوعی آسان و شیرین درمی‌آید، زیرا شخص خواهد توانست اعداد مطلوب را «بخواند». مزایای مهم این روش عبارت‌اند از سهولت بیشتر، سرعت بیشتر و دقت بیشتر.

مربیان دریافته‌اند که روش تراختنبرگ زمان انجام محاسبات ریاضی را ۲۰ درصد کاهش می‌دهد. ارزش عملی این روش جدید در آن است که برخلاف شیوه‌ها و ترفندهایی که در گذشته برای حالت‌های خاص ابداع شده بود، یک روش کامل است. روش تراختنبرگ که خیلی آسان‌تر از حساب معمولی است، به افراد عادی که هیچ سروکاری با ریاضیات نداشته‌اند، امکان دستیابی به چنان نتایجی را می‌دهد که عموماً از نواغ ریاضی انتظار می‌رود.

این روش که «تندنویسی ریاضیات» خوانده شده، در پیچیده‌ترین مسائل نیز قابل استفاده است. اما شاید بزرگ‌ترین حسن این روش تازه و انقلابی در آن باشد که دلبستگی‌های تازه‌ای را نسبت به ریاضیات برمی‌انگیزد، در شاگرد اعتمادبه‌نفس پدید می‌آورد و با گشودن پهنه تلاشی پیش‌رویش، او را به فراگرفتن موضوعی فرامی‌خواند که امروزه در مدارس «منفورت‌ترین» درس قلمداد می‌شود.

قدرت انجام اعمال اصلی حساب با سهولت چشمگیری که روش تراختنبرگ پدید می‌آورد، سبب می‌شود که ترس و تزلزل شاگردان که در مواجهه با زبان کاملاً نمادی و دقت مطلق ریاضیات راه آنان را سد می‌کند، از میان برود. به گفته کارشناسان، علت واقعی بیزاری اغلب شاگردان از ریاضیات، موانع عاطفی است، نه ضعف یادگیری. با آموختن روش تراختنبرگ، زحمت حساب کردن که بخشی از کارهای روزانه هر کسی است، برطرف می‌شود. دانشجویان پزشکی، معماران و مهندسان زوربخ در یافته‌اند که به کمک

## پرسش‌های پیکارجو!



- با ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۸، چند عدد هشت‌رقمی مضرب ۱۱ می‌توان نوشت؟
- |           |         |         |
|-----------|---------|---------|
| الف) ۱۱۵۲ | ب) ۲۳۰۴ | ج) ۳۴۵۶ |
| د) ۴۶۰۸   | ه) ۵۷۶۰ |         |

# راهنمای حل مسائل

## آمادگی برای آزمونهای مستمر

### ریاضی ۲

$$1. (-1, 0) \in f, (-1, a-b) \in f \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow 2a+b=3a$$

$$2. (2a+b, a+b) \in f, (2a, f) \in f \Rightarrow a+b=f \Rightarrow a=b=f$$

$$x=0, y=b>0$$

$$y=0, x=-\frac{b}{a}>0$$

$$f(x)=ax+b, S=\frac{OA \times OB}{2}=\frac{-b^2}{2a}=f$$

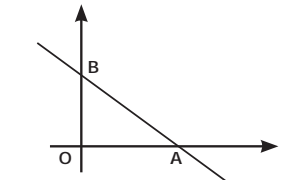
$$\Rightarrow b^2+4a=0, f(-1)=-a+b=f \Rightarrow b=f+a$$

$$(f+a)^2+4a=0 \Rightarrow a^2+2a+f^2+f=0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a+f)=0$$

$$\Rightarrow a=-1 \text{ یا } a=-f, b=f \text{ یا } b=-f$$

$$f(x)=-2x+f, f(x)=-18x-12$$



$$3. (-1, a+b) \in f, (-1, f) \in f \Rightarrow a+b=f$$

$$(a-b, f) \in f, (-1, f) \in f \Rightarrow a-b=-1$$

$$\begin{cases} a+b=f \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=f-1 \Rightarrow a-b=f$$

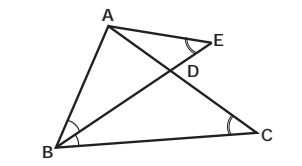
$$(a+c, f) \in f, (f, 0) \in f \Rightarrow a+c=f \Rightarrow c=f-a$$

$$f=\{(-1, f), (f, -f), (f, 0)\}$$

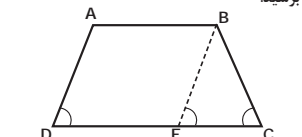
$$f^{-1}=\{(f, -1), (-f, f), (0, f)\}$$

### پاسخ هندسه ۱

۱. ثابت کنید:  $\triangle ABE \cong \triangle BDC$  و از آنجا نتیجه بگیرید:  $BD=AB$  و درستی حکم را به دست آورید.



۲. با فرض  $\hat{E} = \hat{C}$  از B خطی موازی AD رسم کنید. سپس به کمک قضیه خطوط موازی و مورب و فرض نتیجه بگیرید که  $\hat{E} = \hat{C}$  و از آنجا به درستی حکم برسید.



۲. با توجه به ویژگی اصلی عمود منصف، نتیجه بگیرید که مثلث EBC متساوی الساقین است و از آنجا نتیجه بگیرید که:  $\hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ .

با توجه به قائم الزویه بودن مثلث، داریم:  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$  و این را بیابید.

### پاسخ هندسه ۲

۱. با توجه به قضیه حمار داریم:

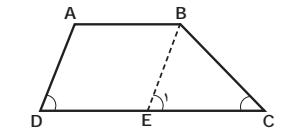
$$الف) x+y+x-y > xy$$

$$ب) x+y+xy > x-y$$

$$ج) x-y+xy > x+y$$

از ترکیب این نابرابریها به سادگی به درستی حکم می رسید.

۲. با فرض  $AD < BC$  از B خطی موازی AD رسم کنید. اکنون با توجه به اینکه ABED متوازی الاضلاع است،  $BE=AD$ . در مثلث BEC با توجه به فرض مسئله داریم:  $BC > BE$  و لذا:  $\hat{D} > \hat{C}$  و چون:  $\hat{E}_1 = \hat{D}$  و  $\hat{E}_1 = \hat{D}$

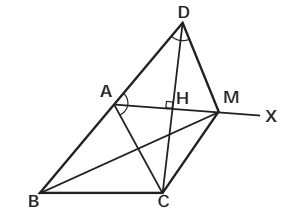


۲. مطابق شکل AB را به اندازه AC از طرف A تا نقطه D امتداد داده ایم و D را به C وصل کرده ایم. چون:  $AD=AC$ ، پس مثلث ADC متساوی الساقین است و در نتیجه نیمساز  $\hat{A}$  در این مثلث، ارتفاع و عمود منصف CD نیز هست. لذا:  $DH=CH$  و  $\hat{H} = 90^\circ$ . پس M روی عمود منصف CD است و در نتیجه:  $MD=MC$ . حال در مثلث MBD با توجه به قضیه حمار داریم:

$$MD+MB+BD=AB+AD$$

$$\Rightarrow MC+MB+AB+AC (AD=AC, MD=MC \text{ زیرا})$$

$$\Rightarrow MC+MB+BC > AB+AC+BC$$



### حسابان

۱. چون  $x^2+x^2=2x^2$  تجزیه ناپذیر است، فرض می کنیم خارج قسمت، چند جمله ای درجه اول  $cx+d$  باشد. بنابراین:

$$(2x^2+x^2+ax+bx)=(x^2+x^2)(cx+d)$$

$$=cx^3+(d+c)x^2+(d+cx)+xd$$

$$\Rightarrow c=2, d+c=1, d+2c=a, 2d=b \Rightarrow d=-1, a=2, b=-2$$

۲. با فرض اینکه x دانش آموز در اردو باشند، با توجه به فرض مسئله به معادله  $\frac{26}{x}-2=\frac{26}{x+2}$  می رسیم و از حل آن نتیجه می شود:  $x=6$

۲. اگر فروشنده x تومان تخفیف بدهد، با توجه به فرض،  $\frac{x}{2}$  بیشتر می فروشد. یعنی با قیمت فروش  $10000-x$  به تعداد  $500+\frac{x}{2}$  رادیو می فروشد و درآمد می شود:

$$(500+\frac{x}{2})(10000-x)=-\frac{x^2}{2}+4500x+5000000$$

شرایط ماکزیم شدن این تابع را بررسی کنید. (به ازای  $x=4500$  درآمد و سود ماکزیم می شود.)

### حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. الف) فرض کنیم این دنباله به L همگرا باشد. بنابراین:

$$\forall \epsilon > 0, |a_n - L| < \epsilon \Rightarrow |2^n - L| < \epsilon$$

$$\Rightarrow L - \epsilon < 2^n < L + \epsilon \Rightarrow \log_2(L - \epsilon) < n < \log_2(L + \epsilon)$$

و این با بی کران بودن مجموعه اعداد طبیعی تناقض دارد.

ب) برای اثبات با توجه به تعریف می نویسیم:

$$\forall k > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow a_n > k \Rightarrow 2^n > k$$

$$\Rightarrow n > \log_2 k \Rightarrow M \geq \lceil \log_2 k \rceil + 1$$

۲. با توجه به تعریف داریم:

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : n \geq m \Rightarrow |2^n - L| < \epsilon$$

پس کافی است  $M \geq \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$  انتخاب شود تا نتیجه گیری درست باشد.

$$3. a_1 = 2, a_2 a_1 + 1 = 2a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 a_2 + 1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_2 a_2 + 1 = 2a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}$$

همچنین:  $a_n = \frac{n+1}{n}$  حدس استقرایی که درستی این حدس را می توان به کمک قضیه استقرای ریاضی اثبات کرد. بعد از اثبات، به کمک تعریف نشان دهید که این دنباله نزولی و همگرا به یک است.

### هندسه تحلیلی

۱. چون  $|e_1|=|e_2|=1$ ، بنابراین داریم:

$$|e_1 + e_2|^2 = 2 \Rightarrow |e_1|^2 + |e_2|^2 + 2e_1 \cdot e_2 = 2 \Rightarrow e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$$

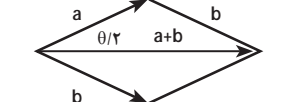
$$(e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_2) = |e_1|^2 + |e_2|^2 + 2e_1 \cdot e_2 = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

۲. طبق قضیه کسینوس ها در مثلث داریم:

$$|b|^2 = |a|^2 + |a+b|^2 - 2|a||a+b|\cos \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow |a+b|(|a+b| - 2|a|\cos \frac{\theta}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow |a+b| = 2|a|\cos \frac{\theta}{2}$$

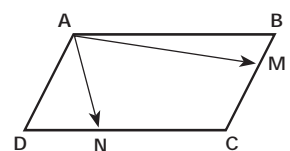


ب) از دستور  $|a+b|^2 = (|a|^2 + |b|^2)$  و قسمت الف استفاده کنید.

$$3. \frac{1}{4}(\vec{AM} + \vec{AN}) = \frac{1}{4}((\vec{AB} + \vec{BM}) + (\vec{AD} + \vec{DN}))$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}) = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



### فرضیات گسسته

۱. این دنباله گرافیکی ساده ولی غیرهمبند است

(چون  $q < p-1$ )، لذا گراف ناهمبند است.

۲. تعداد رأس های درجه ۱ در این درخت برابر است با ۷ که هم با رسم درخت و هم با استفاده از فرمول زیر می توانید این تعداد را مشخص کنید:

$$1 = \sum_{deg V_i \geq 2} (deg V_i - 2) + 1$$

در درختها

۲.  $A^2$  را به دست آورید و درایه های روی قطر اصلی آن را به صورت نزولی مرتب کنید و دنباله درجات رئوس را تشکیل دهید.

### فرضیات عمومی ۱ و ۲

۱. بیشترین مقدار به ازای  $x=2, y=-2$  به دست می آید.

$$f(x) = \frac{b}{2a}$$

$$f(-\frac{b}{2a})$$

$$y = -x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 - 2$$

۲. با توجه به ضابطه های f و g داریم:

$$fog(x) = [x+2|-x] \text{ و } gof(x) = [x+2|-x]$$

۲. با ضابطه  $gof(x) = \frac{2x+1}{-2x-2}$  به دست می آید و در دامنه اش، یعنی  $R - \{-\frac{1}{2}\}$  یک به یک است که وارون پذیری آن نتیجه می شود.

### فرضیات ۳ تجربی

۱. با توجه به تعریف مجموعه های A, B, C داریم:

$$(A \cap B) = \{0, 1\}, (A - B) = \{-4, 0\}$$

$$(B - C) = \{9, +\infty\}, (A - C) = \{-4, -2\}$$

۲. کافی است بنویسید  $\sin^2 a = \sin^2(a+a)$  و با توجه به دستور محاسبه سمت راست تساوی را محاسبه کنید و بر حسب Sina بنویسید. فرمول آخر:

۲. الف) سمت راست تساوی را به صورت  $\cos(4x-x)$  بنویسید و بسط دهید. ب) مانند الف عمل می کنیم و از فرمول در مسئله ۲ کمک می گیریم.

### عبر و احتمال

$$1. \text{ الف) } \frac{bc+ac+ab}{abc} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc \geq 9abc$$

$$\Leftrightarrow (a^2b+bc^2+abc)+(a^2c+b^2c+abc)+(ab^2+ac^2+abc) \geq 9abc$$

(همواره برقرار است.)

ب)

$$\Leftrightarrow b(a-c)^2 + c(a-b)^2 + a(b-c)^2 \geq 0$$

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

(همواره برقرار است.)

۲. هرگاه  $a \in \mathbb{Z}$  در این صورت در تقسیم a بر 6، یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت.

$$a=6q \Rightarrow$$

$$a=6q+1 \Rightarrow$$

$$a=6q+2 \Rightarrow$$

$$a=6q+3 \Rightarrow$$

$$a=6q+4 \Rightarrow$$

$$a=6q+5 \Rightarrow$$

۲. فرض کنید  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  گنگ نباشد، پس گویاست و داریم:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} = a - \sqrt{b} \Rightarrow \dots$$



### ♦ ایستگاه اول

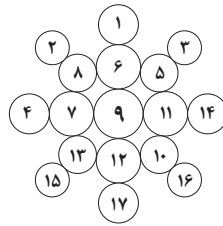
چهار ردیف داریم که همه در یک عدد (عدد دایره مرکز) مشترک اند. اگر مجموع اعداد موجود در چهار خانه دیگر هر یک از این ردیف‌ها را  $a$  (این مجموع‌ها با هم برابرند) و عدد خانه مرکزی را  $b$  بنامیم، به سادگی خواهیم داشت:

$$4a + b = 1 + 2 + 3 + \dots + 17 = \frac{17 \times 18}{2} = 153$$

$$\Rightarrow a = \frac{153 - b}{4} = 38 + \frac{1 - b}{4}$$

بنابراین باید  $1 - b$  مضرب ۴ باشد و در نتیجه:  $a = 38 - k$  و  $b = 4k + 1$

حال با توجه به اینکه  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ، پس عدد وسط می‌تواند ۱ یا ۵ یا ۹ یا ۱۳ یا ۱۷ باشد. برای شروع عدد وسط، یعنی ۹ را انتخاب می‌کنیم. پس:  $a = 36$  و  $b = 9$  حال باید عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ را به چهار قسمت طوری تقسیم کنیم که مجموع هر دسته مساوی ۳۶ شود. برای این کار راه‌های زیادی وجود دارند. یک راه این است که این اعداد را در چهار بلوک (۴ و ۳ و ۲ و ۱)، (۸ و ۷ و ۶ و ۵)، (۱۳ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰) و (۱۷ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۴) دسته‌بندی کنیم و با توجه به بزرگی اعداد، از هر بلوک یک عدد برداریم. مثلاً از اولی ۱، از دومی ۶ و از سومی ۱۲ و از چهارمی ۱۷ را انتخاب کنیم و به همین ترتیب، به طوری که مجموع آن‌ها ۳۶ شود. با این ایده یک جواب به صورت زیر پیدا می‌شود:



در همین حالت، مسئله جواب‌های دیگری هم ممکن است داشته باشد. علاوه بر آن ممکن است عدد وسط را تغییر داد و به جواب‌های دیگری هم دست یافت. امتحان کنید!

### ♦ ایستگاه دوم

**معمای ششم:** اگر در جام اول شربت وجود داشته باشد، جمله روی آن درست است. یعنی فرقی نمی‌کند که شما کدام جام را سر بکشید و محتوی دو جام یکی است. پس باید در جام دوم هم شربت باشد. ولی در این صورت باید جمله روی آن نادرست باشد و نتیجه می‌گیریم که در جام دیگر (یعنی جام اول) شربت وجود ندارد (زهر وجود دارد) و این ایجاد تناقض می‌کند. پس در جام اول شربت وجود ندارد و لذا در آن زهر وجود دارد و بنابراین جمله روی آن هم نادرست است. در نتیجه محتوای دو جام هم یکسان نیست و در جام دوم شربت وجود دارد (و جمله روی آن نادرست است). پس محکوم باید جام دوم را سر بکشد تا نجات پیدا کند.

**معمای هفتم:** نوشته روی جام اول معادل با آن است که «محتوای دو جام یکسان نیست» و نوشته روی جام دوم هم یعنی «جام اول حاوی زهر است». حال اگر در جام اول شربت باشد، نوشته آن درست است و در نتیجه در جام دوم زهر وجود دارد و جمله روی آن باید درست باشد و این ایجاد تناقض می‌کند. اما اگر فرض کنیم در جام اول زهر باشد، آن‌گاه جمله روی آن نادرست است و لذا محتوای دو جام یکسان است و در نتیجه در جام دوم هم زهر وجود دارد. پس نوشته روی آن درست است و این ایجاد تناقض نمی‌کند. نتیجه می‌گیریم که هر دو جام حاوی زهر است و محکوم نباید هیچ‌یک را بنوشد و باید تقاضای دو جام دیگر بکند!

**معمای هشتم:** جمله «این جام حاوی زهر است»

هرگز نمی‌تواند روی جام اول باشد. زیرا اگر در این جام شربت باشد، جمله روی آن درست است و در نتیجه ایجاد تناقض می‌شود. اگر هم در این جام زهر باشد، جمله روی آن نادرست است (یعنی این جام حاوی زهر نیست) که باز هم به تناقض می‌انجامد. پس این جمله روی جام دوم بوده و جمله «هر دو جام حاوی زهر هستند» هم روی جام اول بوده است. حالا اگر جام اول حاوی شربت باشد، جمله روی آن درست است که باز به تناقض منجر می‌شود. پس در جام اول زهر وجود دارد و جمله روی آن هم نادرست است. این یعنی «هر دو جام حاوی زهر نیستند». پس در جام دوم شربت وجود دارد و جمله روی آن (این جام حاوی زهر است) نادرست است. یعنی محکوم می‌تواند با اطمینان جام دوم را سر بکشد و نجات یابد.

**معمای نهم:** اگر جمله روی جام اول درست باشد، پس در این جام زهر وجود دارد و دو جمله دیگر نادرست‌اند. بنابراین جام دوم هم حاوی زهر است. ولی نادرستی جمله سوم نتیجه می‌دهد که در جام دوم زهر وجود ندارد، و یعنی شربت وجود دارد و این به تناقض منجر می‌شود. پس جمله روی جام اول نادرست است و در نتیجه، جام اول حاوی شربت است و دو جام دیگر حاوی زهر هستند. بنابراین نوشته روی جام دوم نادرست و نوشته روی جام سوم درست است. پس محکوم باید جام اول را بنوشد و نجات یابد.

**معمای دهم:** چون جملات روی جام‌های اول و دوم یک‌چیز را تأیید می‌کنند، پس هر دو درست و یا هر دو نادرست‌اند. اگر هر دو جمله نادرست باشند، لاجرم باید جمله سوم درست باشد و در این جام (جام سوم) شربت باشد. ولی نادرستی دو جمله فوق نشان می‌دهد که در جام دوم هم شربت است و این یعنی دو جام حاوی شربت هستند که با مفروضات مسئله تناقض دارد. پس هر دو جمله درست‌اند. یعنی در جام دوم زهر است. به علاوه لافل یک جمله نادرست داریم و آن جمله روی جام سوم است که نتیجه می‌دهد در جام اول شربت وجود دارد و چون تنها در یک جام شربت وجود دارد، پس در جام سوم هم زهر وجود دارد. لذا محکوم باید جام اول را بنوشد.



سازمان اسناد و کتابخانه ملی  
جمهوری اسلامی ایران

دولت و ملت، همدلی و هم‌زبانی

## لتره‌های شما

نحوه اشتراک:

پس از واريز مبلغ اشتراك به شماره حساب ۹۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شبیه سواراه آزمایش که ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱- مراجعه به وبگاه مجلات رلد به نشانی: [www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir) و تکمیل برگه اشتراك به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی

۲- ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراك با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۹۲ ۷۷۳۳۳۱۱۱ لطفاً کپی فیش را نیز خود نگه دارید.

♦ عنوان مجلات در خواستی:

♦ نام و نام خانوادگی:

♦ تاریخ تولد:

♦ تلفن:

♦ نشانی کامل پستی:

♦ استان:

♦ خیابان:

♦ شماره پستی:

♦ مبلغ پرداختی:

♦ اگر مشترک مجله رلد بودهایید، شماره اشتراك خود را بنویسید:

امضاء:

♦ نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۹۵۹۵۱۱۱

♦ تلفن: امور مشترکین: ۷۷۳۳۳۱۱۰ و ۷۷۳۳۳۱۱۱ و ۷۷۳۳۳۶۵۶

♦ هزینه اشتراك سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال  
♦ هزینه اشتراك سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



۱. واضح است که مجموع این پرانتزها، مساوی صفر است:  
 $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{1395} - b_{1395})$   
 $= (a_1 + a_2 + \dots + a_{1395}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{1395}) = 0$   
 (مجموع عددها ثابت است)، پس لااقل یکی از این پرانتزها عددی زوج است (زیرا اگر همه آن‌ها فرد باشند، مجموع آن‌ها فرد می‌شود، چرا؟) پس حاصل ضرب این پرانتزها همواره زوج است (گزینه ب).

۲. عبارت سمت راست، مضرب ۳ است، پس عبارت سمت چپ هم مضرب ۳ است؛ یعنی:  $x^3 + 2y^3 = 3k$ . اما می‌دانیم که برای هر یک از  $x$  و  $y$  سه حالت در تقسیم بر ۳ وجود دارد (باقی‌مانده ۱، ۰ یا ۲) پس ترکیب آن‌ها ۹ حالت متفاوت دارد (هر دو باقی‌مانده صفر،  $x$  باقی‌مانده صفر،  $y$  باقی‌مانده ۱ و... و هر دو باقی‌مانده ۲). با امتحانی ساده درمی‌یابیم که فقط در حالتی که هر دوی  $x$  و  $y$  در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده صفر داشته باشند،  $x^3 + 2y^3$  مضرب ۳ می‌شود. پس:  $x = 3x'$  و  $y = 3y'$  و با جای‌گذاری در معادله اولیه، نتیجه می‌شود:  
 $27x'^3 + 54y'^3 = 3Z^3 \Rightarrow 9x'^3 + 18y'^3 = Z^3$   
 و لذا  $Z^3$  مضرب ۳ و در نتیجه  $Z$  هم مضرب ۳ است ( $Z = 3Z'$ ) و از آنجا:  $x^3 + 2y^3 = 3Z^3 \Rightarrow x'^3 + 2y'^3 = 3Z'^3$   
 این معادله درست مانند معادله اولیه است و لذا  $x'$  و  $y'$  هم باید مضرب ۳ باشند و به همین ترتیب... پس نتیجه می‌شود که  $x$  و  $y$  باید مضرب همه توان‌های ۳ باشند، و این ممکن نیست مگر آنکه:  $x = y = z = 0$ . پس معادله فقط یک جواب دارد (گزینه الف).

۳. با تغییر شکل معادله به صورت  $1 = (\lambda x^2 - \lambda x^2 + 1) \cdot \lambda x(2x^2 - 1)$   
 و با توجه به اینکه:  $0 \leq x \leq 1$ ، می‌توان فرض کرد که  $x = \cos \alpha$  و  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . با توجه به اتحادهای مثلثاتی  
 $\lambda \cos^4 \alpha - \lambda \cos^2 \alpha + 1 = \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha$   
 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lambda \cos \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha &= 1 \\ \Rightarrow \lambda \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin \alpha \\ \Rightarrow 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin \alpha \\ \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin \alpha \\ \Rightarrow \sin \alpha &= \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \lambda \alpha = 2k\pi + \alpha \\ \lambda \alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} \text{ یا } \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

لذا معادله سه ریشه حقیقی دارد (گزینه د).

۴. AB را از طرف B و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم (AB=BE). بنابراین: AB=BE=BC. لذا در مثلث متساوی‌الساقین BEC داریم:  $\hat{E} = \hat{C}_1 = 50^\circ$  و  $\hat{B}_1 = 180^\circ - (65^\circ + 25^\circ) = 90^\circ$  و در نتیجه چهارضلعی AECD محاطی است. (چرا؟) اما بدیهی است که دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BE از نقاط A، C، E می‌گذرد، پس این دایره، همان دایره محیطی چهارضلعی AECD است (مرکز دایره B است). لذا BD هم شعاع دیگری از این دایره است و در نتیجه: BD=AB و مثلث ABD هم متساوی‌الساقین است و از آنجا:

$$\hat{A} = \hat{D}_1 = \frac{180^\circ - 65^\circ}{2} = 57.5^\circ$$

(گزینه ج)

۵. می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۱۱ مساوی باقی‌مانده تقسیم عددی است که از جمع و تفریق ارقام عدد (از سمت راست) بر ۱۱ به دست می‌آید. پس عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که مجموع ارقام ردیف زوج و مجموع ارقام ردیف فرد آن با هم مساوی باشند. یعنی برای عدد هشت‌رقمی abcdefgh باید داشته باشیم:  $g+e+c+a=h+f+d+b$  که  $h, \dots, c, b, a$  مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را می‌پذیرند. با این توضیح مسئله ما به این شکل تغییر می‌یابد که به چند طریق می‌توان ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را به دو دسته تقسیم کرد، به طوری که مجموع اعداد دو دسته با هم مساوی باشند. اما می‌دانیم که:  $9 \times 8 = 72$  پس باید مجموع اعداد هر دسته مساوی ۳۶ باشد. هر گروهی که شامل ۱ باشد، باید مجموع بقیه اعضای آن ۳۵ باشد و از آنجا به چهار گروه زیر می‌رسیم:

$A_1 = (1, 2, 7, 8), A_2 = (1, 3, 6, 8), A_3 = (1, 4, 5, 8), A_4 = (1, 4, 6, 7)$   
 و نظیر هر یک از این گروه‌ها، یک چهارتایی منحصر به فرد وجود دارد:  
 $B_1 = (2, 4, 5, 6), B_2 = (2, 4, 5, 7), B_3 = (2, 3, 6, 7), B_4 = (2, 3, 5, 8)$   
 و به سادگی می‌توان تحقیق کرد که چهارتایی دیگری به جز این‌ها وجود ندارد. حال باید هر یک از این چهارتایی‌ها را به ردیفی دلخواه در جای زوج و دیگری را در جای فرد نشانند. مثلاً جای‌گذاری  $A_1$  و  $B_1$  به ترتیب می‌تواند عدد ۱۴۷۵۲۶۸۳ را ایجاد کند که مضرب ۱۱ است. برای تعیین تعداد این ترکیب‌ها، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. برای هر جفت گروه  $A_i$  و  $B_j$ ، طبق اصل ضرب می‌توانیم  $8 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 1152$  عدد متفاوت بسازیم (چرا؟) و چون چهار گروه متمایز داریم، پس به تعداد  $4 \times 1152 = 4608$  عدد متفاوت داریم (گزینه د).

## با مجله‌های رشد آشنا شوید

### مجله‌های دانش آموزی

به صورت ماهانه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

#### رشد کوکبک

برای دانش آموزان پیش دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

#### رشد نوآموز

برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

#### رشد دانش آموز

برای دانش آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

### مجله‌های دانش آموزی

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

#### رشد نوجوان

برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه اول

#### رشد جوان

برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه اول

#### رشد جوان

برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

#### رشد جوان

برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

### مجله‌های بزرگسال عمومی

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

#### رشد آموزش ابتدایی

رشد آموزش ابتدایی

رشد مدرسه فردا

### مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی • رشد آموزش زبان و ادب فارسی

رشد آموزش هنر • رشد آموزش مشاوره • رشد آموزش تربیت بدنی

رشد آموزش علوم اجتماعی • رشد آموزش تاریخ • رشد آموزش جغرافیا

رشد آموزش زبان‌های خارجی • رشد آموزش ریاضی • رشد آموزش فیزیک

رشد آموزش شیمی • رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد مدیریت مدرسه

رشد آموزش و حرفه‌ای و کار دانش • رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶.

◆ تلفن و نمابر: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۷۸

◆ وبگاه: www.roshdmag.ir



وزارت آموزش و پرورش  
 سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی  
 انتشارات رشد



**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)