برهان ریاضی

وزارت‌آموزش‌وپرورش
سازمان‌پژوهش‌وبرنامه‌ریزی‌آموزشی
دفترانتشارات و فناوری‌آموزشی

رشد
۱۱۴

دورۀ بیست‌ونهم
شمارۀ ۱
پاییز ۱۳۹۸
۶۴صفحه
۳۹۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

فصلنامۀ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورۀ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵

◆ مطالعۀ تاریخ ریاضیات و نقش آن در آموزش ریاضیات ◆ GPS چگونه کار می‌کند ◆ ماز یک‌چهارم
◆ آموزش ریاضیات مدرسه‌ای و چالش‌های پیش‌روی آن ◆ ریاضیات و علوم و حرفه‌وفن

ابوالوفا بوزجانی

ابوالوفا محمدبن محمدبن یحیی‌بن اسماعیل بوزجانی که مورخان غالباً او را «ابوالوفا» و گاهی «البوزجانی» می‌نامند، از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی است. بنا بر نوشتهٔ *ابن ندیم* در کتاب «الفهرست»، وی روز چهارشنبه اول ماه رمضان سال ۳۲۸ قمری در شهر بوزجان که بخشی از شهر «تربت‌جام» کنونی است، متولد شد. علم عدد یا همان حساب نظری را نزد عموی خود، *ابو عمرو مغازلی* و دایی خود، *ابوعبدالله محمدبن عنبسه* آموخت. تاریخ تقریبی وفات او را بنابر شواهد موجود و به گفتهٔ *ابن‌قفطی*، سوم رجب سال ۳۸۸ قمری می‌توان گفت. *ابوریحان بیرونی* از او در برخی از نوشته‌های خود نام برده است. اهمیت آثار ابوالوفا به سبب تأثیر آن‌ها در علم مثلثات است. از طرف دیگر، کتاب «اعمال هندسی» ابوالوفا بدیع‌ترین اثر هندسه دورهٔ اسلامی است. فهرست آثار او را می‌توان در کتاب «ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی» اثر آقای *ابوالقاسم قربانی* مشاهده کرد. از آثار موجود ابوالوفا می‌توان به موارد زیر اشاره داشت:

- **کتاب «فی‌مایحتاج الیه الکتاب و العمال من علم الحساب»**

  این همان کتاب «المنازل فی‌الحساب» به زبان عربی است که قفطی از آن نام برده است.

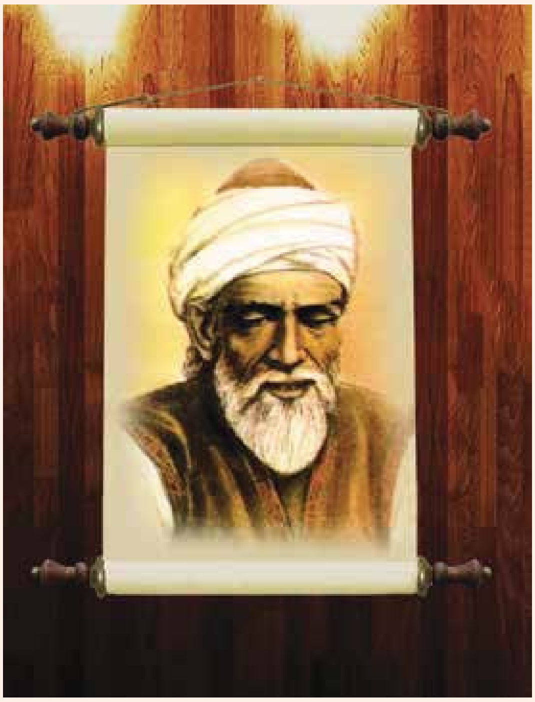
  کتاب هفت منزل و هر منزل هفت باب دارد. در ترجمهٔ فارسی، عنوان منازل آن به ترتیب عبارت‌اند از: نسبت؛ ضرب و تقسیم؛ کارهای مساحی؛ اعمال خراج؛ صرافی؛ مقاسمات؛ حساب ادارت دولتی؛ معاملات تجار. ابوالوفا این کتاب را به نام *عضدالدوله* تألیف کرده است.

- **کتاب «المجسطی»**

  این کتاب شاید به دلایلی همان کتاب «زیج واضح» باشد. البته ابوریحان بیرونی در نوشته‌های خود طوری از این دو اثر نام برده است که گویی دو کتاب مجزا بوده‌اند.

- **کتاب «فیما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه»**

  خوش‌بختانه این کتاب ترجمه و چاپ شده است و مطالعهٔ آن که به نام‌های «اعمال هندسی» و یا «النجاره» به خوانندگان توصیه می‌شود.



- **رساله فی اقامه البرهان علی الدائر من الفلک من قوس‌النهار و ارتفاع نصف النهار و ارتفاع الوقت**

  از این اثر **ابن‌ندیم** در«الفهرست» به نام کتاب «معرفه دائره من الفلک» نام برده است.

- **نسخهٔ خطی «زیج الشامل»**

  این اثر از روی کارهای ابوالوفا تألیف شده است.

- **رسالهٔ پاسخ به سؤال ابوعلی حبوبی**

  این اثر به یافتن مساحت مثلث بدون ارتفاع می‌پردازد.

- **رساله فی ترکیب العدد و الوفق فی مربعات**

  این رساله مربوط به مربعات وفقی است و نسخهٔ خطی آن موجود است.

- **المدخل الی صناعه الارثما طیقی**

- **رساله فی نسبته و التعریفات**

  به نظر می‌رسد این رساله بخشی از کتاب «المنازل السبع» باشد.

- **رساله فی جمع اضلاع المربعات و المکعبات**

  این رساله نیز پاسخی است به سؤال **ابوبشربن سهل منجم تکریتی** و نسخهٔ آن در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است.

رشد
برهان ریاضی
فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌ونهم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۴
■ پاییز ۱۳۹۸
■ شمارهٔ ۱
■ ۶۴ صفحه
■ ۳۹۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

مدیرمسئول: مسعود فیاضی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵
نشانی دفترمجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱ (داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله: ۸۸۴۹۰۳۱۶-۰۲۱
صندوق‌پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع:
شرکت افست
شمارگان:
۳۸۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پست الکتریکی مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن: ۸۸۳۰۵۷۷۲-۰۲۱

حرف اول

سردبیر

چرا ریاضی یاد می‌گیریم؟

در برنامهٔ درسی ریاضی و در تألیف کتاب‌های درسی، به منظور تدوین محتوای مطالب ریاضی که برای پایه‌های ۱ تا ۱۲ در نظر گرفته شده‌اند، به دو اصل اساسی و مهم توجه ویژه‌ای شده است:

الف. استفاده از مطالب ارائه شده در زندگی روزمره و جامعه (کاربردهای ریاضیات)؛

ب. ایجاد و پرورش تفکر ریاضی، در جهت تصمیم‌گیری صحیح و منطقی در مواجهه با مسائل روزمره.

بنابراین مباحث و موضوع‌هایی که شما در کتاب‌های درسی مطالعه می‌کنید، یا برای استفاده و کاربرد آن‌ها در زندگی، یا برای ایجاد و پرورش تفکر ریاضی و یا برای هر دو هدف آماده شده‌اند. برای مثال، وقتی مبحث معادلات درجهٔ ۲ و حل و بحث آن‌ها مطرح می‌شود، علاوه بر اینکه به دنبال ایجاد و تقویت یک تفکر برنامه‌ای یا الگوریتمی هستیم، کاربردهای حل معادلات درجهٔ ۲ را نیز مدنظر داریم. شما می‌دانید که در زندگی روزمره، در صنعت، در اقتصاد و ... مسائلی مطرح می‌شوند که حل آن‌ها در نهایت به حل یک معادلهٔ درجه ۲ می‌انجامد (اگر رابطه‌ای بین طول و عرض یک زمین مستطیل‌شکل داشته باشیم و این رابطه خطی باشد [$y=x+5$] و بخواهیم مساحت این زمین را برحسب طول آن بنویسیم، به یک عبارت درجهٔ ۲ می‌رسیم).

مبحثی همچون «منطق ریاضی»، علاوه بر اینکه در پرورش و تقویت تفکر ریاضی و منطقی شما تأثیرگذار است، کاربردهایی در خودِ ریاضیات و مباحثی مانند مجموعه‌ها، استدلال ریاضی و علوم رایانه دارد. از طرف دیگر، مبحثی چون «نظریهٔ اعداد»، علاوه بر اینکه در علوم رایانه و علم رمزنگاری کاربرد دارد، ولی تأثیر بسزایی در تقویت تفکر ریاضی و رشد خلاقیت شما خواهد داشت.

وجود بعضی از موضوع‌ها و مباحث ریاضی مطرح شده در کتاب‌های درسی نیز جنبهٔ پایه‌ای و پیش‌نیازی دارد و با بیان آن‌ها می‌توانیم موضوع‌های اصلی‌تر و مهم‌تری را که شامل یک یا دو هدف ذکر شده هستند، مطرح کنیم. مثلاً مبحث «چندجمله‌ای‌ها و اتحادهای جبری» بیشتر در حل معادلات به‌کار می‌رود، یا موضوع «شمارش» (ترکیبیات) به‌طور مستقیم در مسائل مربوط به احتمال کاربرد دارد. البته از شمارش و تکنیک‌های شمارشی در مسائل مربوط به زندگی روزمره نیز استفاده می‌کنیم.

به‌طور کلی تمام مباحث ریاضی مطرح شده در کتاب‌های درسی به نوعی یا پیش‌نیازی‌اند، یا کاربردی‌اند، یا برای رشد تفکر ریاضی بیان شده‌اند. شما با دقت و تمرکز روی هر موضوع مطرح شده در کتاب‌های درسی ریاضی خود به دنبال یک یا هر دو دلیل درونی (کاربردهای درون ریاضیات و پیش‌نیازی) و یا بیرونی (کاربردهای خارج از ریاضیات و ایجاد تفکر ریاضی در ذهن) باشید و از دبیران ریاضی خود نیز کمک بگیرید. برای هر دو هدف ذکر شده نمونه‌ها و مثال‌هایی را که می‌یابید، برای ما بفرستید تا به نام خودتان در مجله چاپ کنیم.

موفق و پیروز باشید

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

ریاضیات و علوم و حرفه‌وفن

کاربردهایی از ریاضیات در زندگی روزمره

اشاره

از زمانی که انسان توانست مفهوم عدد را درک کند تا به حال، ریاضیات در پیشرفت و توسعهٔ علم و فناوری بشر نقش بسزایی داشته است. از دیرباز، دانش ریاضیات امکانات مناسبی را به‌منظور ارائهٔ تحلیل‌های دقیق، توصیف روابط بین پدیده‌ها و نیز کاهش خطای پیش‌بینی در اختیار علوم گوناگون قرار داده است. همان‌طور که می‌دانیم، ریاضیات در تمامی جنبه‌های زندگی تأثیرگذار است و درک و حل مسائل گوناگون را آسان می‌سازد. پیدا کردن پیوندهای بین علم و زندگی، آن رویی از سکه است که متأسفانه در کشور ما به هیچ‌وجه به آن توجهی نمی‌شود. در صورتی که پیدا کردن و بیان این پیوندها می‌تواند تأثیرات بسیاری بر پیشرفت علوم و عمومی کردن آن‌ها داشته باشد.

در اینجا می‌خواهیم کاربردهایی از ریاضیات را در چندین مقالهٔ مستقل و مجزا ارائه دهیم. ابتدا کاربرد و نقش ریاضی در زندگی روزمره را بیان می‌کنیم و سپس ارتباط آن را با سایر علوم، از قبیل علوم طبیعی، علوم اجتماعی و .. مدنظر قرار خواهیم داد.

کاربرد ریاضی در زندگی

بسیار پیش می‌آید که پس از تدریس یک مبحث درسی از ما می‌پرسند این درس که امروز خواندیم به چه درد ما می‌خورد و کجا می‌توانیم از آن استفاده کنیم؟ ریاضیات یک درس اصلی است که داشتن درک درست از آن، در آیندهٔ تحصیلی دانش‌آموزان و طبعاً پیشرفت علمی کشور نقش مهمی دارد. از طرف دیگر، ریاضی با زندگی روزمره و سایر علوم ارتباط دارد. به این ترتیب در برنامهٔ درسی و آموزشی، پیوند بین ریاضیات و کاربردهایش در زندگی و سایر علوم، مثل علوم طبیعی، علوم اجتماعی و ... باید مدنظر قرار می‌گیرد.

در صورتی که چنین مواردی در آموزش دیده نشوند، این پرسش‌ها همیشه در ذهن دانش‌آموز باقی می‌مانند:

- «به چه دلیل باید ریاضی خواند؟»
- «ریاضی به چه درد می‌خورد؟»

این مقاله کوشیده است که ارتباط درس‌های کتاب‌های ریاضی با سایر علوم و همچنین کاربرد آن‌ها را در دنیای امروزی تا حدودی بررسی و به آن‌ها اشاره کند.

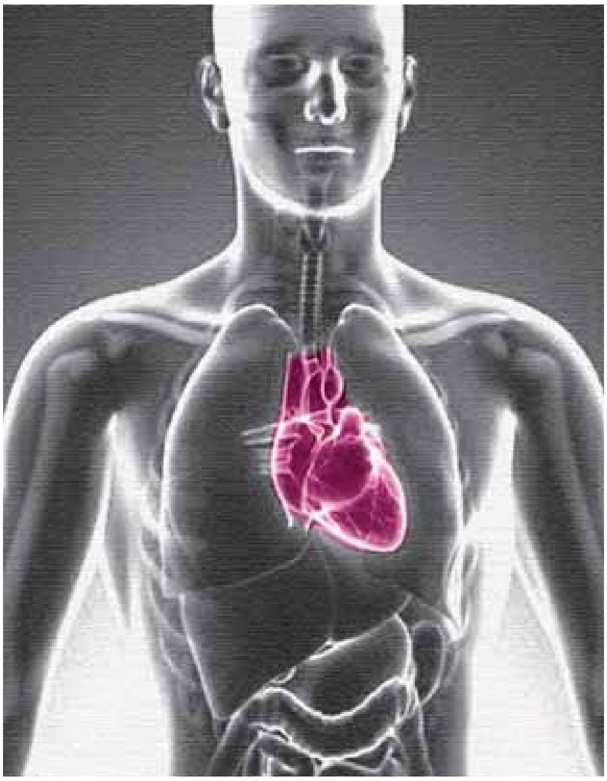
بین رشته‌های علمی که بشر در طول هزاران سال به وجود آورده، ریاضیات جایگاه خاص و مهمی دارد. این دانش با علوم فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد و فنون مختلف فرق دارد. با وجود این از آن به‌عنوان یکی از روش‌های اصلی در بررسی‌های مربوط به رایانه، فیزیک، زیست‌شناسی، صنعت و اقتصاد استفاده می‌کنند و در آینده نقش آن گسترش خواهد یافت. علی‌رغم روش‌های نوین، برای آموزش جوانان هنوز از همان روش استفاده می‌شود که **سقراط** و **افلاطون**، حقایق عالی اخلاقی را برای شیفتگان منطق و فلسفه، و برای علاقه‌مندان به سخنوری و علم کلام بیان می‌کردند. در حقیقت هرگز لزوم یادگیری درس‌های حساب، هندسه و جبر برای زندگی عملی به دانش‌آموزان خاطرنشان نمی‌شود و هرگز از تاریخ علم صحبتی به میان نمی‌آید؛ نظریه‌های سنگین علمی بیان می‌شوند، ولی این کار هیچ نتیجه‌ای جز این ندارد که دانش‌آموزان را از علم بری کند و عدهٔ آن‌ها را تقلیل دهد.

یکی از راه‌های جدی برای حل مسئلهٔ توجه به تاریخ علم،

گفت‌وگـو دربـارهٔ مـردان بـزرگ علـم و ارتبـاط ریاضـی بـا عمـل اسـت؛ ارتباطـی که در تمـام دوران زندگی بشـر هرگز قطع نشـده اسـت. بـرای اینکـه کاربـرد ریاضـی را در امـور روزمره بشـر متذکر شـویم، می‌توانیـم بـه اولیـن گام، کـه کاربـرد ارقـام اسـت، اشـاره کنیم .

بدیهی است که از زمان‌های قدیم هر قدمی که در راه پیشرفت تمدن برداشـته می‌شـد، بر لزوم اسـتفاده از عددها می‌افزود. اگر شـخصی گله‌ای از گوسفندان داشت، می‌خواست آن‌ها را بشمرد یا اگر می‌خواست معبد یا هرمی بسازد، باید می‌دانست که چه میزان سـنگ برای آن لازم دارد. اگر دارای زمین بود، می‌خواسـت آن را اندازه‌گیری کند یا اگر قایقش را به دریا می‌راند، می‌خواست فاصلهٔ خود را از سـاحل بداند و بالاخره در تجـارت و مبادلهٔ اجناس در بازارها، باید ارزش اجناس حساب می‌شد.

هنگامی که آدمی محاسـبه با ارقام را آموخت، توانست زمان، فاصله، مسـاحت، حجم و دیگر موارد متریک را اندازه‌گیری کند. با به کار بردن ارقام، انسـان توانست بر دانش و تسلط خود بر دنیای پیرامونش بیفزاید و با توسعهٔ گسترهٔ دانش ریاضی به فناوری مدرن و نظام‌های پیچیدهٔ محاسباتی فعلی که رایانه‌ها جزء آن‌ها محسوب می‌شـوند، احاطه یابد. از طرف دیگر، روابط بین عددها، تابع‌ها و نتیجه‌گیری‌های منطقی، در نوشـتن الگوریتم‌ها و برنامه‌نویسـی رایانه‌ای کاربرد دارد.



مفهـوم تابع یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی اسـت. در اصل تابـع نوعی خـاص از رابطه‌های بین دو مجموعه اسـت. دنباله‌ها هم حالت خاصی از تابع محسـوب می‌شـوند، تابعی که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای زیر اسـت، بسـیار کاربـرد دارد و به‌طور کلی، دنباله‌های عددی در ریاضی و رایانه کاربرد فراوان دارند.

{۰و۱و۲و....}

برای سـاخت یک برنامه به‌طور اساسـی چهـار مرحله را طی می‌کنیم:

- تعریف مسئله؛
- طراحی حل مسئله؛
- نوشتن برنامه؛
- اجرای برنامه

لازم بـه ذکر اسـت گردایه‌هایی را کـه در مرحلهٔ دوم حاصل می‌شـوند، به اصطلاح «الگوریتم» می‌نامیم. این الگوریتم‌ها به زبان شـبه‌کُد نوشته می‌شـوند و شبیه زبان برنامه‌نویسـی هستند؛ لذا تبدیل آن‌ها به زبان برنامه‌نویسی برای ما بسیار ساده است. معادله و دسـتگاه معادلات خطی و در مواقعی غیرخطی نیز غالباً در امور حسـاب کردن بهرهٔ ساده، پیشـگویی، انجام امور اقتصادی و پیدا کردن نقطه‌های سربه‌سر (ماکزیمم و مینی‌موم‌های مطلق و نسبی یک معادلهٔ ترکیبی) و بسیاری از موارد دیگر به‌کار می‌رود.

می‌دانیم که هدف از حل یک دسـتگاه معادلات خطی، یافتن محل تقاطع خط‌هاست که در برنامه‌ریزی‌های خطی روزمره، تعیین سود و زیان، و همچنین نقاط بهینه برای کیفیت کالا و یا بهره‌دهی محصولات تولیدی همیشه نقش اساسی را بر عهده داشته است.

در اینجا بـا توجه به مطالب اخیر، نظر لئونـاردو داوینچی در رابطه با کاربرد ریاضیات تداعی می‌شـود که «هیچ دانسـتهٔ بشر را نمی‌تـوان علم نامید، مگر اینکه از طریـق ریاضیات توضیح داده و ثابت شود.»

در خاتمـه به کاربرد ریاضی در بدن و نقش آن در فعالیت‌های جسمانی اشاره می‌کنیم:

- قلب که موتور حرکتی انسـان اسـت، در ناحیهٔ چپ سینه با زاویه‌ای حدود ۳۰° تا ۶۰° به طرف پایین نسـبت به خط وسط بدن قرار گرفته است.
- سر استخوان با زاویهٔ ۴۵° به لگن وصل می‌شود.
- دنده‌هـا با زوایهٔ حدود ۳۰° نسـبت به خـط عرضی بالا به مهره‌ها وصل می‌شوند.

● مری به معده تحت زاویهٔ 90° متصل شده است.

● نای با زاویهٔ حدود 30° نسبت به خط وسط بدن وارد شش‌ها می‌شود.

نتایج

در بررسی دقیق موارد یاد شده درمی‌یابیم که در خلقت انسان خداوند متعال اجزای گوناگون بدن را در موقعیت و زاویه‌ای خاص نسبت به یکدیگر قرار داده است. افزایش استحکام استخوان‌بندی، تعادل حرکتی، افزایش قدرت (مانند عملکرد اهرم‌ها)، حرکت سریع‌تر اعضا و اندام‌ها، ارتباط بهتر اعضا و تسهیل در امور مربوط به تغذیه و انعطاف‌پذیری، از جمله مواردی هستند که بدن انسان را در زمرهٔ پدیده‌های اعجاب‌انگیز قرار می‌دهد و این همه نشان از حکمت و تدبیر پروردگار در خلقت انسان دارد.

در خاتمه با خبری علمی در مورد کشف سلول باکتریایی که قابلیت انجام اعمال ریاضی را دارد و مانند یک ریاضی‌دان، همهٔ محاسبات را به طور دقیق ارزیابی می‌کند، به پایان می‌رسانیم. محققان دانشگاهی به تازگی موفق به ساخت نوعی سلول باکتریایی با قابلیت محاسبهٔ ریاضی شده‌اند. این سلول باکتریابی قابلیت انجام اعمال ریاضی، مانند محاسبهٔ الگوریتم و جذر گرفتن را نیز دارد. دانشمندان امیدوار هستند بتوانند محاسبات دقیق‌تر و بیشتری را به وسیلهٔ آن انجام دهند.

گفتنی است دانشمندان امیدوار هستند تا با کاربردی کردن این سلول و انجام محاسبات بیوتکنولوژیک بتوانند در درمان بیماری‌ها به‌خصوص سرطان و ایدز به نتایج بهتری دست یابند. (به این موارد در شماره‌های آینده و در قسمت کاربرد ریاضیات در پزشکی اشاره خواهد شد.)

در حال حاضر، هدف از ساخت این سلول‌ها کاشت و پیوند آن‌ها با دیگر سلول‌های زندهٔ بدن و آن‌گاه تزریق داروها با انجام محاسبات ریاضی و نیز کنترل سایر اعمال حیاتی بدن، مانند کنترل دما، فشار، رشد غیر عادی و یا کاهش غیرعادی حجم سلول‌هاست. این سلول محاسباتی می‌تواند وقوع حملات قلبی و مغزی و نیز سرطان را در افراد شناسایی کند و به وسیلهٔ تجهیزات بدون سیم به اطلاع پزشک معالج برساند. (برای اطلاع بیشتر دربارهٔ این خبر شگفت‌انگیز می‌توانید به سایت خبرگزاری علمی باشگاه خبرنگاران «www. yjc. ir» مراجعه کنید.

ریاضیات در چند دقیقه

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

جبر

«جبر مقدماتی» هنر انجام عملیات ریاضی بر کمیت‌هایی است که با نمادها نمایش داده شده‌اند. در حالی که «جبر مجرد»، نظریهٔ ساختارهای ریاضی، از قبیل گروه‌هاست. استفاده از نمادها به جای عددها، انجام کار را سرعت می‌بخشد. هنگامی که قرار است عددی مجهول یا عددی دلخواه را توسط نمادی نمایش دهیم، x سنتی‌ترین انتخاب است. با استفاده از این رهیافت می‌توانیم عملیاتی بر عبارت‌ها انجام دهیم و رابطه‌های بین کمیت‌ها را در راه‌های گوناگون و فشرده‌تر بنویسیم.

برای مثال، فرض می‌کنیم می‌خواهیم عددی را بیابیم که چون با ۳ جمع شود، عدد ۲۶ را بدهد. البته احتمالاً می‌توانیم این کار را به‌طور طبیعی انجام دهیم. اما به‌طور ریاضی، می‌توانیم از حرفی برای نمایش مجهول استفاده و معما را به‌صورت معادلهٔ $x+3=26$ بیان کنیم. در این مثال ساده، ملاحظه می‌کنیم که تفریق سه از دو طرف معادله پاسخ را به صورت $x=26-3$ به‌دست می‌دهد. جبر تماماً در مورد این نوع عملیات است، گرچه فرایند مربوطه معمولاً اندکی پیچیده‌تر است.

آموزشی

محمدتقی طاهری تنجانی

ترسیم‌های هندسی
با خط‌کش و پرگار

ترسیم‌های هندسی مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکل‌های هندسی هستند و بهتر از هر وسیلهٔ دیگری زمینه را برای فراگیری حل مسائل ریاضی فراهم می‌کنند.(جورج پولیا / خلاقیت ریاضی / ترجمهٔ پرویز شهریاری)

اشاره

ترسیم‌های هندسی از دوران باستان تاکنون همواره مورد توجه بوده‌اند. از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل گوناگون، به‌ویژه در حل مسائل روزمره، نظیر گچ‌بری‌ها، نقاشی‌های تزئینی، مهندسی، معماری، طراحی و ... استفاده می‌شود. در کتاب «هندسهٔ (۱)» پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و «ریاضی ۲» رشتهٔ تجربی به اختصار مطالبی در این زمینه مطرح شده است. در مقالهٔ حاضر هدف توسعه و بسط این مطالب به‌ویژه در بستر حل مسائل کلیدی است.

در ترسیم‌های هندسی به کمک خط‌کش و پرگار و استفاده از آن‌ها در موقعیت‌های متفاوت، هدف رسم یک شکل هندسی یا یافتن یک مکان هندسی است.

در مسئلهٔ ترسیمی یک مجهول وجود دارد که می‌تواند محل یک نقطه، یک مثلث، یک دایره و نظیر آن‌ها باشد. علاوه بر مجهول، چیزهایی هم باید معلوم باشند که به آن‌ها «داده» می‌گوییم.

سرانجام در هر مسئله باید شرطی وجود داشته باشد که مجهول را با داده‌ها به هم مربوط کند. شرط داده شده عنصر اصلی مسئله است. در مسئله‌های «رسم مثلث، با معلوم بودن سه ضلع آن، و «رسم مثلث با معلوم بودن سه ارتفاع آن»، داده‌ها یکی هستند (سه پاره خط راست)، مجهول هم یکسان است (مثلث)، ولی رابطهٔ بین مجهول و داده‌ها در دو مسئله متفاوت است.

لذا شرط مسئله یکسان نیست. در نتیجه، این دو مسئله با هم به‌طور کلی فرق دارند.

روش حل مسائل ترسیمی

روش کلی حل مسائل ترسیمی یکسان است که به‌صورت چند گام در نظر گرفته می‌شود:

■ **گام اول:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم.

■ **گام دوم:** با تحلیل مسئله آن را به یافتن یک نقطهٔ مجهول تبدیل می‌کنیم.

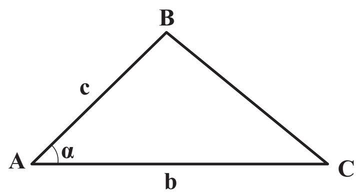
■ **گام سوم:** نقطهٔ مجهول را به دو جزء تقسیم می‌کنیم، به‌طوری که هر کدام از اجزا به یک مکان هندسی برای نقطهٔ مجهول تبدیل شود. مکان هندسی معمولاً دایره یا یک خط راست است.

■ **گام چهارم:** نقطهٔ مجهول فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

مثال ۱. مثلثی با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع رسم کنید ($AB = c$ و $AC = b$ و $\hat{A} = \alpha$).

حل:

■ **گام اول:** فرض کنیم مسئله حل شده باشد و مثلث ABC را با معلومات فوق داشته باشیم.



شکل ۱

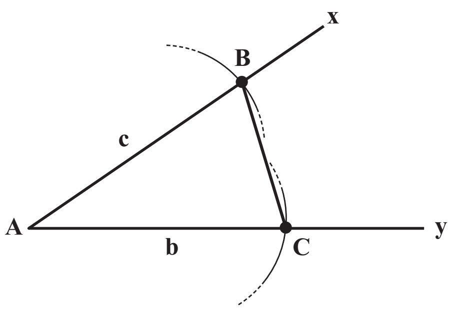
■ **گام‌های دوم و سوم:** با تحلیل مسئله مشخص می‌شود که اگر ما زاویهٔ A را که داده شده است، رسم کنیم، کافی است نقطهٔ B و C را روی اضلاع زاویه با فاصله‌های b و c مشخص کنیم.

از طرف دیگر، واضح است که نقطه‌های B و C هر دو روی دایره‌هایی به مرکز A و شعاع b و c هستند.

■ **گام چهارم:** نقطهٔ B نقطهٔ اشتراک یک ضلع زاویهٔ A و دایره به مرکز A و شعاع C، و نقطهٔ C نقطهٔ اشتراک دایره به مرکز A و شعاع b و ضلع دیگر زاویه است.

روش ترسیم: بنابر گام‌های در نظر گرفته‌شده در بالا، روش رسم چنین است:

- زاویهٔ XAY را به اندازهٔ α رسم می‌کنیم.
- دایره‌ای به مرکز A و شعاع C می‌کشیم تا AX را در B قطع کند.
- دایرهٔ دیگری به مرکز A و شعاع b رسم می‌کنیم تا ضلع AY را در C قطع کند.
- از B به C وصل می‌کنیم. مثلث موردنظر رسم شده‌است.



شکل ۲

تذکر:
برخی از حالت‌های اساسی ترسیمی در کتاب درسی آمده‌اند. لذا از تکرار آن‌ها خودداری می‌کنیم. ولی از آن‌ها در حل مسائل استفاده می‌کنیم؛ برای مثال ممکن است در حل یک مسئله، مسئله به رسم مثلثی با مشخص بودن سه ضلع آن تبدیل شود. در اینجا گفته می‌شود: مثلث را با داشتن سه ضلع رسم می‌کنیم و از بیان روش ترسیم و مطالب تکراری آن خودداری می‌کنیم.

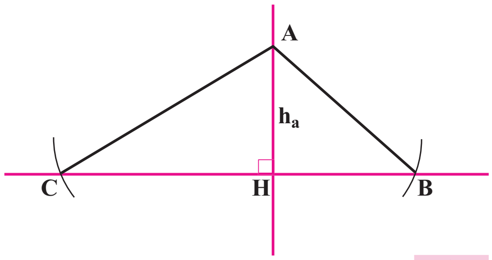
برخی از مطالب مورد نیاز ترسیمی که در کتاب درسی به آن‌ها پرداخته شده است، عبارت‌انداز:

- رسم عمودمنصف یک پاره‌خط؛
- رسم نیمساز یک زاویه؛
- رسم خطی عمود بر یک خط از نقطهٔ مفروض؛
- ترسیم خطی موازی با یک خط از نقطهٔ مفروض؛
- رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن.

مثال ۲. از مثلث ABC، اندازه‌های $AB=c$ و $AC=b$ و طول ارتفاع $AH=h_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید. مسئله چند جواب دارد؟

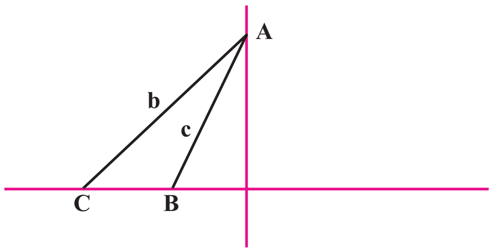
حل: از آنجا که اندازهٔ ارتفاع AH معلوم است، دو خط عمود بر هم d و 'd را که در نقطهٔ H متقاطع‌اند، رسم می‌کنیم. روی یکی از خطوط $AH=h_a$ را جدا می‌کنیم. برای مشخص شدن دو نقطهٔ B و C کافی است، کمان‌هایی به مرکز A و اندازه‌های b و c رسم کنیم تا «تقاطع آن‌ها با خط d دو رأس B و C را مشخص کند.

از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل گوناگون، به‌ویژه در حل مسائل روزمره، نظیر گچ‌بری‌ها، نقاشی‌های تزئینی، مهندسی، معماری، طراحی و ... استفاده می‌شود

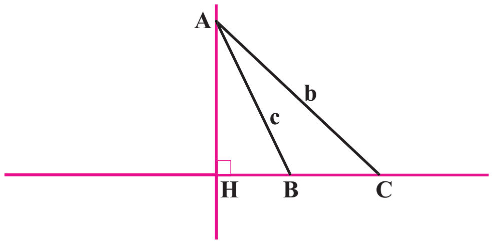


شکل ۳

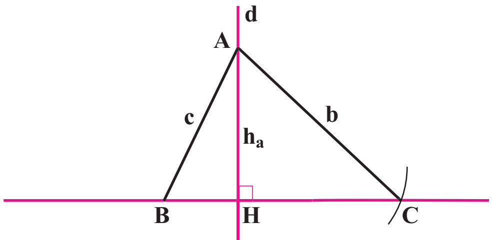
واضح است که کمان‌های رسم‌شده هر کدام دو نقطهٔ تقاطع با خط d دارند. لذا چهار مثلث رسم می‌شود.



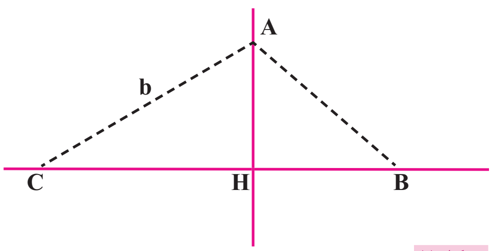
شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶



شکل ۷

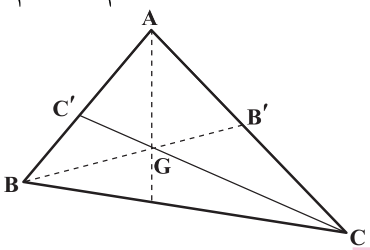
اما واضح است که مثلث‌های شکل‌های ۴ و ۵ و شکل‌های ۶ و ۷ دو به دو قابل انطباق هستند؛ لذا مسئله دو جواب متمایز دارد.

مثال ۳. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های یک ضلع $(BC = a)$ و میانه‌های نظیر دو ضلع دیگر $(CC' = m_c$ و $BB' = mb')$ رسم کنید.

حل: فرض کنیم مثلث رسم شده باشد. داریم:

$$CG = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}m_c$$

$$BG = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}m_b$$

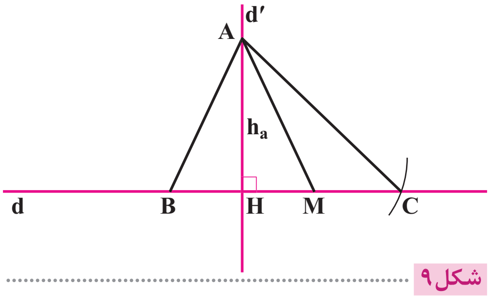


شکل ۸

مثلث CBG با معلوم بودن سه ضلع آن قابل رسم است. آن را رسم می‌کنیم. سپس اضلاع BG و CG را به اندازهٔ نصف خودشان امتداد می‌دهیم (از طرف G) تا نقاط B' و C' به‌دست آیند. از C به B' و از B' به C' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند.

مثال ۴. مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع BC و میانهٔ AM و ارتفاع AH رسم کنید.

حل: دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم (d و d'). روی d'، AH را به اندازهٔ h_a جدا می‌کنیم تا رأس A مشخص شود. به مرکز A و شعاع m_a کمانی رسم می‌کنیم تا d را در M قطع کند.

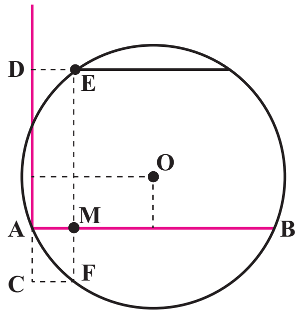


شکل ۹

دایره‌ای به مرکز A و شـعاع m_a رسم می‌کنیم تا d را در M قطع کند. دایره‌ای به مرکز M و شـعاع $\frac{a}{۲}$ رسم می‌کنیم تا خط d را در B و C قطع کند. از B و C به A وصل می‌کنیم.

مثال ۵. مجمـوع و حاصل‌ضرب طول‌های دو پاره‌خط داده شده‌اند. این دو پاره‌خط را رسم کنید.

حل: فرض کنیم a و b دو طول مفروض باشـند. دو خط عمود بر هم رسـم می‌کنیم. اگر نقطهٔ A محل برخـورد این دو خط باشـد، روی یکی از آن‌ها AB را مسـاوی a + b روی دیگـری AC و AD را به‌ترتیب مساوی ۱ و ab جدا می‌کنیم.
عمودمنصف‌های AB و CD در نقطهٔ O متقاطع‌اند.
دایره‌ای به مرکز O و شـعاع OA رسم می‌کنیم. از D خطی موازی AB رسـم می‌کنیم تـا دایره را در E قطع کند.



شکل ۱۰

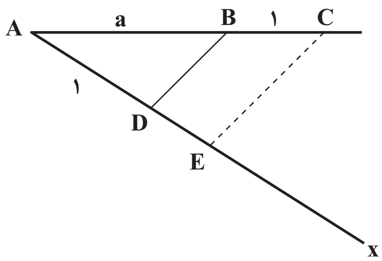
از E عمودی بر AB رسـم می‌کنیم تا آن را در M و دایـره را در F قطع کنـد. MA و MB پاره‌خط‌های موردنظر هستند، زیرا:

MA + MB = AB = a + b

MA . MB = MF . ME = ۱× ab = ab

مثال ۶. پاره‌خطی به‌طول معلوم a داده شده است. پاره‌خطی رسم کنید که اندازهٔ آن $\frac{۱}{a}$ باشد.

حل: پاره‌خـط AB را به‌طـول a در امتداد آن پاره‌خـط BC را به‌طول واحد جدا می‌کنیم. نیم خط AX را رسـم و روی آن AD را به‌طـول واحـد جدا می‌کنیم. از C موازی BD رسـم می‌کنیم. تا نقطهٔ E به‌دست آید. در این صورت داریم: $DE = \frac{۱}{a}$.

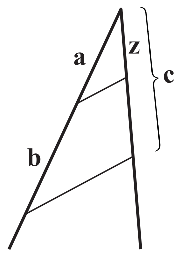


شکل ۱۱

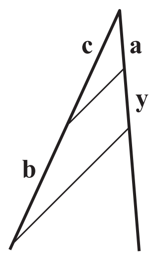
توجه دارید که در اینجا از خاصیت خطوط موازی و مورب استفاده کرده‌ایم.

مثـال ۷. a، b و c پـاره‌خط‌های معلوم هسـتند. پاره‌خط‌هایی به طول‌های $\frac{a^۲}{b}$، $\frac{ab}{c}$ و $\frac{ac}{a+b}$ رسم کنید.

حل: در شـکل‌های ۱۲ تا ۱۴ داریم: $x = \frac{a^۲}{b}$، $y = \frac{ab}{c}$ و $z = \frac{ac}{a+b}$. دسـت به کار شوید و شیوهٔ رسم را خودتان توضیح دهید.

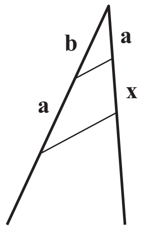


شکل ۱۲



شکل ۱۳

در ترسیم‌های هندسی با دو وسیله خط‌کش و پرگار و استفاده از آن‌ها در موقعیت‌های متفاوت، هدف رسم یک شکل هندسی یا یافتن یک مکان هندسی است

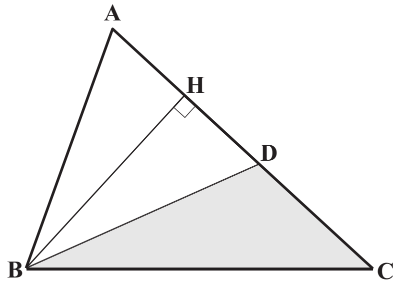


شکل ۱۴

مثال ۸. مثلث ABC را با معلوم بودن $\hat{B}-\hat{C}$ ، h_b و b - c رسم کنید.

حل: فرض کنیم مثلث ABC (شکل ۱۵) مثلث مطلوب باشد و داشته باشیم: $BH = h_b$, $CD = b - c$ و $C\hat{B}D = \frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$. در نتیجه مثلث BDC قابل رسم است.

نقطهٔ A محل برخورد امتداد CD و عمود منصف BD است.

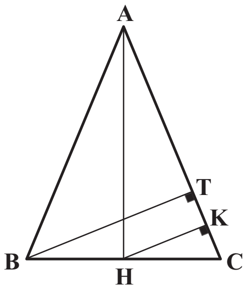


شکل ۱۵

مثال ۹. مثلث متساوی‌الساقینی با معلوم بودن ارتفاع وارد بر قاعده و ارتفاع وارد بر ساق آن رسم کنید.

حل: فرض کنیم: $AB = AC$، $AH = h_a$ و $BT = h_b$. در مثلث BCT (شکل ۱۶)، HK موازی BT و اندازهٔ آن نصف BT است.

یعنی: $HK = \frac{1}{2}h_a$. بنابراین مثلث AHK به حالت وتر ($AH = h_a$) و یک ضلع ($HK = \frac{1}{2}h_b$) قابل رسم است.



شکل ۱۶

پس از رسم این مثلث، بر نقطهٔ H عمودی رسم می‌کنیم تا امتداد AK را در C قطع کند. CH را به اندازهٔ خودش از طرف H ادامه می‌دهیم تا نقطهٔ B به دست آید.

ترسیم‌های هندسی از تنوع زیادی برخوردارند و در حالت‌های متفاوتی اتفاق می‌افتند.

با توجه به مختصر بودن این مقاله، توجه شما را به تمرین‌های زیر جلب می‌کنم.

تمرین

۱. مثلثی با مشخص بودن اندازهٔ سه میانهٔ آن رسم کنید.

۲. مثلثی رسم کنید که دو زاویه و ضلع بین آن‌ها معلوم باشد.

۳. تفاضل و حاصل‌ضرب طول دو پاره‌خط داده شده است. این دو پاره‌خط را رسم کنید.

۴. پاره‌خطی به طول معلوم a و امتداد معلوم d را بر دو خط متقاطع d و 'd متکی کنید.

۵. از مثلثی دو ضلع و میانهٔ نظیر ضلع سوم مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۶. مثلث ABC را با معلوم بودن a و $\hat{A}$ و m_b (میانه وارد بر ضلع AC) رسم کنید.

۷. از مثلث ABC، اندازه‌های h_a ، m_b و m_c معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

منابع

۱. اصلاح‌پذیر، بهمن و محمدحسین قهرمانی (۱۳۹۰)، *آموزش هندسه۲*. نشر مبتکران. تهران. چاپ نهم.

۲. ولیدشتی، جاوید (۱۳۸۵). هندسه. *نشر فاطمی*. تهران. چاپ اول.

آموزشی

عنایت‌اله راستی‌زاده
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر دبیرستان‌های شیراز

استفاده از جانشین‌های مثلثاتی در حل برخی مسائل غیرمثلثاتی

(قسمت اول)

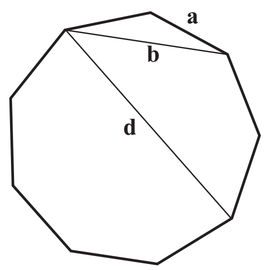
اشاره

هر چند هیچ راهکار واحدی برای پاسخ به طیف گستردهٔ مسائل ریاضی وجود ندارد، اما می‌توان در محدوده‌ای کوچک‌تر، به دنبال ابزاری گشت که بسان حلقه‌ای مفقوده، برای این زنجیره ایفای نقش کند.
خوش‌بختانه جانشین‌های مثلثاتی، در مواردی می‌توانند ابزار مناسبی برای دستیابی به این هدف به‌شمار آیند.
با وجود تعداد زیاد اتحادهای مثلثاتی، انتخاب یک جای‌گذاری مثلثاتی زیرکانه، غالباً به روش حل یا اثبات ساده و بدیع مسئله می‌انجامد.
این جانشین‌های مثلثاتی همچون یک مترجم، وظیفهٔ برگردان مناسب مسئله را از هندسه، نظریهٔ اعداد حساب یا جبر به شاهراه مثلثات بر عهده دارند!
در این مقاله، نمونه‌هایی از این دست مسائل که در محدودهٔ ریاضیات دبیرستانی قرار می‌گیرند، به‌اختصار بررسی شده‌اند.

۱. هندسهٔ مسطحه:

نمونهٔ ۱. اگر a، b و d به ترتیب اندازه ضلع، کوچک‌ترین قُطر و بزرگ‌ترین قطر یک ۹ ضلعی منتظم باشند. (شکل ۱)، نشان دهید:

$$d = a + b$$

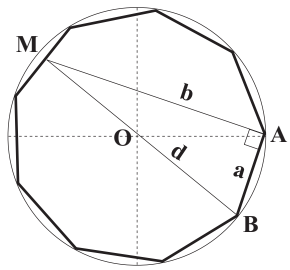


شکل ۱

اثبات: با وجود اینکه برای مسئله راه‌حل هندسی قابل تصور است، می‌توان با اندکی حوصله و ابتکار، راه‌حلی متفاوت با جایگذاری‌های مثلثاتی برای آن یافت.

۹ضلعی را در دایره‌ای به شعاع r محاط می‌کنیم (شکل ۲) وترهای a، b و d به ترتیب روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی ۴۰°، ۸۰° و ۱۶۰° هستند. (چرا؟)

(توجه کنید که: $\frac{۳۶۰}{۹} = ۴۰^\circ$) می‌توان دید که $a = ۲r\sin ۲۰^\circ$ و $b = ۲r\sin ۴۰^\circ$ و $d = ۲r\sin ۸۰^\circ$. در اینجا یکی از سه مورد اخیر را اثبات می‌کنیم:



شکل ۲

در شکل ۲، BM قطر دایرهٔ محاطی است و داریم: $MAB = ۹۰^\circ$ زاویهٔ BMA زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان ۴۰° است و بنابراین:
$\angle BMA = ۲۰^\circ$

حال داریم:

$$\Delta AMB : \sin B\hat{M}A = \sin ۲۰^\circ = \frac{AB}{MB} = \frac{a}{۲r}$$

پس:

$$a = 2r\sin 20^\circ$$

از اتحاد مثلثاتی

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\frac{40+20}{2}\cos\frac{40-20}{2}$$
$$\Rightarrow \sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ$$

اما: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$

پس:

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \sin 80^\circ$$

در نتیجه:

$$2r\sin 40^\circ + 2r\sin 20^\circ = 2r\sin 80^\circ$$

و این نتیجه می‌دهد: $a+b=d$ و حکم ثابت شده است!

۲. مسائل حداقل و حداکثر

نمونهٔ ۲. عددهای حقیقی x و y چنان‌اند که داریم:

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$$

حداقل مقدار x^2+y^2 چقدر است؟

حل: اگر بگیریم: $x+5 = 14\cos\theta$ و $y-12 = 14\sin\theta$، برای $\theta \in [0, 2\pi]$

خواهیم داشت:

$$x^2+y^2 = (14\cos\theta - 5)^2 + (14\sin\theta + 12)^2$$
$$= 365 + 28(12\sin\theta - 5\cos\theta)$$

از آنجا که:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$$

پس:

$$-13 \le 12\sin\theta - 5\cos\theta \le \sqrt{144+25} = 13$$

در نتیجه:

$$x^2+y^2 \ge 365 + 28(-13)$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 \ge 1$$

۳. دنباله‌ها و جانشین‌های مثلثاتی

نمونهٔ ۳. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$x_0 = t \quad , x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad (n \ge 0)$$

چند $t \in [-1, 1]$ وجود دارد که: $x_{11}=1$ (بیست‌ویکمین دورهٔ المپیاد ریاضی ایران- مرحلهٔ اول)

۱. چنین t ای وجود ندارد.
۲. تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.
۳. تعداد چنین t هایی بین صد و هزار است.
۴. بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.
۵. نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.

حل: با توجه به شرایط مسئله و محدودهٔ t، در اینجا نیز از جانشین مثلثاتی $x_0 = t = \cos\alpha$ جایی که $0 \le \alpha \le \pi$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$x_1 = 2x_0^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$
$$x_2 = 2x_1^2 - 1 = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \cos 4\alpha$$
$$x_3 = 2x_2^2 - 1 = 2\cos^2 4\alpha - 1 = \cos 8\alpha$$

و به همین ترتیب اگر ادامه دهیم:

$$x_{11} = 2x_{10}^2 - 1 = \cos(2^{11}\alpha)$$
$$x_{11} = 1 \Rightarrow \cos(2^{11}\alpha) = 1 \Rightarrow 2^{11}\alpha = 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{2^{10}}$$
$$0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow 0 \le \frac{k\pi}{2^{10}} \le \pi \Rightarrow 0 \le k \le 2^{10}, k \in z$$

برای k به تعداد ۱۰۲۵ جواب وجود دارد. یعنی برای $t = \cos\alpha$ به تعداد ۱۰۲۵ جواب وجود دارد و بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴. مُعادلات تابعی و جانشین‌های مثلثاتی

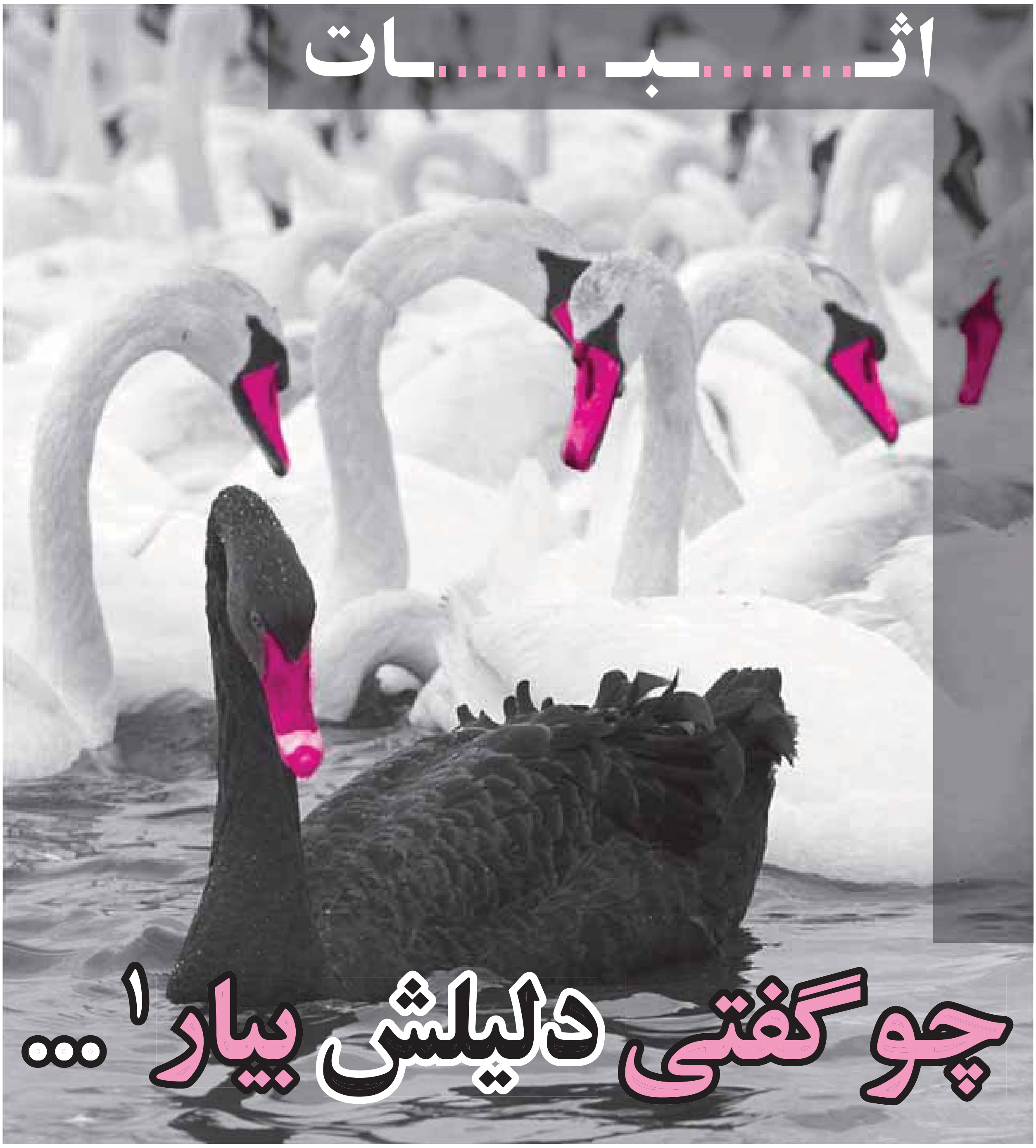
نمونهٔ ۴. از تساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید. (هشتمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران)

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(\frac{-1}{x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$$
$$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

حل: یکی از روش‌های پاسخ به این مسئله استفاده از جانشین‌های مناسبی مثلثاتی است.

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

اثــ......ــبـ......ــات



چو گفتی دلیلش بیار[1] ...

سکندر که با شرقیان حرب داشت
در خیمه گویند بر غرب داشت
چو بهمن به زابلستان خواست شد
چپ افکند آواز و از راست شد

(سعدی/ بوستان)

«اثبات»[2] روشی است که قضیهٔ تثبیت‌شده را از حدس، ایدهٔ درخشان یا گمان اولیه جدا می‌کند. به‌عبارت دیگر، اثبات طریقی است که با استدلالی منطقاً درست، قضیه یا حدسمان را از قضیه‌های پیشین استنتاج می‌کند. کیفیات لازم در یک اثبات عبارت‌اند از: دقت، وضوح، و به همین اندازه، ظرافت.

باید توجه داشته باشیم: این طور نیست که هر اثباتی تا ابد ثابت بماند؛ چرا که ممکن است در سایهٔ گسترش‌های مفاهیمی که مرتبط با آن‌اند، نیازمند جرح و تعدیل باشد.

در علوم طبیعی، راستی یک قضیه یا گزاره یا حکم، با استفاده از موارد تجربی، شامل مشاهده، اندازه‌گیری و (استاندارد طلایی) تجربه، حاصل می‌شود؛ در حالی که در ریاضیات، راستی یک گزاره توسط یک اثبات به دست می‌آید؛ یعنی استدلال منطقاً درستی که راستی آن را تثبیت می‌کند.

آموختن چگونگی اثبات گزاره‌ها قسمت اعظم ریاضیات دانشگاهی را در برمی‌گیرد و عملی است که نه هفته‌ها، بلکه سال‌ها به طول می‌انجامد.

در واقع، هر اثبات را برای دو منظور اصلی بنا می‌کنیم: «تثبیت راستی» و «درمیان گذاشتن آن با دیگران». در این صورت، تشکیل دادن یک اثبات یا مطالعهٔ آن بدین معنی است که چگونه خود را قانع می‌کنیم که گزاره‌ای راست است.

انواع اصلی اثبات‌های به‌کار رفته در ریاضیات عبارت‌اند از: روش مثال نقض[۳]، روش مستقیم[۴]، روش غیرمستقیم[۵] و روش استقرای ریاضی[۶]. در اینجا تنها به دو مورد *مثال نقض* و *اثبات غیرمستقیم* می‌پردازیم.

در مثال نقض، کارمان را با منکر بودن آغاز می‌کنیم. این روش به اثبات ناصحیح بودن یک گزاره می‌پردازد. در این مورد، برای مثال، گزاره‌ای معین در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این ادعا را می‌شنویم که «نتیجهٔ ضرب هر عدد در خودش، عددی زوج است». آیا آن را می‌پذیرید؟ پیش از پاسخ دادن، باید چند مثال را آزمایش کنیم. اگر عددی داشته باشیم، مثلاً ۶، و آن را در خودش ضرب کنیم ۳۶=۶×۶ را به‌دست می‌آوریم. درمی‌یابیم که ۳۶ عددی زوج است.

اما با یک گل بهار نمی‌شود. ادعای مذکور در مورد هر عددی بود، و بی‌نهایت عدد داریم. برای اینکه مظنهٔ بیشتری در مورد مسئله به‌دست آوریم، باید مثال‌های بیشتری را بررسی کنیم. با بررسی مثلاً ۹، در می‌یابیم که ۸۱=۹×۹. اما ۸۱ عددی فرد است. این یعنی گزارهٔ مذکور که: «تمام عددها چون در خودشان ضرب شوند، عددی زوج به دست می‌دهند»، دروغ است.

مثالی چنین به نقض ادعای اولیه می‌انجامد و به مثال نقض موسوم است. به‌عنوان نمونه، یک مثال نقض در مورد این ادعا که «تمام قوها سفیدند»، دیدن یک قوی سیاه است. بخشی از لذّات ریاضیات، جست‌وجوی مثالی نقض برای کنار زدن قضایای ادعایی است.

ممکن است در صورت شکست خوردن در یافتن مثالی نقض، این احساس را داشته باشیم که گزارهٔ مورد بحث درست است. در این صورت، ریاضی‌دان مجبور به انجام بازی دیگری است؛ یعنی باید اثباتی بسازد، و در این مورد، سرراست‌ترین نوع اثبات، روش اثبات مستقیم است.

اما اثبات غیرمستقیم، یا با استفاده از تناقض یا «برهان خلف»[۷]، به این ترتیب است که گزارهٔ مورد نظر، مثلاً q را دروغ فرض می‌کند و راستی گزارهٔ r ی و نقیض آن، r¬ را استخراج می‌کند. تناقض مزبور نشان می‌دهد که فرض اولیه نمی‌تواند برقرار باشد، و در نتیجه راستی q را محقق می‌کند.

مثال پیچیده‌تر در این مورد اثبات «اگر p در این صورت q» است. اثبات با استفاده از تناقض فرض می‌کند که p راست و q دروغ است و راستی گزارهٔ r ی و نقیض آن، r¬ را استخراج می‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که مفروضات اولیه نمی‌توانند هر دو برقرار باشند، و بنابراین در این مورد که «اگر p راست باشد آن‌گاه q نیز راست است»، اثباتی درست به دست داده‌ایم.

انواع اصلی اثبات‌های به‌کار رفته در ریاضیات عبارت‌اند از:
- ✓ روش مثال نقض
- ✓ روش مستقیم،
- ✓ روش غیرمستقیم
- ✓ روش استقرای ریاضی

پی‌نوشت‌ها

۱. مصراعی از بیت عامیانهٔ زیر:
نگفته ندارد کسی با تو کار ولیکن چو گفتی دلیلش بیار

2. proof
3. method of the counterexample
4. direct method
5. indirect method
6. method of mathematical induction
7. proof by contradiction

آموزشی

حمیدرضا امیری

مطالعهٔ تاریخ ریاضیات و نقش آن در آموزش ریاضی

مقدمه

انگیزهٔ اینکه در کتاب درسی ریاضی دبیرستان یک کشور، شرح‌حال بزرگان ریاضی، همچون، خوارزمی، خیام، کاشانی و بیرونی بیان می‌شود، چیست؟ «بیانیهٔ ریودوژانیرو» در ششم ماه مه سال ۱۹۹۲ و اعلام سال ۲۰۰۰ به‌عنوان سال جهانی ریاضیات توسط پروفسور ژاک لویی لیون، رئیس «اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی» (IMV) در «مؤسسهٔ ریاضیات محض و کاربردی برزیل» شاید پاسخی به این سؤال باشد. در این بیانیه، علاوه بر اعلام سال جهانی ریاضیات، به نظر می‌رسد علم ریاضی و دانشمندان گذشته و حال این شاخه از دانش بشری را، متعلق به تمام جهان می‌داند.

ریاضیات به‌عنوان یک رشتهٔ مادر، و به تبع آن تاریخ این دانش بشری اهمیت فراوان دارد. هدایت نسل هوشمند دنیا، بر پایهٔ گذشته بنا نهاده شده است ــ زیرا تاریخ آینده براساس گذشته رقم می‌خورد و تجربهٔ گذشته را به همراه دارد ــ این هدایت به‌عهدهٔ شما دانش‌پژوهان و رسولان علم ریاضی و وابستهٔ دست توانا و نگرش عمیق و فهیمانهٔ شماست.

نوجوانان امروز، دانشمندان آیندهٔ ریاضی خواهند بود که با توانمندی خود، ابزار قابل‌فهم بودن و به کار بستن بیشتر این علم را برای اغلب مردم جهان خواهند آورد. تاریخ ریاضی از آن نظر نیز اهمیت دارد که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم، گذشتهٔ علم ریاضی را دریابیم و درک کنیم که آغاز آن از کجا و چگونه بود، و توسعه، اوج و انحطاط آن در کدام سرزمین، در چه زمانی و به‌وسیلهٔ چه‌کسانی بوده است. می‌توانیم با دانشمندان گذشته، هم‌زمان و هم‌سخن شویم و با کوتاهی عمر، از آزموده‌ها و یافته‌های نسل‌های متعدد بهره‌مند شویم. به‌طورکلی در یک جمله می‌توان گفت: ریاضیات عمدتاً مطالعهٔ اندیشه‌هاست و فهم صحیح اندیشه‌ها بدون تحلیل سرچشمه‌های آن‌ها مقدور نیست. به‌طور کلی، انگیزه‌های یاددهی و یادگیری تاریخ ریاضیات را می‌توان در راستای شش محور اصلی جست‌وجو کرد:

۱. خودباوری دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان
۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)
۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل
۴. اعتمادبه‌نفس و در نظر داشتن اینکه ریاضی‌دانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند
۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی از نوجوانی به بعد (سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد.)
۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی آن‌ها

۱. خودباوری دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان

۱-۱. جمشید غیاث‌الدین کاشانی در کتاب «مفتاح‌الحساب»، قاعده‌ای کلی برای استخراج ریشه‌های nام ارائه کرده که همان روش «روفینی ـ هورنر» است که در سدهٔ ۱۹ میلادی در اروپا ارائه شد.

۱-۲. شرف‌الدین تاج‌الزمان حسین بن‌حسن سمرقندی، ریاضیدان مسلمان ایرانی قرن سیزدهم میلادی که تاکنون در تاریخ ریاضیات کشور ما ناشناخته مانده است، در اثری با عنوان «رسالهٔ فی طریق‌المسایل العددیه»، روش‌های بکر و بدیعی به کار برده است که در ارتباط با سایر متون تاریخی و هم عصر او در اروپا، می‌توان به میزان نبوغ او پی برد.

۱-۳. چهار ضلعی **خیام** که زوایای مجاور قاعدهٔ آن ۹۰ درجه‌اند و اضلاع قائم آن برابرند، به «چهار ضلعی **ساکی‌بری**» معروف شده است. خیام این «چهارضلعی را به خاطر اثبات اصل توازی **اقلیدس**، حداقل پانصد سال قبل از ساکی به کار برده است. به‌دنبال وی، ۱۵۰ سال بعد **خواجه نصیر طوسی** نیز همان چهار ضلعی را برای اثبات اصل توازی به کار می‌برد.

پنج قرن بعد که کارهای ریاضی‌دانان دربارهٔ اصل توازی توسط جان والیس و دیگران به دست دانشمندان اروپایی می‌رسد، ساکی‌بری، **لامبرت** و **لباچفسکی** کارهای دانشمندان مسلمان را دنبال و همین چهار ضلعی را بررسی می‌کنند و زمینه‌های تولد هندسه‌های نااقلیدسی فراهم می‌شود.

در واقع، دانشمندان مسلمان از قبیل: **ابن‌هیثم، ثابت‌بن‌قره، خیام وخواجه نصیر**، پیش قراولان کشف هندسه‌های نااقلیدسی محسوب می‌شوند.

۱-۴. آغاز کار با معادلات دیفرانسیل که مقادیر «بی‌نهایت کوچک» در آن نقش مهمی دارند، به زمانی برمی‌گردد که به روش‌های نقشه‌برداری برای ساختن آبراه‌ها و آب‌بندها و توزیع زمین نیاز بود. در گذشته تصور می‌رفت، در این حرکت بابلیان، یونانیان، مصریان و چینیان پیشگام بودند و اروپاییان این بحث را تا قرن نوزدهم پرورانده‌اند. ولی خاورشناسان اروپایی با توجه به پژوهش‌هایی گسترده دربارهٔ آثار دانشمندان مسلمان، به‌ویژه کار روی آثار **ابن‌هیثم**، با ابراز شگفتی، توانایی‌های ریاضی‌دانان اسلامی را در این زمینه والا شمرده‌اند.

۱-۵. مدل نجومی معروف خواجه نصیرالدین یا «جفت طوسی» نقش بسزایی در تاریخ نجوم داشته و منشأ مطالعات بسیاری در تجزیه و تحلیل این مدل بوده است. جفت طوسی اصطلاحی است که تاریخ‌نگاران جدید وضع کرده‌اند. این مدل از دو دایرهٔ مماس بر یکدیگر تشکیل یافته است، به گونه‌ای که دایرهٔ کوچک‌تر با شعاعی نصف دایرهٔ بزرگ‌تر و سرعتی دو برابر آن، مماس و درون آن حرکت می‌کند.

در نتیجه، هر نقطه از دایرهٔ کوچک‌تر، در امتداد قطری از دایرهٔ بزرگ‌تر نوسان می‌کند و حرکت دورانی به حرکت خطی تبدیل می‌شود. در دهه‌های گذشته، پژوهش‌های قابل‌توجهی پیرامون «جفت‌طوسی» در غرب صورت گرفته و در برخی از آن‌ها مسئله به شکل بسیار تخصصی و از دیدی کاملاً ریاضی بررسی شده است.

۱-۶. ثابت‌بن قره در قرن سوم دستوری برای یافتن دسته‌ای از عددهای «متحاب» بیان کرد (دو عدد طبیعی در صورتی متحاب نامیده می‌شوند که مجموع شمارنده‌های مثبت کوچک‌تر از هر عدد، مساوی با دیگری باشد).

کمال‌الدین فارسی در رساله‌ای که هدف آن اثبات درستی دستور ثابت‌بن‌قره بود، حالت کلی قضیه را یعنی حالتی که b مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد، در نظر گرفت و در این حالت نیز دستور محاسبه‌ای اجزای حاصل‌ضرب ab را بیان و اثبات کرد.

کمال‌الدین فارسی نخستین کسی بود که در قرن هفتم و اوایل قرن هشتم، دستور محاسبهٔ اجزای حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرد:

$$(a,b)=1 \Rightarrow S(ab)=S(a)\times b+S(b)\times a+S(a)\times S(b)$$

($S(a)$ مجموع اجزای عدد a است.)

دکارت در حدود بیش از ۳۰۰ سال بعد از درگذشت کمال‌الدین، همین دستور را در اروپا به دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی حالتی کلی را که a و b نسبت به هم اول نباشند نیز در نظر گرفته و آن را ثابت کرده بود. همچنین کمال‌الدین فارسی پس از اثبات درستی دستور ثابت بن‌قره، آن را به کار بست و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست‌آورد که متحاب بودن این دو عدد در اروپا، نخستین‌بار توسط **فرما**، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۶۳۶، یعنی ۳۱۸ سال پس از مرگ کمال‌الدین فارسی، به‌دست آمد.

۷-۱. غیاث‌الدین کاشانی معادلهٔ درجهٔ سوم را به‌طور کامل حل کرد و سال‌ها بعد، **کاردان** روش حل آن را ارائه کرد که هم‌اکنون نیز حل معادلهٔ درجه سوم (حتی درکتاب‌های ریاضی نظام قدیم) به نام فرمول کاردان ثبت شده است.

۸-۱. ریاضی‌دانانی چون **خوارزمی، ابوریحان، ابوالوفای بوزجانی، کوشیار گیلی و ابومحمد خجندی**، باعث رشد و تکامل علم مثلثات شدند. خوارزمی جدول سینوس‌ها را تدوین کرد و از کلمهٔ «جیب» به معنی گریبان که معادل آن «سینوس» می‌شود، بهره گرفت.

۹-۱. ابونصرفارابی با نوشتن کتاب «موسیقی الکبیر»، در سه جمله تمامی موسیقی زمان خودش را با نت که البته به‌صورت عدد بود، نوشت. از جمله ابتکارات علمی فارابی که قرن‌ها بعد از وی اروپاییان به آن دست یافتند، تقسیم‌بندی علوم بود و او اولین کسی است که ریاضیات و موسیقی را در یک دسته قرار داد.

۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)

۱-۲. افرادی چون خیام با پیمودن صدها کیلومتر مسافت، آن هم با پای پیاده و یا با استفاده از اسب، برای دست یافتن به یک کتاب و استفاده از آن و با تحمل زحمات فراوان، توانستند به علوم زمان خود دست پیدا کنند و در زمان خود و حتی بعد از آن تأثیرگذار باشند (به‌دنبال لقمهٔ آماده و حتی جویده نبودند).

۲-۲. ارج نهادن به علم، عالم و متعلم، از دیگر دلایل به ظهور رسیدن افرادی چون **غیاث‌الدین کاشانی**، ابوریحان، خیام و خوارزمی بوده است. بها دادن به علم و عالم و فراهم کردن بستر مناسب برای رشد فرهیختگان، از عوامل مؤثر در پیدایش افرادی چون خیام بوده و هست؛ چیزی که دین اسلام روی آن تأکید فراوان داشته و دارد.

۳-۲. شاید هم‌اکنون یکی از دلایل بسیار آشکار وجود نداشتن دانشمندان ریاضی در ایران که در حد جهانی تأثیرگذار باشند، وجود همین ایرانیان در خارج از ایران و به‌عنوان تبعهٔ کشورهایی چون آمریکا، کانادا و آلمان است؛ همان‌که امروزه به فرار مغزها یا مهاجرت مغزها مشهور است. چه بسا ایرانیانی که باعث پیدایش شاخه‌ای جدید در ریاضیات شده و حتی آن را رشد داده باشند، ولی به‌عنوان یک شهروند آمریکایی از آن‌ها یاد می‌شود.

۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل

۱-۳. مشکل می‌توان گفت که فقط مطالعه و مشاهدهٔ ظاهری تاریخ ریاضی، مورد علاقهٔ ریاضی‌دانان باشد. آن‌ها معمولاً به این افتخار می‌کنند که علم ریاضی بیش از هر علم دیگری دقیق و کامل است و همواره ریاضیات قدیم و دستاوردهای گذشته ریاضی برای ریاضیات جدید و حال سودمند بوده و هست. شیمی‌دانان ممکن است گاه با لبخندی معنی‌دار به نتایج و دستاوردهای به اصطلاح کودکانهٔ کیمیاگران و شیمی‌دانان قدیم بنگرند، ولی ریاضیدانان همیشه با تعجب و حیرت به عواید و یافته‌های یونانیان در هندسه و ایرانیان و هندی‌ها در محاسبات می‌نگرند.

۲-۳. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در مسئلهٔ محیطیهٔ خود، گرچه ذکری از مفهوم حد نمی‌کند، اما این مفهوم را با تسلط تمام و در شکل دقیق آن، برای محاسبهٔ عدد π به کار می‌گیرد و به نوعی بحث حد و مفهوم آن را از گذشته به حال پیوند می‌دهد. او در جملهٔ بسیار زیبایی، با زبانی ریاضی، «به نام خدا» را به

این شکل بیان می‌کند: به نام او که از اندازهٔ نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.» در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبهٔ دقیق عدد π ناتوان است.

۴. اعتمادبه‌نفس و توجه به این مطلب که ریاضی‌دانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند

۱-۴. پی‌یردو فرما می‌پنداشت، عددهایی به‌صورت $2^n + 1$ که n به‌صورت قوایی از ۲ باشد یا ($2^{2^n} + 1$)، همگی اول هستند. ولی **اویلر** در سال ۱۷۳۲ ثابت کرد که $2^{32} + 1$ اول نیست.

$$2^{32}+1=4294967297=641\times 6700417$$

که هر دو عدد سمت راست اول هستند.

۲-۴. مرسن در سال ۱۶۴۴ چنین حکم کرد که عدد $M_P = 2^P - 1$ به ازای عددهای اول ۲۵۷، ۱۲۷، ۶۷، ۳۱، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۲، ۵، ۳و۷ اول است و به ازای سایر عددهای اول، چون P که از ۲۵۷ کوچک‌ترند، اول نیست. این حکم اشکال دارد، زیرا M_{67} مرکب و M_{61}، M_{89} و M_{107} اول هستند.

۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی، از نوجوانی به بعد (سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد)

۱-۵. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در سن ۴۲ سالگی از دنیا رفت. بنابراین یافته‌های با ارزش وی در دوران جوانی او به دست آمده‌اند و در واقع وی یک ریاضی‌دان جوان بوده است.

۲-۵. ابراهیم‌بن سنان که نوهٔ ثابت‌بن‌قره بود، در قرن سوم هجری می‌زیست. مورخان غربی دربارهٔ وی چنین می‌نویسند: «گرچه روزگار ابراهیم‌بن سنان بر اثر یک غدهٔ کبدی، در سال ۳۲۵ هجری قمری در ۳۷ سالگی به سر آمد، ولی آثار باقی‌مانده از او، شهرتش را به‌عنوان شخصیتی مهم در تاریخ ریاضیات ثبت می‌کند». روش او در یافتن مساحت یک قطعهٔ سهموی، ساده‌ترین روشی است که از دورهٔ پیش از رنسانس به ما رسیده است.

۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی‌های آن‌ها

باید به این نکته اشاره کنیم که اغلب مورخان دانش، حتی با انصاف‌ترین آن‌ها، نتوانسته‌اند مقام ریاضیات ایرانی را، در مجموعهٔ تاریخ ریاضیات، به‌درستی و روشنی ارزیابی کنند. اغلب آن‌ها، ریاضی‌دانان ایرانی را تا حد مترجمان سادهٔ نوشته‌های یونانی پایین آورده‌اند که این ترجمه‌ها هم، به موقع خود به صاحبان اصلی، یعنی اروپاییان برگشت داده شده است. به این ترتیب، مورخان ریاضی، آغاز ریاضیات را در اروپا (یونان) می‌دانند. بعد از سقوط مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، دوران رکودی به‌وجود می‌آید که تا سدهٔ پانزدهم میلادی ادامه دارد و سپس با دسترسی اروپاییان به نوشته‌های یونانی (از راه ترجمهٔ عربی آن‌ها)، دوباره دنبال کار را می‌گیرند و آن را به امروز می‌رسانند.

در نتیجهٔ این نوع برخورد، همهٔ ملت‌های جهان، به جز ساکنان اروپا، در تمامی طول تاریخ در خواب غفلت بوده‌اند و هر چه امروز دارند، نتیجهٔ تلاش فکری و عملی مردم اروپاست. این در حالی است که ریاضی‌دانان ایرانی، از سدهٔ هشتم تا سدهٔ پانزدهم میلادی، پرچم‌دار ریاضیات جهان بوده‌اند؛ به نحوی که این دوره، یک دورهٔ کامل از تاریخ ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

***منابع**

۱. مقاله‌های ارائه شده در کنفرانس تاریخ ریاضیات/ دانشگاه هرمزگان
۲. زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی
۳. تاریخ ریاضیات/ ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل/ مرکز نشر دانشگاهی

روح‌الله حسنی کله‌لوئی
کارشناسی ارشد ریاضی محض و دبیر ریاضی ـ ناحیه ۲ رشت
لیلا قدیمی لاله‌دشتی
کارشناس ارشد ریاضی محض و دبیر ریاضی ـ منطقه سنگر استان گیلان

فرمولی برای مساحت چهارضلعی‌های محدب

اشاره

محاسبهٔ مساحت شکل‌های هندسی از دوران باستان برای انسان اهمیت داشته است. کشاورزان از راه‌های متفاوتی برای محاسبهٔ مساحت زمین‌های زراعی خویش استفاده کرده‌اند. چهارضلعی‌ها بعد از مثلث بیشترین شکل هندسی بوده‌اند که محاسبهٔ مساحت آن‌ها همواره مورد توجه بوده است.

دربارهٔ مثلث‌ها می‌دانیم که با استفاده از فرمول هرون می‌توان مساحت آن را برحسب طول سه ضلع حساب کرد. در اینجا ممکن است این سؤال مطرح شود که: آیا با معلوم بودن طول چهارضلع چهارضلعی، مساحت آن قابل محاسبه است؟ در این مقاله تلاش می‌کنیم جواب درخور برای این سؤال پیدا کنیم.

برهماگوپتا، چراغ اول

ریاضی‌دان و اخترشناس هندی، **برهماگوپتا**[۱] (۵۹۸ ـ ۶۶۸ م) به عنوان نخستین کسی می‌شناسند که عدد صفر را وارد ریاضی کرد. او برای مشکل ما، در حالتی که چهارضلعی محاطی باشد، راهکاری دارد:

● **فرمول برهماگوپتا:** فرض کنید a، b، c و d طول ضلع‌های یک چهارضلعی محدب باشند و: $p=\frac{a+b+c+d}{۲}$. در این صورت مساحت چهارضلعی برابر است با: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

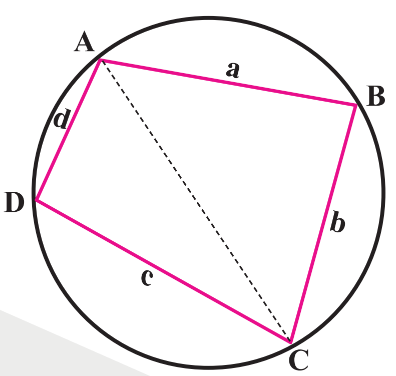
اثبات: فرض کنیم در شکل ۱، ABCD یک چهارضلعی محاطی باشد و:

$$AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$$

مساحت چهارضلعی برابر است با مجموع مساحت

در مثلث ABC و ADC:

$$S=S_{\overset{\Delta}{ABC}}+S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{B}+\frac{۱}{۲}cd\sin\hat{D}$$



شکل ۱

اما چون: $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$، بنابراین:

پس:

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{B}+\frac{۱}{۲}cd\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}(ab+cd)\sin\hat{B}$$

$$\Rightarrow S^{۲}=\frac{۱}{۴}(ab+cd)^{۲}\sin^{۲}\hat{B}=\frac{۱}{۴}(ab+cd)^{۲}(۱-\cos^{۲}\hat{B})$$

$$\Rightarrow ۴S^{۲}=(ab+cd)^{۲}-(ab+cd)^{۲}\cos^{۲}\hat{B}\quad(۱)$$

اما بنا به قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ABC و ADC داریم:

$$AC^{۲}=c^{۲}+d^{۲}-۲cd\cos\hat{D}$$ و

$$AC^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\hat{B}$$

پس:

$$a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\hat{B}=c^{۲}+d^{۲}-۲cd\cos\hat{D}.$$

اما دوبـــاره از $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم که: $\cos\hat{D}=-\cos\hat{B}$. پس:

$$a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\hat{B}=c^{۲}+d^{۲}+۲cd\cos\hat{B}$$

$$\Rightarrow ۲(cd+ab)\cos\hat{B}=a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲}$$

$$\Rightarrow (ab+cd)^{۲}\cos^{۲}\hat{B}=\frac{(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲})^{۲}}{۴}\quad(۲)$$

اکنون با توجه به رابطهٔ (۲)، از رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$۴S^{۲}=(ab+cd)^{۲}-\frac{(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲})^{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۶S^{۲}=۴(ab+cd)^{۲}-(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲})^{۲}$$

$$=[۲(ab+cd)-a^{۲}-b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}]$$

$$[۲(ab+cd)+a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲}]$$

$$=[(c+d)^{۲}-(a-b)^{۲}][(a+b)^{۲}-(c-d)^{۲}]$$

$$=(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)$$

$$(a+b+c-d)$$

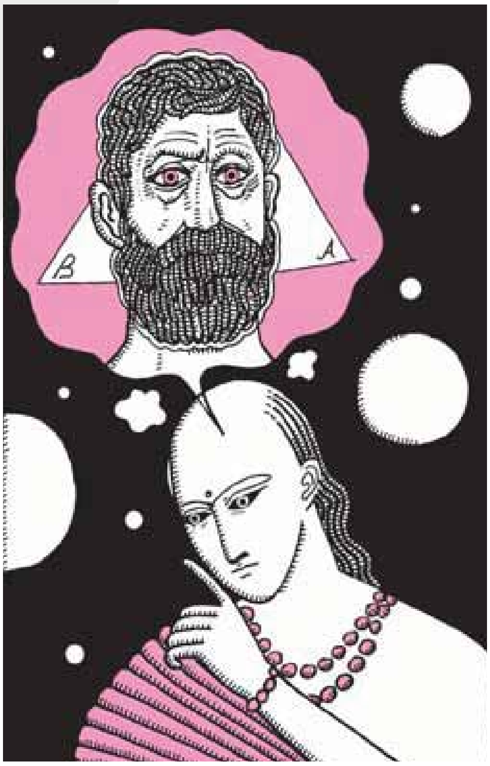
اکنون اگر قرار دهیم: $۲p=a+b+c+d$ خواهیم داشت:

$$۱۶S^{۲}=(۲p-۲a)(۲p-۲b)(۲p-۲c)(۲p-۲d)$$

$$\Rightarrow ۱۶S^{۲}=۱۶(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

جالب است که اگر طول یکی از ضلع‌های چهارضلعی را برابر صفر فـــرض کنیم، چهارضلعی به مثلث، و فرمول برهماگوپتا به فرمول هرون تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که فرمول برهماگوپتا تعمیمی از فرمول هرون است.



مثال. با اســـتفاده از فرمول برهماگوپتا نشـــان دهید مساحت هر مســـتطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن.

اثبات: فرض کنید a و b طول و عرض مستطیل باشند. بنابراین:

$$۲p=۲(a+b)\Rightarrow p=a+b\Rightarrow\begin{cases}p-a=b\\p-b=a\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{(p-a)(p-a)(p-b)(p-b)}$$

$$=\sqrt{b^{۲}a^{۲}}=ab$$

مثال. نشان دهید بین تمام چهارضلعی‌های محاطی با محیط ثابت، مربع دارای بیشترین مساحت است.

اثبات: اگر x، y، z و t چهار عدد حقیقی نامنفی باشـــند، بنا به نامساوی میانگین حســـابی ـ میانگین هندسی داریم:

$$\sqrt[۴]{xyzt}\le\frac{x+y+z+t}{۴}$$

که تساوی به ازای $x=y=z=t$ اتفاق می‌افتد.

اکنون بنابر فرمول برهما گوپتا داریم:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$\Rightarrow \sqrt{S}=\sqrt[۴]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$\le \frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{۴}$$
$$=\frac{۴p-۲p}{۴}=\frac{p}{۲}$$
$$\Rightarrow S\le \frac{p^۲}{۴}$$

بنابراین حداکثر مقدار مساحت (S) برابر با $\frac{p^۲}{۴}$ است و تساوی وقتی ممکن است که داشته باشیم: $p-a=p-b=p-c=p-d$. یا به عبارت دیگر: $a=b=c=d$. پس بیشترین مقدار مساحت زمانی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی مربع باشد.

برتشنایدر، چراغ دوم

۱۲ قرن طول کشید تا ریاضی‌دان آلمانی، **کارل آنتون برتشنایدر**[۲] (۱۸۰۸-۱۸۷۸م) به سال ۱۸۴۲ توانست تعمیمی برای فرمول برهما گوپتا کشف کند. در فرمول جدید که توان محاسبهٔ مساحت هر چهارضلعی محدب را داشت، ما به طول اضلاع چهارضلعی و مجموع دو زاویهٔ مقابل آن نیاز داریم.

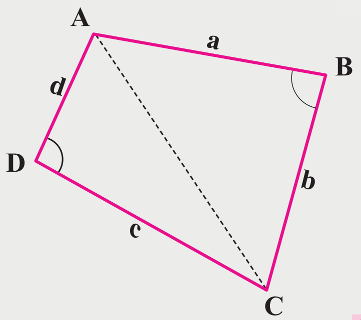
● **فرمول برِتشنایدر:** فرض کنید ABCD یک چهارضلعی محدب باشد که طول ضلع‌های آن a، b، c و d است. همچنین: $p=\frac{a+b+c+d}{۲}$. در این صورت مساحت چهارضلعی از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^۲(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{۲})}$$

اثبات: فرض کنیم ABCD یک چهارضلعی محدب باشد و: $AB=a, BC=b, CD=C, DA=d$

در شکل ۲، مساحت چهارضلعی مساوی مجموع مساحت دو مثلث ABC و ADC است. پس:

$$S=S_{\overset{\Delta}{ABC}}+S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{B}+\frac{۱}{۲}cd\sin\hat{D}$$
$$\Rightarrow ۲S=ab\sin\hat{B}+cd\sin\hat{D}$$
$$\Rightarrow ۴S^۲=a^۲b^۲\sin^۲\hat{B}+c^۲d^۲\sin^۲\hat{D}+$$
$$۲abcd\sin\hat{B}\sin\hat{D}\,(۱)$$



شکل ۲

اما بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، در دو مثلث ABC و ADC داریم:

$$AC^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{B} \text{ و } AC^۲=c^۲+d^۲-۲cd\cos\hat{D}$$
$$\Rightarrow a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{B}=c^۲+d^۲-۲cd\cos\hat{D}$$
$$\Rightarrow a^۲+b^۲-c^۲-d^۲=۲(ab\cos\hat{B}-cd\cos\hat{D})$$
$$\Rightarrow \frac{(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲}{۴}$$
$$=a^۲b^۲\cos^۲\hat{B}+c^۲d^۲\cos^۲\hat{D}-۲abcd\cos\hat{B}\cos\hat{D}\ (۲)$$

از جمع کردن دو تساوی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$۴S^۲+\frac{(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲}{۴}$$
$$=a^۲b^۲(\sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B})+c^۲d^۲(\sin^۲\hat{D}+\cos^۲\hat{D})$$
$$-۲abcd(\cos\hat{B}\cos\hat{D}-\sin\hat{B}\sin\hat{D})$$
$$\Rightarrow ۴S^۲+\frac{(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲}{۴}$$
$$=a^۲b^۲+c^۲d^۲-۲abcd\cos(\hat{B}+\hat{D})$$
$$\Rightarrow ۱۶S^۲+(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲$$
$$=۴(a^۲b^۲+c^۲d^۲)-۸abcd\cos(\hat{B}+\hat{D})$$

می‌دانیم: $\cos(\hat{B}+\hat{D})=۲\cos^۲(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{۲})-۱$ پس:

$$۱۶S^۲+(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲$$
$$=۴(a^۲b^۲+c^۲d^۲)+۸abcd-۱۶abcd\cos^۲(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{۲})$$
$$۱۶S^۲=۴(ab+cd)^۲-(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲$$
$$-۱۶abcd\cos^۲(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{۲})$$

همانند اثبات فرمول برهماگوپتا داریم:

$$۱۶S^۲=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)$$
$$(b+c+d-a)-۱۶abcd\cos^۲(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{۲})$$

با قرار دادن $2p=a+b+c+d$ خواهیم داشت:

$$16S^2=(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)-16abcd\cos^2(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2})$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2})}$$

نتیجه: بین تمـــام چهارضلعی‌های محدب با طول اضلاع a، b، c و d چهارضلعی محاطی دارای بیشـــترین مساحت است.

اثبات: چون $\cos^2(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2})\geq 0$، پس:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2})}$$
$$\leq\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

تســاوی زمانی اتفاق می‌افتد که: $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$؛ یعنی چهارضلعی محاطی باشد.

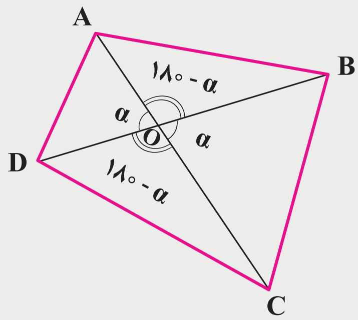
مساحت چهارضلعی برحســـب طول دو قطر و زاویهٔ بین

در چهارضلعـــی محـــدب ABCD، اگـــر AC=p و BD=q باشد و α زاویهٔ بین این دو قطر، آن‌گاه:

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\alpha$$

اثبات:

$$S=S_{\overset{\Delta}{AOB}}+S_{\overset{\Delta}{AOD}}+S_{\overset{\Delta}{DOC}}+S_{\overset{\Delta}{BOC}}$$
$$=\frac{1}{2}AO\times BO\sin(180-\alpha)+\frac{1}{2}AO\times OD\sin\alpha$$
$$+\frac{1}{2}DO\times OC\sin(180-\alpha)+\frac{1}{2}OC\times OB\sin\alpha$$



شکل ۳

چون: $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$، پس:

$$S=\frac{1}{2}(AO\times OB+AO\times OD+OD\times OC+OC\times OB)\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{2}(AO+OC)(DO+OB)\sin\alpha=\frac{1}{2}pq\sin\alpha$$

مثال. (المپیاد ریاضی اتریش ـ مجارســتان ۱۹۸۵) اگر ABCD یک چهارضلعی محدب با مســاحت یک باشد، نشان دهید:

$$AB+BC+CD+DA+AC+BC\geq 4+\sqrt{8}$$

اثبات: قرار می‌دهیم:

$BC=b$ ، $AB=a$ ، $DA=d$ ، $CD=c$ ، $AC=x$ و $BD=y$. بنابر فرمول برِتشنایدر داریم:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2})}$$
$$\leq\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

و بنـــا بر نامســـاوی میانگین حســـابی ـ میانگین هندسی داریم:

$$\sqrt{S}\leq\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$\leq\frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4}=\frac{p}{2}$$
$$\Rightarrow S\leq\frac{p^2}{4}$$

حال اگر قرار دهیم S=۱ خواهیم داشت:

$$1\leq\frac{p^2}{4}\Rightarrow p^2\geq 4\Rightarrow p\geq 2\Rightarrow 2p\geq 4\Rightarrow a+b+c+d\geq 4\ (1)$$

اکنون فرض کنیم زاویـــهٔ بین دو قطر چهارضلعی برابر α باشد، پس:

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\alpha\leq\frac{1}{2}xy$$

چون S=۱ پس:

$$1\leq\frac{1}{2}xy\Rightarrow xy\geq 2\Rightarrow\sqrt{xy}\geq 2$$

امـــا بنابر نامســـاوی میانگین حســـابی ـ میانگین هندسی داریم:

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\geq\sqrt{2}\Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{2}\ (2)$$

حال از (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$a+b+c+d+x+y\geq 4+2\sqrt{2}$$

توجه داشـــته باشـــیم که نامســـاوی (۱) به ازای $a=b=c=d$ و نامســـاوی (۲) بـــه ازای $x=y$ به تســـاوی تبدیل می‌شوند. این بدان معناست که تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی ABCD مربع باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. Brhamagupta
2. Carl Anton Bretschnieder

منابع

1. artofproblemsolring.com
2. en.m.wikipedia.org

میرشهرام صدر

افراز مجموعه و تعداد توابع پوشا

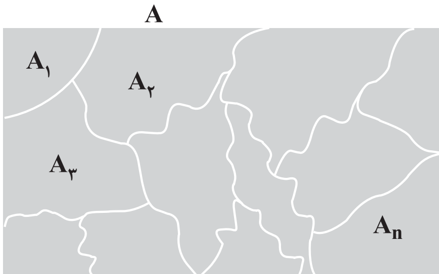
اشاره

در این مقاله با دانش‌آموزان علاقه‌مند به توســـعه مطالب درســـی، به بحث دربارهٔ تعداد افرازهای یک مجموعه از کتاب «آمار و احتمال» می‌پردازیم و بلافاصله با کاربرد آن در محاسبهٔ تعداد توابع پوشا آشنا خواهید شد. مانند شماره‌های گذشته، بحث به‌صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و دانش‌آموزان انجام می‌گیرد تا سؤال‌ها و ابهام‌ها برطرف شوند و دانش موضوعی دانش‌آموزان تقویت شود.

معلم:

در کتـــاب «آمار و احتمال ســـال یازدهم»، تعریـــف افراز مجموعه به ایـــن صورت آمده است:

فـــرض کنیـــم $A\neq\varnothing$ یـــک مجموعه و $A_1, A_2, ..., A_n$ زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعهٔ A به n زیرمجموعهٔ $A_1, A_2, ..., A_n$ افراز شده است، هرگاه این سه شرط برقرار باشد:



I. برای هر $1\leq i\leq n$ داشته باشیم: $A_i \neq \varnothing$

II. برای هر $1\leq i,j\leq n$ که $i\neq j$ داشته باشیم: $A_i \cap A_j = \varnothing$

III. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$

مثال: مجموعهٔ $A=\{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود.

الف. $\{a\}, \{b\}, \{c,d\}$ ب. $\{a\}, \{b,c\}, \{d,e\}$

پ. $\{a,b\}, \{c,d\}, \{b,e\}$

دانش‌آموز اول:

زیرمجموعه‌های قســـمت (ب) در سه شرط افـــراز صـــدق می‌کنند و یک افـــراز برای A محسوب می‌شـــوند. اما در (الف) شرط (III) برقرار نیست:

$\{a\}\cup\{b\}\cup\{c,d\}\neq A$

و در (پ) شرط (II) برقرار نیست.

$\{a,b\}\cap\{b,e\}\neq\varnothing$

بنابراین (الف) و (پ) افراز برای A محسوب نمی‌شوند.

دانش آموز دوم:

می‌دانیم تنها یک افراز برای مجموعهٔ A به‌صورت زیر وجود دارد:

$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}$

همچنین تعداد افراز به صورت: $\{a,b,c,d,e\}$ برای مجموعهٔ A برابر با ۱ است.

سؤالی که ذهن مرا درگیر کرده این است که:

چند افراز به‌صورت $\{a\},\{b\},\{c,d,e\}$ موجود است؟ یعنی مجموعهٔ پنج عضوی A را به چند صورت می‌توان به دو زیرمجموعهٔ یک عضوی و یک زیرمجموعهٔ سه عضوی افراز کرد؟

دانش آموز سوم:

کافی است تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی A را بنویسیم. سپس به دلخواه دو تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. در این حالت زیرمجموعهٔ سه‌عضوی به سادگی قابل نوشتن است.

می‌دانیم که زیرمجموعه‌های یک عضوی A عبارت‌اند از:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$

برای مثال، اگر دو زیرمجموعهٔ $\{b\}, \{c\}$ را انتخاب کنیم، در این صورت زیرمجموعهٔ سه عضوی به صورت $\{a,d,e\}$ است. تمام این نوع افرازها به صورت زیر است:

$\{a\},\{c\}, \{b,d,e\}$	$\{a\},\{b\}, \{c,d,e\}$
$\{a\},\{e\}, \{b,c,d\}$	$\{a\},\{d\}, \{b,c,e\}$
$\{b\},\{d\}, \{a,c,e\}$	$\{b\},\{c\}, \{a,d,e\}$
$\{c\},\{d\}, \{a,b,e\}$	$\{b\},\{e\}, \{a,c,d\}$
$\{d\},\{c\}, \{a,b,c\}$	$\{c\},\{e\}, \{a,b,d\}$

در نتیجه ۱۰ افراز خواهیم داشت.

معلم:

آیا می‌توانید تعداد این نوع افرازها را بدون نوشتن زیرمجموعه‌های بالا تعیین کنید؟

دانش آموز سوم:

منظور شما به کمک اصل ضرب و روش‌های شمارش است؟

معلم:

بله، درست است!

دانش آموز سوم:

در هر یک از این نوع افرازها، ابتدا دو زیرمجموعهٔ یک‌عضوی را از بین پنج زیرمجموعهٔ یک‌عضوی انتخاب می‌کنیم. یعنی همواره ما یک انتخاب $\binom{۵}{۲}=۱۰$ داریم و سپس زیرمجموعه ۳ عضوی را می‌نویسیم. پس ۱۰ افراز به این صورت موجود است.

دانش آموز چهارم:

همچنین می‌توان گفت در هر حالت ما ابتدا یک زیرمجموعهٔ سه‌عضوی از A را می‌نویسیم و بعد دو زیرمجموعهٔ یک‌عضوی آن به سادگی قابل نوشتن است، پس تعداد این نوع افرازها برابر با تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A است که برابرند با:

$$\binom{۵}{۳}=۱۰$$

دانش آموز اول:

آیا می‌توانید تعداد افرازهای A به‌صورت $\{a\}, \{b,c\}, \{d,e\}$ را بگویید؟

دانش آموز پنجم:

در این نوع افراز، دو زیرمجموعهٔ دوعضوی و یک زیرمجموعهٔ یک‌عضوی داریم. بنابراین می‌توان همهٔ زیرمجموعه‌ای دو عضوی A را نوشت. سپس از بین آن‌ها دو زیرمجموعه را چنان انتخاب می‌کنیم که در شرط (II) افراز صدق کنند. در این حالت زیرمجموعه یک‌عضوی به‌سادگی قابل نوشتن است.

معلم:

درست است **علی** جان! اکنون همهٔ زیرمجموعه‌های دوعضوی A را بنویس.

دانش آموز پنجم:

تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی A برابر با $\binom{۵}{۲}=۱۰$ است و عبارت‌اند از:

{a,b}, {a,c}, {a,d}, {a,e}, {b,c}, {b,d}, {b,e}, {c,d}, {c,e}, {d,e}

اکنون دو زیرمجموعه چنان انتخاب می‌کنیم که با هم عضو مشترکی نداشته باشند. سپس زیرمجموعهٔ یک‌عضوی به سادگی قابل نوشتن است. تمام حالت‌های ممکن را در زیر می‌آوریم:

{a,c}, {b,d}, {e}	{a,b}, {c,d}, {e}
{a,c}, {b,e}, {d}	{a,b}, {c,e}, {d}
{a,c}, {d,e}, {b}	{a,b}, {d,e}, {c}

{a,e}, {b,c}, {d }	{a,d}, {b,c}, {e}
{a,e}, {b,d}, {c}	{a,d}, {b,e}, {c}
{a,e}, {c,d}, {b}	{a,d}, {c,d}, {b}

{b,c}, {d,e}, {a}
{b,d}, {c,e}, {a}
{b,e}, {c,d}, {a}

دانش آموز سوم:

در نتیجه ۱۵ افراز به این صورت داریم. آیا می‌توان با روش‌های شمارش تعداد این نوع افرازها را پیدا کرد؟

معلم:

بله و برای پاسخ به این سؤال، ابتدا تبدیل با تکرار را مطرح می‌کنیم.

تبدیل با تکرار

فرض کنیم n شی از k نوع متمایز داشته باشیم ($k\leq n$)، به‌طوری که $n_۱$تا از نوع اول، $n_۲$ تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع kام موجود باشند و داشته باشیم: $n_۱+n_۲+.....+n_k=n$.

در این صورت تعداد جایگشت‌های متمایز این n شیء برابر است با:

$$p=\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times....\times n_k!}$$

زیرا می‌دانیم n شیء متمایز به تعداد !n جایگشت دارند اما در اینجا $n_۱$ از نوع اول هستند و با جابه‌جا کردن این $n_۱$ شی با یکدیگر، یعنی به تعداد $n_۱!$، جایگشت جدیدی به دست نمی‌آید. به همین ترتیب با جابه‌جا کردن $n_۲$ شیء با یکدیگر از نوع دوم، یعنی $n_۲!$ طریق، جایگشت جدیدی ایجاد نمی‌شود و... و با جابه‌جا کردن n_k شی از نوع kام باهم، یعنی $n_k!$ طریق، جایگشت جدیدی به‌دست نمی‌آید. چنانچه تعداد جایگشت‌های با تکرار این n شی را با P نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$n_۱!\times n_۲!\times....\times n_k!\times P=n!$$

$$\Rightarrow P=\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times....\times n_k!}$$

حال با استفاده از دستور تبدیل با تکرار بگویید با حرف‌های کلمهٔ «MATHEMATICS»، چند کلمهٔ ۱۱ حرفی می‌توان نوشت؟

دانش آموز سوم:

واضح است که با جابه‌جا کردن دو حرف M با یکدیگر، یا دو حرف T با یکدیگر، یا دو حرف A با یکدیگر کلمهٔ جدیدی به‌دست نمی‌آید. چون در این کلمه M دوبار، A دوبار و T دوبار و بقیهٔ حرف‌ها یک‌بار آمده‌اند، پس تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$P=\frac{۱۱!}{۲!\times ۲!\times ۲!\times ۱!\times ۱!\times ۱!\times ۱!\times ۱!}$$

معلم:

اکنون با استفاده از دستور تبدیل با تکرار، تعداد افرازهایی به صورت:

{a},{b,c},{d,e}

را برای مجموعهٔ A={a,b,c,d,e} به‌دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مانند {a}، می‌توانیم یک عضو از A انتخاب کنیم که تعداد آن برابر با $\binom{۵}{۱}$ است. حال چهار عضو باقی می‌مانند و می‌خواهیم زیرمجموعه‌های دوعضوی مانند {b,c} را بنویسیم. به همین سبب از بین چهار عضو باقی مانده، دو عضو را انتخاب می‌کنیم که تعداد آن برابر با $\binom{۴}{۲}$ است. در مرحلهٔ آخر برای نوشتن زیرمجموعهٔ دوعضوی دیگر مانند {d,e} باید از بین دو عضو باقی‌مانده، دو عضو انتخاب کنیم که تعداد آن برابر با $\binom{۲}{۲}$ است.

بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد افرازهایی به این صورت برابر است با:

$$P=\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۲} \qquad (۱)$$

اکنون توجه کنید که ابتدا {b,c} را انتخاب کردیم، سپس زیرمجموعهٔ دوعضوی دیگر {d,e} شد. حال اگر در مرحلهٔ انتخاب زیرمجموعهٔ دوعضوی، ابتدا {d,e} را انتخاب کنیم، زیرمجموعهٔ دوعضوی دیگر {b,c} می‌شود و این دو حالت تکراری است.

به همین صورت، برای انتخاب هر دو زیرمجموعهٔ دوعضوی دیگر، همین حالت پیش می‌آید. بنابراین طبق دستور تبدیل با تکرار باید حاصل P را در (۱) بر !۲ تقسیم کنیم. در نتیجه تعداد افرازها به این صورت برابر است با:

$$P=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۲}}{۲!}=۱۵$$

توجه کنید که علی (دانش‌آموز پنجم) ۱۵ حالت این نوع افراز را برایمان در صفحه قبل نوشت.

دانش آموز چهارم:

با همین روش می‌توانیم تعداد همهٔ افرازهای مجموعهٔ A={a,b,c,d,e} را محاسبه کنیم. افرازهای این مجموعه به‌صورت حالت‌های کلی زیر است:

● **حالت اول:** {a},{b},{c},{d},{e}

تعداد این نوع افراز طبق دستور تبدیل با تکرار برابر است با:

$$P_۱=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۵!}=۱$$

چنانچه جای عضوهای پنج مجموعهٔ یک‌عضوی را با هم عوض کنیم، افراز جدیدی به‌دست نمی‌آید و به همین دلیل در مخرج کسر !۵ را قرار دادیم.

● **حالت دوم:** {a},{b},{c},{d,e}

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_۲=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۲}}{۳!}=۱۰$$

چنانچه جای عضوهای سه مجموعهٔ یک‌عضوی را با هم عوض کنیم، افراز جدیدی به‌دست نمی‌آید و به همین دلیل در مخرج کسر !۳ را قرار دادیم.

● **حالت سوم:** {a},{b},{c,d,e}

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_۳=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}}{۲!}=۱۰$$

● **حالت چهارم:** {a},{b,c,d,e}

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_۴=\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}=۵$$

● **حالت پنجم:** {a},{b,c},{d,e}

تعداد این نوع افرازها برابر با:

$$P_۵=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۱۵$$

● **حالت ششم:** {a,b},{c,d,e}

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_۶=\binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۳}=۱۰$$

● **حالت هفتم:** {a,b,c,d,e}

تعداد این افرازها برابر با $P_۷=\binom{۵}{۵}=۱$ است.

در نتیجه افراز کل افرازهای مجموعهٔ پنج‌عضوی برابر است با:

$$P=P_۱+P_۲+P_۳+P_۴+P_۵+P_۶+P_۷=۵۲$$

فعالیت: تعداد افرازهای یک مجموعهٔ شش‌عضوی برابر با ۲۰۳ است.

همهٔ افرازهای این مجموعه را در حالت کلی بنویسید و در هر حالت تعداد افرازها را محاسبه کنید. سپس نشان دهید که تعداد افرازهای یک مجموعهٔ شش‌عضوی برابر با ۲۰۳ است.

برای نمونه، یک حالت افراز مجموعهٔ شش‌عضوی A={a,b,c,d,e,f} به‌صورت {a},{b,c},{d,e},{f} است.

تعداد این نوع افراز برابر است با:

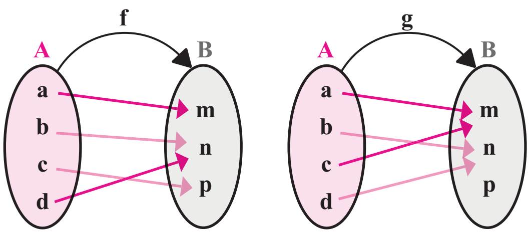
$$P_۱=\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{۲!\times ۲!}=۴۵$$

چنانچه جای عضوهای دو زیرمجموعه یک‌عضوی را با هم و جای عضوهای دو زیرمجموعه دوعضوی را با هم عوض کنیم، افراز جدیدی به دست نمی‌آید و به همین دلیل در مخرج کسر !۲×!۲ را نوشتیم.

معلم:

در ادامه با تابع پوشا آشنا خواهید شد و تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ متناهی A به مجموعهٔ متناهی B را به کمک افراز بررسی می‌کنیم.

دو تابع f و g را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:



به نظر شما این دو تابع چه تفاوتی با هم دارند؟

دانش‌آموز دوم: ....

در تابع f به همهٔ عضوهای مجموعهٔ B فلش رسیده است، اما در تابع g به عضو p از مجموعهٔ B فلش نرسیده است.

معلم: ....

کاملاً درســـت است. بنابر تعریف می‌گوییم: تابع f مجموعهٔ B را می‌پوشاند، یا اینکه همهٔ عضوهای B توسط تابع f پوشیده می‌شوند. در این حالت تابع f را پوشا می‌گوییم.

تعریف: تابع $f:A \to B$ پوشـــا است، هرگاه برد تابع f برابر با B باشد؛ یعنی: $R_f = B$.

همان‌طور که در تابع g ملاحظه می‌کنید:

$$R_g = \{m, n\} \neq B$$

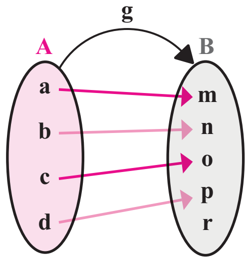
در نتیجه تابع g پوشا نیست.

دانش‌آموز سوم: ....

اگر A دارای چهار عضو و B دارای پنج عضو باشد، آیا از A به B می‌توان تابع پوشا تعریف کرد؟

معلم: ....

چنانچه بخواهیم از حداکثر اعضای B برای تابع f استفاده کنیم، ملاحظه می‌کنید که f حداکثر چهار عضو B را می‌پوشاند و یک عضو B پوشیده نمی‌شود.

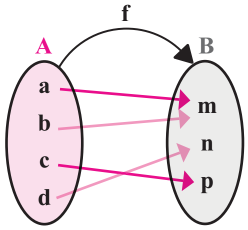


نتیجه: فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی باشـــند، برای اینکه تابع $f:A \to B$ بتواند پوشا باشد، باید تعداد عضوهای B بیشتر از تعداد عضوهای A نباشد.

ســـؤال: از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{m,n,p\}$، چند تابع پوشا می‌توان نوشت؟

دانش‌آموز پنجم: ....

برای نوشتن تابع پوشا از A به B، تنها راه این است که دو عضو از A را با یک عضو از B و اعضای دیگر A را به عضوهای متمایز دیگر B مربوط کنیم؛ مانند نمودار زیر:



معلم: ....

ایدهٔ شما را می‌توان به کمک افراز مجموعه بیان کرد. یعنی ابتدا A را به یک زیرمجموعهٔ دوعضوی و دو زیرمجموعهٔ یک‌عضوی افراز می‌کنیم، مانند افراز زیر:

$\{a,b\},\{c\},\{d\}$

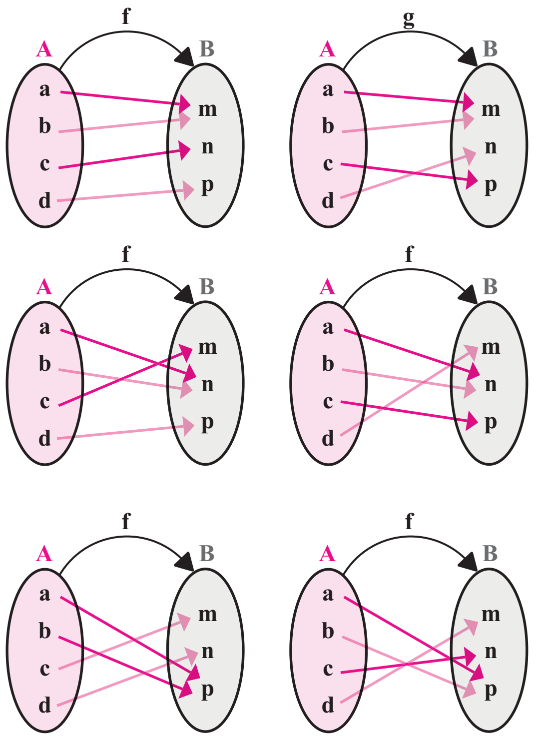
سپس تابع پوشا f را می‌نویسیم.

دانش‌آموز پنجم: ....

با این ایده می‌توان تعداد این نوع افرازها را محاسبه کرد که برابر است با:

$$P = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۱}{۱}}{۲!} = ۶$$

در زیر شـــش تابع پوشـــای متمایز برای افراز $\{d\},\{c\},\{a,b\}$ نوشته‌ایم:



معلم:

توجه کنید که در اینجا شش افراز داریم که عبارت‌اند از:

$\{a,c\},\{b\},\{d\}$	$\{a,b\},\{c\},\{d\}$
$\{b,c\},\{a\},\{d\}$	$\{a,d\},\{c\},\{b\}$
$\{c,d\},\{a\},\{b\}$	$\{b,d\},\{a\},\{c\}$

به همین ترتیب برای هر یک از افرازهای بالا می‌توان شش تابع پوشا نوشت. در نتیجه بنابر اصل ضرب تعداد توابع پوشا در اینجا برابر است با:

$۶\times۶=۳۶$

دانش‌آموز سوم:

چون مجموعهٔ B دارای سه عضو است و ۶=!۳، بنابراین می‌توان گفت که شش حالت نمودارهای بالا همان !۳ است. در نتیجه تعداد توابع پوشا را در این حالت می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!}\times ۳! = ۳۶$$

معلم:

بله درست است. در نتیجه ملاحظه کردید که با استفاده از اصول شمارش و تعداد افرازها، می‌توان تعداد توابع پوشا را محاسبه کرد.

دانش‌آموز چهارم:

بچه‌ها، حالا می‌توانیم تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ پنج‌عضوی A را به مجموعهٔ سه‌عضوی B محاسبه می‌کنیم.

دانش‌آموز اول:

ابتدا باید مجموعهٔ ۵عضوی A را به ۳ زیر مجموعه افراز کنیم.

● **حالت اول:** $\{a\},\{b\},\{c,d,e\}$ در این حالت تعداد توابع پوشا برابر است با:

$$P_۱ = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}}{۲!}\times ۳! = ۶۰$$

توجه: !۳ به این دلیل آمده است که مجموعهٔ B سه عضو دارد.

● **حالت دوم:** $\{a\},\{b,c\},\{d,e\}$

در این حالت تعداد توابع پوشا برابر است با:

$$P_۲ = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}\times ۳! = ۹۰$$

می‌دانیم که مجموعهٔ پنج عضوی A را فقط به دو صورت می‌توان به سه زیرمجموعه افراز کرد. بنابراین تعداد توابع پوشا در این حالت برابر است با:

$$P = P_۱ + P_۲ = ۱۵۰$$

امیدوارم که از این دورهمی لذت برده باشید.

لطفاً **سـؤال**‌ها و **ابهام**‌های خود را از **کتاب درسی** برای ما ارسال کنید تا در دورهمی بعدی به آن‌ها بپردازیم.

آموزشی

عاطفه موسوی ــ محمود داورزنی
(دبیر دبیرستان فرزانگان حضرت زینب (س) ـ دوره دوم/ ناحیهٔ دو شهر ری)

چکیده

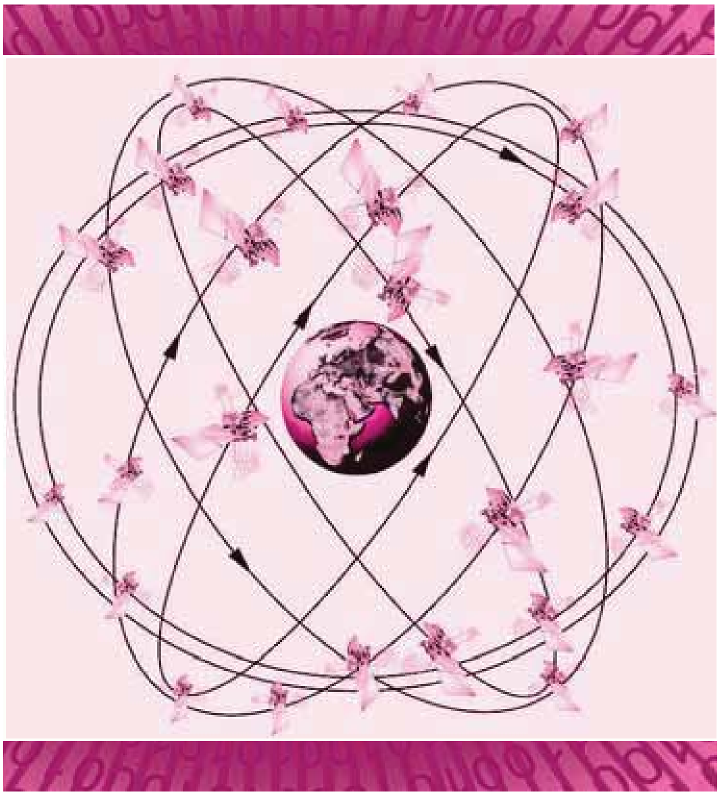
دریافت ســیگنال‌های ماهواره‌ای و تعیین موقعیت مکانی در دنیای امروزه، امری طبیعی و روزمره شده است. تعداد ماهواره‌های مورد نیاز برای مشخص شدن موقعیت دقیق مکانی و نحوهٔ انجام این کار در مقالهٔ حاضر تشریح شده است. برای فهم کامل موضوع به دانشی مقدماتی از معادله‌های دایره، صفحه و کره نیاز است که در قسمت اول این مقاله به آن پرداخته شده است.

«سیستم جهانی موقعیت‌یابی» (Global Positioning System) یا به اختصار جی.پی.اس «GPS»، متشکل از ماهواره‌هایی است که براســاس سیســتم «جهت‌یابی» (Navigation) کار می‌کنند. این سیســتم توســط وزارت دفاع آمریکا تهیه و توسعه یافته است. ابتدا ماهواره‌ها برای اســتفادهٔ نظامی در مدار زمین قرار می‌گرفتند، اما از سال ۱۹۸۳ به بعد در دسترس عموم مردم قرار گرفتند.

در حال حاضر ســامانهٔ جی‌پی‌اس متشــکل از ۲۴ ماهواره به همراه شــش ماهوارهٔ یدکی در ارتفاع حــدود ۲۰ هزار کیلومتری از ســطح زمین اســت که در شــش‌مدار متفــاوت در گردش‌اند. ماهواره‌های جی‌پی‌اس در حرکت شبانه‌روزی زمین، همراه با زمین حرکت نمی‌کنند و تنها در حرکت انتقالی زمین همراه آن هستند. این ماهواره‌ها انرژی خودشــان را از خورشــید تأمین می‌کنند و باتری‌هایی نیز برای مواقع خورشــیدگرفتگی یا زمانی که در سایهٔ زمین حرکت می‌کنند، به همراه دارند. ماهواره‌های این سامانه در مدارهایــی دقیق هر روز دو بار به دور زمین می‌گردند و اطلاعاتی را به زمین مخابــره می‌کنند. گیرنده‌های جی‌پی‌اس این اطلاعات را دریافت و با انجام محاســبات، محل دقیق گیرنده را نســبت به زمین محاسبه می‌کنند.

در هرجای کرهٔ زمین که باشید، حداقل چهار ماهواره در هر زمان برای شما قابل مشاهده‌اند. هر ماهواره اطلاعات مربوط به موقعیت و زمان را در فواصل منظم انتقال می‌دهد. این سیگنال‌ها با سرعت نور سفر می‌کنند و توسط گیرنده‌های جی‌پی‌اس شما دریافت می‌شوند. با توجه به زمانی که ســیگنال‌ها دریافت می‌شوند، می‌توانیم با انجام محاسباتی محل دقیق قرارگیری ماهواره‌ها را مشخص کنیم.

در هر نقطهٔ روی کرهٔ زمین، اگر بتوانیم فاصلهٔ خود را حداقل از چهار ماهواره تعیین کنیم، می‌توانیم موقعیت مکانی نقطه‌ای را که در آن قرار گرفته‌ایم، به‌طور دقیق مشخص کنیم. انجام این کار به دانشی مقدماتی از معادلات دایره و کره نیاز دارد که در ادامه به توضیح آن‌ها می‌پردازیم و در هر مورد نشــان می‌دهیم که محل اشــتراک آن‌ها چگونه به‌دست می‌آید.



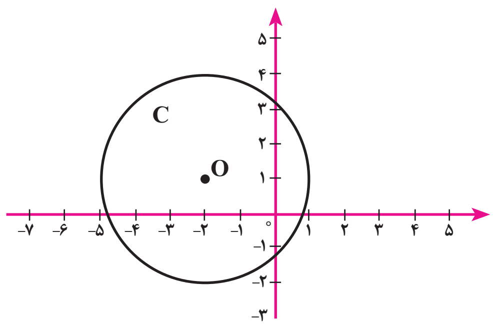
معادلهٔ دایره

معادلـــهٔ هر دایره در صفحه به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شـــعاع r عبارت است از:

$$C:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

مثال. در شکل ۱ دایره‌ای به مرکز (۱, ۲-) و شعاع ۳ رسم شده است. معادلهٔ این دایره عبارت است از:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$



شکل ۱

محل برخورد دو دایره

دو دایره یکدیگر را در یک یا دو نقطه قطع می‌کنند و یا یکدیگر را قطع نمی‌کنند. برای یافتن محل برخورد دو دایره که معادلهٔ آن‌ها داده شده است، آن‌ها را در یک دستگاه می‌نویسیم و دستگاه حاصل را حل می‌کنیم.

مثال. محل برخورد دو دایرهٔ زیر را به دست آورید.

$$c_1:(x+2)^2+(y-1)^2=9$$
$$c_2:(x-1)^2+y^2=25$$

حل: معادلهٔ دو دایره را در یک دســـتگاه قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم.

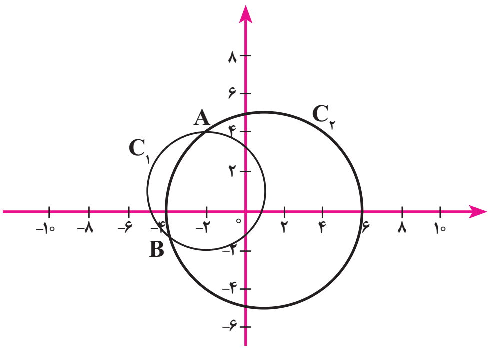
$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=9\\(x-1)^2+y^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+4x+4+y^2-2y+1=9\\x^2-2x+1+y^2=25\end{cases}$$

حاصل تفاضل این دو معادله عبارت اســـت از: $6x-2y=-20$ که معادلهٔ خطی مانند L اســـت و از نقاط تقاطع عبور کرده اســـت. برای یافتن نقاط برخورد دو دایره، خط L را با یکی از دایره‌ها در یک دستگاه قرار دهیم.

$$\begin{cases}y=3x+10\\(x+2)^2+(y-1)^2=9\end{cases}\Rightarrow x^2+(3x+10-1)^2=9\Rightarrow 10x^2+54x+72=0$$

از حـــل این معادلهٔ درجه دوم، جواب‌های $x=-2, x=-\frac{19}{5}$ به دســـت می‌آیند و از قرار دادن ایـــن مقادیر در معادلهٔ $y=3x+10$ عرض نقطه‌های برخورد نیز حاصل می‌شود (شکل ۲):

$$A(-2,4), B(-\frac{19}{5},-\frac{7}{5})$$



شکل ۲

معادلهٔ صفحه

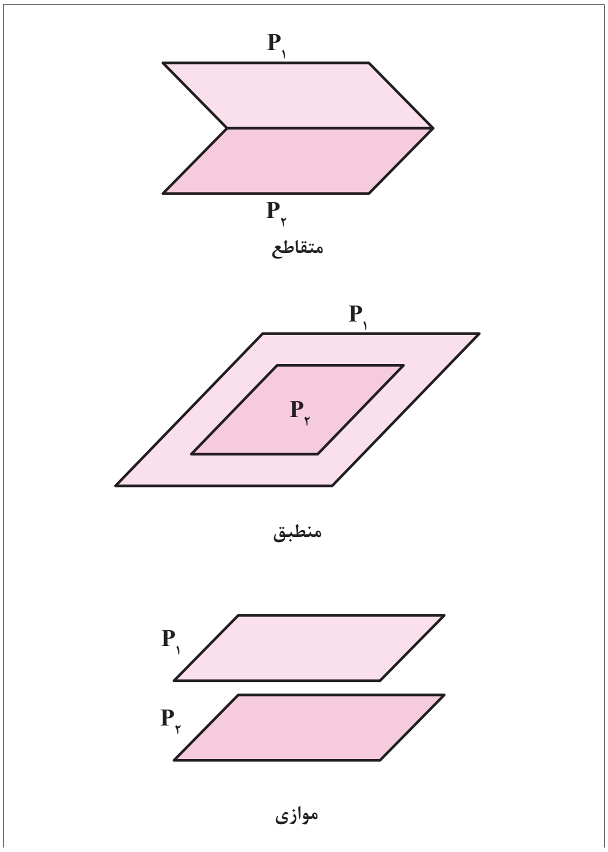
معادلـــهٔ صفحه P که از نقطـــهٔ $(x_۰,y_۰,z_۰)$ می‌گذرد و بر بردار (a,b,c) عمود است، عبارت است از:

$$P: a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$

مثال. معادلهٔ صفحه‌ای را می‌نویسیم که از نقطهٔ (۲,-۱,۳) می‌گذرد و بر بردار (-۳,۱,۲) عمود است:

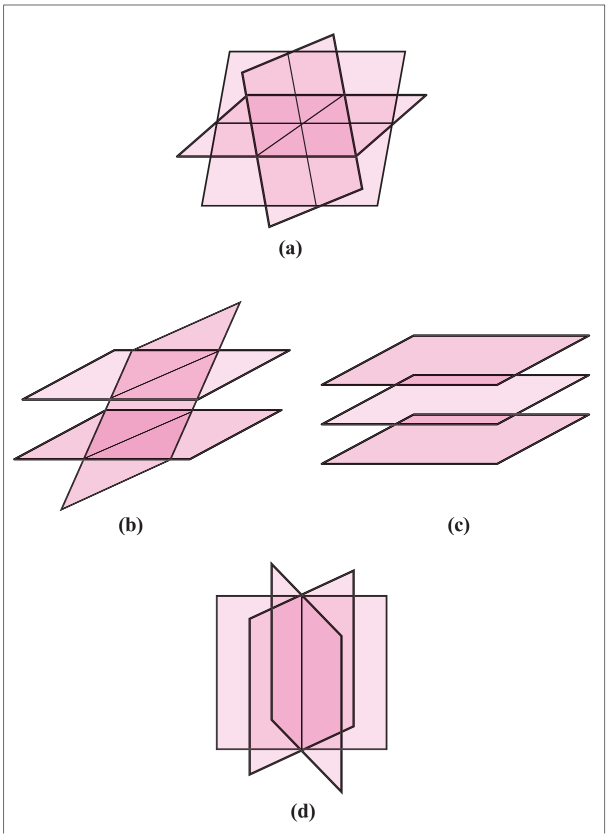
$$\begin{cases}(x_۰,y_۰,z_۰)=(۲,-۱,۳)\\(a,b,c)=(-۳,۱,۲)\end{cases} \Rightarrow P: -۳(x-۲)+۱(y+۱)+۲(z-۳)=۰$$

حالت‌های متفاوت دو صفحه در شکل ۳ رسم شده‌اند.



شکل ۳

سه صفحه در فضا نســـبت به یکدیگر حالت‌های مختلفی دارند (شکل ۴). اشتراک سه صفحه می‌تواند یک خط (شکل ۴-d) و یا یک نقطه باشـــد (شکل ۴-a). برای یافتن محل برخورد دو یا چند صفحه می‌توان آن‌ها را در یک دستگاه قرار داد.



شکل ۴

معادلهٔ کره

معادلهٔ کرهٔ S به مرکز $(x_۰,y_۰,z_۰)$ و شعاع r در فضا عبارت‌است از:

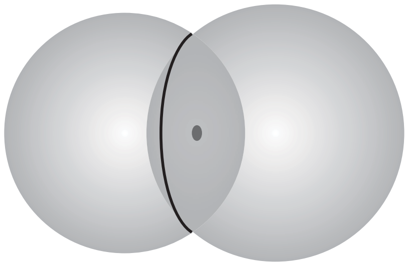
$$S: (x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲+(z-z_۰)^۲=r^۲$$

مثال: معادلهٔ کره‌ای را می‌نویسیم که مرکز آن (-۲,۱,۴) و شعاع آن ۳ واحد باشد:

$$S: (x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۴)^۲=۹$$

محل برخورد دو کره

دو کره نســـبت به یکدیگر چهار حالت متفاوت دارند. این چهار حالـــت عبارت‌اند از: متخارج، مماس بـــرون، مماس درون و متقاطع. در حالت‌هـــای مماس درون و برون، محل برخورد یک نقطه اســـت. در حالتی که دو کره متقاطع هســـتند، محل برخورد یک دایره است (شکل ۵). برای یافتن صفحه‌ای که شامل این دایره است، می‌توانیم معادلهٔ دو کره را در یک دستگاه قرار دهیم.



شکل ۵

مثال. معادلهٔ دو کره به‌صورت زیر است:

$$S_1 : (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \ , \ S_2 : x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$

اگر معادله‌های آن‌ها را در یک دستگاه قرار دهیم، داریم:

$$\begin{cases} S_1 : (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ S_2 : x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 4 + 1 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 1 + 9 = 9 \end{cases}$$

از تفاضل دو معادلهٔ بالا داریم:

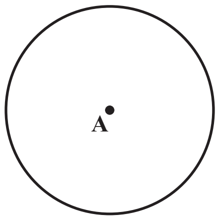
$$-4x + 2y + 8z + 3 = -5 \Rightarrow -2x + y + 4z = 0$$

معادلهٔ اخیر معادلهٔ یک صفحه است که دایرهٔ ایجادشده از برخورد دو کره روی آن قرار دارد.

دستگاه GPS چگونه موقعیت ما را مشخص می‌کند؟

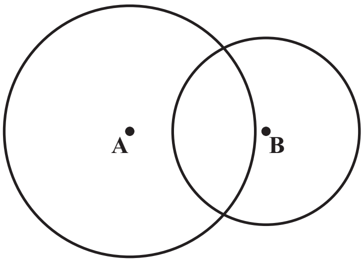
فرض کنید در یک نقطهٔ نامشـــخص از صفحه قرار گرفته‌اید. اگر فاصلهٔ خود را از مکان معینی مانند فروشـــگاه A بدانید، آیا می‌توانید مکان دقیق قرارگیری خود را بگویید؟

مطمئناً خیر. شـــما در یک نقطه روی محیط دایره‌ای به مرکز A قرار دارید (شکل ۶).



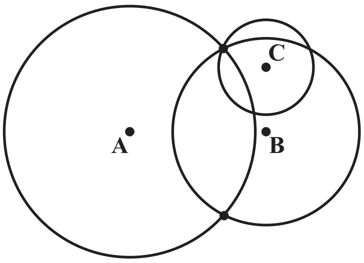
شکل ۶

اگـــر علاوه بر این موضوع، فاصلهٔ خـــود را از مکان دیگری مانند B نیز بدانید، با بحث شـــبیه قبل، شما روی محیط دایره‌ای به مرکز B قرار دارید. با توجه به شـــکل ۷، مکان قرارگیری شما در نقطه‌های برخورد دو دایره است، ولی هنوز نمی‌دانید که دقیقاً کجا قرار دارید.



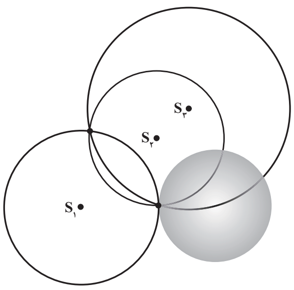
شکل ۷

بـــرای تعیین موقعیت دقیق خود، نیاز دارید که فاصلهٔ خود را از مکان ســـومی مانند C نیز بدانید. در این صورت محل برخورد ســـه دایره، مکان قرار گرفتن شما را مشخص می‌کند (شکل ۸).



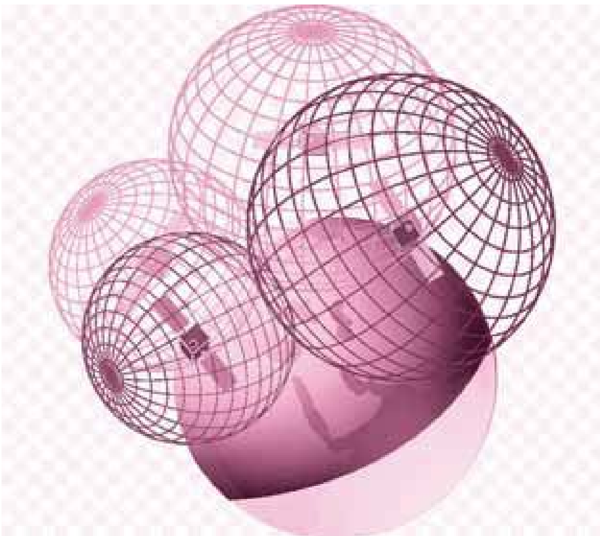
شکل ۸

اکنون فرض کنیـــد که می‌خواهید موقعیت دقیق مکانی خود را به کمک ماهواره‌هایی که در آسمان و در دید شما هستند، مشخص کنید. اگر فاصلهٔ شما از ماهوارهٔ A، d_1 باشد، موقعیت شما روی محیط کره‌ای به نام S_1 به مرکز A و شـــعاع d_1 قرار دارد. اگر علاوه بر آن، فاصلهٔ خود را از ماهوارهٔ B که d_2 است، بدانید، شما روی محیط کره‌ای به نام S_2 به مرکز B و شـــعاع d_2 قرار دارید و با توجه به اینکه اشتراک دو کرهٔ S_1 و S_2، یک دایره است، شما روی دایرهٔ اشتراک هستید. بنابراین به اطلاعات بیشتری نیاز دارید تا موقعیت خود را مشخص کنید. فرض کنید فاصلهٔ شما از ماهوارهٔ دیگری مانند C برابر d_3 باشد. پس شما روی محیط کرهٔ S_3 به مرکز C و شعاع d_3 نیز قرار دارید. با توجه به اینکه اشتراک این کره با دایره‌ای که اشتراک دو کرهٔ S_1 و S_2 است، دو نقطه می‌شود، هنوز هم نمی‌توانید به‌طور دقیق موقعیت خود را مشخص کنید.



شکل ۹

پس شما به ماهوارهٔ چهارم نیاز خواهید داشت و اگر فاصلهٔ شما از ماهوارهٔ D برابر $d_۴$ باشد، کرهٔ به مرکز D و شعاع $d_۴$ که آن را $S_۴$ می‌نامیم، قطعاً با سه کرهٔ دیگر در یک نقطه مشترک است و این نقطه، مکان قرارگیری شماست.



شکل ۱۰

نظریهٔ بالا را در یافتن موقعیت دقیق که به کمک چهار ماهواره به دست آمده است، می‌توانیم به شکل تحلیلی و به صورت زیر نشان دهیم. باید به این نکته اشاره کرد که دریافت سیگنال از ماهواره، موقعیت مکانی ماهواره، یعنی مختصات آن ماهواره و همچنین زمان دریافت سیگنال از ماهواره را می‌توان به دقت محاسبه کرد. اگر زمان دریافت سیگنال از یک ماهواره برابر با t باشد و سرعت سیگنال ارسالی، که سرعت نور است را c بگیریم، فاصلهٔ دریافت‌کننده سیگنال (دستگاه GPS) از آن ماهواره برابر با d=ct می‌شود. بنابراین فاصلهٔ دستگاه شما تا هر ماهواره به سادگی محاسبه می‌شود.

اکنون فرض کنید ماهوارهٔ اول در مکان $(a_۱,b_۱,c_۱)$ و فاصلهٔ شما تا آن نیز $d_۱$ باشد. بنابراین معادلهٔ کرهٔ $S_۱$ که شما روی آن قرار می‌گیرید، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_۱ : (x-a_۱)^۲ + (y-b_۱)^۲ + (z-c_۱)^۲ = d_۱$$

به‌طور مشابه، معادله‌های کره‌های دیگر را که در بالا بحث شد، می‌توان نوشت. اکنون تمام معادله‌ها را در یک دستگاه به‌صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (x-a_۱)^۲ + (y-b_۱)^۲ + (z-c_۱)^۲ = d_۱ \\ (x-a_۲)^۲ + (y-b_۲)^۲ + (z-c_۲)^۲ = d_۲ \\ (x-a_۳)^۲ + (y-b_۳)^۲ + (z-c_۳)^۲ = d_۳ \\ (x-a_۴)^۲ + (y-b_۴)^۲ + (z-c_۴)^۲ = d_۴ \end{cases}$$

از تفاضل معادلهٔ چهارم با هر یک از معادله‌های اول تا سوم در این دستگاه، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲(a_۴-a_۱)x + ۲(b_۴-b_۱)y + ۲(c_۴-c_۱)z = d_۴ - d_۱ \\ ۲(a_۴-a_۲)x + ۲(b_۴-b_۲)y + ۲(c_۴-c_۲)z = d_۴ - d_۲ \\ ۲(a_۴-a_۳)x + ۲(b_۴-b_۳)y + ۲(c_۴-c_۳)z = d_۴ - d_۳ \end{cases}$$

که یک دستگاه خطی سه معادله و سه مجهول می‌باشد و به سادگی قابل حل است.

در پایان ذکر دو نکته لازم است:

۱. ماهواره‌ها به ساعت اتمی مجهز هستند. محاسبهٔ تأخیر زمانی سیگنال ماهواره‌ای برای رسیدن به گیرنده، عنصر کلیدی در موقعیت گیرنده است. گیرندهٔ GPS زمان ورود سیگنال را با توجه به ساعت گیرنده و زمان خروج سیگنال را از ماهواره براساس ساعت ماهواره محاسبه می‌کند. اگر این اختلاف به اندازهٔ یک میکروثانیه، یعنی ۰/۰۰۰۰۰۱ ثانیه باشد، دستگاه GPS، موقعیت شما را با خطایی در حدود ۳۰۰ متر نشان می‌دهد. برای اجتناب از این خطا، هر دستگاه GPS به ساعت دیجیتالی مجهز است که خود را با ساعت اتمی تطبیق می‌دهد.

۲. جواب دستگاه بالا، یعنی (x,y,z)، به صورت یک نقطه در دستگاه xyz است و هر دستگاه GPS موظف است که این نقطه را به مختصات قطبی تبدیل کند تا بتواند طول و عرض جغرافیایی و همچنین ارتفاع شما را از سطح دریا مشخص سازد.

*منابع

1. G. Glaeser, Math tools 500 applications in science and arts, Springer(2017).
2. J.Khoury, How is it made? Global positioning System (GPS),uottawa university,(2011).

۳. پوران قاضی شهنی‌زاد (بی‌تا). سامانهٔ موقعیت‌یاب جهانی (GPS) و کاربردهای آن. وزارت جهاد کشاورزی. معاونت برنامه‌ریزی و اقتصادی. دفتر آمار و فناوری اطلاعات.

گفت‌وگو

بهنام آیتی‌پور

آموزش ریاضیات مدرسه‌ای و چالش‌های پیش‌روی آن

اشاره

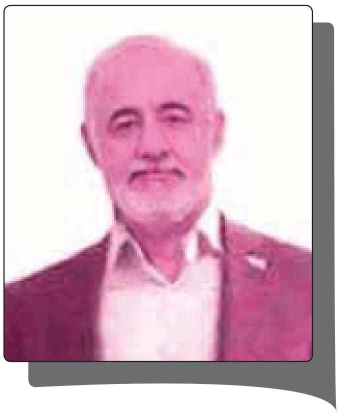
امیر عباس‌زاده کارشناس ریاضی محض و کارشناس ارشد آموزش ریاضی، اکنون در حال تدوین پایان‌نامهٔ دکترای آموزش ریاضی است. وی از سال ۱۳۷۶ به مدت حدود ۱۸ سال در جزیرهٔ خارک به‌صورت استاد مدعو دو روز در هفته با «آموزش پایانه‌های نفتی» همکاری داشته و هم‌زمان در مدرسه‌های وابسته به پتروشیمی بندر ماهشهر مشغول تدریس بوده است. از سال ۱۳۷۹ تاکنون نیز با «مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی» و «فرزانگان» اهواز و همچنین مدرسه‌های نمونهٔ دولتی اهواز همکاری کرده است.

ایشان از زمان تدریس در مرکز شهید بهشتی اهواز، دانش‌آموزان موفقی در زمینهٔ المپیاد ریاضی تربیت کرده است که برخی اکنون در مدارج بالای علمی فارغ‌التحصیل شده‌اند؛ دانش‌آموزانی مثل امیرمسعود گیوه‌چی، دارندهٔ مدال طلای ریاضی کشوری و نقرهٔ جهانی، سینا رضایی، دارندهٔ مدال طلای کشور و برنز جهانی، علیرضا شاهولی، دارندهٔ مدال نقرهٔ کشوری و مرحوم ارس شیرانی، دارندهٔ مدال ریاضی کشوری که متأسفانه سال گذشته در حالی‌که دانشجوی دانشگاه صنعتی شریف بود، در حادثه‌ای فوت کرد.

دکتر عباس‌زاده مدرس دانشگاه فرهنگیان اهواز و عضو «شورای اجرایی انجمن ریاضی معلمان استان خوزستان» نیز هست و سابقهٔ عضویت در گروه ریاضی استان خوزستان را هم درکارنامهٔ کاری خود دارد. او در بسیاری از کنفرانس‌های آموزش ریاضی ارائه کرده است. در سال ۱۳۹۳ هم جلد دوم کتاب «اثبات بدون کلام ـ تمرینات بیشتر برای تفکر شهودی»، نوشتهٔ راجر نلسن را ترجمه و چاپ کرد. در این شماره با ایشان به گفت‌وگو نشسته‌ایم.

■ **آیتی‌پور: کدام ویژگی کتاب «اثبات بدون کلام» برای مخاطبان، به‌خصوص دانش‌آموزان، اهمیت دارد؟**

آ عباس‌زاده: چقدر در کلاس درس ریاضی شما پیش آمده که هنگام حل یک مسئله یا اثبات ریاضی، دانش‌آموزان حس خوشایندی از دیدن نحوهٔ اثبات و زیبایی روش به کار رفته در اثبات از خود نشان بدهند و مثلاً گفته باشند: «وای چه جالب! چه اثبات قشنگ و کوتاهی؟!» و یا برعکس چقدر بوده است که بچه‌ها بدون هیچ واکنشی و شاید بعد از چند پرسش کوتاه، راه‌حل را یادداشت کرده‌اند. در واقع بیشتر اثبات‌های ریاضی «دستور پذیرش» هستند و مثل آن است که دانش‌آموزان مجبورند روش اثبات را بپذیرند.



عباس‌زاده

در حالی که به قول **موریس کلاین**:
«یک برهان عملی زیبا، به جز شکل نوشتاری آن، تماماً شعر است.» کتاب اثبات بدون کلام شامل اثبات‌هایی از این دست است.

چون مجله را بیشتر دانش‌آموزان مطالعه می‌کنند، برای پیدا کردن مهارت‌های حل مسئله چه توصیه‌ای به دانش‌آموزان می‌کنید؟ چه ایده‌ای را به آن‌ها می‌دهید؟

قبل از هر چیز دانش‌آموز من باید بداند مسئله اگر در نگاه اول حل می‌شد، مسئله نبود. **پس مسئله یعنی چالش.** بین تمرین، پرسش و مسئله تفاوت وجود دارد. اگر شما سؤال قبلی را حل کردی و خوش‌حال بودی و الان این سؤال را داری حل می‌کنی و نگرانی از اینکه نتوانی آن را حل کنی، ناشی از ناتوانی تو نیست، بلکه این ساختار خود مسئله است. گاهی دانش‌آموزانمان نمی‌دانند که چه فرقی بین تمرین و مسئله وجود دارد. وقتی بفهمند که بین این‌ها تفاوت وجود دارد، از خودشان زیاد ناراضی نمی‌شوند.

دانش‌آموز به خود می‌گوید: پس با یک مورد جدید دارم برخورد می‌کنم. به آن فکر می‌کنم. سپس در ذهنش در میان مفاهیم آشنایی که قبلاً با آن‌ها برخورد کرده است، به جست‌وجو می‌پردازد.

من همیشه به دانش‌آموزان توصیه می‌کنم، آن مسائلی را پیگیری کنند که برایشان جالب بوده‌اند، آن‌ها را به دردسر انداخته‌اند و حتی در امتحان نمرهٔ آن‌ها را نگرفته‌اند.

دیگر آنکه علاوه بر جزوهٔ کلاسی درس ریاضی، هر دانش‌آموز باید برای خودش **دفترچهٔ خاطرات ریاضی داشته باشد.** از بین تمام مسائلی که در کتاب درسی‌اش دیده و مسائلی که معلمش جداگانه به او گفته، به کدام یک از مسائل خودش بیشتر علاقه‌مند است؟ آن‌ها را در دفترش بنویسد. به چه تیپ سؤال‌هایی بیشتر علاقه پیدا کرده است؟ ضعف‌های خودش را بنویسد. اگر از تابع نمرهٔ کم گرفته، در دفترش یادداشت کند و بنویسد: علت اینکه از بخش تابع نمره کم گرفته، چه بوده است؟ درس نخوانده بودم؟ شب قبلش مهمان داشتیم؟ مسائل سخت بودند؟ مسائلی که معلم مطرح کرد دوست نداشتم؟ دچار بدفهمی شده بودم؟ این‌ها می‌شوند فراشناخت. یعنی کم‌کم روی شناخت‌های خودش شناخت به دست می‌آورد. آرام‌آرام یاد می‌گیرد که نگاه فراشناختی داشته باشد و خودش را تجزیه و تحلیل کند.

دانش‌آموز باید بداند مسئله اگر در نگاه اول حل می‌شد، مسئله نبود. پس مسئله یعنی چالش

این بعدها به درد زندگی روزمره‌اش هم می‌خورد. به‌نحوی کارهایی را که توانسته انجام بدهد و کارهایی را که نتوانسته است، خود ارزیابی می‌کند. اگر امروز ریاضی را خوب امتحان داده و برخلاف همیشه ۱۹ یا ۲۰ گرفته. در دفترچهٔ خاطرات ریاضی می‌نویسد که من این کار را انجام دادم و توانستم امتحان را خوب بدهم. می‌تواند این دفترچهٔ خاطرات ریاضی را یادگاری نگه دارد. هر سال یک دفترچه، غیر از جزوهٔ ریاضی در کنار آن، می‌تواند مهم باشد.

دربارهٔ شناخت بدفهمی و رفع بدفهمی چه توصیه‌ای به دانش‌آموزان دارید؟ چگونه دانش‌آموز پی ببرد که کدام قسمت را بد فهمیده است و چه کاری باید انجام دهد که بدفهمی‌ها رفع شوند؟

اگر به مرحلهٔ فراشناخت رسیده و توانسته باشد خودش را تجزیه و تحلیل کند که کم و بیش معلوم می‌شود کجاها بدفهمی صورت گرفته است. دانش‌آموزان باید توجه کنند، گاهی بین تصور ذهنی از یک مفهوم ریاضی و تعریف دقیق آن مفهوم تفاوت بسیار است. من همیشه در پایان تدریس یک مفهوم ریاضی، معمولاً در ۱۵ دقیقهٔ پایانی کلاس، ورقه‌های سفیدی در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهم و از آن‌ها می‌خواهم هر یک به زبان خیلی ساده، آنچه را که از درس امروز برداشت کرده‌اند، فهرست‌وار بنویسد. برای مثال، اگر آموزش امروز معادلهٔ درجهٔ دوم بود، از آن‌ها می‌خواهم با جمله‌بندی خودشان بدون آنکه به کتاب یا جزوهٔ کلاس نگاه کنند، هفت جمله دربارهٔ معادله درجهٔ دوم بنویسند و بگویند که امروز از

حل معادلهٔ درجــهٔ دوم چه آموختند و چه مواردی برایشان مبهم بوده است یا مهم‌ترین بخش درس از نظر آن‌ها چه بوده است.

مــن همواره از دانش‌آموزانــم می‌خواهم که در کلاس ساکت نباشــند؛ یعنی گاهی که مسئله روی تابلو مطرح می‌شــود، از یکی از آن‌ها می‌خواهم که فکر کند و با صدای بلند نحوهٔ فکر کردنش راجع به مســئله را بازگو کند، تا هم من و هم بقیه بفهمیم، چه در ذهن او می‌گذرد. خیلی وقت‌ها دانش‌آموزان موفق ما کســانی نیستند که خیلی باهوش هستند، بلکه آن‌هایی هستند که مشارکت می‌کنند.

■ **در خصوص انگیزهٔ دانش‌آمــوزان، و تأثیر آن‌ها در توانایی‌های ریاضی چه نظری دارید؟**

آ یکــی از دلایــل عمــدهٔ بی‌انگیزگــی دانش‌آموز در درس ریاضــی، ناکامی‌های مســتمر او در یادگیری و عکس‌العمــل والدیــن و خانــواده در مقابــل این ناکامی‌هاست.

شکســت پی‌درپی، از احساس خودارزشمندی و اعتمادبه‌نفس در دانش‌آموز می‌کاهد.

■ **توصیهٔ شــما برای افزایش انگیــزهٔ دانش‌آموزان چیست؟**

آ یکی از راهکارهای عملی آن اســت که دانش‌آموزان با مطالعهٔ قبلی در جلســهٔ درس استاد حضور یابند. البتــه نه اینکه به کل موضــوع مربوط به درس آن جلسه احاطه داشته باشــند، بلکه آشنایی نسبی با موضوع گاه باعث ارتبــاط بهتر دانش‌آموز با کلاس و درس می‌شــود. توصیه می‌کنم در پایان هر بحث، دانش‌آموز از استاد بخواهد که موضوع درس جلسه بعــد را مطرح کنــد. دانش‌آموز هــم قبل از حضور در کلاس با مطالعهٔ کتاب درســی، آشــنایی نسبی با موضوع پیــدا کند. دانش‌آمــوزان باید بدانند که کتاب‌های درســی برای آنان نوشته شده و سعی بر آن بوده است که به زبان آنان تدوین شده باشد.

■ **آیــا اســتفاده از کتاب‌های کمک‌درســی را به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌کنید؟**

آیتی‌پور

آ حتمــاً اســتفاده از ایــن منابــع با ارتقای ســطح دانــش و توانایی‌های دانش‌آموزان در ارتباط است. اما نکتهٔ مهم این اســت که هر دانش‌آموزی براساس سطح توانایی‌هایش به منبع آموزشی خاصی نیاز دارد. شاید قبل از تهیهٔ کتاب و منبع کمک درســی لازم باشــد با اســتاد مربوط به آن درس مشورت کند. گاه من مشاهده می‌کنــم، دانش‌آموزان با تصور اینکه داشــتن منابع زیاد تأثیر مثبتی در پیشــرفت کار ریاضــی آن‌هــا دارد، برای یــک درس چند کتاب کمک آموزشــی تهیــه می‌کنند که ایــن نه تنها کمکی به توانایی‌هــای ریاضی آن‌ها نمی‌کند، بلکه باعث سردرگمی و اتلاف وقت و هزینه خواهد شد. فراموش نکنیم: *بهترین منبع در درس ریاضی، قبل از هر چیز کتاب درسی است.*

■ **در پایان اگر توصیهٔ خاص دیگری، برای دانش‌آموزان دارید، بفرمایید.**

آ توصیهٔ من به دانش‌آموزان این اســت که بپذیرند: مدرســه جایی اســت برای یادگیــری مهارت‌های زندگــی. گاهی محصل‌هــای ما در ابتــدا با معلم ارتباط خوبــی برقرار نمی‌کنند. بایــد بپذیریم که اصلاً یکی از هدف‌های آموزشــی مدرسه این است که دانش‌آمــوزان یاد بگیرنــد، چگونه مهارت‌های اجتماعی و رفتاری خود را افزایش دهند.

یاد بگیرند که نسبت به آنچه که یاد می‌گیرند، منتقد باشند. یعنی چگونگی ارتباط با هم‌کلاسی‌ها، معلم و خدمت‌گزار مدرسه هم به نوعی حل مسئله است.

بدانندکــه هیچ دو معلمی مثل هم نیســتند، همان‌طور که هیچ دو محصلی مثل هم نیستند.

■ **از وقتی که به این موضوع اختصاص دادید، تشــکر می‌کنم.**

آ من هم ســپاس‌گزار هستم و برای همهٔ دانش‌آموزان و همچنین معلمان زحمتکش آن‌ها آرزوی موفقیت دارم.

گاهی بین تصور ذهنی از یک مفهوم ریاضی و تعریف دقیق آن مفهوم تفاوت بسیار است

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
علیرضا سلمانی انباردان
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

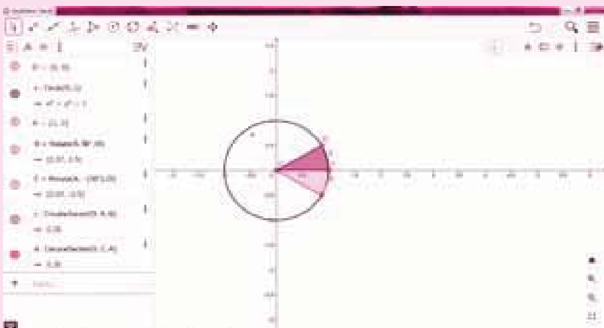
اشاره

در این قسمت ضمن تکمیل مطالب قسمت قبلی به ارائهٔ چند فعالیت دیگر در زمینهٔ رسم توابع مثلثاتی و اجرای آن‌ها با نرم‌افزار «جئوجبرا» می‌پردازیم. همانند قســـمت‌های قبلی، فعالیت‌ها از نمونه مثال‌ها و تمرین‌های متن کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ دوم متوسطه انتخاب شده‌اند.

فعالیت ۱. مشخص کردن زاویه‌ها در دایرهٔ مثلثاتی

فرض کنید می‌خواهیم در یک دایـــرهٔ مثلثاتی زاویه‌های $۳۰°$ و $-۳۰°$ را مشخص کنیم. مجدداً یادآور می‌شویم که در جئوجبرا جهت حرکت به‌صورت مبنا همان جهت مثلثاتی است. با اجرای دستورهای زیر این زاویه‌ها حاصل می‌شوند (شکل ۱):

۱) O=(۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A=(۱,۰)
۴) B=Rotate (A,۳۰°,O)
۵) C=Rotate (A,-۳۰°,O)
۶) CircularSector (O,A,B)
۷) CircularSector (O,C,A)



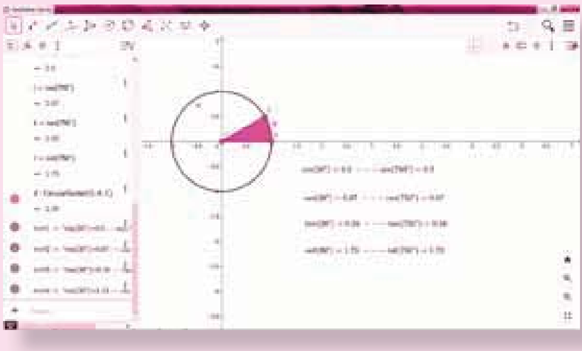
فعالیت ۲. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ هم‌انتها

محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $۳۰°$ و $۷۵۰°$ (شکل ۲):

۱) O=(۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A=(۱,۰)
۴) B=Rotate (A,۳۰°,O)
۵) C=Rotate (A,۷۵۰°,O)
۶) CircularSector (O,A,B)
۷) CircularSector (O,A,C)
۸) e=sin(۳۰°)
۹) f=cos(۳۰°)
۱۰) g=tan(۳۰°)
۱۱) h=cot(۳۰°)
۱۲) i=sin(۷۵۰°)
۱۳) j=cos(۷۵۰°)
۱۴) k=tan(۷۵۰°)
۱۵) l=cot(۷۵۰°)

برای نمایش اطلاعات و مقایسهٔ نسبت‌ها از ابزار متن استفاده می‌کنیم. در تایپ متن‌ها، لازم است حرف‌های k، j، i، h، g، f، e و l از قسمت «Advanced» و سربرگی که آیکون جئوجبرا دارد، انتخاب شوند تا مقدار عددی آن‌ها نمایش داده شود.

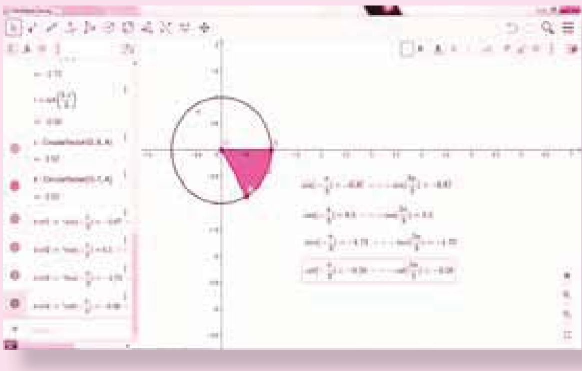
۱۶) sin(۳۰°)=e --- sin(۷۵۰°)=i
۱۷) cos(۳۰°)=f --- cos(۷۵۰°)=j
۱۸) tan(۳۰°)=g --- tan(۷۵۰°)=k
۱۹) cot(30°)=h --- cot(۷۵۰°)=l



محاسبهٔ نســـبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $-\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان (شکل ۳):

۱) O=(۰,۰)
۲) v:Circle (O,۱)
۳) A=(۱,۰)
۴) B=Rotate (A,-π/۳,O)

۵) C=Rotate (A,۵π/۳,O)
۶) CircularSector (O,B,A)
۷) CircularSector (O,C,A)
۸) e=sin(-π/۳)
۹) f=cos(-π/۳)
۱۰) g=tan(-π/۳)
۱۱) h=cot(-π/۳)
۱۲) i=sin(۵π/۳)
۱۳) j=cos(۵π/۳)
۱۴) k=tan(۵π/۳)
۱۵) l=cot(۵π/۳)
۱۶) sin(-\frac{π}{۳})=e --- sin(\frac{۵π}{۳})=i
۱۷) cos(-\frac{π}{۳})=f --- cos(\frac{۵π}{۳})=j
۱۸) tan(-\frac{π}{۳})=g --- tan(\frac{۵π}{۳})=k
۱۹) cot(-\frac{π}{۳})=h --- cot(\frac{۵π}{۳})=l

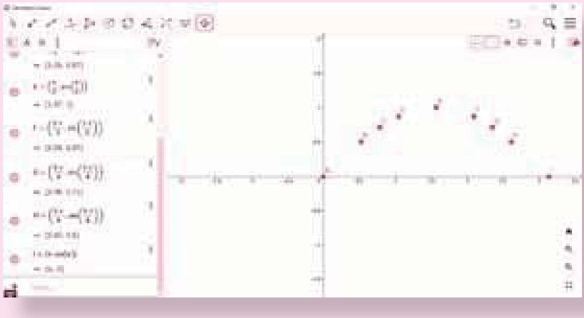


فعالیت ۳. رسم تابع سینوس

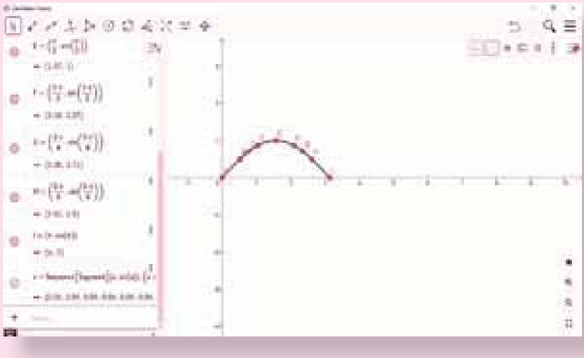
در این فعالیت مراحل رسم تابع سینوس با ضابطهٔ y=sinx با نقطه‌یابی در محیط جئوجبرا انجام می‌شود.

۱. نقاط به طول‌های $x = ۰, \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۶}, \pi$ را روی تابع سینوس مشخص و رسم کنید (شکل ۴). به این منظور، در قسمت «Input ...» دستورات زیر را وارد کنید:

A=(۰,sin(۰°)) B=(pi/۶,sin(pi/۶))
C=(pi/۴,sin(pi/۴)) D=(pi/۳,sin(pi/۳))
E=(pi/۲,sin(pi/۲)) F=(۲pi/۳,sin(۲pi/۳))
G=(۳pi/۴,sin(۳pi/۴)) H=(۵pi/۶,sin(۵pi/۶))
I=(pi,sin(pi))

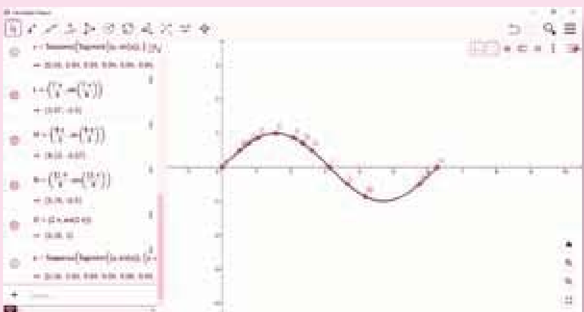


۲. نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۵). برای متصل کردن نقاط به یکدیگر از دستور زیر استفاده کنید:
v=sequence(segment((a,sin(a)),(a+pi/۱۰۰,sin (a+pi/۱۰۰))),a,۰,pi,pi/۱۰۰)



۳. مراحل قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$، با انتخاب طول‌های $x = \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۱۱\pi}{۶}, ۲\pi$ انجام دهید و آن‌ها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۶).

L=(۷pi/۶,sin(۷pi/۶)) M=(۳pi/۲,sin(۳pi/۲))
N=(۱۱pi/۶,sin(۱۱pi/۶)) O=(۲pi,sin(۲pi))
u=sequence(segment((a,sin(a)),(a+pi/۱۰۰,sin (a+pi/۱۰۰))),a,pi,۲pi,pi/۱۰۰)



۴. حال نمودار تابع سینوس را در بازهٔ [۰,۲π] بکشید و با توجه به یکســان بودن نمودار این تابع در بازه‌های به طول ۲π، آن را در بازهٔ [۴π,۴π−] رسم کنید (شکل ۷).

دستور رسم در بازهٔ [۰,۲π]:

a=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi/۱۰۰,sin(α+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)

دستور رسم در بازهٔ [۲π,۴π]:

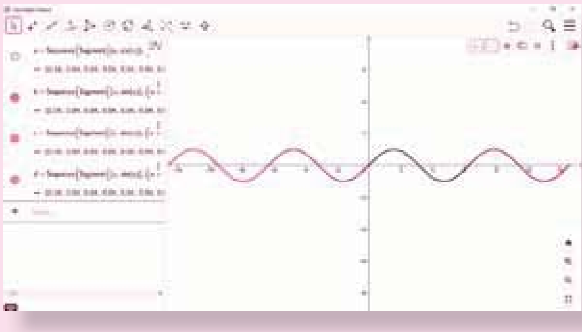
b=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi/۱۰۰,sin(α+pi/۱۰۰))),α,۲pi,۴pi,pi/۱۰۰)

دستور رسم در بازهٔ [۰,۲π−]:

c=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi/۱۰۰,sin(α+pi/۱۰۰))),α,-۲pi,pi/۱۰۰)

دستور رسم در بازهٔ [۲π−,۴π−]:

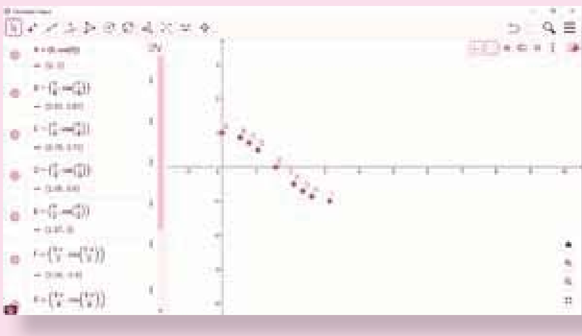
d=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi/۱۰۰,sin(α+pi/۱۰۰))),α,-۴pi,-۲pi,pi/۱۰۰)



فعالیت ۴. رسم تابع کسینوس

در این فعالیت مراحل رسم تابع کسینوس با ضابطهٔ y=cosx با نقطه‌یابی در محیط جئوجبرا انجام می‌شود.

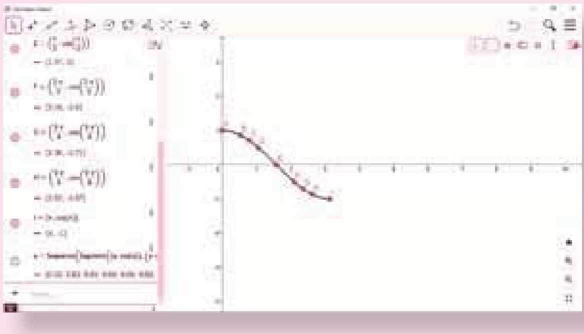
۱. نقاط به طول‌های $x=۰,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۶},\pi$ روی تابع کسینوس را مشخص و رسم کنید (شکل ۸).



A=(۰,cos(۰°))
B=(pi/۶,cos(pi/۶))
C=(pi/۴,cos(pi/۴))
D=(pi/۳,cos(pi/۳))
E=(pi/۲,cos(pi/۲))
F=(۲pi/۳,cos(۲pi/۳))
G=(۳pi/۴,cos(۳pi/۴))
H=(۵pi/۶,cos(۵pi/۶))
I=(pi,cos(pi))

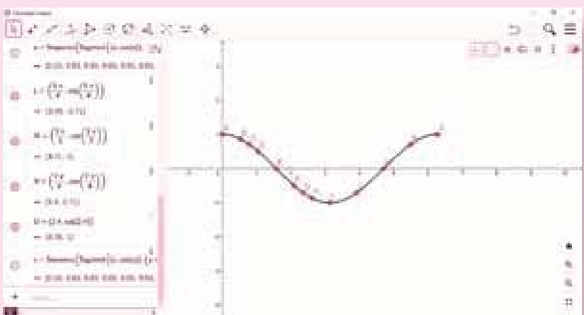
۲. نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۹).

u=sequence(segment((a,cos(a)),(a+pi/۱۰۰,cos(a+pi/۱۰۰))),a,۰,pi,pi/۱۰۰)



۳. مراحل قبل را برای رسم نمودار تابع کسینوس در بازهٔ [π,۲π] با انتخاب طول‌های $x=\frac{۵\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۴},۲\pi$ انجام دهید و آن‌ها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۱۰).

F=(۵pi/۴,cos(۵pi/۴))
G=(۳pi/۲,cos(۳pi/۲))
H=(۷pi/۴,cos(۷pi/۴))
I=(۲pi,cos(۲pi))
v=sequence(segment((a,cos(a)),(a+pi/۱۰۰,cos(a+pi/۱۰۰))),a,pi,۲pi,pi/۱۰۰)

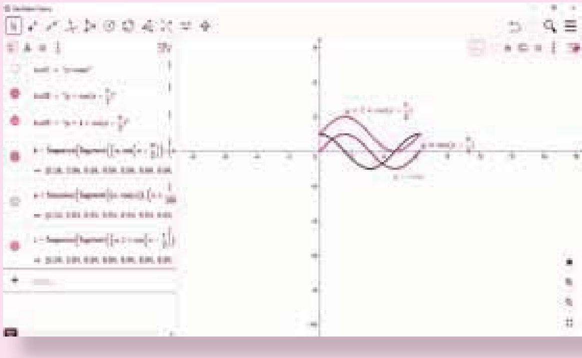


• رسم تابع $\cos(x-\frac{\pi}{۲})$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$:

b=sequence(segment((α,cos(α-pi/۲)),(α+pi/۱۰۰,
cos(α-pi/۲+ pi/۱۰۰))),α.۰,۲pi,pi/۱۰۰)

• رسم تابع $۱+\cos(x-\frac{\pi}{۲})$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ (شکل ۱۵):

c=sequence(segment((α,۱+cos(α-pi/۲)),(α+pi/۱۰۰,
۱+cos(α-pi/۲+pi/۱۰۰)),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)



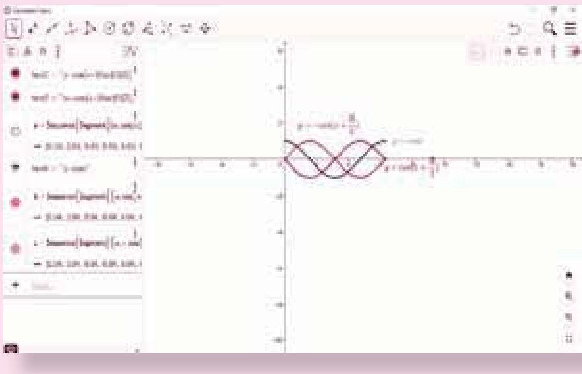
ث) $y=-\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

• رسم تابع $\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$:

b=sequence(segment((α,cos(α+pi/۲)),(α+pi
/۱۰۰,cos(α+pi/۲+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)

• رسم تابع $-\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ در بازه $[۰,۲\pi]$ (شکل ۱۶):

c=sequence(segment((α,-cos(α+pi/۲)),(α+pi
/۱۰۰,-cos(α+pi/۲+pi/۱۰۰)-۱/۲)),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)



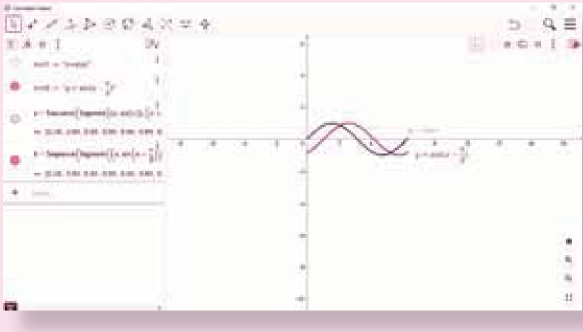
ج) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$

• رسم تابع sinx در بازهٔ $[۰,۲\pi]$:

a=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi
/۱۰۰,sin(α+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)

• رسم تابع sin(x-pi/۳) در بازهٔ [۰,۲pi] (شکل ۱۷):

b=sequence(segment((α,sin(α-pi/۳)),(α+pi
/۱۰۰,sin(α-pi/۳+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)



فعالیت ۶. **رسم نمودار توابع مثلثاتی با اتساع**

رسم نمودار توابع با ضابطه‌های زیر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$:

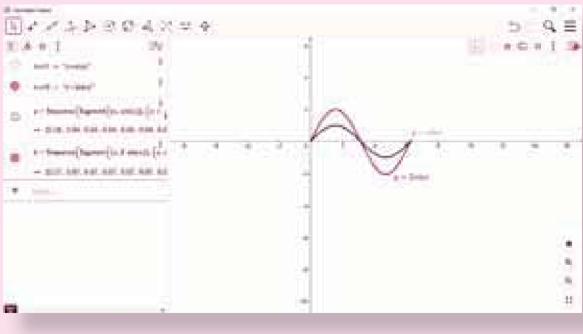
الف) $y=۲\sin x$

• رسم تابع sinx در بازهٔ $[۰,۲\pi]$:

a=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi/۱۰۰,
sin(α+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)

• رسم تابع ۲sinx در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ (شکل ۱۸):

b=sequence(segment((α,۲sin(α)),(α+pi/۱۰۰,
۲sin(α+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)



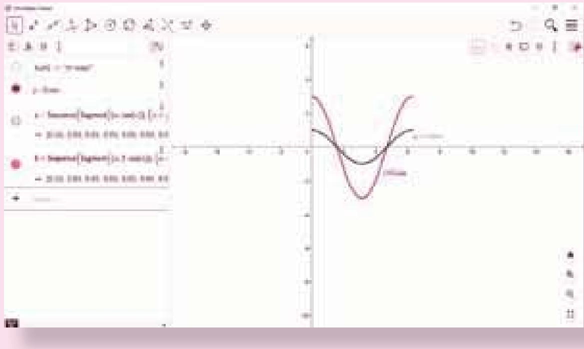
ب) $y=۳\cos x$

• رسم تابع cosx در بازهٔ $[۰,۲\pi]$:

a=sequence(segment((α,cos(α)),(α+pi/۱۰۰,
cos(α+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)

• رسم تابع ۳cosx در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ (شکل ۱۹):

b=sequence(segment((α,۳cos(α)),(α+pi/۱۰۰,
۳cos(α+pi/۱۰۰))),α,۰,۲pi,pi/۱۰۰)



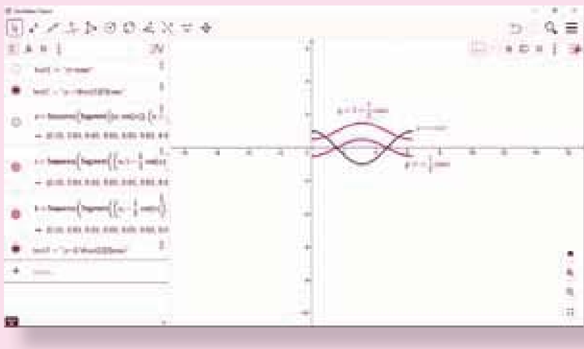
پ) $y = ۱ - \frac{۱}{۲}\cos x$

- رسم تابع $-\frac{۱}{۲}\cos x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$:

b = sequence(segment((α, $-\frac{۱}{۲}$cos(α)), (α + pi / ۱۰۰,
$-\frac{۱}{۲}$cos(α + pi / ۱۰۰))), α, ۰, ۲pi, pi / ۱۰۰)

- رسم تابع $۱ - \frac{۱}{۲}\cos x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ (شکل ۲۰):

c = sequence(segment((α, ۱ $-\frac{۱}{۲}$cos(α)), (α + pi / ۱۰۰,
۱ $-\frac{۱}{۲}$cos(α + pi / ۱۰۰))), α, ۰, ۲pi, pi / ۱۰۰)



فعالیت ۷. **رسم نمودار قدر مطلق توابع مثلثاتی**

رسم نمودار توابع با ضابطه‌های زیر در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$:

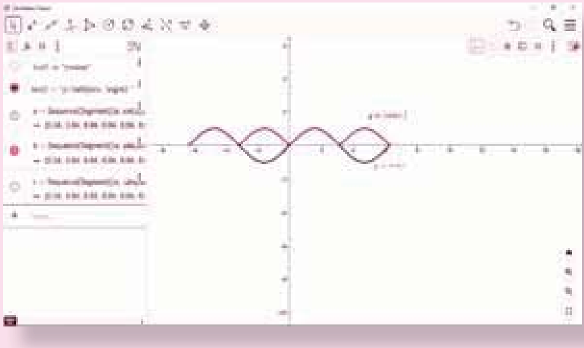
الف) $y = |\sin x|$

- رسم تابع sinx در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$:

a=sequence(segment((α,sin(α)),(α+pi/۱۰۰,
sin(α+pi/۱۰۰))),α,-۲pi,۲pi,pi/۱۰۰)

- رسم تابع |sinx| در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ (شکل ۲۱):

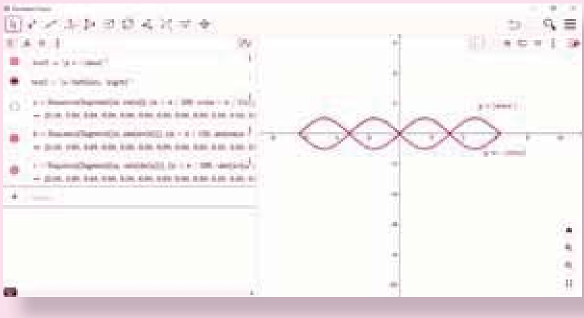
b=sequence(segment((α,abs(sin(α)),(α+pi/۱۰۰,abs(s
in(α+pi/۱۰۰))),α,-۲pi,۲pi,pi/۱۰۰)



ب) y = -|sinx|

- رسم تابع |sinx|- در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ (شکل ۲۲):

c=sequence(segment((α,-abs(sin(α)),(α+pi
/۱۰۰,-abs(sin(α+pi/۱۰۰)))),α,-۲pi,۲pi,pi/۱۰۰)



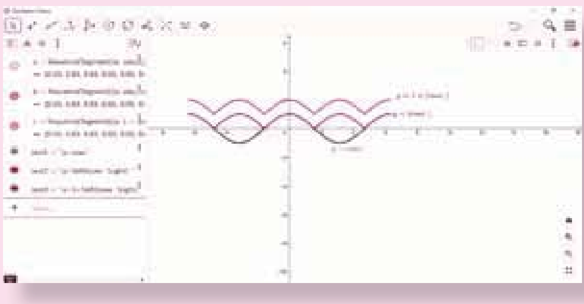
ج) y=۱+|cosx|

- رسم تابع |cosx| در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$:

b=sequence(segment((α,abs(cos(α))),(α+pi
/۱۰۰,abs(cos(α+pi/۱۰۰)))),α,-۲pi,۲pi,pi/۱۰۰)

- رسم تابع ۱+|cosx| در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ (شکل ۲۳):

c=sequence(segment((α,۱+abs(cos(α))),(α+pi
/۱۰۰,۱+abs(cos(α+pi/۱۰۰)))),α,-۲pi,۲pi,pi/۱۰۰)



*منابع

۱. کتاب درسی ریاضی ۲، دورهٔ دوم متوسطه علوم تجربی، ۱۳۹۷.
۲. کتاب درسی حسابان ۱، دورهٔ دوم متوسطهٔ ریاضی و فیزیک، ۱۳۹۷.
3. www.geogebra.org

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متـــون ریاضی

تعریف: گـــراف $G=(V, E)$، مجموعه‌ای از رأس‌ها چـــون V و مجموعه‌ای از یال‌ها چون E است (هر دو مجموعه متناهی هستند و مجموعهٔ V ناتهی است، مگر غیر از آن تصریح شـــود)، به طوری که هر یال بین دو رأس واقع اســـت (دو رأس را به هم مربوط می‌کند) یا یک رأس را دوباره به خودش مربوط می‌کند. معمولاً از نمادهای (V_G, E_G) یا $(V(G), E(G))$ برای نمایش آن استفاده می‌شود.

یک رأس معمولاً با یک نقطه تصور می‌شـــود (نشـــان داده می‌شود). به طور مطلق، رأس اولین عضو دو مجموعه‌ای است که یک گراف را شکل می‌دهند.

هر یال معمولاً با یک پاره‌خط یا منحنی تصور می‌شود (نشان داده می‌شود) که یک رأس را به رأس دیگر، یا یک رأس را به خودش وصل می‌کند. به طور مطلق، یال دومین عضو از دو مجموعه‌ای است که یک گراف را شکل می‌دهند.

تعداد رأس‌های یک گراف «مرتبهٔ گراف» و تعداد یال‌های آن «اندازهٔ گراف» نامیده می‌شود.

یال ساده یالی است که یک رأس را به رأس دیگر وصل می‌کند.

طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

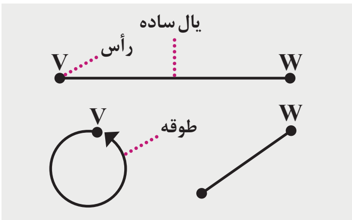
نقاط انتهایی یک یال (دو ســـر یال) رأس‌هایی هستند که توسط آن یال به هم وصل شده‌اند. یک طوقه فقط یک نقطهٔ انتهایی دارد.

گراف ساده گرافی است چون G که فاقد طوقه باشد و نیز هیچ دو یالی که نقاط انتهایی یکسان دارند، در G نداشته باشیم.

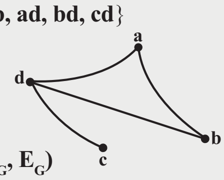
در یک گراف ساده، یک یال با دو رأس انتهایی V و W را به صورت $\{V, W\}$ ثبت می‌کنیم (نشان می‌دهیم) و برای ساده‌نویسی به صورت VW می‌نویسیم.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Graph .... گراف
2. Vertex .... رأس
3. Edge .... یال
4. Finit .... متناهـــی
5. Nonempty .... ناتهی
6. Abstractly .... به‌طور مطلق
7. Segment .... پاره‌خط
8. Curve .... منحنی
9. Order .... مرتبه
10. Size .... اندازه
11. Loop .... طوقه
12. Proper .... ساده
13. Endpoints .... نقاط انتهایی
14. Simple graph .... گراف ساده



$V= \{a, b, c, d\}$
$E= \{ab, ad, bd, cd\}$



$G= (V_G, E_G)$

Definitions:

- A ***graph*** $G = (V, E)$ is a set V of vertices and a set E of edges (both sets are finite and V is nonempty unless specified otherwise) such that each edge is associated with either two vertices or one vertex twice. It is sometimes denoted (V_G, E_G) or $(V(G), E(G))$.
- A ***vertex*** is usually conceptualized as a point. Abstractly, it is a member of the first of the two sets that form a graph.

An ***edge*** is usually conceptualized as a line segment or curve, either joining one vertex to another or joining a vertex to itself. Abstractly, it is a member of the second of the two sets that form a graph.

The number of vertices of a graph is often called its ***order***. The number of edges of a graph is sometimes called its ***size***.

- A ***proper edge*** (or ***link***) is an edge that joins one vertex to another.
- A ***loop*** (or ***self-loop***) is an edge that joins a vertex to itself.
- A ***simple graph*** is a graph G that has no loops and in which no two edges have the same endpoints. In a simple graph, an edge with endpoints v and w can be regarded as the pair {v, w} and is often denoted simply az vw.

برای ترجمهٔ دانش‌آموزان

A graph with no edges is called a ***null graph***. If further, V is empty, then the result is the ***empty graph***. (Note that some researchers invert the meanings of null graph and empty graph.)

....

....

....

The ***trivial graph*** has just one vertex and no edges.

....

Vertices v and w are ***adjacent*** if there is an edge whose endpoints are v and w.

....

حمیدرضا زیارتی

مـــاز

یک‌چهارم

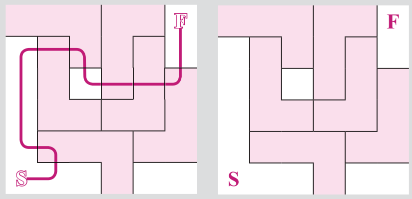
در هر معما شما باید با حرکت‌های عمودی و افقی از S به F بروید، البته باید قوانین زیر را رعایت کنید:

۱. نقشـــهٔ هر معما از چند مربع کوچک تشکیل شده که مرز مربع‌های کوچک آن حذف شده است. نقشهٔ مثال حل‌شده یک صفحهٔ ۵ در ۵ است که از ۲۵ مربع کوچک تشکیل شده است. از هر مربع کوچک حداکثر یک‌بار می‌توان عبور کرد.

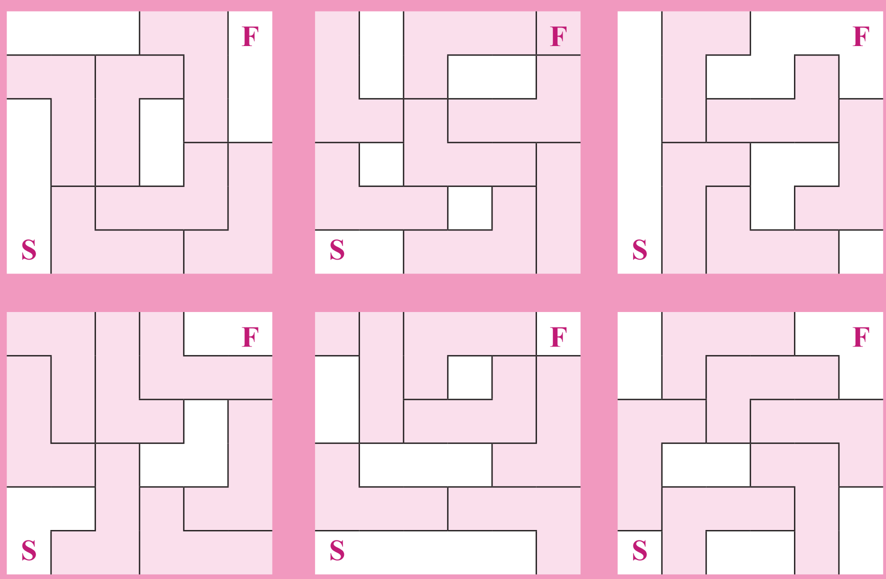
۲. ناحیه‌هایی که رنگ شده‌اند، همگی «L» شکل هستند و از ۴ مربع کوچک تشکیل شده‌اند. مسیر شما باید درست از یک مربع کوچک هر یک از این ناحیه‌ها عبور کند. برای ناحیه‌های سفید هیچ شرطی وجود ندارد. به مثال حل‌شده خوب دقت کنید.

مثال:

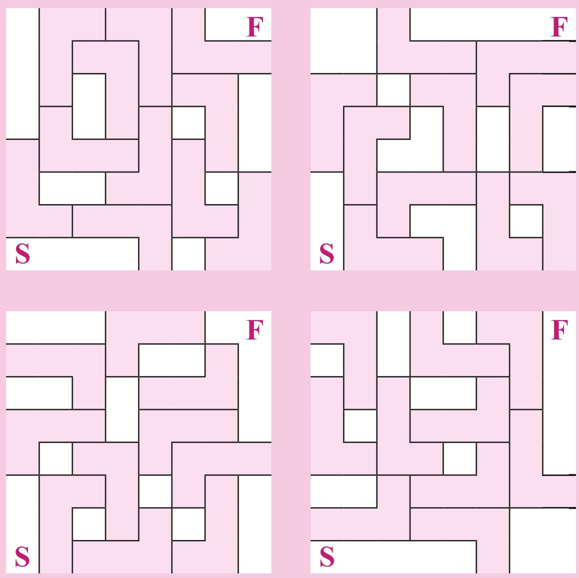
حل:



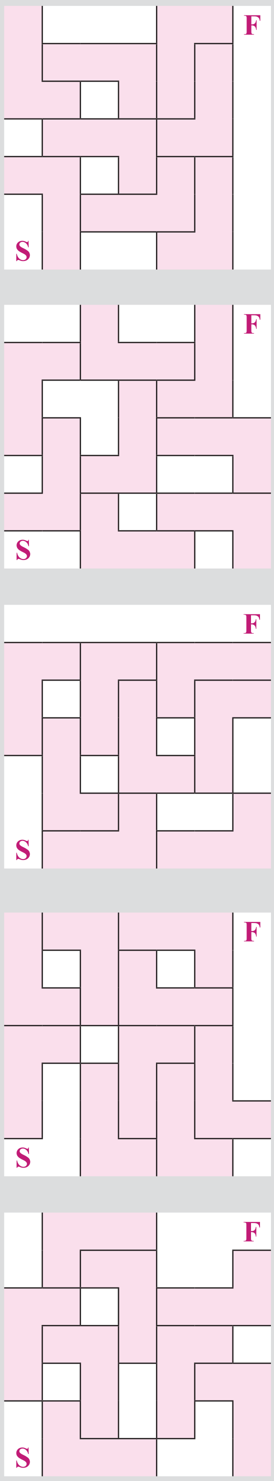
الف

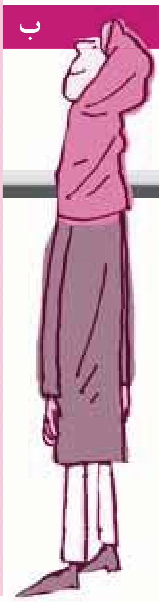


ب



پ





پاسخ (صفحهٔ ۶۴)

ریاضی ۱

(پایهٔ دهم ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. برای دنبالهٔ ...۳،۸،۱۶،۲۷،۴۱ یک جملهٔ عمومی به‌دست آورید.

۲. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۲۴- و مجموع شش جملهٔ اول آن ۲۱- اســت. در این صورت حاصل $\frac{t_{۱۱}}{t_{۵}}$ را به‌دســت آورید.

۳. اگر $t_n=(۲a-۸)n^۲+(a+۱)n+a+۲$ یک الگوی خطی باشد، حاصل $t_۹-t_۵$ را به‌دست آورید.

۴. ثابت کنید که اگر $a^۲$، $b^۲$ و $c^۲$ یک دنباله حسابی تشکیل دهند، عددهای $\frac{۱}{b+c}$، $\frac{۱}{a+c}$ و $\frac{۱}{a+b}$ نیز یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

۵. اگر $\text{Sin}\,x=\frac{۷}{۲۵}$ و انتهای کمان x در ربع دوم باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

$$A=(\tan x+\text{Cot}x)(\text{Cos}^۲x-\text{Sin}^۲x)$$

۶. درســتی تســاوی (Sinx+tanx)(Cosx+Cotx)=(۱+Sinx)(۱+Cosx) را بررسی کنید.

۷. اگر مجموعهٔ مرجع U دارای ۱۰۰ عضو باشــد و داشــته باشیم: n(A′)=۵۵ و n(B-A)=۲۰، در این صورت A∪B چند عضو دارد؟

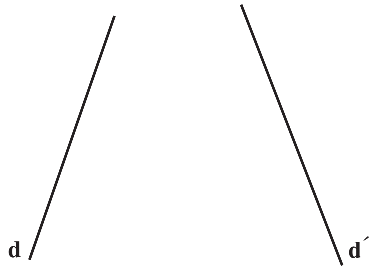
۸. اگــر A=(۱,x) و B=(x-۱,x+۲) دو نقطــه در صفحه مختصات باشند، و خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B با جهت مثبت محور xها زاویهٔ °۶۰ بسازد، مقدار x را به‌دست آورید.

هندسهٔ ۱

(پایهٔ دهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. در شکل ۱ D و D′ قسمتی از دو ضلع زاویهٔ A هستند و رأس A در دسترس نیست. نیم‌ساز زاویهٔ A را رسم کنید.



شکل۱

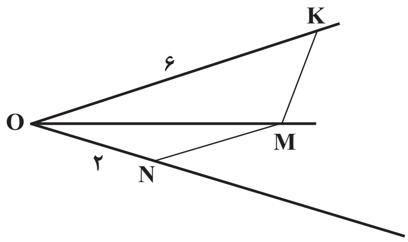
۲. به کمک خط‌کش و پرگار یک زاویهٔ 105° رسم کنید.

۳. ســه نقطهٔ N، M و P که روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. متوازی‌الاضلاعی رســم کنید که این سه نقطه وسط‌های سه ضلع آن باشند.

(مسئله چند جواب دارد؟)

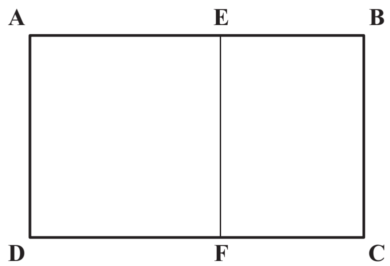
۴. ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع اندازه دو قطر، کوچک‌تر از محیط و بزرگ‌تر از نصف محیط متوازی‌الاضلاع است.

۵. در شکل ۲ اگر M نقطه‌ای روی نیم‌ساز $\hat{O}$ باشد، مساحت مثلث OMN چه کسری از مساحت مثلث OMK است؟



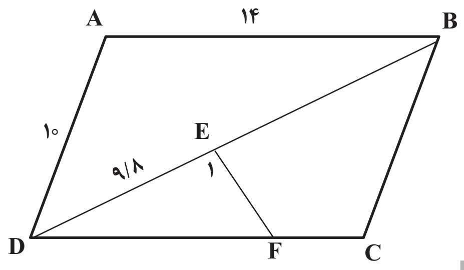
شکل ۲

۶. اگر در شکل ۳، نســبت طول به عرض مستطیل بزرگ با نسبت طول به عرض در مستطیل کوچک برابر باشد، این نسبت را به‌دست آورید (AEFD مربع است).



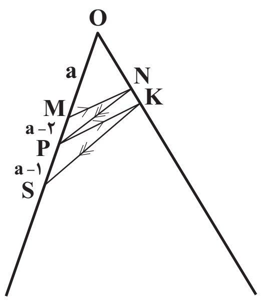
شکل ۳

۷. در متوازی‌الاضلاع شــکل ۴ داریم: $\hat{E}_1=\hat{C}$. اگر ED=۹/۸ باشد، اندازه EF را به‌دست آورید.



شکل ۴

۸. با توجه به شکل ۵، a را به‌دست آورید (MN||PK و NP||KS).



شکل ۵

ریاضی ۲

(پایه یازدهم تجربی)

هادی شهیدی

۱. اگــر عــدد ۳، بیــن ریشــه‌های معادلــهٔ درجــهٔ دوم $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$ باشد، حدود m را بیابید.

۲. معادلهٔ زیر چند ریشهٔ صحیح دارد؟

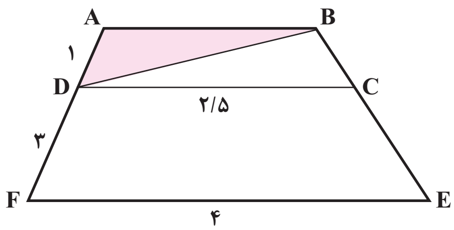
$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-7=0$ باشند، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{2\beta^2(3\alpha+7)}{(4\alpha^2-6\alpha-11)(2\beta^2-3\beta+1)}$$

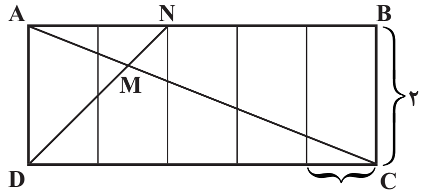
۴. دو انتهــای یکــی از قطرهــای مســتطیل A(۱,۷) و C(-۴,۱۹) هستند. در صورتی که زاویهٔ بین دو قطر مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل را بیابید.

۵. در شــکل ۱، مساحت ناحیهٔ هاشورخورده چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ ABEF است؟



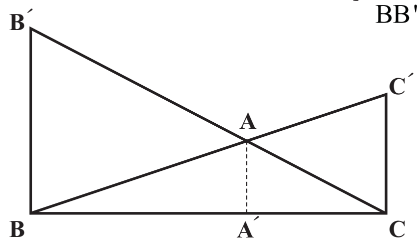
شکل ۱

۶. در شکل ۲، پنج مستطیل ۱×۲ در کنار یکدیگر مستطیل ABCD را تشکیل داده‌اند. اندازهٔ پاره‌خط MN را بیابید.



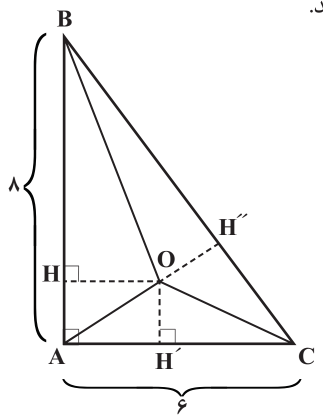
شکل ۲

۷. در شکل ۳، پاره‌خط‌های 'AA، 'BB و 'CC موازی‌اند. $\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}$ را بیابید.



شکل ۳

۸. در شکل ۴، $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است $(\hat{A}=90^\circ)$. اگر نیمساز دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، فاصلهٔ O از وتر مثلث ABC را بیابید.



شکل ۴

حسابان ۱

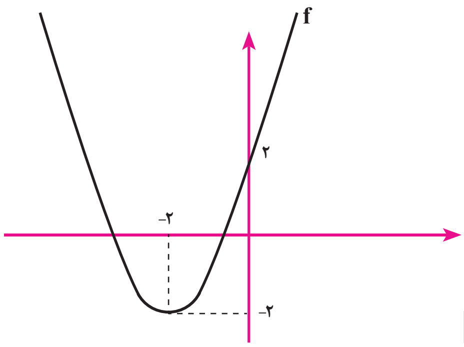
(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به‌صورت $S_n=n^2+3n$ است. جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید.

۲. اگر مجموع مجذورات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a-3)x-a+1=0$ مینیمم شود، مقدار a و ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

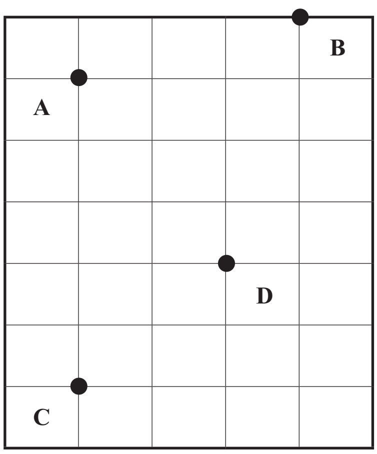
۳. نمودار تابع درجهٔ دوم $y=f(x)$ در شکل ۱ داده شده است. مجموعه جواب‌های معادلهٔ $f(x)=4x+3$ را به دست آورید.



شکل ۱

۴. معادلهٔ $(x+1)(x+3)=\sqrt{x^2+4x+5}$ را حل کنید.

۵. در سه نقطهٔ A، B و C در شهری ایستگاه هوایی امداد نجات وجود دارد. حادثه‌ای در نقطهٔ D اتفاق افتاده است. کوتاه‌ترین مسیر برای حضور تیم امداد و نجات مربوط به کدام ایستگاه است؟
اگر طول ضلع هر یک از مربع‌های شبکه شکل ۲ یک کیلومتر باشد، مقدار کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟



شکل ۲

۶. اگر $Sgn(x)=\begin{cases}1 & , \ x>0\\ 0 & , \ x=0\\ -1 & , \ x<0\end{cases}$ باشد، کدام زوج توابع زیر مساوی‌اند؟

الف) $f(x)=x\ Sgn(x) \quad , \quad g(x)=|x|$

ب) $f(x)=Sgn(x^2+1) \quad , \quad g(x)=1$

پ) $f(x)=\frac{|x|}{x} \quad , \quad g(x)=Sgn(x)$

۷. اگر $f(x)=\sqrt{-x^2+3x}$ و $\begin{cases} g:N\to R \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases}$ باشند، تابع f.g را به‌صورت زوج مرتب نشان دهید.

۸. دامنه و برد تابع $f(x)=4x-\sqrt{x}$ را به دست آورید.

آمار و احتمال

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمود داورزنی

۱. هم‌ارزی زیر را ثابت کنید.

$$[(p\vee q)\wedge(q\Rightarrow p)]\equiv\sim p\Rightarrow p$$

۲. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2+2 عددی زوج باشد، آن‌گاه n نیز عددی زوج است.

۳. گزاره‌های زیر را با استفاده از سورها بنویسید و ارزش هر یک را تعیین کنید:

الف. باقی‌ماندهٔ مربع هر عدد صحیح تقسیم بر ۴، یا برابر با ۰ است یا برابر ۱.

ب. هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که جذر قرینه‌اش عددی صحیح باشد.

۴. سه نفر در مورد تعداد بی‌سوادهای روستایشان به‌صورت زیر گفت‌وگو می‌کردند:

اولی: تعداد افراد بی‌سواد کمتر از ۱۵۰ نفر است.

دومی: حداقل ۱۵۰ نفر بی‌سواد داریم.

سومی: روستای ما حداقل ۱ نفر بی‌سواد دارد.

اگر فقط یکی از سه نفر راست گفته باشد، تعداد بی‌سوادهای این روستا چند نفر است؟

۵. مجموعه‌ای چهارعضوی بنویسید، به‌طوری که از هر دو عضو دلخواه آن، یکی عضو دیگری باشد.

۶. تعداد افرازهای $A=\{2,4,6,8,10\}$ به سه زیرمجموعه، چندتاست؟

۷. در یک ورزشگاه همهٔ طرفداران تیم A کلاه سفید به سر دارند. همچنین همهٔ افراد کمتر از ۲۵ سال، عینک به چشم دارند و هر عکس عینکی است، طرفدار تیم A است. اگر بدانیم همهٔ کلاه‌به‌سرها کمتر از ۲۵ سال دارند، به کمک قوانین مجموعه‌ها نشان دهید، همهٔ طرفداران تیم A زیر ۲۵ سال دارند.

۸. با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی عبارت‌های زیر را نشان دهید:

الف. $(A\cup B=A\cup C,\ A\cap B=A\cap C)\Leftrightarrow B=C$

ب. $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

۹. ثابت کنید که اگر $A\cap X=\varnothing$ و $A\cup X=B$، آن‌گاه: $X=B-A$.

۱۰. اگر A، B و C سه زیرمجموعهٔ غیرتهی باشند و $A\times C=B\times C$، ثابت کنید: $A=B$.

۱۱. اگر $A=\{x\mid x\in N, x^2<14\}$ و $B=\{(x,y)\mid x,y\in N, x+y<5\}$، $n(A^2-B)$ را محاسبه کنید.

هندسهٔ ۲

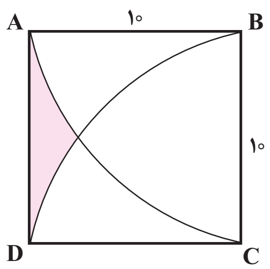
(پایهٔ یازدهم ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. از نقطهٔ A دو مماس بر دایرهٔ $C(O,4)$ رسم کردیم. زاویهٔ بین دو مماس ۱۲۰ درجه است. طول قطعهٔ مماس و مساحت بین دو مماس و دایره را به‌دست آورید.

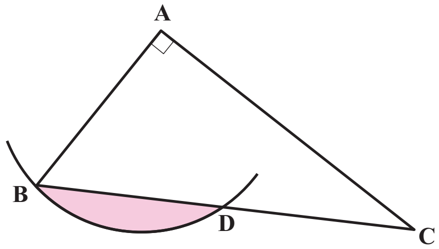
۲. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a مفروض است. ثابت کنید شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ و شعاع دایره محاطی خارجی آن $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

۳. در شکل ۱ چهارضلعی ABCD مربع و دو کمان از دایره‌ای به شعاع ضلع مربع رسم شده‌اند. اگر طول ضلع مربع ۱۰ باشد، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



شکل ۱

۴. در شکل ۲، مثلث قائم‌الزاویه ABC به اضلاع قائمه ۳ و $\sqrt{3}$ مفروض است. اگر کمان BD قسمتی از دایره به مرکز A و شعاع $\sqrt{3}$ باشد، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



شکل ۲

۵. دوازده ضلعی منتظمی به ضلع a مفروض اســت. مســاحت این دوازده ضلعی را بیابید.

۶. یک ذوزنقهٔ متساوی‌الســاقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط است. ثابت کنید قطر دایره واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است.

۷. وتر AB به طول ۹ به وسیلهٔ نقطهٔ C به نسبت یک به دو تقسیم شــده اســت. طول کوتاه‌ترین وتری را که از نقطهٔ C در این دایره می‌گذرد، بیابید.

۸. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ مماس داخل‌اند. چند وتر در دایرهٔ بزرگ‌تر وجــود دارد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس و طول آن $۴\sqrt{۶}$ اســت؟

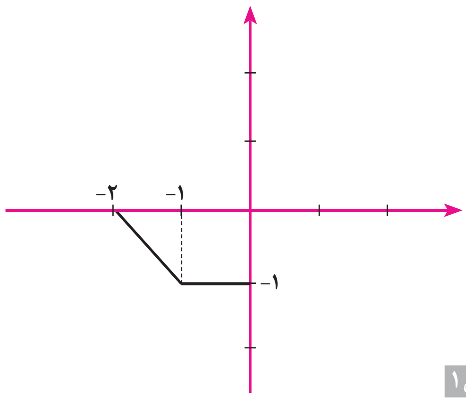
حسابان ۲

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. باقی‌مانــدهٔ تقســیم چنــد جملــه‌ای $x^{۱۳۹۸}+۳x^۲+x+۱$ بر $x^۲-x+۱$ را به‌دست آورید.

۲. اگــر نمــودار تابــع f به‌صــورت شــکل ۱ باشــد، دامنــهٔ تابع $h(x)=\dfrac{۱}{-۱+f^۲(x)}$ را به‌دست آورید.



شکل ۱

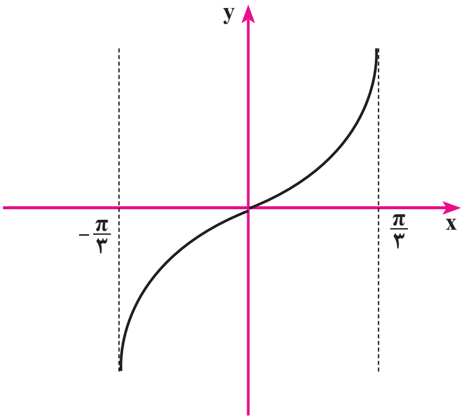
۳. اگر $f:R\to R$ تابعی اکیداً صعودی با برد R باشــد، ثابت کنید معادلهٔ $f(x)=۰$ دقیقاً یک جواب دارد.

۴. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید:

الف) $\cos ۲x-۵\cos x+۳=۰$

ب) $\sin ۲x+\sqrt{۳}\cos x=۰$

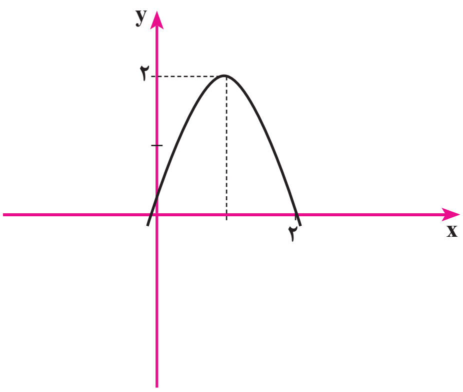
۵. در شــکل ۲ نمودار تابع $f(x)=-\tan ax$ را مشاهده می‌کنید. مقدار a چقدر است؟



شکل ۲

۶. بــه روش هندســی (نمــوداری) تعــداد جواب‌هــای معادلــهٔ $x^۲-۱=|\sin x|$ را مشخص کنید.

۷. نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورتی اســت که در شکل ۳ می‌بینید. دامنه و برد تابع $g(x)=-۲f(x+۲)-۱$ را تعیین کنید. ســپس نمودار تابع g را رسم کنید



شکل ۳

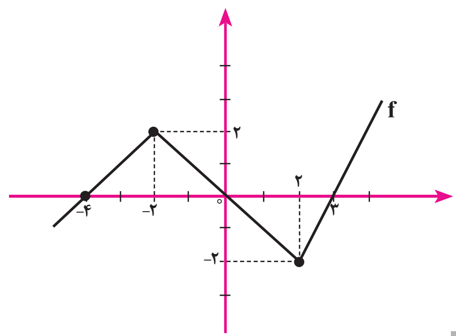
۸. انتهای کمان‌های جواب‌های معادلهٔ $\cos ۲x+\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=۰$ روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چند ضلعی هستند؟

ریاضی ۳

(پایهٔ دوازدهم تجربی)

آناهیتا کمیجانی

۱. نمودار تابع f در شکل ۱ آمده است. تابع f- روی چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

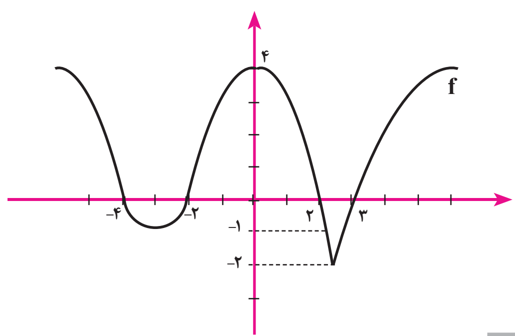


شکل ۱

۲. اگر داشـــته باشیم: $f(x)=\frac{1+x^{2}}{1-x^{2}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{2}}$، دامنهٔ تابع gof را به دست آورید.

۳. ضابطهٔ تابع معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را به دست آورید.

۴. نمودار تابع f در شکل ۲ رسم شده است. نمودار تابع $|f|$ را رسم کنید.



شکل ۲

۵. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=-3\sin(\frac{\pi}{4}x)$ چهار برابر دورهٔ تناوب تابع $y=2\cos(\frac{kx}{3})-5$ است. مقدار k را تعیین کنید.

۶. نمودار تابع $y=|\tan x+1|$ را در بازهٔ $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ رسم کنید.

۷. به ازای چه مقادیری از k معادلهٔ $2\cos x+3k=1$ جواب دارد؟

۸. معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید:

الف) $\sin 3x+\sin 7x=0$

ب) $\sin 2x+\sqrt{2}\cos x=0$

ریاضیات گسسته

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. بـــه برهان خلف ثابت کنید: اگـــر a عددی گنگ و b عددی گویا باشـــد، آن‌گاه (a+b) عددی گنگ است. آیا a×b گنگ است؟ چرا؟ آیا a×b گویاست؟ چرا؟

۲. به کمک اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}\geq xy+yz+xz$$

۳. اگر p، q و r عددهای طبیعی باشـــند و : $pqr\,|\,pq+qr$، در این صورت ثابت کنید: p=r.

۴. چنـــد نقطـــه بـــا مختصـــات صحیـــح روی منحنی بـــه معادلهٔ زیر وجود دارد؟

$$5xy-y+x^{2}=3$$

۵. اگـــر a فرد و b زوج باشـــد و: $c\,|\,a+b$، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{2}+c^{2}+7$ را بر ۸ بیابید.

۶. حاصـــل عبارت $((6ab,12ab^{3}),(3a^{2}b,6a^{3}b))$ را به دســـت آورید $(a,b\in z)$.

۷. اگر $b\overset{n}{\equiv}c$، $a\overset{m}{\equiv}b$ و $(m,n)=d$، ثابت کنید: $a\overset{d}{\equiv}c$.

۸. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیـــم عدد a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم a را بر ۲۴ بیابید.

۹. اگر دوازدهم اردیبهشت ماه یک سال، پنج شنبه باشد، ۱۲ بهمن همان سال چه روزی خواهد بود؟

۱۰. چند نوع گراف منتظم از مرتبهٔ ۷ داریم؟

پاسخ مسائل

ریاضی ۱

۱. در دنبالۀ زیر:

۳ ، ۸ ، ۱۶ ، ۲۷ ، ۴۱

۵ ۸ ۱۱ ۱۴

۳ ۳ ۳

اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابتی نمی‌شود، ولی اختلاف‌ها یک دنبالۀ خطی تشکیل می‌دهند. این دنباله می‌تواند درجۀ دوم باشد. بهتر است آن را با «دنبالۀ مربعی»، یعنی ۲۵، ۱۶، ۹، ۴، ۱ که جملۀ عمومی آن عبارت است از : $a_n=n^2$، یا با دنبالۀ مثلثی، یعنی ....، ۱۰، ۶، ۳، ۱ که جملۀ عمومی آن عبارت است از : $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ مقایسه کنیم. اگر یک واحد به تک‌تک جمله‌های مربعی اضافه کنیم، به صورت .....، ۲۶، ۱۷، ۱۰، ۵، ۲ در می‌آید که جملۀ عمومی آن $a_n=n^2+1$ است. اگر هم آن‌ها را با دنبالۀ مثلثی جمع کنیم، خواهیم داشت:

۲+۱، ۵+۳، ۱۰+۶، ۱۷+۱۰،...$\Longrightarrow$ ۳، ۸، ۱۶، ۲۷، .....

پس جملۀ عمومی آن به صورت: $a_n=n^2+1+\frac{n(n+1)}{2}$ به‌دست می‌آید.

۲. طبق فرض مسئله داریم: $t_1+t_2+t_3=-24$ که آن را رابطۀ (۱) می‌نامیم. از طرف دیگر: $t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6=-21$ که طبق رابطۀ (۱) داریم:

$$-24+t_4+t_5+t_6=-21\Rightarrow t_4+t_5+t_6=3$$

می‌دانیم: $t_n=t_1r^{n-1}$ است، پس:

رابطۀ (۲):

$$t_4+t_5+t_6=3\Rightarrow t_1r^3+t_1r^4+t_1r^5=3\Rightarrow t_1r^3(1+r+r^2)=3$$

با توجه به رابطۀ (۱) داریم:

$$t_1+t_2+t_3=-24\Rightarrow t_1+t_1r+t_1r^2=-24\Rightarrow t_1(1+r+r^2)=-24$$

رابطۀ (۳):

با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳) داریم:

$$t_1r^3(1+r+r^2)=3\Rightarrow r^3\underbrace{t_1(1+r+r^2)}_{-24}=3$$

$$\xrightarrow{\text{رابطۀ (۲)}} r^3\times(-24)=3\Rightarrow r^3=\frac{3}{-24}$$

$$r^3=\frac{-1}{8}\Rightarrow r=\frac{-1}{2}$$

مسئله حاصل $\frac{t_{11}}{t_5}$ را از ما می‌خواهد، بنابراین:

$$\frac{t_{11}}{t_5}=\frac{t_1r^{10}}{t_1r^4}=r^6\xRightarrow{r=-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$$

۳. جملۀ عمومی یک الگوی خطی به‌صورت $t_n=an+b$ است که در آن a و b عددهای حقیقی دلخواه و ثابتی هستند. در نتیجه ضریب n^2 برابر صفر است.

$$2a-8=0\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4$$

پس: $t_n=5n+6$ که اگر به‌جای n عددهای ۹ و ۵ قرار دهیم، خواهیم داشت: $t_9=5\times9+6=51$ ، $t_5=5\times5+6=31$.

پس: $t_9-t_5=51-31=20$

۴. a^2، b^2، c^2 یک دنبالۀ حسابی است، پس رابطۀ $b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$ یا $2b^2=a^2+c^2$ برقرار است. از طرف دیگر باید ثابت کنیم $\frac{1}{a+c}$، $\frac{1}{b+c}$ و $\frac{1}{a+b}$ نیز یک دنبالۀ حسابی است؛ یعنی: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{a+c}$. از طرف $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$ شروع می‌کنیم تا به $\frac{2}{a+c}$ برسیم. با فرض $2b^2=a^2+c^2$ می‌توان نوشت:

$$b^2+b^2=a^2+c^2\Rightarrow b^2-c^2=a^2-b^2$$

$$\Rightarrow(b-c)(b+c)=a^2-b^2\Rightarrow b+c=\frac{a^2-b^2}{b-c}$$

پس: $\frac{b-c}{a^2-b^2}=\frac{1}{b+c}$. بنابراین:

$$A=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}+\frac{b-c}{a^2-b^2}\xrightarrow[\text{با مخرج مشترک‌گیری}]{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}\frac{a-b+b-c}{a^2-b^2}=\frac{a-c}{a^2-b^2}$$

از طرف دیگر: $b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$، در نتیجه:

$$A=\frac{a-c}{a^2-(\frac{a^2+c^2}{2})}=\frac{a-c}{\frac{2a^2-a^2-c^2}{2}}$$

$$=\frac{2(a-c)}{a^2-c^2}=\frac{2(a-c)}{(a-c)(a+c)}=\frac{2}{a+c}$$

بنابراین: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{a+c}$

۵. ابتدا رابطۀ A را ساده می‌کنیم:

$$A=(\frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x}+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x})(\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x)$$

$$=(\frac{\mathrm{Sin}^2x+\mathrm{Cos}^2x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x})(\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x)$$

$$\xRightarrow{\mathrm{Sin}^2x+\mathrm{Cos}^2x=1}(\frac{1}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x})(\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x)$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x}$$

برای محاسبۀ A ابتدا باید Cosx را به‌دست آورد و چون انتهای کمان x در ربع دوم است، پس Cosx منفی است.

$$\mathrm{Sin}\,x=\frac{7}{25},$$

$$\mathrm{Cos}^2x=1-\mathrm{Sin}^2x=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}\Rightarrow\mathrm{Cos}\,x=\frac{-24}{25}$$

بنابراین:

$$A=\frac{\mathrm{Cos}^2x-\mathrm{Sin}^2x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x}=\frac{\frac{576}{625}-\frac{49}{625}}{\frac{-24}{25}\times\frac{7}{25}}=\frac{\frac{527}{625}}{\frac{-168}{625}}=-\frac{527}{168}$$

۶.

$$(\mathrm{Sin}\,x+\tan x)(\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Cot}x)$$

$$=(\mathrm{Sin}\,x+\frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x})(\mathrm{Cos}\,x+\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x})$$

$$=(\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x})(\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x})$$

$$=\mathrm{Sin}\,x(\frac{\mathrm{Cos}\,x+1}{\mathrm{Cos}\,x})\mathrm{Cos}\,x(\frac{\mathrm{Sin}\,x+1}{\mathrm{Sin}\,x})$$

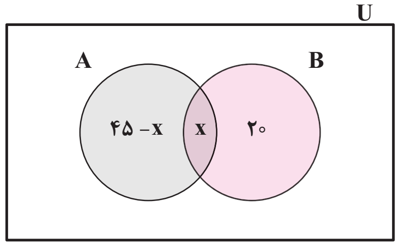
$$=(\mathrm{Cos}\,x+1)(\mathrm{Sin}\,x+1)$$

۷. تعداد عضوهای A برابر است با: $n(A)=n(U)-n(A')=۱۰۰-۵۵=۴۵$.

اگر $n(A\cap B)=x$ را در آن قرار دهیم، مطابق شکل ۱ خواهیم داشت:

$n(A\cup B)= n(A-B)+ n(A\cap B)+ n(B-A)\Rightarrow$

$n(A\cup B)= ۴۵-x+x+۲۰= ۶۵$



شکل ۱

۸. شیب خط را در نقطه‌های A، B، به‌دست می‌آوریم و با $\tan ۶۰ = \sqrt{۳}$ مساوی قرار می‌دهیم.

بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{x+۲-x}{x-۱-۱} = \sqrt{۳}$$

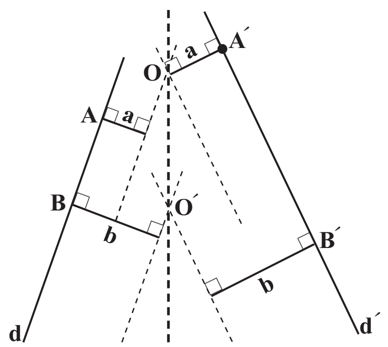
$$\Rightarrow \frac{۲}{x-۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}x - ۲\sqrt{۳} = ۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}x = ۲\sqrt{۳} + ۲ \Rightarrow x = \frac{۲\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$$

$$x = \frac{۶+۲\sqrt{۳}}{۳}$$

هندسهٔ ۱

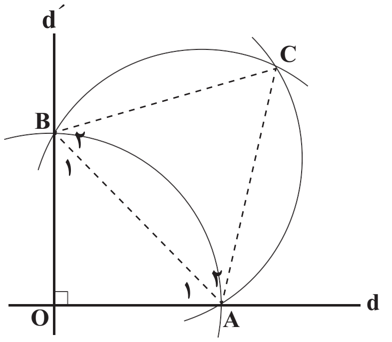
۱. بین دو خط d و d′ در شکل ۱، خطهایی به موازات d و d′ و به فاصلهٔ a از آن‌ها رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند.



شکل ۱

همچنین، خطهایی به موازات d و d′ و به فاصلهٔ b از آن‌ها رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O′ قطع کنند. OO′ جواب مسئله است. چون O از d و d′ به فاصلهٔ یکسان a و O′ از d و d′ به فاصلهٔ یکسان b است.

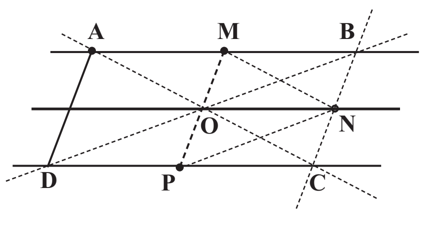
۲. دایره‌ای به شعاع دلخواه به مرکز O (محل تلاقی دو خط عمود بر هم d و d′) رسم می‌کنیم (شکل ۲) تا d را در A و d′ را در B قطع کند ($\hat{A}_۱ = ۴۵^\circ$ و $B_۱ = ۴۵^\circ$). به مرکز A و B دو کمان به شعاع AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند ($\hat{A}_۲ = ۶۰^\circ$ و $\hat{B}_۲ = ۶۰^\circ$) در نتیجه: $\widehat{OBC} = \widehat{OAC} = ۱۰۵^\circ$.



شکل ۲

۳. O را وسط MP در نظر می‌گیریم و از آن نقطه به موازات MN و NP خطهایی رسم می‌کنیم تا خط رسم شده از N به موازات MP را به‌ترتیب در نقطه‌های C و B قطع کند. BM را امتداد می‌دهیم تا CO را در A قطع کند و نیز CP را امتداد می‌دهیم تا BO را در D قطع کند. ABCD جواب مسئله است.

با انتخاب O به‌عنوان وسط MN و یا NP، دو جواب دیگر به‌دست می‌آید. مسئله سه جواب دارد (شکل ۳).



شکل ۳

۴. $\Delta OBC: OB+OC > BC \Rightarrow b < \frac{c}{۲} + \frac{d}{۲}$

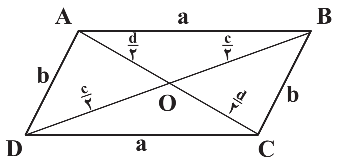
$\Delta OAC: OA+OB > AB \Rightarrow a < \frac{c}{۲} + \frac{d}{۲}$

I. $\Rightarrow a+b < c+d \Rightarrow \frac{\text{محیط متوازی الاضلاع}}{۲} < c+d$

$$\begin{cases} \Delta BCD: BD < BC+CD \Rightarrow c < a+b \\ \Delta ABC: AC < AB+BC \Rightarrow d < a+b \end{cases}$$

II. $\Rightarrow c+d <$ محیط متوازی الاضلاع

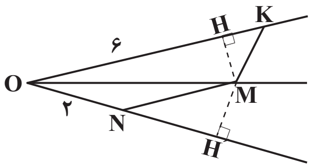
از I و II حکم به‌دست می‌آید.



شکل ۴

۵. چون M روی نیمساز است، پس: MH=MH′.

$$\frac{S\Delta OMN}{S\Delta OMK} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ON \times MH'}{\frac{۱}{۲} \times OK \times MH} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

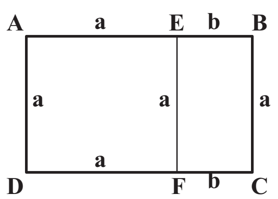


شکل ۵

۶.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow ۱ + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = k \Rightarrow ۱ + \frac{۱}{k} = k \Rightarrow k^۲ - k - ۱ = ۰ \Rightarrow k = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

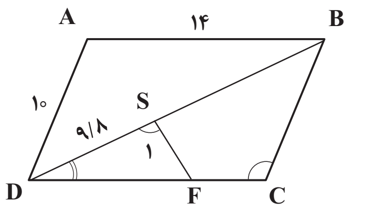


شکل ۶

۷.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E}_۱ = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{DEF} \approx \overset{\Delta}{DBC}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{DB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{EF}{۱۰} = \frac{۹/۸}{۱۴} \Rightarrow EF = ۷$$



شکل ۷

۸.

$$\Delta OPK \xrightarrow{MN \parallel PK} \frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OK}$$

$$\Delta OSK \xrightarrow{NP \parallel KS} \frac{ON}{OK} = \frac{OP}{OS}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OS} \Rightarrow \frac{a}{2a-2} = \frac{2a-2}{3a-3} \Rightarrow$$

$$3a^2 - 3a = 4a^2 - 8a + 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = 4,\ a = 1$$

a=۱ غیرقابل قبول است.

ریاضی ۲ (تجربی)

۱.

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$$

$$(x-m)(x-(m+1)) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$$

$$m < 3 < m+1 \Rightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m+1 > 3 \end{cases} \quad 2 < m < 3$$

۲.

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \qquad \sqrt{x-1}-2 = t$$

$$|t| + |t-1| = 1$$

با حل معادلهٔ فوق، وقتی ۰≤t≤۱ باشد، بر خط y=۱ منطبق می‌شود، پس:

$$0 \le \sqrt{x-1}-2 \le 1 \Rightarrow 5 \le x \le 10$$

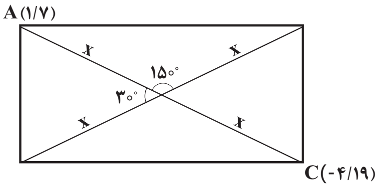
۶عدد=پاسخ

۳.

$$\frac{2\beta^2(2\alpha^2)}{(\cancel{6\alpha}+14-\cancel{6\alpha}-11)(\cancel{3\beta}+7-\cancel{3\beta}+1)} = \frac{4(\alpha\beta)^2}{3\times 8}$$

$$= \frac{4\times(-\frac{7}{2})^2}{24} = \frac{49}{24}$$

۴.



$$S = 2(\frac{1}{2}x^2.\mathrm{Sin}30) + 2(\frac{1}{2}x^2.\mathrm{Sin}150)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Sin}30=\mathrm{Sin}150} S = x^2$$

$$2x = \sqrt{5^2+12^2} = 13 \rightarrow x = \frac{13}{2} \Rightarrow S = x^2 = \frac{169}{4}$$

۵. با رسم قطر BF و با استفاده از قضیهٔ **تالس**، در مثلث‌های ABF و BEF داریم:

AB=۲

اگر 'AH و AH ارتفاع‌های ذوزنقهٔ ABEF و ABD باشند، داریم:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AH}{AH'} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{AH}{AH'} \rightarrow AH' = 4AH$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABEF}} = \frac{\cancel{2}AH\times 2}{\cancel{2}(2+4)\times AH'} = \frac{\cancel{AH}\times 2}{6\times 4\cancel{AH}} = \frac{1}{12}$$

۶.

$$\overset{\Delta}{AMN} \overset{\text{تساوی دو زاویه}}{\sim} \overset{\Delta}{MDC} \Rightarrow \frac{MN}{MD} = \frac{AN}{DC} \rightarrow \frac{MN}{2\sqrt{2}-MN} = \frac{2}{5}$$

$$MN = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

۷.

$$AA' \parallel BB' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{BB'} = \frac{CA'}{BC} \quad (1)$$

$$AA' \parallel CC' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{CC'} = \frac{BA'}{BC} \quad (2)$$

$$\rightarrow (1)+(2)\ \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{AA'}$$

۸. O نقطهٔ همرسی نیمسازهاست، پس:

OH=OH'=OH''

BC=۱۰

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{OAB}} + S_{\overset{\Delta}{OAC}} + S_{\overset{\Delta}{OAC}}$$

$$\frac{1}{2}\times 6\times 8 = \frac{1}{2}OH\times 8 + \frac{1}{2}OH\times 6 + \frac{1}{2}OH\times 10$$

$$24 = 12OH \rightarrow OH = 2$$

حسابان

۱.

$$\left.\begin{matrix} a_1 + a_2 = S_2 = 4+6 = 10 \\ a_1 = S_1 = 1+3 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_2 = 10-4 = 6$$

$$d = a_2 - a_1 = 6-4 = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 4 + (n-1)\times 2$$

$$a_n = 2 + 2n$$

۲. فرض کنیم 'x و "x ریشه‌های معادله باشند:

$$x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P = (a-3)^2 - 2(-a+1)$$

$$= a^2 - 4a + 7 = (a-2)^2 + 3$$

عبارت اخیر وقتی کمترین مقدار است که a=۲ شود. در این حالت داریم:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

۳.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$\begin{cases} \text{طول نقطهٔ مینیمم}: x = -2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \\ x = -2, y = -2 \Rightarrow -2 = 4a - 2b + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1,\ b = 4$$

$$f(x) = 4x + 3$$

$$x^2 + 4x + 2 = 4x + 3 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{-1, 1\}$$

۴.

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

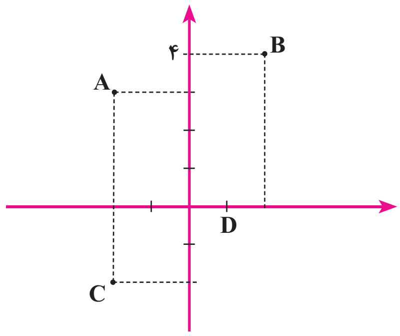
$$\text{فرض کنیم}: x^2 + 4x + 3 = t$$

$$t = \sqrt{t+2} \overset{\text{توان ۲}}{\Rightarrow} t^2 = t + 2$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \ \text{غیرقابل قبول} \\ t = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

۵. فرض می‌کنیم نقطهٔ D در مرکز صفحه مختصات باشد. فاصلهٔ هریک از نقاط از D را محاسبه می‌کنیم.



$$DB=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۰}$$
$$DA=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}$$
$$DC=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=\sqrt{۸}$$

نزدیک‌ترین ایستگاه، ایستگاه C با فاصلهٔ هوایی $\sqrt{۸}$ کیلومتر است.

۶. الف) داریم:

$$f(x)=x\,Sgn(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

پس: $f(x)=g(x)$ و چون دامنهٔ هر دو تابع یکسان است، دو تابع مساوی‌اند.

ب)

$$\left.\begin{matrix}f(x)=Sgn(x^۲+۱)=۱\\ D_f=D_g=R\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

پ)

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

به وضوح مشخص است که: $f\neq g$ زیرا: $D_f=R-\{۰\}$، ولی: $D_g=R$.

۷. ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم. باید داشته باشیم: $-x^۲+۳x\geq ۰$ و از آنجا: $D_f=[۰,۳]$

$$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳\}$$
$$(f.g)(۱)=f(۱).g(۱)=\sqrt{۲}\times\sqrt{۱}=\sqrt{۲}$$
$$(f.g)(۲)=f(۲).g(۲)=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲$$
$$(f.g)(۳)=f(۳).g(۳)=\sqrt{۰}\times\sqrt{۳}=۰$$
$$f.g=\{(۱,\sqrt{۲}),(۲,۲),(۳,۰)\}$$

۸.

$$D_f=[۰,+\infty]$$
$$y=۴x-\sqrt{x}=(۲\sqrt{x}-\frac{۱}{۴})^۲-\frac{۱}{۱۶}$$
$$(۲\sqrt{x}-\frac{۱}{۴})^۲\geq ۰\Rightarrow$$
$$(۲\sqrt{x}-\frac{۱}{۴})^۲-\frac{۱}{۱۶}\geq-\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow y\geq\frac{-۱}{۱۶}$$
$$\text{برد } f=\left[\frac{-۱}{۱۶},+\infty\right)$$

آمار و احتمال

۱. $[(p\vee q)\wedge(q\Rightarrow p)]\equiv[(p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)]\equiv p\vee(q\wedge\sim q)$ $\equiv p\vee F\equiv p\equiv p\vee p\equiv\sim p\Rightarrow p$

۲. به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. اگر n عددی فرد باشد، یعنی $n=۲k+۱$، خواهیم داشت:

$$n^۲+۲=(۲k+۱)^۲+۲=۴k^۲+۴k+۳$$
$$=۲(۲k^۲+۲k+۱)+۱=۲k'+۱$$

پس $n^۲+۲$ عددی فرد است.

۳. الف. $\forall x\in Z\,;x^۲=۴q+r\Rightarrow(r=۰\vee r=۱)$

ارزش این گزاره درست است؛ زیرا هر عدد صحیح به‌صورت $۴k$، $۴k+۱$، $۴k+۲$ یا $۴k+۳$ است و مربع هر کدام از این عددها به شکل $۴q+r$ خواهد بود که: $r=۰$ یا $r=۱$.

ب. $\nexists x\in R\,;\sqrt{-x}\in Z$

ارزش این گزاره غلط است. اگر: $x=-۴$، پس: $\sqrt{-x}=۲$. یعنی: $\sqrt{-x}\in Z$.

۴. این روستا بی‌سواد ندارد، زیرا اگر A افراد بی‌سواد این روستا باشند، پاسخ افراد اول تا سوم به‌صورت $n(A)<۱۵۰$، $n(A)\geq۱۵۰$ و $n(A)>۱$ نوشته خواهد شد که نامساوی اول یعنی $n(A)<۱۵۰$ با نامساوی‌های دیگر اشتراکی ندارد.

۵. $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\},\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}\}$

۶. افرازهای مجموعهٔ A به سه مجموعه، یا به شکل $\{\times\},\{\times\},\{\times\times\times\}$ است و یا به‌صورت $\{\times\},\{\times\times\},\{\times\times\}$.

در حالت اول، تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر است با: $\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!}=۱۰$ و در حالت دوم، برابر است با: $\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{۲!}=۱۵$. بنابراین کل تعداد افرازهای خواسته شده برابر است با: ۲۵=۱۵+۱۰

۷. اگر A، B، C و D به ترتیب، طرفداران تیم A، کلاه به سرها، زیر ۲۵ ساله‌ها و عینکی‌ها باشند داریم:

$$\begin{cases}A\subseteq B\\ B\subseteq C\end{cases}\Rightarrow A\subseteq C\qquad \begin{cases}C\subseteq D\\ D\subseteq A\end{cases}\Rightarrow C\subseteq A\qquad\Rightarrow A=C$$

۸. الف. اگر: $B=C$، اثبات تساوی‌های $A\cap B=A\cap C$ و $A\cup B=A\cup C$ بدیهی است. عکس این مطلب را نشان می‌دهیم:

$B=B\cap(A\cup B)$
$=B\cap(A\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$
$=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
$=C\cap(A\cup B)=C\cup(A\cup C)=C$

ب.

$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')=C'\cap(A\cap B)=(A\cap B)-C$

۹.

$$A\cup X=B\overset{\cap A'}{\Rightarrow}(A\cup X)\cap A'=B\cap A'$$
$$\Rightarrow(A\cap A')\cup(X\cap A')=B-A$$
$$\Rightarrow X\cap A'=B-A\quad(۱)$$
$$A\cap X=\varnothing\Rightarrow X\subseteq A'\Rightarrow X\cap A'=X\quad(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow X=B-A$$

۱۰. از روش عضوگیری استفاده می‌کنیم. اگر: $a\in A$ و c یک عضو دلخواه از مجموعهٔ C باشد، داریم:

$$(a,c)\in A\times C\Rightarrow(a,c)\in B\times C\Rightarrow a\in B$$

پس $A\subseteq B$. مشابهاً $B\subseteq A$. بنابراین: $A=B$.

۱۱.

$$A=\{۱,۲,۳\}\Rightarrow A^۲=A\times A$$
$$=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$$
$$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$$
$$\Rightarrow A^۲-B=\{(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳)\}$$
$$\Rightarrow n(A^۲-B)=۳$$

هندسه ۲

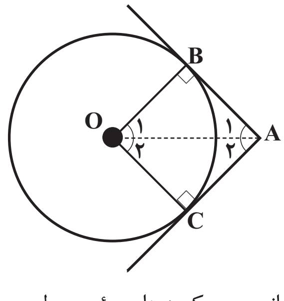
۱. $A_۱ = A_۲ = ۶۰ \to OB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \to$

$۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \to OA = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$

$O_۱ = O_۲ = ۳۰ \to AB = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$

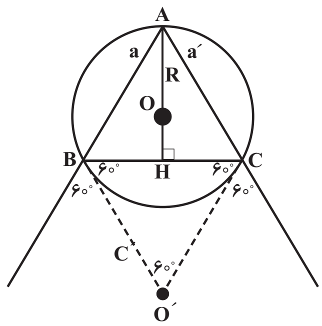
$S_{OBAC} = ۲(S_{OAB}) = ۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{\sqrt{۳}}\times\frac{۸}{\sqrt{۳}}) = \frac{۳۲}{۳}$

$S = S_{OBAC} - S_{OBC}^{\text{قطاع}} = \frac{۳۲}{۳} - \frac{\pi(۴)^۲\times۶۰}{۳۶۰} = \frac{۳۲-۸}{۳}$



۲. می‌دانیم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع نقطهٔ همرس میانه‌هاست.

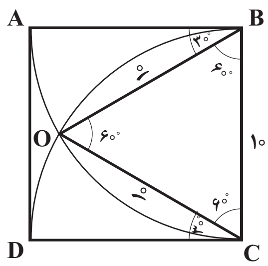
$AO = \frac{۲}{۳}AH = \frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$



از طرف دیگر، نیم‌ساز خارجی دو زاویهٔ C و B را نقطهٔ O' می‌نامیم O' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث است. مثلث BCO متساوی‌الاضلاع است. ارتفاع این مثلث شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث است؛ یعنی:

$r = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\alpha$

۳.



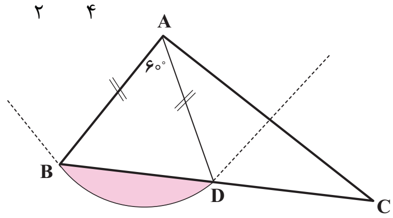
۴.

$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \to ۹ + ۳ = BC^۲ \to BC = ۲\sqrt{۳}$

$AD = \sqrt{۳}, BD = DC = \sqrt{۳} \to B = ۶۰, C = ۳۰$

$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث } ABD} = \frac{\pi(\sqrt{۳})^۲(۶۰)}{۳۶۰} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳})^۲$

$= \frac{\pi}{۲} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$



۵. دایرهٔ محیطی دوازده ضلعی منتظم را رسم می‌کنیم:

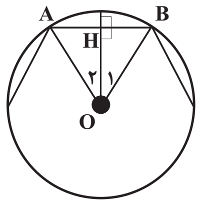
$\hat{O}_۱ = \frac{۳۶۰}{۱۲} = ۳۰$

$\sin o_۱ = \frac{HB}{OB} \Rightarrow OB = \frac{\frac{a}{۲}}{\sin ۱۵} = \frac{a}{۲\sin ۱۵}$

$S_{\text{ضلعی } ۱۲} = ۱۲(S_{OAB}) = ۱۲(\frac{۱}{۲}OB^۲ \times \sin ۳۰) =$

$= ۶(\frac{a}{۲\sin ۱۵})^۲ \sin ۳۰$

$= \frac{۳a^۲}{۲}\,\frac{۲\sin ۱۵\cos ۱۵}{\sin^۲ ۱۵} = ۳a^۲\cot ۱۵$

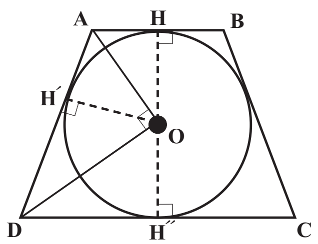


۶. $\left.\begin{array}{l}\hat{O} = ۹۰ \to OH'^۲ = AH' \times H'D \\ AH' = AH, DH' = DH''\end{array}\right\} \Rightarrow$

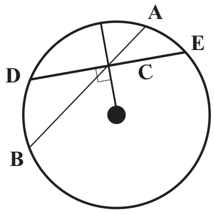
$OH'^۲ = AH \times DH'' = (\frac{۱}{۲}AB)(\frac{۱}{۲}DC)$

$۴(OH')^۲ = AB \times DC$

$۴R^۲ = AB \times DC$



۷. می‌دانیم کوتاه‌ترین وتر در یک نقطه داخل دایره، وتری است که در آن نقطه بر قطر عمود باشد و قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.



$DC = CE, AC = ۳, BC = ۶$

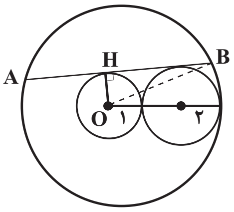
$DC \times CE = AC \times BC \to ۳ \times ۶ = DC^۲$

$\to DC = ۳\sqrt{۲}$

$DE = ۲DC = ۶\sqrt{۲}$

۸.

$OH^۲ + HB^۲ = OB^۲ \to OH^۲ + (۲\sqrt{۶})^۲ = ۵^۲ \to OH = ۱$



بنابراین، هر وتر که بر دایره به مرکز و شعاع ۱ مماس باشد، طول آن $۴\sqrt{۶}$ است.

همچنین وترهایی که در دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر به شعاع ۱ مماس باشند، طول آن‌ها $۴\sqrt{۶}$است.

حال وتر باید بر دایرهٔ به شعاع ۲ مماس باشد. بنابراین تعداد مماس‌های مشترک دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ جواب مسئله است که سه مماس وجود دارد.

حسابان ۲

۱.

$x^۲ - x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = x - ۱$

$\Rightarrow x^۳ = x^۲ - x \,,\, x^۲ - x = ۱$

$\Rightarrow x^۳ = -۱$

$x^{۱۳۹۸} + ۳x^۲ + x + ۱$

$= (x^۳)^{۴۶۶} + ۳x^۲ + x + ۱$

$= (-۱)^{۴۶۶} + ۳x^۲ + x + ۱$

$= ۳x^۲ + x + ۲$

$= ۳(x - ۱) + x + ۲$

$= ۴x - ۱$

۲. $-1+f^2(x)=0 \Rightarrow f^2(x)=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=1 \Rightarrow x=2 \\ f(x)=-1 \le x \le 0 \end{cases}$$

$$D_{h(x)}=[-2,2]-\{[-1,0]\cup\{2\}\}$$
$$=[(-2,-1)\cup(0,2)]$$

۳. با توجه به اینکه برد f مجموعهٔ R است، پس خط $y=0$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ حداقل یک جواب دارد. حال فرض می‌کنیم این معادله دارای بیش از یک جواب باشد. اگر x_1 و x_2 جواب‌های این معادله باشند، و: $x_1<x_2$ ، آن‌گاه $f(x_1)=f(x_2)=0$. از طرف دیگر، چون f اکیداً صعودی است، پس داریم: $f(x_1)<f(x_2)$. بنابراین f نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد.

۴. الف)

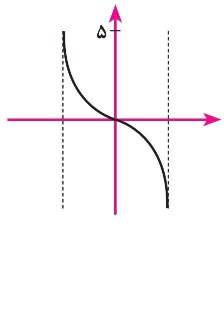
$$2\cos^2 x-1-5\cos x+3=0$$
$$2\cos^2 x-5\cos x+2=0$$
$$(\cos x-2)(2\cos x-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=2 & \text{غیرقابل قبول} \\ \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب)

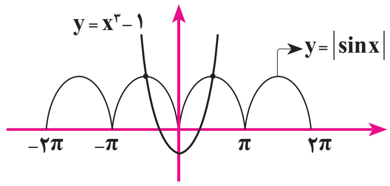
$$2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos x=0$$
$$\cos x(2\sin x+\sqrt{3})=0$$
$$\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$2\sin x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow \sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}=\sin(\frac{-\pi}{3})$$
$$\begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۵. دوره تناوب تابع $=\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a|=\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

تذکر: دلیل منفی بودن a آن است که نمودار $y=-\tan(\frac{3}{2}x)$ به این صورت است:



۶. نمودار توابع $y=|\sin x|$ و $y=x^2-1$ را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که در شکل مشخص شده است، معادلهٔ مذکور دو جواب دارد.

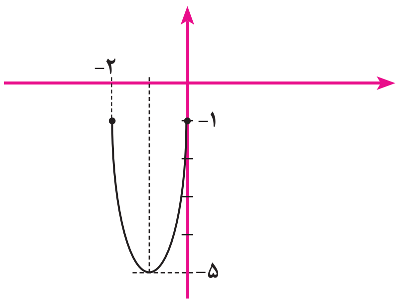
۷. $D_F=[0,2]$ و $R_F=[0,2]$

بـرای تعیین دامنهٔ g، از مقادیر x دو واحد کم می‌شود.

$D_g=[-2,0]$

برای تعیین برد g، مقایسه y، (۲-) برابر و یک واحدکم می‌شوند:

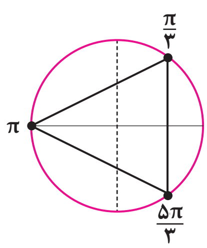
$R_g=[-5,-1]$



۸.

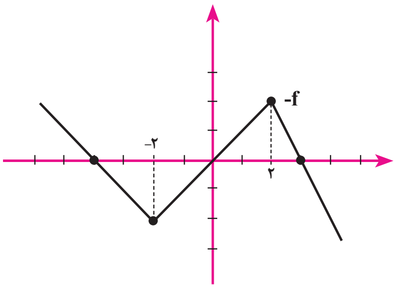
$$\cos 2x+\cos x=0$$
$$\cos 2x=-\cos x \Rightarrow \cos 2x=\cos(\pi-x)$$
$$2x=2k\pi\pm(\pi-x) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi-\pi \end{cases}$$

حال باید جواب‌های خاص دربارهٔ $[0,2\pi]$ را بیابیم که عبارت‌اند از: $\frac{\pi}{3}$، π و $\frac{5\pi}{3}$ کـه رئـوس یـک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.



ریاضی ۳ (تجربی)

۱. ابتدا تابع f- را رسم می‌کنیم و سپس بازه‌ای را که تابع f- روی آن اکیداً صعودی است، مشخص می‌کنیم:



x	f (x)	-f (x)
-۴	۰	۰
-۲	۲	-۲
۰	۰	۰
۲	-۲	۲
۳	۰	۰

همان‌طور که از نمودار پیداست، تابع f- روی بازهٔ [۲ و ۲-] اکیداً صعودی است.

۲. می‌دانیم دامنهٔ تابع مرکب gof از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in Dg\}$$

پس ابتدا با توجه به توابع f و g، دامنهٔ آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$D_g=x-x^2\ge 0 \to x(1-x)\ge 0$$
$$\to D_g=[0,1]$$
$$1-x^2=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1$$
$$\to D_f=R-\{\pm 1\}$$
$$\to D_{gof}=\{x\in R-\{\pm 1\} | \frac{1+x^2}{1-x^2}\in[0,1]\}$$

عبارت $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ متعلق به بازهٔ [۰ و ۱] است، پس نامعادلـهٔ مضاعف $0\le\frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\geq 0 \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2>0\to x^2<1$$
$$\to -1<x<1 \qquad (1)$$
$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1\to \frac{1+x^2}{1-x^2}-1\leq 0$$
$$\to \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\leq 0$$
$$\to \frac{2x^2}{1-x^2}\leq 0 \xrightarrow{2x^2>0} 1-x^2<0\to x^2>1$$
$\to x>1$ یا $x<-1$
$$\to x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\cup\{0\} \qquad (2)$$
$$(1)\cap(2)\to D_{gof}=\{0\}$$

۳. ابتدا ضابطهٔ تابع داده شده را بدون قدر مطلق می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}\frac{x}{x}\sqrt{x}:x>0\\ \frac{-x}{x}\sqrt{-x}:x<0\\ 0:x=0\end{cases}\to y=\begin{cases}\sqrt{x}:x>0\\ -\sqrt{-x}:x<0\\ 0:x=0\end{cases}$$

چون $\sqrt{x}$ در $x=0$ صفر می‌شود، بنابراین داریم:

$$y=\begin{cases}\sqrt{x}:x\geq 0\\ -\sqrt{-x}:x<0\end{cases}$$

اگر نمودار تابع را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که یک به یک است. بنابراین وارون‌پذیر است. در حالت $x\geq 0$، ضابطهٔ وارون آن را می‌یابیم:

$$y=\sqrt{x}\to y^2=x\to f^{-1}(x)=x^2$$

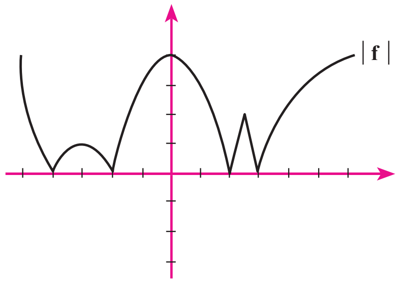
چون $x\geq 0$ است، پس برد تابع و در نتیجه دامنهٔ تابع وارون آن در این ضابطه، بازهٔ $[0, \infty)$ است. در حالت $x<0$ ضابطهٔ وارون برابر است با:

$$y=-\sqrt{-x}\to y^2=-x\to f^{-1}(x)=-x^2$$

چون $x<0$ است، برد تابع و در نتیجه دامنهٔ تابع وارون آن در این ضابطه، بازهٔ $(-\infty,0)$ است. ضابطهٔ تابع وارون به‌صورت زیر است.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2;x\geq 0\\ -x^2;x<0\end{cases}$$
$$=x\begin{cases}x;x\geq 0\\ -x;x<0\end{cases}=x|x|,x\in R$$

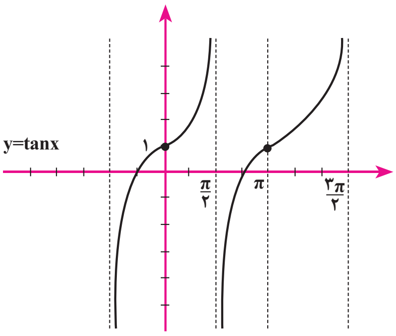
۴. باید قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع f را که زیر محور x است، رسم کنیم و سپس آن را حذف کنیم:

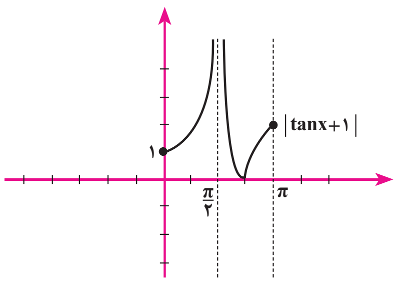


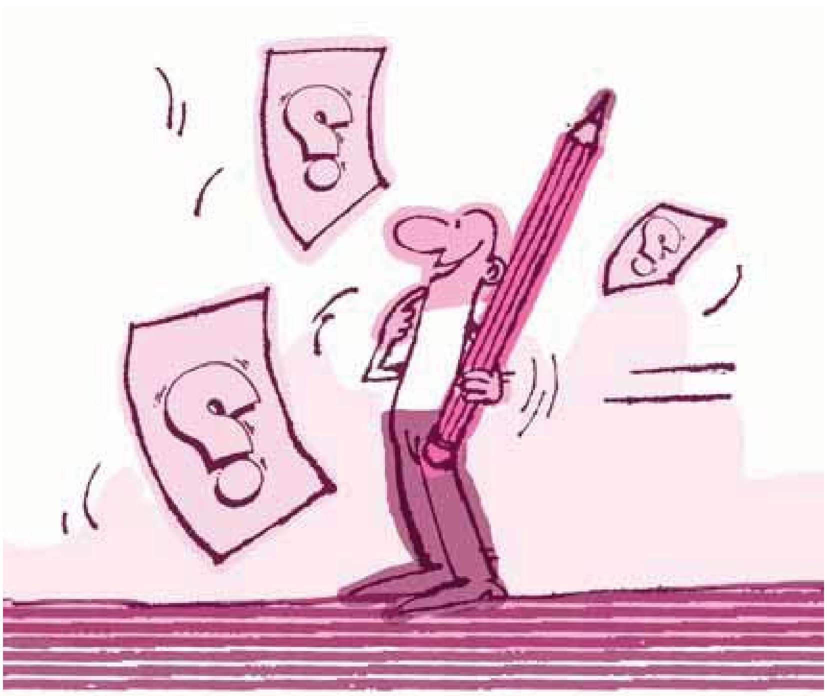
۵. می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع y=asinbx+c و y= acosbx+c برابر است با: $\frac{2\pi}{|b|}$ پس:

$$T_f=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8, T_g=\frac{2\pi}{\frac{k}{3}}=\frac{6\pi}{k}$$
$$\to \frac{T_f}{T_g}=4\to \frac{8}{\frac{6\pi}{k}}=4\to 8k=24\pi$$

۶. ابتدا تابع y=tanx را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع y=tanx +۱ به دست آید. سپس قسمتی از این نمودار را که مربوط به بازهٔ $[0, \pi]$ است، نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم. اکنون قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=|\tan x+1|$ به دست بیاید (شکل ۶).







۷.

$$۲\cos x + ۳k = ۱ \to \cos x = \frac{۱-۳k}{۲}$$

و چون: $-۱ \le \cos x \le ۱$ ،

پس:

$$-۱ \le \frac{۱-۳k}{۲} \le ۱ \to -۲ \le ۱-۳k \le ۲$$

$$\to -۳ \le -۳k \le ۱ \to -\frac{۱}{۳} \le k \le ۱$$

۸. **الف.**

$$\sin ۷x = -\sin ۳x = \sin(-۳x)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} ۷x = ۲k\pi - ۳x \to x = \frac{k\pi}{۵}; k \in z \\ ۷x = (۲k+۱)\pi + ۳x \to x = \frac{۲k+۱}{۴}\pi; k \in z \end{cases}$$

ب.

$$۲\sin x \cos x + \sqrt{۲}\cos x = ۰$$

$$\to \cos x(۲\sin x + \sqrt{۲}) = ۰ \begin{cases} \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲}k \\ \sin x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \to \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴}; k \in z \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴k} \end{cases}$$

ریاضیات گسسته

۱. می‌دانیم a عددی گنگ و b عددی گویاست. حال فرض می‌کنیم (a+b) گنگ نباشد (فرض خلف)، پس گویاست. اگر فرض کنیم: $a+b=c$ ، در این صورت طبق فرض خلف $C \in Q$. از طرف دیگر داریم: a=c-b یعنی a تفاضل دو عدد گویاست و بنابراین $a \in Q$ که با فرض گنگ بودن a در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. برای پاسخ به هر یک از دو سؤال بعد، مثال‌های نقض زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a = \sqrt{۲} \\ b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a \times b = \sqrt{۲} \times ۰ = ۰ \in Q$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{۲} \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \times b = \sqrt{۲} \times ۱ = \sqrt{۲} \in Q'$$

۲.

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \ge xy + yz + xz$$

$$\overset{\times ۲}{\Leftrightarrow} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \ge ۲xy + ۲yz + ۲xz$$

$$\Leftrightarrow x^۲ + x^۲ + y^۲ + y^۲ + z^۲ + z^۲ - ۲xy - ۲yz - ۲xz \ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (x-z)^۲ + (y-z)^۲ \ge ۰$$

۳.

$$pqr|pq+qr \Rightarrow pqr|q(p+r) \Rightarrow pr|p+r$$

$$p|pr, pr|p+r \Rightarrow p|p+r \overset{p|p}{\Rightarrow} p|r \xrightarrow{p,r\in N} p=r$$

$$r|pr, pr|p+r \Rightarrow r|p+r \overset{r|r}{\Rightarrow} r|p \xrightarrow{p,r\in N} p=r$$

۴.

$$۵xy - y + x^۲ = ۳ \Rightarrow y(۵x-۱) = ۳ - x^۲ \Rightarrow y = \frac{۳-x^۲}{۵x-۱}$$

شرط اینکه $y \in z$ باشد آن است که:

$$۵x-۱|۳-x^۲$$

$$\left.\begin{matrix} ۵x-۱|۳-x^۲ \Rightarrow ۵x-۱|۱۵-۵x^۲ \\ ۵x-۱|۵x-۱ \Rightarrow ۵x-۱|۵x^۲-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۵x-۱|۱۵-x \quad (۱)$$

$$(۱) \Rightarrow ۵x-۱|۷۵-۵x$$

$$۵x-۱|۵x-۱ \overset{+}{\Rightarrow} ۵x-۱|۷۴$$

$\Rightarrow ۵x-۱ = \pm ۱$ یا

$۵x-۱ = \pm ۲$ یا

$۵x-۱ = \pm ۳۷$

$$۵x-۱ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{ق ق} \\ x = \frac{۲}{۵} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$۵x-۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۱}{۵} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۳}{۵} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$۵x-۱ = \pm ۳۷ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-۳۶}{۵} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۳۸}{۵} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط یک نقطهٔ $A\Big|_{-۳}^{۰}$ با مختصات صحیح روی این منحنی قرار دارد.

۵. چون a فرد و b زوج است، پس (a+b) فرداست و چون: $c|a+b$ ، پس c نیز فرد است. می‌دانیم مربع هر عدد صحیح و فرد به شکل (۸k+۱) است،

پس داریم:

$$a^۲ + c^۲ + ۷ = (۸k+۱) + (۸k'+۱) + ۷$$

$$= ۸m + ۹ = ۸m + ۸ + ۱$$

$$\Rightarrow a^۲ + c^۲ + ۷ = ۸t + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

۶.

$(۶ab, ۱۲ab^۳) = ۶ab$ (زیرا: $۶ab|۱۲ab^۳$)

$[۳a^۲b, ۶a^۳b^۲] = ۶a^۳b^۲$ (زیرا: $۳a^۲b|۶a^۳b^۲$)

$$\Rightarrow ((۶ab, ۱۲ab^۳), [۳a^۲b, ۶a^۳b^۲])$$

$$= (۶ab, ۶a^۳b^۲) = |۶ab|$$

۷.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b, d|m \Rightarrow d|a-b$$

$$b \overset{n}{\equiv} c \Rightarrow n|b-c, d|n \Rightarrow d|b-c$$

$$\Rightarrow d|(a-b)+(b-c) \Rightarrow d|a-c \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$$

۸.

$$\begin{matrix} a = ۶q_۱ + ۳ \\ a = ۸q_۲ + ۵ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۴a = ۲۴q_۱ + ۱۲ \\ ۳a = ۲۴q_۲ + ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴a - ۳a = ۲۴q - ۳ \Rightarrow a = ۲۴q - ۲۴ + ۲۱$$

$$\Rightarrow a = ۲۴q' + ۲۱ \Rightarrow r = ۲۱$$

۹.

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱

فاصلهٔ ۱۲ اردیبهشت تا ۱۲ بهمن را محاسبه می‌کنیم:

$$d = (۳۱-۱۲) + (۴ \times ۳۱) + (۴ \times ۳۰) + ۱۲ = ۲۷۵$$

$۲۷۵ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow$ روز مورد نظر شنبه است.

۱۰. به طور کلی، گراف r ـ منتظم از مرتبهٔ ۷ که r فرد باشد، موجود نیست. لذا: ۶ یا ۴ یا ۲ یا ۰ = r. پس چهار نوع گراف از مرتبهٔ ۷ و منتظم داریم.

هندسهٔ ۳ (دوازدهم ریاضی)

۱.

$$\text{مجموع درایه‌های سطر سوم } A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$= (۰+۴+۰)+(۰+۶+۱۰)+(۰-۲+۲۵)$$

$$= ۴+۱۶+۲۳ = ۴۳$$

۲.

$$(A+I)^n = \binom{n}{۰}A^{n-۰}.I^{۰} + \binom{n}{۱}A^{n-۱}.I^{۱} + \ldots + \binom{n}{k}A^{n-k}.I^k$$

$$+\ldots+\binom{n}{n-۱}A^{۱}.I^{n-۱} + \binom{n}{n}A^{۰}.I^n$$

$$\Rightarrow (A+I)^n = \binom{n}{۰}A + \binom{n}{۱}A + \ldots + \binom{n}{k}A + \ldots + \binom{n}{n-۱}A + I$$

$$\Rightarrow (A+I)^n = \left[\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \ldots + \binom{n}{n-۱}\right]A + I = (۲^n - ۱)A + I$$

۳.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۳ & ۷ \\ ۴ & ۵ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳A + ۲I = \begin{bmatrix} ۰ & ۱۲ & ۱۵ \\ ۹ & ۹ & ۲۱ \\ ۱۲ & ۱۵ & ۲۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۱۲ & ۱۵ \\ ۹ & ۱۱ & ۲۱ \\ ۱۲ & ۱۵ & ۲۶ \end{bmatrix}$$

۴.

$$|A| = -۲ \Rightarrow |۲A| = ۲^{۳}|A| = ۲^{۳}(-۲) = -۱۶$$

$$۲|۲A| = ۲(-۱۶) = -۳۲$$

$$\big|۲|۲A|A\big| = |(-۳۲)A| = (-۳۲)^{۳}(-۲) = ۲^{۱۶}$$

۵.

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x+۳y & ۳x+۲y \\ ۲-۶ & ۳-۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x+۳ & ۲y-۶ \\ ۳x+۲ & ۳y-۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ y = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -x & ۲ & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۲+۴+۲ = ۸$$

۶. الف)

$$\begin{vmatrix} m-۳ & ۳ \\ ۴ & m+۱ \end{vmatrix} \neq ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۲m - ۱۵ \neq ۰ \Rightarrow m \neq ۵, m \neq -۳$$

ب)

$$\frac{a = m-۳}{a' = ۴} = \frac{b = ۳}{b' = m+۱} = \frac{c = m-۱}{c' = ۸} \Rightarrow m = ۵$$

ج)

$$\frac{a = m-۳}{a' = ۴} = \frac{b = ۳}{b' = m+۱} \neq \frac{c = m-۱}{c' = ۸} \Rightarrow m = -۳$$

۷.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} a^{۲}+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{۲})^{-۱} = \frac{۱}{(ad-bc)^{۲}}\begin{bmatrix} d^{۲}+bc & -(bd+ab) \\ -(cd+ac) & bc+a^{۲} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^{۲} = \frac{۱}{(ad-bc)^{۲}}\begin{bmatrix} d^{۲}+bc & -(bd+ab) \\ -(cd+ac) & bc+a^{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{۲})^{-۱} = (A^{-۱})^{۲}$$

همچنین داریم: $(AB)^{-۱} = B^{-۱}.A^{-۱}$. بنابراین:

$$(A^{۲})^{-۱} = (A \times A)^{-۱} = (A^{-۱})(A^{-۱}) = (A^{-۱})^{۲}$$

۸.

$$A \times B = \begin{bmatrix} am+bp & an+bq \\ mc+dp & cn+dq \end{bmatrix}$$

$$|A \times B| = (am+bp)(cn+dq) - (an+bq)(mc+dp)$$

$$= acmn + amdq + bcpn + bdpq - acmn$$

$$- adnp - bcmq - bdpq$$

$$= amdq + bcpn - adnp - bcmq$$

$$= ad(mq-np) - bc(mq-pn)$$

$$= (ad-bc)(mq-np)$$

$$= |A|.|B|$$

مسئله مسابقه‌ای جایزه‌دار فصل پاییز

(۲ میلیون ریالی)

اگر $(m,n)=۱$ آن‌گاه یک سری جواب غیربدیهی عمومی معادله زیر را بیابید:

$$a_۱X_۱^m + a_۲X_۲^m + \ldots + a_kX_k^m = X_{k+۱}^n$$
$$m,n,k \in N\ ;\ a_۱, a_۲, \ldots, a_k \in Q$$

● حل معادله در حالت خاص $k=۲$ میزان جایزه نصف می‌شود (۱ میلیون ریالی)

$$a_۱X_۱^m + a_۲X_۲^m = X_۳^n$$

● حل معادله در حالت خاص‌تر $a_۱=a_۲=۱$ میزان جایزه نصف می‌شود (پانصد هزار ریالی):

$$(m,n)=۱: X_۱^m + X_۲^m = X_۳^n$$

توجه: با توجه به مراجع و روش حل مسئله، پاسخ و جوابی عمومی جدید ارائه دهید.

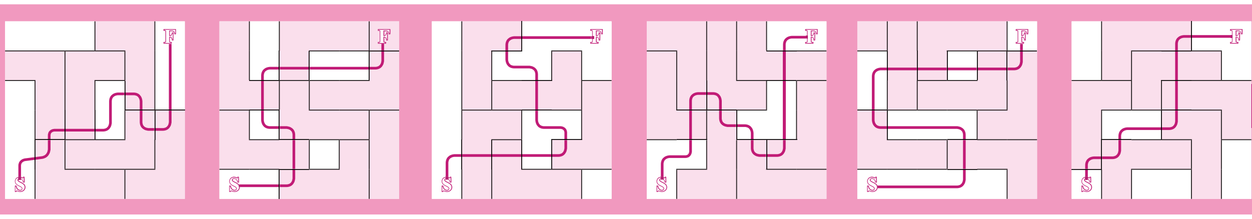
***مراجع**

۱. مجلات رشد برهان ریاضی
۲. (سایت طراح)
www.komhm.com
۳. کتـاب نظریه اعـداد مریم میرزاخانی و رویا بهشتی
4. The Discovery of Prime numbers formula (S.M.R.HASHEMI MOOSAVI)

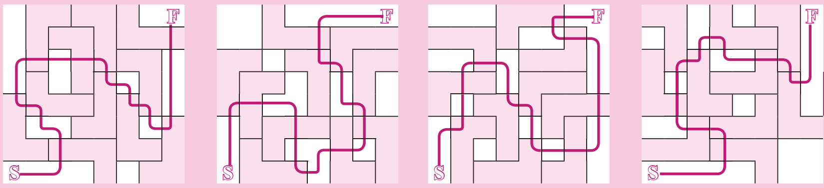
پاسخ مسائل

حل ماز یک چهارم

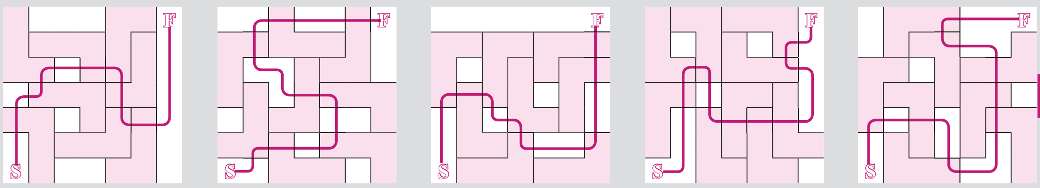
الف



ب



پ



کاربردی از ریاضیات در جغرافیا

مراد کریمی‌شهماروندی، دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرکرد

مـــقـــیـــاس نــقـــشـــه

معرفی مقیاس نقشه

برای نمایش هر وسعتی از زمین به‌صورت نقشه، ناگزیر پهنهٔ مورد نمایش باید به نسبت معینی کوچک شود. این نسبت کوچک شدن هر یک از ابعاد (طول و عرض) را «مقیاس نقشه» گویند. به‌عبارت دیگر، (نسبت موجود بین فاصلهٔ مستقیم دو نقطهٔ معین در روی نقشه، به فاصلهٔ مستقیم و افقی همان دو نقطه روی زمین) را مقیاس نقشه گویند؛ یعنی:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{\text{فاصلهٔ مستقیم دو نقطهٔ معینی روی نقشه}}{\text{فاصلهٔ مستقیم و افقی همان دو نقطه روی زمین}}$$

مقیاس هر نقشه را می‌توان به‌صورت رابطهٔ $\frac{d}{D}=\frac{l}{e}$ نوشت که در این رابطه e مقیاس (اشل)، d فاصله روی نقشهٔ، و D فاصله روی زمین است.

چندنکته:

- **نکتهٔ ۱.** مقیاس مهم‌ترین اصل از اصول کارتوگرافی یک نقشه است. زیرا کیفیت و کمیت محتوای هر نقشه را مقیاس آن تعیین می‌کند.
- **نکتهٔ ۲.** هر قدر مقیاس نقشه بزرگ‌تر باشد، جزئیات بیشتری نشان خواهد داد.
- **نکتهٔ ۳.** مقیاس نقشه نسبت کوتاه شدهٔ فاصله‌ها یا خطوط را بیان می‌کند، نه نسبت کوچک شدن مساحت پهنهٔ مورد نمایش نقشه.
- **نکتهٔ ۴.** طول خط‌ها یا فاصلهٔ نقطه‌ها روی نقشه تصویر آن‌ها روی یک صفحهٔ افقی است.
- **نکتهٔ ۵.** برای بیان مقیاس نقشه از سه شیوهٔ متداول «مقیاس لفظی»، «مقیاس خطی» و «مقیاس کسری» استفاده می‌شود.
- **نکتهٔ ۶.** صورت مقیاس کسری همیشه عدد یک (واحد) است و چون به‌صورت یک نسبت است، بُعد ندارد. بنابراین هیچ نیازی به مشخص کردن واحد اندازه‌گیری ندارد.
- **نکتهٔ ۷.** در تعیین مقیاس نقشه‌ها عموماً از فرمول $e=\frac{۱}{n\times ۱۰۰۰}$ استفاده می‌شود؛ یعنی مخرج مقیاس کسری همیشه مضربی از عدد هزار است و عدد n طوری انتخاب می‌شود که مقایسهٔ مقیاس نقشه‌ها و تبدیل آن‌ها به یکدیگر آسان باشد.
- **نکتهٔ ۸.** مقیاس هر نقشه شاخص ارزش هندسی آن است و در عین حال، زیبایی و خوانایی هر نقشه نیز در شرایط مساوی تابع مقیاس آن است.
- **نکتهٔ ۹.** نکتهٔ قابل دقت در محاسبهٔ مقیاس نقشه یکسان کردن واحدهای بخش طول است.
- **نکتهٔ ۱۰.** رابطهٔ بین خطها روی نقشه با مقیاس آن یک رابطهٔ مستقیم و ساده است؛ یعنی به هر نسبتی که مقیاس نقشه بزرگ یا کوچک شود، طول یک خط معین روی نقشه نیز به همان نسبت بزرگ یا کوچک خواهد شد. به‌عبارت دیگر، وقتی مقیاس دو برابر بزرگ شود، طول خطوط نیز دو برابر بزرگ خواهد شد و نسبت بین مقیاس‌ها، همان نسبت، یعنی طول خطوط است.

از نکتهٔ ۱۰ زمانی استفاده می‌شود که نقشه‌ای مقیاس نداشته باشد. در این صورت برای معلوم کردن مقیاس آن می‌توان از وجود نقشه‌ای از همان محل که مقیاس آن معلوم باشد، کمک گرفت.

*منبع

نقشه و نقشه‌خوانی جمشید جداری عیوضی ـ دانشگاه پیام‌نور سال ۱۳۸۵.

یَهدي اِلَی الرُّشدِ فَامَنّا بِهِ وَلَن نُشرِکَ بِرَبِّنا اَحَداً

(جن/۲)

(قرآن) به راه راست هدایت می‌کند، پس به آن ایمان آوردیم و هرگز کسی را شریک پروردگارمان قرار نخواهیم داد.