

ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

رشد

- دوره بیست و هشتم
- شماره پی‌درپی ۱۱۲
- زمستان ۱۳۹۷
- شماره ۲
- صفحه ۸۰
- ریال ۲۰۰۰۰



حرف اول

کتاب درسی، محور اصلی / سردبیر ۲

آموزشی

نگاهی به تبدیلات از دید تحلیلی / حسین کریمی ۶

دستگاه‌های معادلات خطی / حمیدرضا امیری ۱۲

سه قلم میوه چند تومان؟ به روش کراما! / حسین نامی‌ساعی ۱۷

نابرابری‌ها: نابرابری میانگین حسابی - هندسی / محمدتقی طاهری تنجانی ۲۰

حل معادله‌های درجه چهارم با شرایط خاص / سیدابوالطالب گلbaghi ماسوله ۲۴

اثبات درستی روابط مثلثاتی با روش‌های هندسی / عنایت‌اله راستی‌زاده ۲۶

آزمایشگاه ریاضی / دکتر محمدمعلی فربیزی عراقی - علیرضا سلمانی ابشاران ۳۲

به دست آوردن اندازه ضلع مجھوں / علیرضا صدی ۳۸

دوره‌هی ریاضی - تعبیین علامت ضرایب تابع درجه دوم / میرشهرام صدر ۴۰

تابع از دیدگاه کاربردی / سیدمحمد رضا هاشمی‌موسوی ۴۶

دو اثبات برای یک نابرابری / عباس قلعه‌پور اقدم ۴۹

از مربع لاتین به مربع جادویی / سیدجواد میراحمدی، محمود داورزنی ۵۰

تعیین جمله عمومی یک دنباله غیر خطی خاص / صالح دامن‌افشان ۵۶

ضرب سریع عدددها / ازدر سلیمان‌پور باکنایت ۵۸

مسائل برای حل ۶۰

ریاضی اندیشیدن

منطق: گر از بسیط زمین عقل منعدم گردد / غلامرضا یاسی‌پور ۴

آنچه از دوست رسد

چند مسئله / محمد امین فرج‌زاده ۵

ریاضیات در چند دقیقه

تشابه ۲۵ - چند ضلعی‌ها ۳۹

آموزش ترجمه متون ریاضی

ماتریس‌ها / حمیدرضا امیری ۵۴

پاسخ مسائل

راهنمای حل مسائل ۶۸

- مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دیبران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
 - نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و سیوط و رفع شکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۳) طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان.
 - طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان.
 - طرح معماهای ریاضی نگارش با ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگانی‌های علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تاریخ و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضی، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
 - مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
 - مقاله‌های دریافتی، پایید خوان و تا حد امکان، کوتاه باشد.
 - استفاده از مطالعه مجله در کتاب‌ها با مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانع ندارد.
 - مقاله‌ی که از طریق پیانگار مجله ارسال می‌نمایید به صورت فایل pdf ارسال کنید.
 - در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۶۵۶۷

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

کتاب درسی

مصور اصلی

در نظام آموزشی ما که نظامی متمنکن است، کتاب درسی از مصورهای اصلی و تعیین‌کننده به شمار می‌رود. آموزش‌پپرورش برای تأثیر یک کتاب درسی از مرحله برنامه‌ریزی و کارشناسی موضوع‌ها و محتواهای آموزشی و تعیین هدف‌ها و ارتباط کتاب‌های درسی پایه‌های قبل و بعد و مشخص کردن این که چه شایستگی‌هایی مورد انتظار است که مقاطبان این کتاب‌ها، یعنی دانش‌آموزان عزیز، پس از مطالعه و یادگیری مطالب باید از خود بروز دهنند، تا مرحله تأثیر، ویرایش و آموزش معلمان و دیران مقتدر، و چاپ و توزیع این کتاب‌ها، می‌باید هزینه‌های مالی و انسانی بسیار زیادی را صرف کند تا کتاب درسی در کلاس درس توسط دیران مقتدر تدریس شود و شما مطالب آن را یاد بگیرید. دیران شما هم با ارزشیابی (امتحان) که در خدمت آموزش است، میزان نیل به هدف‌های آموزشی این کتاب‌ها را موردن ارزیابی قرار می‌دهند.

حال آنکه مطالب و مفاهیم کتاب درسی به گونه‌ای تأثیر شده باشد که شما در ساقتن و یادگیری این مفاهیم سهیم باشید و به نوعی خودتان طی مرحله‌ی و با درکیر شدن با یک سؤال یا فعالیتی که برای آموزش یک مفهوم طراحی شده است، به آن مفهوم دست پیدا کنید، هتماً زمان ماندگاری آن مفهوم در ذهن شما بیشتر از هالتی است که یک مفهوم را به صورتی کاملاً مفظی و غیرفعال برای شما بیان کنند.

در کتاب‌های درسی، از جمله کتاب‌های درسی ریاضی، سعی بر این است که مطالب و مفاهیم مطرح شده طوری تأثیر شوند که شما با موضوع‌ها درکیر شوید و خودتان تا حد زیادی به آن‌ها دست پیدا کنید. البته دیران شما که با هدف‌های آموزشی مفاهیم یک کتاب



- آنایی دارند، شما را در این راه یاری خواهند کرد.
حال که به اهمیت و ارزش کتاب درسی پی بردید، سعی کنید
به توصیه‌های زیر عمل کنید و آن‌ها را بدست گیرید:
۱. پس از اتمام یک فعالیت (فعالیت را برای آموزش یک مفهوم و طی مرحله که در نهایت به دستیابی شما به آن مفهوم منته می‌شود، طراحی کرده‌اند) مفهوم یا مطلبی را که یاد گرفته‌اید، به زبان فودتان و به سادگی بنویسید.
 ۲. کار در کلاس‌ها را (کار در کلاس‌ها برای تثبیت یا تعمیق یا تعمیم مفاهیمی که در فعالیت‌ها آموزش داده می‌شود، طراحی شده‌اند) با هم‌کلاسی فود انجام دهید و ارتباط آن‌ها را با فعالیت‌های قبلی پیدا کنید.
 ۳. مثال‌های مل شده دافل متن را فودتان مل کنید و پاسخ فود را با پاسخ کتاب درس مقایسه کنید.
 ۴. به تمام سوالات که در متن کتاب پرسیده شده‌اند (اعم از فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها، مثال‌ها و متن‌های دافل کارها) به وقت پاسخ برهید و به کمک دیبر فود، از درست یا نادرست بودن جواب‌هایتان مطمئن شوید.
 ۵. تمرین‌ها را در منزل و فارج از کلاس درس و پس از مطالعه درس مربوطه مل کنید و در کلاس درس پاسخ‌های فودتان را با مثال‌های هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید و برای اطمینان از درستی آن‌ها از دیبر تان کمک گیرید.
 ۶. در پایان هر درس، مطالب معتمد را با توجه به تدریس دیبر در کلاس درس و مطالب موجه در متن درس و مسائل و تمرین‌های مل شده، یادداشت و در یک دفتر به منظور مراجعه برای امتحانات، تکه‌داری کنید.
- موفق باشید
سردیبر

*پی‌نوشت

۱. نظام آموزشی متمرکز به نظامی گفته می‌شود که برای تمام دانش‌آموزان در سراسر کشور، یک کتاب درسی واحد تدریس می‌شود.

منطق

گر از بسیط زمین عقل منعدم گردد^۱

گوتلوب فرگه، سی. اس. پرس و ارنست شروودر^۲ در مورد منطق گزاره‌ها به معنی سورها پرداختند و «منطق محمولی مرتبه اول»^۳ را تشکیل دادند. منطق مذبور از «سور عمومی»،^۴ به معنی «هر»، و «سور وجودی»،^۵ به معنی «بعضی»، طبق علامت‌های زیر استفاده می‌کند:

∧	و
∨	یا
¬	چنین نیست
→	مستلزم
>All	هر
∃	بعضی

منطق دیگری که در توسعه منطق به وجود آمده، «منطق فازی»^۶ است؛ منطقی که با مجموعه‌هایی سروکار دارد که غیردقیق تعریف شده‌اند. با مجموعه‌های فازی در مورد «عضویت» نوعی درجه‌بندی

استدلال درست را سودمند می‌سازد. در صورتی که تنوع «سورهایی»^۷ چون «تمام»، «بعضی»، «هیچ» را در نظر بگیریم، صورت‌های دیگری از قیاس‌ها به دست می‌آیند. برای مثال، قیاس دیگری می‌تواند به صورت زیر باشد:

هر A بی‌B است.

هر B بی‌C است.

در نتیجه: هر A بی‌C است.

منطق ارسطوی یا «نظریه قیاس»^۸ در قرن نوزدهم، دانش کامل به شمار می‌آمد. اما منطق دیگری داریم که فراتر از قیاس‌های است. این منطق با قضیه‌ها یا گزاره‌های ساده یا ترکیبات آن‌ها سروکار دارد و به نام «جبر منطق»^۹ معروف است. جبر منطق توسط جورج بول^{۱۰} و آگوستوس دمورگان^{۱۱} در دهه ۱۸۴۰ ایجاد شد. بعضی از رابطه‌های منطقی این جبر عبارت‌اند از:

→ ، ¬ ، ∨ ، ∧ ، ⊥

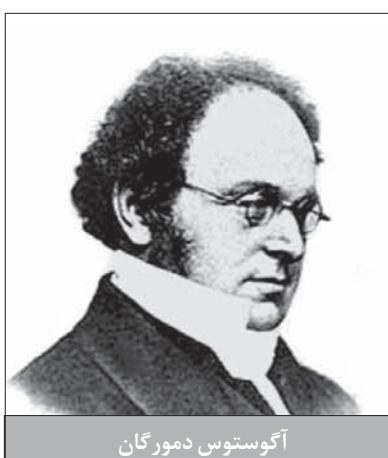
پای استدلالیان چوبین بود
پای چوبین سخت بی‌تمکین بود
عصا چبُود؟ قیاسات و دلیل
آن عصا کی دادشان بینا جلیل
(مشنوی معنوی / دفتر اول / ۲۱۲۸ و ۲۱۳۶)
منطق به بررسی دقیق استدلال می‌پردازد.
این ارسطو بود که حدود ۳۳۵ قبل از میلاد
«منطق قیاسی»^{۱۲} را فرمول‌بندی کرد. رهیافت این منطق، بر صورت‌های متفاوت قیاس بنا شده است؛ یعنی شیوه‌ای از استدلال مبتنی بر سه گزاره: دو مقدمه و یک نتیجه. ساختار این شیوه می‌تواند به صورت زیر باشد:

تمام A ها B هستند.

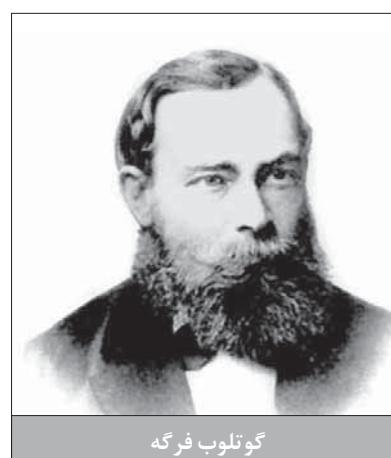
تمام B ها C هستند.

در نتیجه: تمام A ها C هستند.

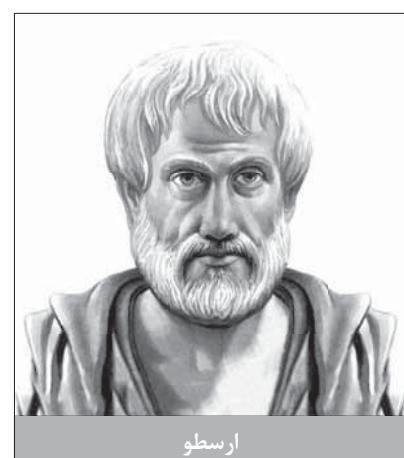
ساختار مذبور از این‌رو اهمیت دارد که هر استدلال که بر مبنای آن مطرح شود، نمی‌تواند با مقدمات «راست»^{۱۳} دارای نتیجه «دروغ»^{۱۴} باشد. همین ساختار است که



آگوستوس دمورگان



گوتلوب فرگه



ارسطو

***پی‌نوشت‌ها**

- یکی یهود و مسلمان نزاع می‌کردند چنان‌که خنده گرفت از حدیث ایشان به خشم گفت مسلمان: «گر این قبلاً من درست نیست، خدایا! یهود میرانم» یهود گفت: «به تورات می‌خورم سوگند اگر خلاف کنم، همچو تو مسلمانم» گراز بسیط زمین عقل منعدم گردد به خود گمان نبرد هیچ‌کس که نادانم (سعید/گلستان)

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| 2. logic syllogism | 3. true |
| 4. false | 5. quantifiers |
| 6. theory of syllogism | 7. algebra of logic |
| 8. George Boole | 9. Augustus De Morgan |
| 10. Gottlob Frege | 11. Ernst Schroeder |
| 12. first-order predicate logic | 13. fuzzy logic |

***منابع**

- ارغنون ارسٹون ۲. گلستان سعیدی ۳. نصاب الصیبان، ابونصر فارابی
- The little book of mathematics Principles, Dr Robert solomon



لطفی‌زاده

آنچه از دوست رسک ۰۰۰

جناب آقای محمد امین فرج‌زاده از شهرستان میاندوآب تعدادی مسئله با راه حل ارسال کرده‌اند. ضمن تشکر از ایشان تعدادی از آن مسائل را با راه حل در بی می‌آوریم.

چند مسئله

۱. مقدار n را از معادله زیر به دست آورید:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 10$$

حل: صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

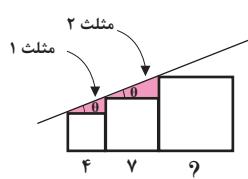
$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1} = 10 \\ & \sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\dots+\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = -10 \\ & \Rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{n+1} = -10 \Rightarrow 2-\sqrt{n+1} = -10 \\ & \Rightarrow -\sqrt{n+1} = -12 \Rightarrow \sqrt{n+1} = 12 \\ & \Rightarrow n+1 = 144 \Rightarrow n = 143 \end{aligned}$$

۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

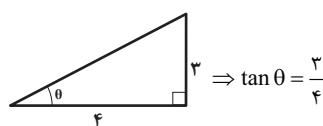
$$S = \cos^{\circ} 1^\circ + \cos^{\circ} 2^\circ + \dots + \cos^{\circ} 90^\circ$$

حل:

$$\begin{aligned} S &= \cos^{\circ} 1^\circ + \cos^{\circ} 89^\circ + \cos^{\circ} 2^\circ + \cos^{\circ} 88^\circ + \dots \\ &+ \cos^{\circ} 44^\circ + \cos^{\circ} 46^\circ + \cos^{\circ} 9^\circ + \cos^{\circ} 45^\circ \\ S &= \cos^{\circ} 1^\circ + \sin^{\circ} 1^\circ + \cos^{\circ} 2^\circ + \sin^{\circ} 2^\circ + \dots \\ &+ \sin^{\circ} 44^\circ + \cos^{\circ} 44^\circ + \cos^{\circ} 9^\circ + \cos^{\circ} 45^\circ \\ &= 44 + (\cdot)^{\circ} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\circ} = 44 + \frac{1}{2} = 44.5 \end{aligned}$$



مثال ۱

$$\text{مربع} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4}$$


مثال ۲

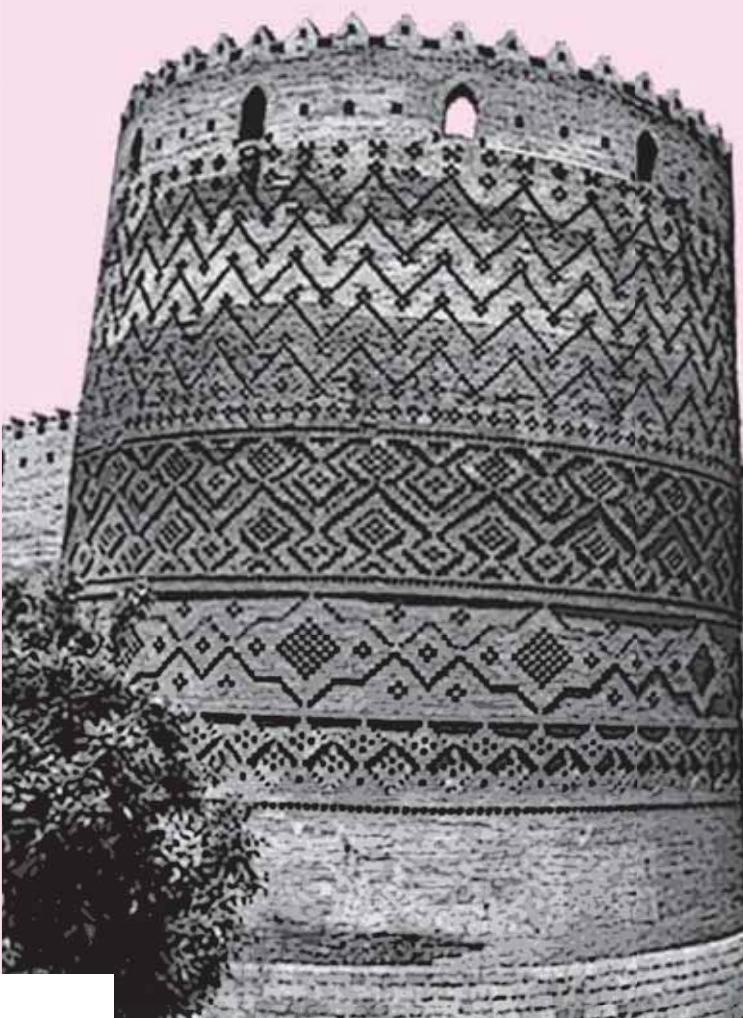
مثال ۳

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{21}{4} + 7 = \frac{28 + 21}{4} = \frac{49}{4} \Rightarrow \text{اندازه ضلع بزرگ‌تر}$$

نگاهی به تبدیلات از دید تحلیلی



اشاره

در درس اول از فصل ۲ کتاب هندسه با «تبدیلهای هندسی» آشنا شدیم. در این مطلب، علاوه بر یادآوری آنها، بار دیگر از دید تحلیلی (جبری-مختصاتی) تبدیلات را بررسی می‌کنیم.

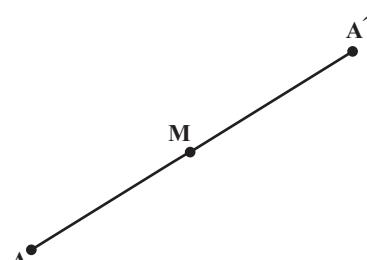
بازتاب مرکزی

دو نقطه A و A' را «بازتاب» (قرینه) یکدیگر نسبت به نقطه M گوییم، هرگاه M وسط پاره خط AA' قرار داشته باشد.

دیگر، مختصات نقطه A' به عنوان قرینه نقطه A نسبت به نقطه

$$A' \begin{cases} x_{A'} = 2\alpha - x_A \\ y_{A'} = 2\beta - y_A \end{cases} \quad \text{عبارت است از: } M \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

مثال ۱. بازتاب نقطه‌های A و B را نسبت به نقطه M
به دست آورید.



شکل ۱

$$A' \begin{cases} 2(5) - (-3) \\ 2(-6) - (-4) \end{cases} \Rightarrow A' \begin{cases} 7 \\ -8 \end{cases}, \quad B' \begin{cases} 2(5) - (-1) \\ 2(-6) - (-1) \end{cases} \Rightarrow B' \begin{cases} 11 \\ -11 \end{cases}$$

در این مثال مشاهده می‌کنیم که طول پاره خطهای AB و A'B' برابرند:

می‌دانیم برای به دست آوردن مختصات نقطه وسط پاره خط M استفاده کرد. به عبارت $M \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$ می‌توان از رابطه AA'

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ \beta = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases}$$

برای تعیین معادله بازتاب خط $d : ax + by + c = 0$ نسبت به نقطه $O \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ کافی است در معادله خط، $X - 2\alpha - Y - 2\beta = 0$ را به ترتیب جایگزین x و y کنیم:

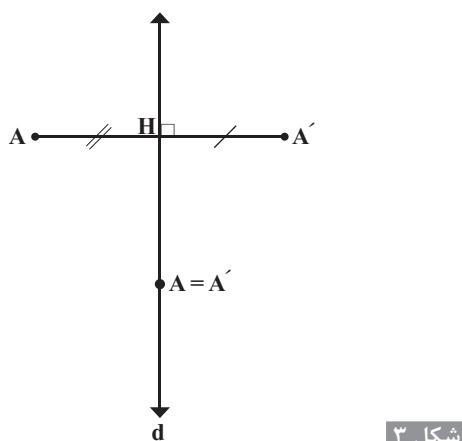
$$\begin{aligned} d' : a(2\alpha - X) + b(2\beta - Y) + c &= 0 \\ d' : aX + bY - (2\alpha a + 2\beta b - c) &= 0 \\ \Rightarrow m_d = m_{d'} & \end{aligned}$$

تذکر:

اگر بازتاب یک شکل نسبت به یک نقطه، بر خود همان شکل منطبق شود، گوییم آن شکل دارای مرکز تقارن است. بعضی از شکل‌ها مرکز تقارن ندارند؛ مانند مثلث، ذوزنقه و نیم‌خط. بعضی از شکل‌ها یک مرکز تقارن دارند؛ مانند دایره، متوازی‌الاضلاع و پاره‌خط. خط راست و دو خط موازی دارای بی‌شمار مرکز تقارن هستند. هیچ شکلی دارای مرکز تقارن به تعداد شماراگی بیش از یک نیست.

بازتاب محوری

A و A' را بازتاب یا قرینه یکدیگر نسبت به خط d می‌نامیم، هرگاه خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد.



برای پیدا کردن قرینه نقطه A نسبت به خط d ، ابتدا H را به عنوان تصویر قائم A روی d پیدا و سپس قرینه A را نسبت به H مشخص می‌کنیم. در کتاب درسی مشاهده کردیم که بازتاب محوری، تبدیلی است پایا (ایزومتری) و شب خط به جز در حالات‌های خاص (خط به موازات محور بازتاب و یا عمود بر آن) حفظ نشده است و تغییر می‌کند.

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+4)^2} = 5 \\ |A'B'| = \sqrt{(11-7)^2 + (-11+8)^2} = 5 \end{cases}$$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که بازتاب مرکزی یک «تبديل پایا» (ایزومتری) است.

اگر $B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ بازتاب نقطه‌های $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $A' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ نسبت به $X' = 2\alpha - x$ ، $Y = 2\beta - y$ ، $X = 2\alpha - x$ باشند، داریم: $O \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $. Y' = 2\beta - y'$

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{[(2\alpha - x) - (2\alpha - x')]^2 + [(2\beta - y) - (2\beta - y')]^2} \\ &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} = |AB| \end{aligned}$$

مثال ۲. بازتاب خط به معادله $2x - 3y + 5 = 0$ را نسبت به نقطه

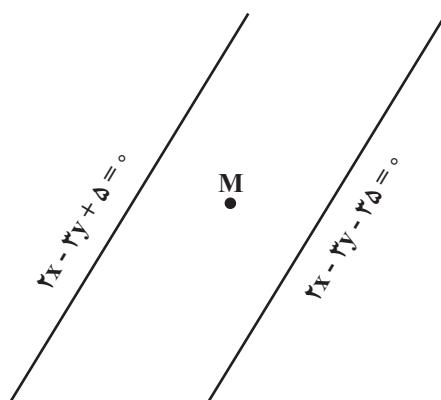
$M \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ به دست آورید.

حل: فرض کنیم بازتاب نقطه $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ از خط داده شده نسبت به $A' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ، نقطه $M \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ باشد. در این صورت داریم:

پس کافی است در معادله خط داده شده به جای x از $X - 12$ و به

جای y از $-2 - Y$ استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} 2(12 - X) - 3(-Y - 2) + 5 &= 0 \\ 2X - 3Y - 35 &= 0 \end{aligned}$$



شکل ۲

در مثال ۲ مشاهده می‌کنیم که شب خط پس از قرینه پایی نسبت به نقطه ثابت (بازتاب مرکزی) تغییر نکرده است. در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که شب خط‌ها در بازتاب مرکزی حفظ می‌شود.

انتقال

نقطه A' را انتقال یافته نقطه A تحت بردار \vec{V} گوییم، هرگاه:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$$

با توجه به تعریف فوق، اگر $\vec{V} = (p, q)$ بردار انتقال باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= \vec{V} \Rightarrow (x_{A'} - x_A, y_{A'} - y_A) = (p, q) \\ \Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} x_{A'} = p + x_A \\ y_{A'} = q + y_A \end{array} \right. \end{aligned}$$

در مطلب درسی کتاب هندسه ۲ دیدیم که تحت تبدیل انتقال، شبکهای و طول پاره خطها حفظ می شوند.

مثال ۵. انتقال یافته نقطه های $A \left| \begin{array}{l} x_A = 4 \\ y_A = 2 \end{array} \right.$ و $B \left| \begin{array}{l} x_B = 1 \\ y_B = 3 \end{array} \right.$ را تحت بردار $\vec{V} = (3, 1)$ مشخص کنید.

حل:

$$\begin{aligned} A' \left| \begin{array}{l} x_{A'} = p + x_A \\ y_{A'} = q + y_A \end{array} \right. &\Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} x_{A'} = 3 + 4 \\ y_{A'} = 1 + 2 \end{array} \right. \\ B' \left| \begin{array}{l} x_{B'} = p + x_B \\ y_{B'} = q + y_B \end{array} \right. &\Rightarrow B' \left| \begin{array}{l} x_{B'} = 3 + 1 \\ y_{B'} = 1 + 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

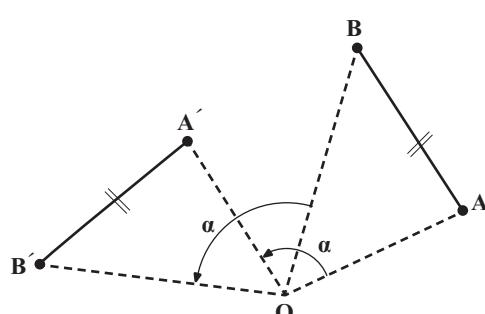
در مثال ۵ مشاهده می کنیم که طول پاره خطهای $A'B'$ و AB برابرند:

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{(4+1)^2 + (-2-2)^2} = 5 \\ |A'B'| = \sqrt{(4-7)^2 + (13-9)^2} = 5 \end{cases}$$

در حالت کلی نیز می توان ثابت کرد که انتقال، یک تبدیل پایا (ایزومتری) است.

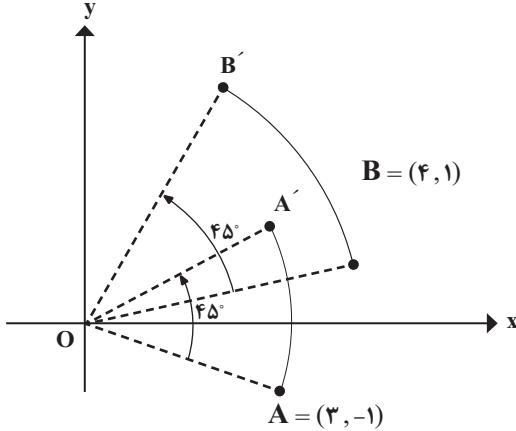
اگر $B \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \right.$ و $A \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ انتقال یافته نقطه های $A' \left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right.$ و $B' \left| \begin{array}{l} X' \\ Y' \end{array} \right.$ تحت بردار $\vec{V} = (p, q)$ باشند، داریم: $X = p + x$ و $Y = q + y$ و $X' = p + x'$ و $Y' = q + y'$.

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{[(p-x')-(p+x)]^2 + [(q+y')-(q+y)]^2} \\ &= \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = |AB| \end{aligned}$$



شکل ۵

می دانیم هر نقطه در صفحه به صورت $A = (x, y)$ نشان داده می شود که در واقع عبارت است از: $A = (x, 0) + (0, y)$. $A = x(1, 0) + y(0, 1)$ و یا: $A = x(1, 0) + y(0, 1)$



شکل ۸

حل:

$$A' = (3 \cos 45^\circ - (-1) \sin 45^\circ, 3 \sin 45^\circ + (-1) \cos 45^\circ)$$

$$\Rightarrow A' = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$B' = (4 \cos 45^\circ - (1) \sin 45^\circ, 4 \sin 45^\circ + (1) \cos 45^\circ)$$

$$\Rightarrow B' = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

در مثال ۷ مشاهده می‌کنیم که طول پاره خط‌های $A'B'$ و AB برابرند:

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{(4-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5} \\ |A'B'| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که دوران یک تبدیل پایا (ایزومتری) است.

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{[(x \cos \alpha - y \sin \alpha) - (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)]^2 + [(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)]^2} \\ &= \sqrt{[(x-x') \cos \alpha - (y-y') \sin \alpha]^2 + [(x-x') \sin \alpha - (y-y') \cos \alpha]^2} \\ &= \sqrt{(x-x')^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (y-y')^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = |AB| \end{aligned}$$

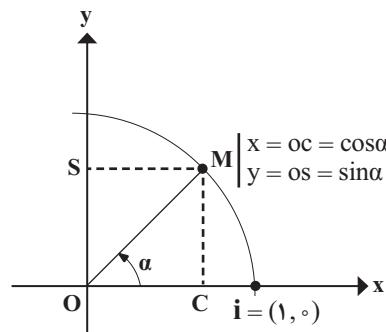
مثال ۸. خط $x + 3y - 5 = 0$ را حول مبدأ مختصات تحت زاویه 60° دوران داده‌یم. معادله خط جدید را بنویسید.

حل: فرض کنیم (x, y) نقطه‌ای دلخواه از خط داده شده باشد که پس از دوران، نقطه‌ای با مختصات (X, Y) باشد که داریم:

$$(X = x \cos 60^\circ - y \sin 60^\circ, Y = x \sin 60^\circ + y \cos 60^\circ)$$

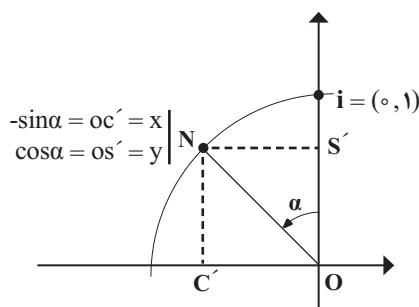
$$\Rightarrow (X = \frac{x - \sqrt{3}y}{2}, Y = \frac{\sqrt{3}x + y}{2})$$

حال فرض کنیم مرکز دوران همان مبدأ مختصات باشد و بخواهیم نقطه‌های $A(x, y)$ را حول مبدأ تحت زاویه α دوران دهیم. کافی است با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌کنیم که نقطه $(1, 0) = i$ پس از دوران تحت زاویه α حول مبدأ مختصات به نقطه $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ می‌رسد.



شکل ۶

از طرف دیگر با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌کنیم که نقطه $j = (0, 1)$ پس از دوران تحت زاویه α حول مبدأ مختصات به نقطه $N(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ می‌رسد.



شکل ۷

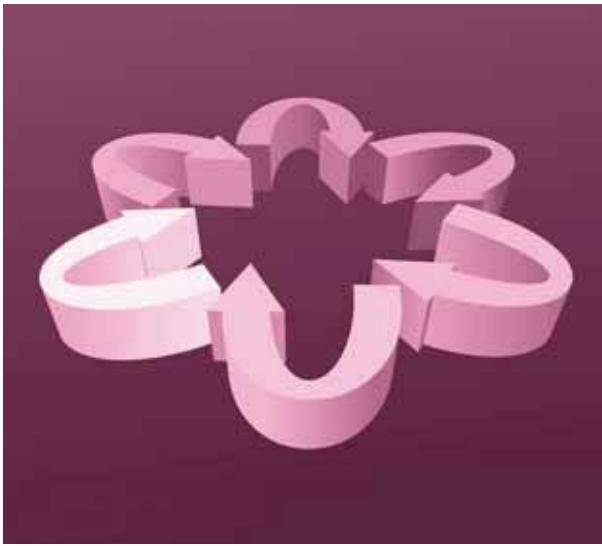
بنابراین نقطه $(x, y) = A$ پس از دوران حول مبدأ مختصات تحت زاویه α به نقطه A' خواهد رسید که داریم:

$$A = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \xrightarrow{\text{پس از دوران}}$$

$$x(\cos \alpha, \sin \alpha) + y(-\sin \alpha, \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$A'(X = x \cos \alpha - y \sin \alpha, Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

مثال ۷. نقطه‌های $A(-1, 1)$ و $B(4, 4)$ را تحت زاویه 45° حول مبدأ مختصات دوران داده‌یم. مختصات نقطه‌های جدید را مشخص کنید.



مثال ۱۰. مجانس خط $3x + 2y - 5 = 0$ در تجانس به مرکز $O(-1, 1)$ و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ را به دست آورید.

حل:

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow (x+1, y-1) = \frac{1}{3}(x-1, y-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x-2}{3} \\ y = \frac{y+2}{3} \end{cases}$$

پس کافی است در معادله خط به جای x از $3x + 2$ و به جای y از $3Y - 2$ استفاده کنیم:
 $3(3X + 2) + 2(3Y - 2) - 5 = 0$
 $9X + 6 + 6Y - 4 - 5 = 0$
 $9X + 6Y - 3 = 0$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که شیب خطها در تبدیل تجانس، حفظ می‌شود:

$$Y' = ky' + (1-k)\alpha, X' = kx' + (1-k)\alpha$$

$$Y = ky + (1-k)\alpha, X = kx + (1-k)\alpha$$

اگر $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ نقطه‌ای از خط $d : ax + by + c = 0$ باشد، برای به دست آوردن مجانس خط d نسبت به مرکز $O \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ و به نسبت تجانس k کافی است در معادله خط به جای x و y به ترتیب از $\frac{Y + (k-1)\beta}{k}$ و $\frac{X + (k-1)\alpha}{k}$ استفاده کنیم:

$$d' : a \frac{X + (k-1)\alpha}{k} + b \frac{Y + (k-1)\beta}{k} + c = 0$$

$$d' : ax + by + (k-1)(a\alpha + b\beta) + ck = 0 \Rightarrow m_d = m_{d'}$$

اگر $X + \sqrt{3}Y$ و $Y - \sqrt{3}X$ استفاده می‌کنیم تا به معادله خط دوران یافته برسیم:
 $2(\frac{X + \sqrt{3}Y}{2}) + 3(\frac{-\sqrt{3}X + Y}{2}) - 5 = 0$
 $(2 - 2\sqrt{3})X + (3 + 2\sqrt{3})Y - 10 = 0$

در مثال ۸ مشاهده می‌کنیم که شیب خط با شیب خط دوران یافته متفاوت است. در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که در تبدیل دوران که زاویه دوران مضربی صحیح از 180° نباشد، شیب خط تغییر می‌کند.

تجانس

نقاطه A' را مجانس نقطه A در تجانس به مرکز O و نسبت $. \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ گوییم هرگاه:

مثال ۹. مجانس نقطه‌های $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix} \right.$ به مرکز $O \left| \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right.$ و نسبت تجانس (-4) را به دست آورید.

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \Rightarrow (x-3, y+2) = (-4)(2-3, 3+2)$$

$$\Rightarrow A' \left| \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

$$\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow (x-3, y+2) = (-4)(5-3, -1+2)$$

$$\Rightarrow B' \left| \begin{matrix} 1 \\ -6 \end{matrix} \right.$$

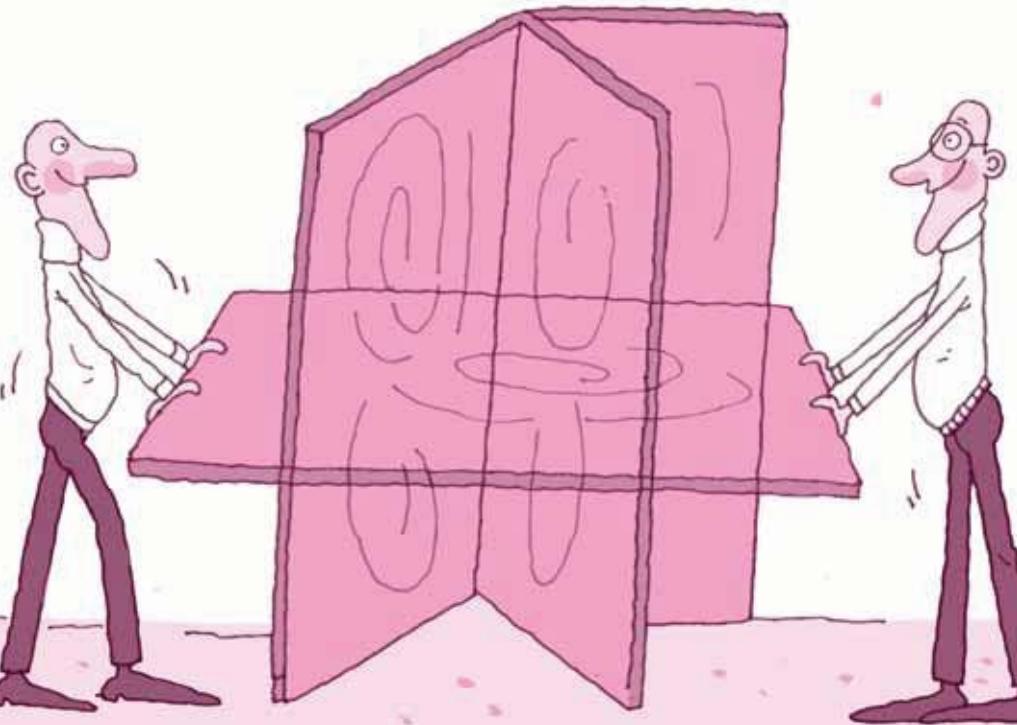
در مثال ۹ مشاهده می‌کنیم که: $|AB'| = 20$ و $|AB| = 20$. در واقع: $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که طول پاره خط پس از تجانس به نسبت k برابر و مساحت شکل نیز پس از تجانس، k^2 برابر می‌شود.

لازم به ذکر است که تجانس با ضریب تجانس $1 \neq \pm 1$ پایا نیست و تجانس با ضریب -1 ، همان بازتاب مرکزی و یا همان دوران تحت زاویه 180° است.

اگر $B \left| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right.$ و $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ مجانس‌های نقطه‌های $B' \left| \begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix} \right.$ و $A' \left| \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right.$ نسبت به مرکز $O \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ و ضریب تجانس $(1 \neq \pm 1)$ باشند، داریم:

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{[(kx' + (1-k)\alpha) - (kx + (1-k)\alpha)]^2 + [(ky' + (1-k)\alpha) - (ky + (1-k)\alpha)]^2} \\ &= \sqrt{k^2(x' - x)^2 + k^2(y' - y)^2} = |k| \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \\ &= |k| |AB| \end{aligned}$$



دستگاه‌های معادلات خطی

اشاره

در این مقاله ابتدا معادلات خطی و انواع دستگاه‌های معادلات خطی را معرفی کردیم. سپس با توجه به تعبیر هندسی از دستگاه‌ها، به بررسی تعداد جواب‌ها و امکان وجود جواب‌های آن‌ها پرداخته‌ایم و با استفاده از ماتریس‌ها، روش‌هایی برای حل و بحث در وجود و تعداد جواب‌های دستگاه‌های معادلات خطی معرفی کردیم. کاربردهایی نیز از ترمینان در حل دستگاه‌ها ارائه داده‌ایم.

همان‌طور که می‌دانید، معادله یک خط در \mathbb{R}^2 در
حالت کلی به صورت $ax+by=c$ نوشته می‌شود که این
معادله دارای دومجهول از درجه ۱ است. در حالت کلی، هر
معادله که به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$

نوشته شود و در آن مجھولات، یعنی x_1 و x_2 و و
 x_n همگی از درجه ۱ باشند، یک «معادله خطی»
نامیده می‌شود. در این معادله a_1 و a_2 و ... و a_n را ضرایب و b را مقدار معلوم معادله می‌نامیم. یک

دستگاه معادلات خطی شامل یک یا چند معادله
خطی است و منظور از حل یک دستگاه آن است که
به دنبال جواب‌های مشترکی برای همه این معادلات
باشیم. برای مثال، دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

همان‌طور که ذکر شد، هدف از حل یک دستگاه
معادلات یافتن جواب‌هایی برای مجھولات دستگاه است،
طوری که این جواب‌ها در تمام معادلات دستگاه صدق
کنند. مثلاً $x=3$ و $y=2$ یک دسته جواب برای دستگاه
است. زیرا $x=3$ و $y=2$ در هر دو معادله
دستگاه، صدق می‌کنند.

با توجه به اینکه نمودار هر یک از معادلات این
دستگاه، یعنی $-2x - 4y = -2$ و $x + 3y = 9$ ، یک خط

۴. دستگاه دو معادله و دو مجهول

این دستگاه به صورت $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ شامل دو معادله و دو مجهول است.

اگر بخواهیم در \mathbb{R}^2 روی تعداد وجود یا عدم وجود جواب‌های این دستگاه بحث کنیم، با توجه به اینکه هر معادله این دستگاه نمودار یک خط را در \mathbb{R}^2 مشخص می‌کند و اینکه دو خط در \mathbb{R}^2 نسبت به هم سه حالت می‌توانند داشته باشند (متقطع، موازی غیرمنطبق و منطبق)، لذا برای جواب‌های این دستگاه سه حالت امکان‌پذیر است:

الف. اگر: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (شیب دو خط برابر نباشند)، دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است (دو خط در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند).

ب. اگر: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، در این صورت (شیب دو خط برابر است و دو خط موازی‌اند ولی عرض از مبدأ آن‌ها یکسان نیست) دستگاه فاقد جواب است.

ج. اگر: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، در این صورت (دو خط موازی‌اند و عرض از مبدأ آن‌ها یکسان است؛ یعنی دو خط بر هم منطبق هستند) دستگاه بی‌شمار جواب دارد که این جواب‌ها همان نقاط روی این خط هستند.

مثال. روی تعداد وجود یا عدم وجود جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید:

$$\text{الف. } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2}$$

دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد

$$\text{ب. } \begin{cases} -x + 3y = 9 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{9}{4}$$

دستگاه جواب ندارد

$$\text{ج. } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -3x + 6y = -15 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{5}{-15}$$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد

۵. دستگاه دو معادله و سه مجهول

این دستگاه به صورت $\begin{cases} ax + by + cz = b \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ شامل دو معادله و سه مجهول است. پیدا کردن جواب‌های این دستگاه در \mathbb{R}^3 ، یعنی یافتن نقطه‌های

۳. دستگاه یک معادله و سه مجهول

این دستگاه به صورت $ax + by + cz = d$ فقط شامل یک معادله و سه مجهول است ($a, b, c \neq 0$). در \mathbb{R}^3 دارای تعداد نامتناهی جواب است به صورت $A \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ همه این نقطه‌ها روی صفحه $ax + by + cz = d$ واقع‌اند و در این معادله صدق می‌کنند. برای یافتن جواب‌ها یا برای حل دستگاه کافی است به دو متغیر یا مجهول از سه مجهول دستگاه مقادیر دلخواه بدھیم و مجهول سوم را بیابیم.

مثال. دو نقطه از صفحه $y + 2x - 3z = 6$ و سپس هر یک را روی صفحه xy تصویر کنید. معادله خطی را که از این دو نقطه تصویر یافته عبور می‌کند، در \mathbb{R}^3 بنویسید.

حل:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} x=y=1 \\ y+2x-3z=6 \end{matrix} \Rightarrow 1+2\times 1-3z=6 \\ & \Rightarrow -3z=3 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \\ & \begin{matrix} x=y=0 \\ 2x+y-3z=6 \end{matrix} \Rightarrow 2\times 0+0-3z=6 \\ & \Rightarrow -3z=6 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow B \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

وقتی نقطه‌ای در \mathbb{R}^3 را روی صفحه xy تصویر کنیم، با توجه به اینکه می‌دانیم هر نقطه روی صفحه xy ، ارتفاعش صفر است، پس تصویرهای این دو نقطه عبارت‌اند از: $A' \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $B' \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ و این نقطه‌ها در \mathbb{R}^2 به صورت $A' \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B' \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ نوشته می‌شوند.

شیب خطی که از آن‌ها عبور می‌کند نیز عبارت است از: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ و معادله این خط به شکل زیر است:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 1) = 1 \times (x - 1) \Rightarrow y = x$$

۶. دستگاه سه معادله و سه مجهول

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

این دستگاه به صورت

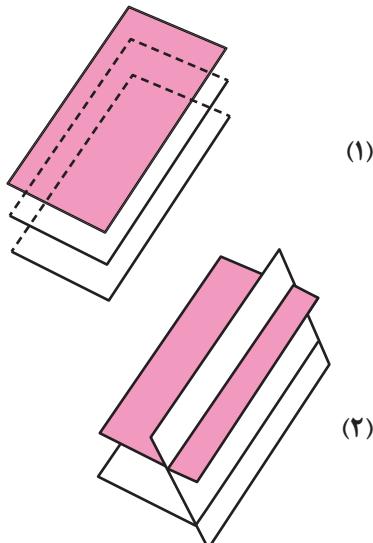
دارای سه معادله و سه مجهول است. حل آن در واقع

با بررسی وضعیت سه صفحه در \mathbb{R}^3 معادل است. پنج

حالت زیر برای سه صفحه در فضای سه بعدی، یعنی \mathbb{R}^3

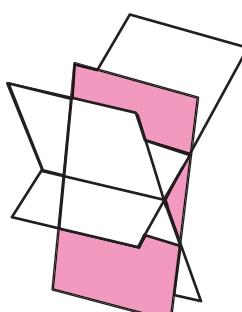
قابل تصور است:

الف. ممکن است دو صفحه از این سه صفحه، با هم موازی باشند یا هر سه صفحه موازی باشند که در این حالت هیچ نقطه‌ای نقاط مشترکی برای سه صفحه وجود ندارد و می‌گوییم دستگاه جواب ندارد.



شکل ۱ (۱) سه صفحه موازی (۲) دو صفحه موازی و یکی مورب

ب. اگر سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، ولی هیچ نقطه مشترکی روی سه صفحه نباشد، در این حالت نیز دستگاه فاقد جواب است.



شکل ۲ دو به دو متقاطع

مشترک روی فصل مشترک دو صفحه d و $a'x + b'y + c'z = d'$ که سه حالت امکان‌پذیر است:

الف. ممکن است دو صفحه موازی و غیرمنطبق باشند. این در شرایطی است که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$. در این حالت می‌گوییم دستگاه فاقد جواب است (دو صفحه موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند).

ب. اگر دو صفحه متقاطع باشند، یعنی: $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$ یا $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ یا $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دستگاه دو صفحه یک خط است که از بی‌شمار نقطه‌ای گذرد و مختصات همه این نقطه‌ها در هر دو معادله صدق می‌کنند. این حالتی است که دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

ج. امکان دارد دو صفحه بر هم منطبق باشند که در این حالت در بی‌شمار نقطه مشترک هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد. شرط انتظامی دو صفحه این است که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

CZDKR:

برای یافتن یک جواب برای دستگاه دو معادله و سه مجهول کافی است در آن دستگاه به یک مجهول، عدد دلخواه و مناسبی را نسبت دهیم و در هر دو معادله دستگاه بگذاریم. در این صورت، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل می‌شود که با حل آن یک جواب برای دستگاه اولیه به دست می‌آید.

مثال. یک جواب برای دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

حل: قرار می‌دهیم $z = 0$ که در این صورت خواهیم

داشت: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$ که پس از حل دستگاه داریم:

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ یک نقطه روی هر دو صفحه و

یک جواب برای دستگاه فوق است.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (3) \end{cases}$$

تذکر:

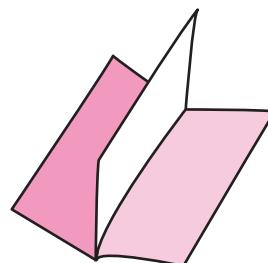
برای یافتن جواب منحصر به فرد دستگاه ابتدا با استفاده از دو معادله مثلاً ۱ و ۲ یا ۲ و ۳ یا ۱ و ۳، به روش حذفی یکی از مجهولات را حذف می‌کنیم که یک معادله دو مجهولی حاصل می‌شود. سپس با استفاده از دو معادله دیگر دوباره همان مجهول را حذف می‌کنیم تا یک معادله دو مجهولی دیگر حاصل شود. سرانجام دستگاهی شامل این دو معادله و دو مجهول تشکیل می‌دهیم و با حل آن دو مجهول را می‌یابیم. با قرار دادن آنچه یافته‌ایم در یکی از معادلات دستگاه، مجهول سوم را پیدا می‌کنیم.

ج. امکان دارد سه صفحه بر هم منطبق باشند (سه صفحه در واقع یک صفحه هستند) که واضح است در این حالت دستگاه بی‌شمار جواب دارد (نقاطه‌های روی صفحه).



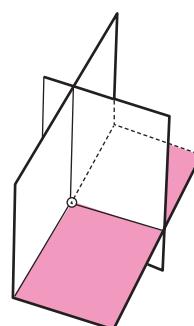
شکل ۳ سه صفحه بر هم منطبق اند

د. ممکن است سه صفحه در یک خط یکدیگر را قطع کنند (مطابق شکل). در این صورت فصل مشترک سه صفحه یک خط است که تمام نقاطهای روی این خط در هر سه صفحه قرار دارند و لذا در هر سه معادله صدق می‌کنند. در این حالت نیز دستگاه دارای بی‌شمار جواب است.



شکل ۴ سه صفحه در یک خط متقاطع اند

ه. امکان دارد سه صفحه در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند (مطابق شکل) یا سه صفحه یک کنج تشکیل دهند. در این صورت می‌گوییم دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.



شکل ۵ سه صفحه در یک نقطه متقاطع اند

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 & (1) \\ x + 2y + z = 9 & (2) \\ x - y + 2z = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x + 3y = 12 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

$$\text{یا } x + y = 4$$

$$(1), (3) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 6 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\stackrel{+}{\Rightarrow} \begin{cases} 5x + y = 8 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 8 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\stackrel{-}{\Rightarrow} \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + y = 4 \Rightarrow y = 3$$

$$x = 1, y = 3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2 \times 1 + 3 - z = 3 \Rightarrow z = 2$$

$$\Rightarrow A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. \quad (\text{نقطه مشترک سه صفحه})$$

چند تومان به روش کرامر!



آدم خانه و میوه‌ها و ۴ هزار تومان بقیه پول را به مادرم دادم. مادرم گفت: از ۱۰۰ هزار تومان فقط همین ۴ هزار تومان باقی ماند؟! گفتم بله. گفت: عجب گرانی بی حساب کتابی! چند کیلو میوه ۹۶ هزار تومان! خدا به دادمان برسد! هر کدام کیلویی چند؟ گفتم: مادر چند دقیقه به من وقت بده، الان می‌گوییم. کاغذ و قلم را برداشتیم، قیمت گیلاس را x ، قیمت هلوانجیری را y و قیمت شلیل را z فرض کردم و دستگاه را تشکیل دادم:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 96000 \\ 1x + 1y + 1/5z = 47000 \\ 0/5x + 2y + 1z = 44000 \end{cases}$$

آقای موسوی برای حل این دستگاه چند روش را به ما یاد داده بود که بعضی از آن‌ها در کتاب درسی هم بود و بعضی هم نبود. من از «روش کرامر» برای حل دستگاه سه معادله سه مجھول خیلی خوش آمده بود. بنابراین تصمیم گرفتم که این دستگاه را به روش کرامر حل کنم. و اما روش کرامر چگونه است؟

دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

ماتریس A را «ماتریس ضرایب»:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ماتریس X را «ماتریس مجھولات» (یا بردار مجھولات):

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

پنجشنبه ۱۱ مرداد ۱۳۹۷، ساعت هشت و نیم صبح بود که مادرم دوتا چک‌پول ۵۰ هزار تومانی به من داد و گفت: برو میوه‌فروشی علی آقا ۲ کیلو گیلاس، ۳ کیلو هلوانجیری و ۲ کیلو شلیل خوب بخر و بیار؛ امشب، مامان بزرگ با خاله و این‌ها میهمانمان هستند. علی آقا تازه از میدان، بار آورده بود و با شاگردش مشغول بدن میوه‌ها به داخل میوه‌فروشی اش بود. من و چند نفر دیگر هم که می‌خواستند میوه بخرند، منتظر بودیم تا علی آقا میوه‌هایش را از وانتبار خالی کند.

چون اول صبح بود، هیچ‌کدام از میوه‌ها برچسب قیمت نداشتند. بالاخره سه تا نایلون برداشتیم و حدود ۲ کیلو گیلاس، ۳ کیلو هلوانجیری و ۲ کیلو شلیل جدا کردم و کنار ترازوی دیجیتالی علی آقا گذاشتیم تا حساب کند. قبل از کشیدن به علی آقا گفتم که دقیقاً گیلاس ۲ کیلو، هلو ۳ کیلو و شلیل هم ۲ کیلو شود؛ نه بیشتر و نه کمتر. علی آقا هم دقیق کرد و کشید و گفت: شد ۹۶ هزار تومان.

مشکل ترازوی علی آقا این بود که کاغذش تمام شده بود و برگه چاپی نمی‌داد. به هر حال دوتا چک‌پول را دادم و ۴ هزار تومان از علی آقا پس گرفتم. خیلی دوست داشتم بدون اینکه از علی آقا درباره قیمت‌ها سوالی کنم، قیمت‌ها را محاسبه کنم. چند روز قبل آقای موسوی، دبیر خوب ریاضیاتمان در کلاس فوق برنامه ریاضی، انواع روش‌های حل دستگاه سه معادله سه مجھول را حسابی یادمان داده بود.

به علی آقا گفتم، بدون آنکه قیمت‌ها را به من بگویید، حساب کند ۱ کیلو گیلاس، ۱ کیلو هلوانجیری و $1/5$ کیلو شلیل چقدر می‌شود. علی آقا گفت: ۴۷۰۰۰ تومان. بعد گفتم: علی آقا، آخرین سوال هم اینکه $5/0$ کیلو گیلاس، ۲ کیلو هلوانجیری و ۱ کیلو شلیل چقدر می‌شود؟ علی آقا گفت: ۴۴۰۰۰ تومان. خب تا اینجا تمام اطلاعات لازم را برای تشکیل دستگاه سه معادله سه مجھول در اختیار داشتم.

☞ سرانجام، با حذف ستون سوم A و جایگزینی مقادیر B به جای آن و انجام فرایند مشابه، Z را بدست می‌آوریم.

خلاصه به سراغ حل مسئله، یعنی محاسبه قیمت گیلاس، هلو و شلیل رفتم. معادله این بود؛ یک دستگاه سه معادله سه مجهول.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 96000 \\ 1x + 1y + 1/5z = 47000 \\ 0/5x + 2y + 1z = 44000 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1/5 \\ 0/5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = d$$

$$|A| = d = 2(1 - (1/5 \times 2)) - 3(1 - (1/5 \times 0/5)) + 2(2 - (1 \times 0/5)) = -4 - 0/75 + 3 = -1/75$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 96000 & 3 & 2 \\ 47000 & 1 & 1/5 \\ 44000 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1/75}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 96000 & 3 & 2 \\ 47000 & 1 & 1/5 \\ 44000 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 96000(1 - (1/5 \times 2)) \\ &\quad - 3(47000 - (1/5 \times 44000)) \\ &\quad + 2((47000 \times 2) - (1 \times 44000)) \\ &= -192000 + 57000 + 10000 = -35000 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-35000}{-1/75} = 20000 \quad \text{بنابراین: قیمت گیلاس}$$

و برای محاسبه قیمت هلو و جیری:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 96000 & 2 \\ 1 & 47000 & 1/5 \\ 0/5 & 44000 & 1 \end{vmatrix}}{-1/75}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 96000 & 2 \\ 1 & 47000 & 1/5 \\ 0/5 & 44000 & 1 \end{vmatrix} &= 2(47000 - (1/5 \times 44000)) \\ &\quad - 96000(1 - (1/5 \times 0/5)) + 2(44000 - (47000 \times 0/5)) \\ &= -38000 - 24000 + 41000 = -21000 \end{aligned}$$

و ماتریس B را «ماتریس مقادیر معلوم» (یا بردار ثابت‌ها) در نظر می‌گیریم:

$$B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس A را d می‌نامیم:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d$$

بنابراین دستگاه سه معادله سه مجهول

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$AX = B$$

در روش کرامر برای محاسبه مجهولات x, y و z به شکل زیر عمل می‌کنیم:

☞ ستون اول A را حذف می‌کنیم و مقادیر معلوم B را به جای آن قرار می‌دهیم و دترمینان ماتریس به وجود آمده را محاسبه می‌کنیم، با شرط $d \neq 0$ داریم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{d}$$

☞ حاصل دترمینانی را که به این صورت بدست آمده است، بر دترمینان ماتریس A ، یعنی d تقسیم می‌کنیم.

☞ به همین ترتیب، با حذف ستون دوم A و جایگزینی مقادیر B به جای آن و انجام فرایند توضیح داده شده، y را محاسبه می‌کنیم که به شکل زیر در می‌آید:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{d}$$



$$z = \frac{-17500}{-1/75} = 10000$$

قیمت شلیل

همه چیز درست بود و محاسبات به روش کرامر دقیق: ۲ کیلو گیلاس کیلویی ۲۰۰۰۰ تومان، با ۳ کیلو هلوانجیری کیلویی ۱۲۰۰۰ تومان، و ۲ کیلو شلیل کیلویی ۱۰۰۰۰ تومان دقیقاً می‌شد ۹۶۰۰۰ تومان.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z \\ = (2 \times 20000) + (3 \times 12000) + (2 \times 10000) \\ = 96000 \end{aligned}$$

به مادرم گفتم: گیلاس کیلویی ۲۰ هزار تومان، هلو انجیری کیلویی ۱۲ هزار تومان و شلیل کیلویی ۱۰ هزار تومان. چیزی که مبهم و قابل تأمل بود، قیمت بالا و باورنکردنی میوه‌ها در تاریخ پنجشنبه ۱۱ مرداد ۱۳۹۷ بود.

$$y = \frac{-21000}{-1/75} = 12000$$

قیمت هلو انجیری

و در آخر قیمت شلیل را به صورت زیر محاسبه کردم:

$$z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 96000 \\ 1 & 1 & 47000 \\ 0/5 & 2 & 44000 \end{vmatrix} \quad -1/75$$

$$\begin{aligned} 2 & \quad 3 \quad 96000 \\ 1 & \quad 1 \quad 47000 \\ 0/5 & \quad 2 \quad 44000 \end{aligned} = 2(44000 - (47000 \times 2)) \\ -3(44000 - (47000 \times 0/5)) + 96000(2 - 0/5) \\ = -100000 - 61500 + 144000 = -17500 \end{aligned}$$

نابرابری‌ها

نابرابری میانگین حسابی - هندسی

علامت عددهای طرفین مثبت یا منفی باشد، حالتهای متفاوت وجود دارد و این خاصیت را نمی‌توان از حالت

$=$ به $<$ تعمیم داد.

$$2 < 3 \Rightarrow 2^2 < 3^2$$

$$-4 < 3 \Rightarrow (-4)^2 < 3^2$$

همچنین، اگر a عددی حقیقی باشد و برای عددهای

طبیعی m و n داشته باشیم: آن‌گاه:

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^m > a^n$$

$$a > 1 \Rightarrow a^m < a^n$$

با این توضیحات می‌خواهیم با یکی از کاربردی‌ترین

نابرابری‌ها به نام «نابرابری میانگین حسابی - هندسی»

آشنا شویم. قبل از بیان این نابرابری به صورت رسمی،

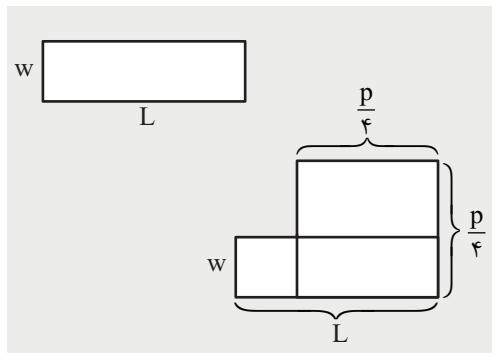
به منظور ساده شدن درک مطلب از مسئله کمکی زیر استفاده می‌کنیم.

مسئله. در میان همه مستطیل‌های دارای محیط

ثابت، کدام یک بیشترین مساحت را دارد؟

حل: شکلی رسم می‌کنیم. اگر L و w به ترتیب

طول و عرض مستطیل و p محیط آن باشد، داریم:



شکل ۱

وقتی عدد a مثبت است، می‌نویسیم: $a > 0$ و وقتی a منفی است، می‌نویسیم: $a < 0$. شاید این‌ها ساده‌ترین نابرابری‌ها باشند. همین‌طور نابرابری $x^2 \geq y^2$ برای هر عدد حقیقی x برقرار است که می‌توان آن را برای دو عدد حقیقی x و y نیز مطرح کرد: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ و به همین ترتیب برای سه عدد حقیقی یا بیشتر از آن نیز تعمیم داد.

تعریف. $a > b$ است، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند h وجود داشته باشد که: $a = b + h$ و برعکس، اگر عدد مثبتی چون h چنان وجود داشته باشد که: $a = b + h$ آن‌گاه: $a > b$.

نابرابری (\neq) شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با تساوی ($=$) دارد. در حل معادله‌ها بارها از خاصیت‌های تساوی استفاده کرده‌ایم. وقتی به جای تساوی نابرابری داریم، چه خاصیت‌هایی برای آن وجود دارد؟

یکی از شباهت‌های « \neq » با « $=$ » این است که به طرفین می‌توان عددی را افزود. یکی از تفاوت‌های اساسی آن‌ها نیز این است که در تساوی می‌توان طرفین را در هر عدد حقیقی ضرب کرد، ولی در نابرابری‌ها این خاصیت به صورت زیر وجود دارد:

$$\text{اگر } ac < bc \text{ و } a < b, \text{ آن‌گاه: } c > 0$$

$$\text{اگر } ac > bc \text{ و } a < b, \text{ آن‌گاه: } c < 0$$

یکی از شباهت‌های دیگر خاصیت تراپایی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{اگر } a = b \text{ و } b = c, \text{ آن‌گاه: } a = c$$

$$\text{اگر } a < b \text{ و } b < c, \text{ آن‌گاه: } a < c$$

تفاوت‌های دیگر این دو نماد در به توان رساندن است. در تساوی می‌توان طرفین را به توان هر عدد صحیحی رساند، ولی در نابرابری‌ها بحسب آنکه



و تساوی وقتی برقرار است که: $L=w$. اما چون
داریم: $\frac{p}{4} = \frac{L+w}{2}$, می‌توان رابطه اخیر را به صورت
 $(\frac{L+w}{2})^2 \leq Lw$ نوشت و تساوی وقتی برقرار است که:
 $L=w$

در این مسئله، L و w دو عدد حقیقی مثبت
هستند که نمایند گان طول و عرض مستطیل محسوب
می‌شوند. بنابراین این نابرابری برای هر دو عدد حقیقی
مثبت برقرار است.

میانگین دو عدد حقیقی مثبت x و y برابر
 $\frac{x+y}{2}$ و اوسطه هندسی (میانگین هندسی) این دو عدد \sqrt{xy}
است. رابطه $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ که به آن نابرابری میانگین
حسابی - هندسی می‌گویند، برای هر دو عدد حقیقی
مثبت x و y برقرار است. تساوی نیز در حالتی رخ
می‌دهد که: $x=y$

اثبات جبری این نابرابری که با استفاده از استدلال
استنتاجی انجام می‌شود، به صورت زیر است:
 $(x-y)^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

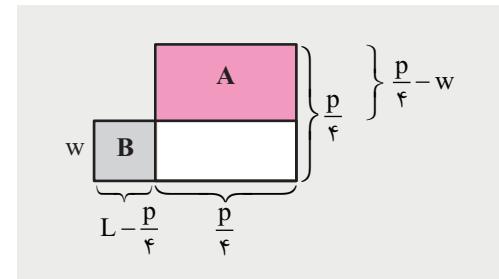
$$x^2 + y^2 - 2xy + 4xy \geq 4xy$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

مربعی به ضلع $\frac{p}{4}$ در یک طرف مستطیل ساخته‌ایم.
(البته اگر طول و عرض مستطیل برابر باشند، مربع و
مستطیل بر هم منطبق می‌شوند. فرض می‌کنیم: $L < w$)
برای آنکه نشان دهیم مساحت مربع از مساحت مستطیل
بیشتر است، باید نشان دهیم مساحت ناحیه سایه خوده
از مساحت ناحیه B بزرگ‌تر است.



شکل ۲

$$A = \frac{p}{4} \times \left(\frac{p}{4} - w\right)$$

$$B = w(L - \frac{p}{4}) = w(\frac{p}{2} - w - \frac{p}{4}) = w(\frac{p}{4} - w)$$

چون $\frac{p}{4} < w$, پس مساحت ناحیه A بیشتر
از مساحت ناحیه B است و این همان چیزی بود که
می‌خواستیم. می‌توان نتیجه استدلال بالا را با نمادهای
جبری هم بیان کرد. مساحت مستطیل wL و مساحت
مربع $(\frac{p}{4})^2$ و در این صورت نشان دادیم که:
 $Lw \leq (\frac{p}{4})^2$

حداکثر مساحت 100 واحد سطح است و زمانی اتفاق می‌افتد که این مستطیل مربعی به ضلع 10 باشد.

مثال ۲. برای عده‌های حقیقی و مثبت x, y و z داریم:

$$xyz(x+y+z) = 1$$

حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)(x+z)$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} (x+y)(y+z) &= xy + y^2 + xz + yz \\ &= xz + y(x+y+z) \\ &= xz + \frac{y}{xyz} = xz + \frac{1}{xz} \end{aligned}$$

از طرف دیگر می‌دانیم، مجموع هر عدد مثبت و معکوس آن حداقل 2 است. بنابراین:

$$xz + \frac{1}{xz} \geq 2$$

و در نتیجه حداقل مقدار عبارت موردنظر برابر 2 است.

مثال ۳. ثابت کنید اگر a, b و c سه عدد حقیقی غیرمنفی باشند، آن‌گاه:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq abc$$

حل: برای هر جفت از a, b و c نابرابری میانگین حسابی - هندسی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \\ \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \\ \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \end{cases}$$

از ضرب طرفین نابرابری‌ها در هم داریم:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq \sqrt{(ab)(bc)(ac)}$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq abc$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq abc$$

نابرابری میانگین حسابی - هندسی برای سه یا بیشتر از سه عدد نیز برقرار و تعمیم آن به صورت زیر است:

اگر x_1, x_2, \dots, x_n اعداد حقیقی نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

و تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

یکی از مسائل مهم و کلیدی را که با استفاده از نابرابری فوق قبل بررسی است، در اینجا مطرح می‌کنیم:

مسئله. مجموع هر عدد مثبت و معکوس آن حداقل برابر 2 است.

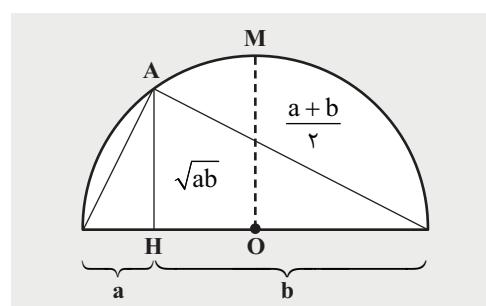
حل: اگر x عدد حقیقی مثبت باشد، واضح است که: $\frac{1}{x} > 0$ و طبق نابرابری میانگین حسابی - هندسی داریم:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

حالات تساوی وقتی است که: $x = \frac{1}{x}$
یک روش هندسی دیگر برای اثبات نابرابری میانگین حسابی - هندسی را در شکل 3 ملاحظه می‌کنید.

اثبات برقراری آن را بر عهده شما می‌گذاریم.



شکل ۳

حال به چند مثال که با استفاده از این نابرابری قابل حل هستند، می‌پردازیم.

مثال ۱. مجموع مساحت و محیط مستطیلی 140 است. حداکثر مساحت آن چند واحد سطح است؟

حل: اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب a و b در نظر بگیریم، داریم:

$$2(a+b) + ab = 140$$

داریم: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ بنابراین:

$$4\sqrt{ab} + ab \leq 140$$

$$(\sqrt{ab} + 2)^2 \leq 140 + 4 = 144$$

$$\sqrt{ab} + 2 \leq 12 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 10 \Rightarrow ab \leq 100$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

بیشترین مقدار حاصل ضرب (سمت چپ) وقتی اتفاق می‌افتد که:

$$p-a=p-b=p-c$$

$$\therefore a=b=c$$

در ادامه تعدادی تمرین آمده است که در حل آن‌ها،

استفاده از نابرابری میانگین حسابی - هندسی و کمی خلاقیت غالباً به نتیجه خواهد رسید.

مثال ۴. برای سه عدد حقیقی نامنفی a , b و c ثابت کنید: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

حل: نابرابری میانگین حسابی - هندسی را برای سه عدد a^3 , b^3 و c^3 به کار می‌بریم:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

مثال ۵. به ازای هر عدد طبیعی n نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

حل: می‌دانیم: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ حال نابرابری میانگین حسابی - هندسی را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq \sqrt[n]{n!}$$

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!}$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$$

از روش حل بالا می‌توان نتیجه گرفت که حالت تساوی فقط برای $n=1$ رخ می‌دهد.

مثال ۶. نشان دهید بین مثلث‌های دارای محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

حل: برای حل این مسئله از «دستور هرون» برای مساحت مثلث استفاده می‌کنیم. این دستور به صورت زیر است:

اگر a , b و c اندازه‌های سه ضلع مثلث و $\frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط باشد، آن‌گاه مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

اکنون نابرابری میانگین حسابی - هندسی در حالت سه عدد را برای $z=p-c$, $y=p-b$, $x=p-a$ و $S = \sqrt{xyz}$ به کار می‌بریم:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

و با جایگزینی داریم:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3}$$

منابع *

۱. لوایی، جواد؛ شفیع‌زاده، حسین؛ شادانم، محسن (۱۳۸۲). مرجع کامل المپیاد ریاضی. انتشارات علوی. تهران.
۲. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۸۰). آموزش هنر حل مسئله. انتشارات کانون فرهنگی آموزش و مؤسسه نخبگان برنامه‌ریزی آموزشی. تهران.
۳. شریفی، محمد (۱۳۸۷). جبر در المپیاد ریاضی ایران و جهان. انتشارات کانون فرهنگی آموزش و مؤسسه نخبگان دانش و اندیشه ایرانیان. تهران.

حل معادله‌های درجه چهارم با شرایط خاص

چکیده

در این مقاله معادله‌های درجه چهارم با شرایط خاص به شکل زیر را حل می‌کنیم:

$$(x+a_1)^4 + (x+b_1)^4 + (x+a_2)^4 + (x+b_2)^4 +$$

$$\dots + (x+a_n)^4 + (x+b_n)^4 = k$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n$$

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4 = f$$

به این منظور ابتدا به حل معادله به شکل:

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4 +$$

با شرط $a+b=c+d$ می‌پردازیم و سپس معادله درجه چهارم به شکل:

$$(x+e)^4 + (x+f)^4 = g$$

با شرط $f = a+b=c+d=e+f$ را حل می‌کنیم. در نهایت هم به یک نتیجه کلی در مورد معادلات درجه چهارم با چنین شرایط

خاص می‌رسیم.

کلیدوازه‌ها: حل معادله درجه چهارم، حل معادله با شرایط خاص

مقدمه

قبل از حل معادلات مربوط به این مقاله، به حل یک سلسله از معادلات در شرایط خاص تری می‌پردازیم.

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 = m \quad (1)$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) + \frac{a-b}{2} \right]^4 +$$

$$\left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) - \frac{a-b}{2} \right]^4 = m \quad (2)$$

و اگر فرض کنیم $\frac{a-b}{2} = s$ و $x + \frac{a+b}{2} = t$ خواهیم داشت:

$$(t+s)^4 + (t-s)^4 = m$$

که با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتون و ساده کردن آن خواهیم

$$2t^4 + 12st^2 + 2s^4 - m = 0 \quad (3)$$

که یک معادله دو مجددی است که با تغییر متغیر $y = t^2$ قابل حل خواهد بود.

مثال: مطلوب است حل معادله:

$$(x+2)^4 + (x+5)^4 = 17 \quad \text{اگر تغییر متغیر}$$

نجام دهیم، خواهیم داشت:

$$(t + \frac{3}{2})^4 + (t - \frac{3}{2})^4 = 17$$

پس از بسط دوجمله‌ای نیوتون داریم:

$$2t^4 + 27t^2 - \frac{55}{4} = 0$$

که با فرض $t^2 = y$ خواهیم داشت:

$$2y^2 + 27y - \frac{55}{4} = 0$$

که با حل معادله درجه دوم داریم: (ریشه موهومی دارد)

$$y = t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y = t^2 = -\frac{55}{4}$$

$$\Rightarrow t = x + \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2} \quad x = -3, -4$$

حل معادله درجه چهارم به شکل

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4 = f \quad (4)$$

$$a+b=c+d$$

حل معادله درجه چهارم به شکل

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 + (x+c)^4 + (x+d)^4 + (x+e)^4 + \\ (x+f)^4 = g \quad (7)$$

با شرط $a+b=c+d=e+f$

برای حل این معادله از تغییر متغیرهای ، w

$$\frac{e-f}{2} = p \quad \text{و} \quad \frac{c-d}{2} = n \quad , \quad x + \frac{c+d}{2} = z \quad , \quad \frac{a-b}{2} = s \quad x + \frac{a+b}{2} = t$$

استفاده می کنیم و معادله (7) به صورت زیر خواهد شد:

(8)

$$\left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) + \frac{a-b}{2} \right]^4 + \left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) - \frac{a-b}{2} \right]^4 + \\ \left[\left(x + \frac{c+d}{2} \right) + \frac{c-d}{2} \right]^4 + \left[\left(x + \frac{c+d}{2} \right) - \frac{c-d}{2} \right]^4 + \\ \left[\left(x + \frac{e+f}{2} \right) + \frac{e-f}{2} \right]^4 + \left[\left(x + \frac{e+f}{2} \right) - \frac{e-f}{2} \right]^4 = g$$

با جاگذاری داریم:

$$(t+s)^4 + (t-s)^4 + (z+n)^4 + (z-n)^4 + (w+p)^4 + (w-p)^4 = g$$

حال از بسط دو جمله‌ای نیوتن استفاده می کنیم و خواهیم داشت:

$$2t^4 + 12s^2t^2 + 2s^4 + 2z^4 + 12n^2z^2 + 2n^4 + 2w^4 + 12p^2w^2 + 2p^4 = g$$

اگر شرط برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$x + \frac{a+b}{2} = t = x + \frac{c+d}{2} = z = x + \frac{e+f}{2} = w$$

در نتیجه به رابطه (9) خواهیم رسید:

$$6t^4 + 12(s^2 + n^2 + w^2)t^2 + 2(s^4 + n^4 + w^4) - g = 0. \quad (9)$$

که یک معادله دو مجددی و قابل حل است.

نتیجه‌گیری کلی

معادله (1) در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$(x+a_1)^4 + (x+b_1)^4 + (x+a_2)^4 + (x+b_2)^4 +$$

$$\dots + (x+a_n)^4 + (x+b_n)^4 = k$$

$$x + \frac{a_1 + b_1}{2} = t \quad \text{و} \quad a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n$$

$$s_1 = \frac{a_1 - b_1}{2} \quad \text{و} \quad s_2 = \frac{a_2 - b_2}{2} \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{و} \quad s_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$

که معادله دو مجددی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$2nt^4 + 12(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)t^2 + 2(s_1^4 + s_2^4 + \dots + s_n^4) - k = 0.$$

منبع *

شهریاری، پرویز (۱۳۸۹)، روش‌های جبری (ج ۱) امیرکبیر، تهران.

معادله (4) را ابتدا به صورت زیر می نویسیم:

$$(5) \quad \left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) + \frac{a-b}{2} \right]^4 + \left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) - \frac{a-b}{2} \right]^4 + \\ \left[\left(x + \frac{c+d}{2} \right) + \frac{c-d}{2} \right]^4 + \left[\left(x + \frac{c+d}{2} \right) - \frac{c-d}{2} \right]^4 = f$$

$$\text{برای حل این معادله از تغییر متغیرهای } x + \frac{a+b}{2} = t \quad \text{و} \quad \frac{c-d}{2} = n \quad \text{استفاده می کنیم و} \quad x + \frac{c+d}{2} = z \quad \text{و} \quad \frac{a-b}{2} = s$$

آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$(t+s)^4 + (t-s)^4 + (z+s)^4 + (z-s)^4 = f$$

حال از بسط دو جمله‌ای نیوتن استفاده می کنیم که خواهیم داشت:

$$2t^4 + 12s^2t^2 + 2s^4 + 2z^4 + 12n^2z^2 + 2n^4 = f$$

حال با توجه به شرط $a+b=c+d$ خواهیم داشت:

$$x + \frac{a+b}{2} = t = x + \frac{c+d}{2} = z$$

درنتیجه معادله به صورت

$$4t^4 + 12(s^2 + n^2)t^2 + 2(s^4 + n^4) - f = 0. \quad (6)$$

در می آید که یک معادله دو مجددی و قابل حل است.

مثال: مطلوب است حل معادله

$$(x-1)^4 + (x-2)^4 + (x-3)^4 + (x-4)^4 = 98$$

فرض می کنیم: $a=-4$, $b=-3$, $c=-2$, $d=1$

خواهیم داشت: $s = \frac{3}{2}$ و $c+d=-2-3=-5$ و $a+b=-1-4=-5$ و

$$x + \frac{-5}{2} = t = x + \frac{-5}{2} = z \quad \text{و} \quad n = \frac{1}{2}$$

حال با توجه به رابطه (6) خواهیم داشت:

$$4t^4 + 12\left(\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2\right)t^2 + 2\left(\left(\frac{-5}{2}\right)^4 + \left(\frac{-5}{2}\right)^4\right) = 98$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$16t^4 + 120t^2 - 351 = 0.$$

که یک معادله دو مجددی است و برای t^2 دو مقدار -78 و

$\frac{9}{4}$ و برای $t = -\sqrt{-78}$ و جواب موهومی به دست می آید. برای

معادله $\frac{9}{4}t^2 = \frac{9}{4}$ نیز دو مقدار $\pm \frac{3}{2}$ برای t حاصل می شود. حال با

توجه $t = \pm \frac{3}{2}$ داریم: $x + \frac{a+b}{2} = \pm \frac{3}{2}$ که از دو معادله دو

مقدار ۱ و $\frac{4}{4}$ برای x به دست می آید.

اثبات درستی روابط مثلثاتی

با روش‌های هندسی

اشاره

هنودسه و مثلثات از دیرباز پیوندی ناگسستنی با هم داشته‌اند. وقتی حل مسئله را با تعبیر هندسی همراه می‌کنیم، برای بیشتر دانش آموزان، حتی آن‌ها که با ریاضیات و به خصوص مثلثات سر آشته ندارند، غالب توجه می‌شود. اثبات مسائل مثلثاتی به روش‌های هندسی این مزیت را هم دارد که نشان می‌دهد، حل بسیاری از این دست مسائل که مشکل و یا اثبات آن‌ها نیازمند به خاطرسپاری فرمول است، گاهی از طریق هندسی به آسانی امکان‌پذیر است.

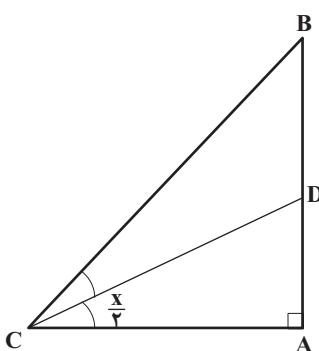
در این مقاله سعی شده است، نمونه‌های متنوعی از روابط و مسائل مثلثاتی با روش‌های بدیع هندسی اثبات و بررسی شوند.

پس:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{MP}{A'P} = \frac{MP}{A'O + OP} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

روش دوم

در این روش از خاصیت نیمساز زاویه در مثلث استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که نیمساز یک زاویه در مثلث دلخواه، ضلع مقابل به آن زاویه را به دو پاره خط چنان تقسیم می‌کند که نسبت این دو پاره خط متناسب است با نسبت اضلاع متناظر به این زاویه.

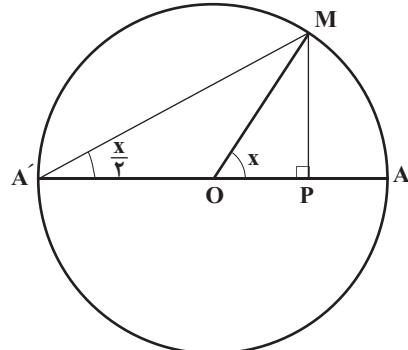


شکل ۲

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر می‌گیریم و زاویه حاده C از آن را مساوی x فرض می‌کنیم. اگر CD نیمساز زاویه داخلی C باشد، با $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$ توجه به آنچه گفتیم:

نخست به سه روش هندسی برای اثبات یک اتحاد مثلثاتی معروف توجه می‌کنیم:

نمونه ۱. اتحاد $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را ثابت کنید.



شکل ۱

اثبات

روش اول: استفاده از دایره به شعاع واحد یک دایره مثلثاتی به شعاع واحد رسماً می‌کنیم. فرض کنیم $\angle MOP = x$. در این صورت زاویه $MA'P$ زاویه محاطی رو به رو به کمان به اندازه x است و طبق تعریف، اندازه آن نصف کمان رو به روست.

پس: $\angle A' = \frac{x}{2}$. در مثلث قائم‌الزاویه $MA'P$ داریم: $\cos x = OP$ اما در مثلث MOP می‌دانیم $\tan \frac{x}{2} = \frac{MP}{A'P}$

صورت و مخرج سمت راست تساوی اخیر را برابر AM تقسیم می‌کنیم:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{AH}{\frac{CM}{AM} + \frac{MH}{AM}}$$

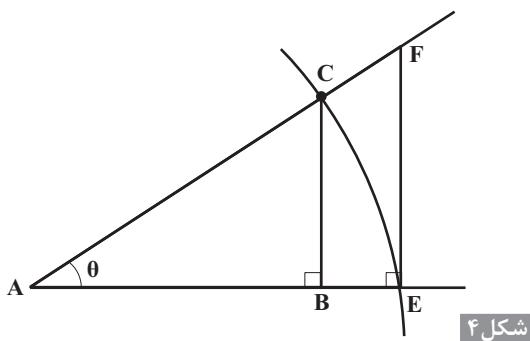
اما در مثلث قائم‌الزاویه AMH (که $\hat{H} = 90^\circ$ داریم) با جایگذاری در تساوی بالا داریم:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

نمونه ۲. به روش هندسی اتحاد $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ را ثابت کنید.

اثبات

مثلث ABC که در رأس B قائم و مثلث AEF و مثلث ACF را که در رأس E قائم است، در نظر می‌گیریم. زاویه رأس A را θ می‌نامیم و فرض می‌کنیم، طول اضلاع AC و AE برابر ۱ باشد.



شکل ۴

حال داریم:

$$\Delta ABC : \cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{1} = AB$$

$$\Delta ABC : \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\Delta AEF : \tan \theta = \frac{EF}{AE} = \frac{EF}{1} = EF$$

در ادامه، طول ضلع AF را از طریق تساوی می‌یابیم:

$$\frac{AF}{1} = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow AF = \frac{1}{\cos \theta}$$

از طرف دیگر، طول ضلع AF از طریق قضیه فیثاغورس برابر است با:

$$\Delta AEF : AF^2 = AE^2 + EF^2$$

اما در مثلث ABC داریم: $\cos x = \frac{AC}{BC}$ پس: $\cos x = \frac{AD}{DB}$ و در نتیجه: با توجه به خواص تناسب می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{AD}{AB} \text{ یعنی: } \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{AD}{AD + DB}$$

صورت و مخرج سمت راست تساوی اخیر را برابر AC تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{AD : AC}{AB : AC}$$

اما: $\tan x = \frac{AB}{AC}$ در مثلث (ADC) و $\tan \frac{x}{2} = \frac{AD}{AC}$

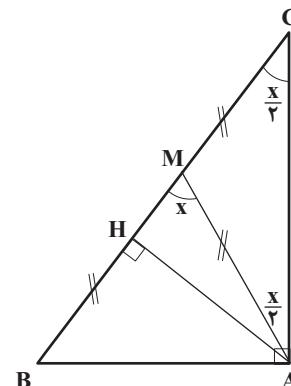
(در مثلث (ABC))

$$\frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan x} = \frac{\cos x}{1 + \cos x} \text{ در نتیجه:}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\cos x \cdot \tan x}{1 + \cos x} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

روش سوم

مثلث قائم‌الزاویه ABC را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که رأس A قائم باشد و داشته باشیم: $\angle C = \frac{x}{2}$ میانه AM را بر وتر BC وارد $AM = BM = CM$ می‌کنیم. از آنجاکه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:



شکل ۳

زاویه BMA زاویه خارجی مثلث AMC و برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است. پس: $\angle AMB = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$ حال از A عمود AH را بر وتر BC وارد می‌کنیم و داریم:

$$\Delta ACH : \tan \frac{x}{2} = \frac{AH}{CH} = \frac{AH}{CM + MH}$$

$$(4) \frac{AC}{AM} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

پس:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

بنابراین ثابت شد که:

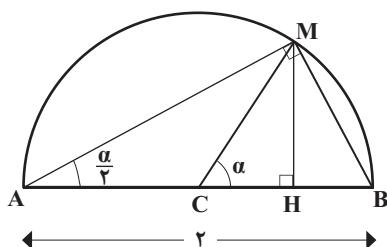
$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

نتایج حاصل از (۳) و (۴) را در رابطه (۲) قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} (2) 1 + \cos \alpha = \frac{CH}{AC} \times \frac{AC}{AM} \\ (3) \frac{CH}{AC} = \cos \frac{\alpha}{2} \\ (4) \frac{AC}{AM} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \cos \alpha = \cos \frac{\alpha}{2} \times 2 \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

و لذا حکم ثابت شد.

روش دوم: نیم‌دایره‌ای به قطر AB برابر ۲ و به مرکز نقطه C چنان رسم می‌کنیم که زاویه MCB برابر α باشد. در این صورت زاویه AMB دربرگیرنده قطر و برابر 90° درجه است. همچنین، زاویه محاطی A روبروی کمان مرکزی α است، پس: $\hat{A} = \frac{\alpha}{2}$



شکل ۶

$$\left. \begin{array}{l} \Delta AMH : \cos \hat{M}AH = \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AM} \\ \Delta AMB : \cos \hat{M}AB = \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{AB} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AM} \times \frac{AM}{AB} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{2} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\Delta CMH : \cos \hat{M}CH = \cos \alpha = \frac{CH}{CM} = \frac{CH}{1} = CH \quad (2)$$

$$AH = AC + CH = 1 + \cos \alpha$$

داریم:

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha &= \frac{\Delta AMH}{\Delta AMH} = 1 + \frac{MH}{AM} = \frac{AM + MH}{AM} \\ &= \frac{CM + MH}{AM} = \frac{CH}{AM} \quad (1) \end{aligned}$$

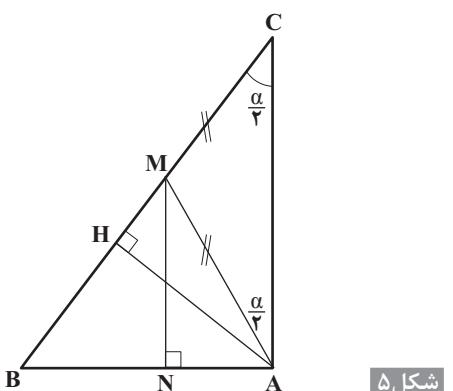
صورت و مخرج سمت راست تساوی (۱) را در AC ضرب می‌کنیم:

$$1 + \cos \alpha = \frac{CH}{AM} \times \frac{AC}{AC} = \frac{CH}{AC} \times \frac{AC}{AM} \quad (2)$$

اما در مثلث AHC ($\angle H = 90^\circ$) داریم: $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{CH}{AC}$

از سوی دیگر، $AC = 2MN$ ، پس: $\frac{AC}{AM} = \frac{2MN}{AM}$ در مثلث

$$\cos \hat{A}MN = \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{MN}{AM} \quad \text{داریم: } AMN$$



شکل ۵

همچنین: $MN \parallel AC$. پس مثلث MNA قائم‌الزاویه است و $\angle NMA = \frac{\alpha}{2}$ حال داریم:

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{MH}{AM} = \frac{AM + MH}{AM}$$

$$= \frac{CM + MH}{AM} = \frac{CH}{AM} \quad (1)$$

رشدبرهان دوره متوسطه ۲ | دوره بیست و هشتم | شماره ۲ | زمستان ۱۳۹۷

و همچنین در مثلث $\triangle ACB$ ($\angle C = 90^\circ$) داریم:

$$\cos B\hat{A}C = \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{AB} \quad (4)$$

اکنون اگر در رابطه (2) به جای $\frac{AC}{AB}$ و $\frac{CM}{AC}$ به ترتیب

$$\sin \frac{\alpha}{2} \text{ و } \cos \frac{\alpha}{2} \text{ (با توجه به ۳ و ۴) را قرار دهیم، به دست می‌آید:}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین حکم ثابت شد.

روش دوم: به کمک شکل ۶ می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

داریم:

$$\Delta AMH : \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{MH}{AM}$$

$$\Delta AMB : \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{MH}{AM} \times \frac{AM}{AB} = \frac{MH}{AB}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{MH}{2}, \text{ پس: } AB = 2 \\ MH &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle CMH$ (یا وتر به طول ۱) داریم:

$$\sin \alpha = \frac{MH}{CM} = \frac{MH}{1} = MH$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

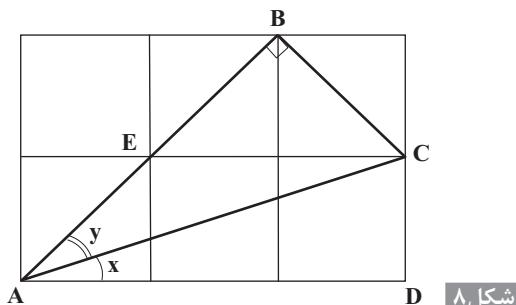
پس ثابت شد:

نمونه ۵. با روش هندسی حاصل $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ را به دست آورید.

پاسخ:

روش اول: شش مربع به طول ۱ مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:

$$\Delta CAD : \tan x = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{3}$$



شکل ۸

با جایگذاری $AH = 1 + \cos \alpha$ در (1) خواهیم داشت:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{2} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

نمونه ۴. درستی رابطه $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ را به روش

هندسی ثابت کنید.

اثبات

روش اول: مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABD$ را که در آن زاویه A زاویه

رأس و برابر α است، در نظر می‌گیریم. پس: $AB = AD$. ارتفاع AC وارد

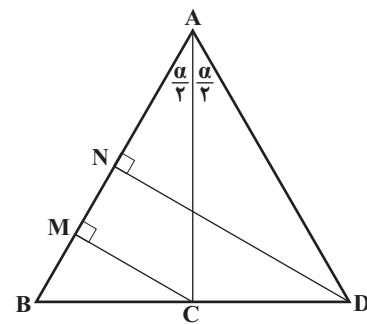
بر BD بنابر خواص مثلث متساوی‌الساقین میانه وارد بر BD و نیمساز

زاویه رأس نیز هست؛ پس: $BC = CD$ و $\angle BAC = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$

از D و C عمودهای DN و CM وارد AB را برابر می‌کنیم؛ پس:

$$\frac{CM}{DN} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{2} \quad \text{در نتیجه: } CM \parallel DN$$

$$\Delta AND, \hat{N} = 90^\circ : \sin D\hat{A}N = \sin \alpha = \frac{DN}{AD}$$



شکل ۷

اما $AD = AB$ و $DN = 2CM$ پس:

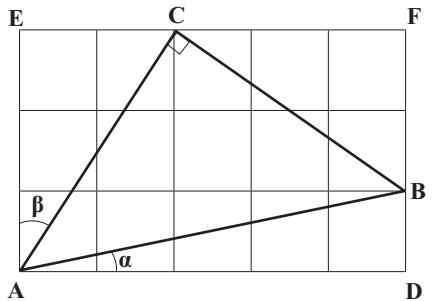
$$\sin \alpha = \frac{2CM}{AB} \quad (1)$$

صورت و مخرج سمت راست تساوی (1) را در AC ضرب کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{2CM}{AB} \times \frac{AC}{AC} = \frac{2CM}{AC} \times \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

اما در مثلث $\triangle ACM$ که $\angle M = 90^\circ$ داریم

$$\Delta ACM : \sin M\hat{A}C = \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{CM}{AC} \quad (3)$$



شکل ۱۰

در نتیجه:

$$\hat{x} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

از سوی دیگر BC و BE قطرهای دو مربع مجاورند و
 $\angle ABC = 90^\circ$ بنابر ویژگی های مربع بر هم عمودند؛ یعنی:
 $AB = AE + EB = 2\sqrt{2}$ و $BC = \sqrt{2}$ همچنین: $\tan y = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

پس: $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. لذا $\hat{y} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ حاصل جمع
 دو زاویه x و y و همان زاویه EAD است. روشن است که:
 $x + y = 45^\circ$

پاسخ: مستطیل $EFDA$ به عرض ۳ و طول ۵ را رسم و آن را به ۱۵ مربع واحد تقسیم می کنیم. مثلث ABC را نیز رسم می کنیم و داریم:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

پس: $AB^2 = AC^2 + BC^2$. لذا مثلث ABC در رأس C قائم است.

$$\angle CAB = 45^\circ$$

همچنین:

$$\sin \beta = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{26}}, \sin \alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

در نمونه بعدی به روش هندسی، درستی سه رابطه مثلثاتی را بررسی خواهیم کرد که در آنها نسبت های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس زاویه x را بر حسب تانژانت زاویه x به دست می آید.

نمونه ۷. به روش هندسی و با رسم شکلی مناسب ثابت کنید روابط زیر برقرارند:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (\text{الف})$$

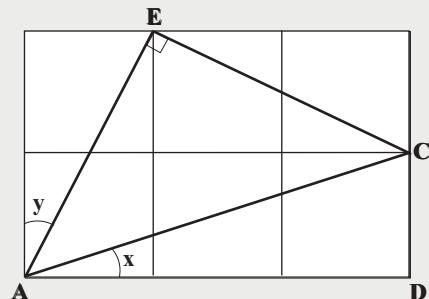
$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad (\text{ب})$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad (\text{ج})$$

تذکر:

سؤال بالا را می توان به این صورت هم مطرح کرد: اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ و $\tan y = \frac{1}{2}$ ، در این صورت زاویه حاده y چند درجه است؟

همچنین توجه کنید که شکل های دیگری هم برای حل این مسئله می توان کشید. مثلاً ببینید با شکل ۹ چگونه می توان مسئله را حل کرد (۶ مربع به طول ۱ هستند).



شکل ۹

از روش اثبات نمونه قبل می توان ایده گرفت و مسائل گوناگونی را با این روش بدیع پاسخ داد. به نمونه بعدی و پاسخ خلاصه آن توجه کنید:

نمونه ۶. اگر $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{26}}$ و $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ زاویه حاده $\alpha + \beta$ را به روش هندسی معلوم کنید.

ج. برای بررسی درستی (ج) داریم:

$$\Delta CED : \sin 2x = \frac{CE}{CD} = \frac{2 \tan x}{r} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

نمونه ۸. اتحاد برای هر زاویه دلخواه α بر

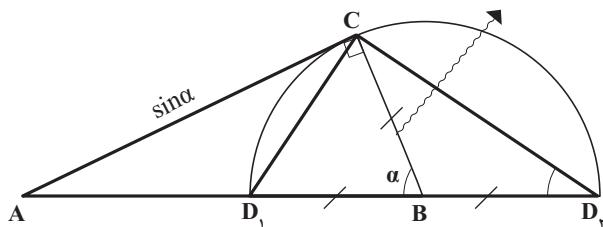
قرار است. برای حالتی که α یک زاویه حاده باشد، درستی آن را به طریق هندسی ثابت کنید.

اثبات

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با وتر AB به طول ۲ و زاویه حاده B

برابر α رسم می‌کنیم (شکل ۱۲).

$\cos \alpha$



شکل ۱۲

واضح است که: $AC = \sin \alpha$ و $BC = \cos \alpha$

به مرکز B و شعاع BC کمانی می‌زنیم تا AB و امتداد آن را به قطع کند. مثلثات CED₁ و CED₂ ترتیب در نقطه‌های D₁ و D₂ قطع کنند. مثلثات CED₁ و CED₂ متشابه‌اند زیرا:

$\angle D_1 AC = \angle D_2 AC$

$$\angle ACD_1 = \angle AD_1 C = \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین:

$$(1) \frac{AC}{AD_1} = \frac{AD_1}{AC}$$

و چون داریم: $AC = \sin \alpha$

$$AD_1 = AB - BD_1 = AB - BC = 1 - \cos \alpha$$

$$AD_1 = AB + BD_1 = AB + BC = 1 + \cos \alpha$$

با جای‌گذاری در (1) خواهیم داشت:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

منابع *

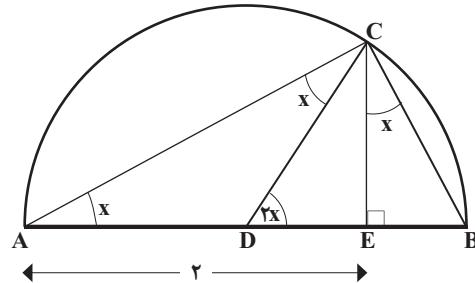
۱. روش‌های مثلثات/پرویز شهریاری و احمد فیروزنا
۲. مثلثات مستقیم الخط و کروی/ترجمه پرویز شهریاری
۳. کتاب درسی ریاضی ۱/ چاپ سال ۱۳۸۸

اثبات

الف. نیم‌دایره‌ای به قطر AB و مرکز D رسم می‌کنیم. همچنین:

$. EC \perp AB$

فرض کنیم: $AE = 2$ و $x < \frac{\pi}{4}$



شکل ۱۱

داریم: $CD = r$ و توجه داشته باشیم، مثلث CED قائم‌الزاویه و وتر آن است. پس:

$$r^2 = CE^2 + ED^2$$

$$\Rightarrow r^2 = (2 \tan x)^2 + (2 - r)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \tan^2 x + 4 - 4r + r^2$$

$$\Rightarrow 4r = 4(1 + \tan^2 x) \Rightarrow r = 1 + \tan^2 x$$

(*) توجه کنیم که:

$$\Delta AEC : \tan C\hat{A}E = \tan x = \frac{CE}{AE} = \frac{CE}{2}$$

$$\Rightarrow CE = 2 \tan x$$

حال در مثلث CED داریم:

$$\tan C\hat{D}E = \tan 2x = \frac{CE}{DE} = \frac{2 \tan x}{2 - r}, r = 1 + \tan^2 x$$

پس:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{2 - (1 + \tan^2 x)} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

و حکم الف ثابت شد.

ب. برای اثبات درستی دستور (ب) داریم:

$$\Delta CED : \cos 2x = \frac{DE}{CD} = \frac{2 - r}{r}, r = 1 + \tan^2 x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{2 - (1 + \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

آموزشی

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

علیرضا سلمانی انباردان

کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

فعالیت ۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC

برای رسم این مثلث فرض کنیم: $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$. مراحل زیر را مطابق شکل ۱ انجام دهید. (برای اجرای هر دستور دکمه enter را فشار دهید).

گام اول: در صفحه اصلی نرمافزار و در کادر ورودی (input...) دستور $A = 60^\circ$ را وارد کنید.

گام دوم: دستورهای $f: Line(A, B)$ و $c: Segment(A, C)$ را وارد کنید.

(با وارد کردن دستور بالا به صورت خودکار انتهای پاره خط B نامیده می‌شود).

گام سوم: برای رسم زاویه $A = 60^\circ$ دستور زیر را وارد کنید: (برای درج علامت درجه در بالای عددها از صفحه کلید خود برنامه جئوجبرا استفاده می‌کنیم که در منوی $f(x)$ قرار دارد).
g: Rotate ($f, 60^\circ, A$)

گام چهارم: برای رسم زاویه $B = 60^\circ$ دستور زیر را وارد کنید. (در جئوجبرا به صورت پیش‌فرض دوران بر خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است. لذا برای رسم زاویه که رأس آن در سمت راست باشد، باید از مکمل آن استفاده کنیم).
h: Rotate ($f, 120^\circ, B$)

گام پنجم: برای مشخص شدن نقطه تقاطع دو خط جدید دستور زیر را تایپ کنید:

C=Intersect (g, h)

گام ششم: در نوار سمت چپ روی دایره خاکستری رنگ مربوط به g و h کلیک کنید تا رنگ داخل آنها سفید شود.

گام هفتم: دستورهای زیر را تایپ کنید:

b: Segment (A, C)

a: Segment (B, C)

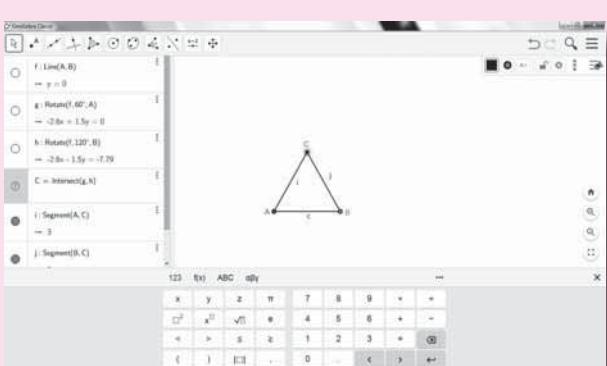
(قسمت دوم)

آزمایشگاه ریاضی

مقدمه

یکی از مباحث پایه‌ای در درس ریاضی ۱ دوره دوم متواتسطه «مثلثات» است که به بررسی روابط بین اضلاع و زاویه‌های مثلث می‌پردازد. در مبحث مثلثات به مفاهیمی چون دایرة مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی و روابط بین آن‌ها پرداخته می‌شود. در مقاله حاضر با انجام فعالیت‌هایی به معرفی این مفاهیم یا به کارگیری نرمافزار «جئوجبرا» می‌پردازیم و ادامه فعالیت‌ها در قسمت‌های بعدی مطرح خواهد شد. فعالیت‌ها با استفاده از آخرين نسخه اين نرمافزار (نسخه ۶) اجرا شده‌اند که می‌توان آن را از سایت www.geogebra.org دانلود کرد.

برای انجام این فعالیت‌ها ابتدا لازم است جئوجبرا را در رایانه شخصی نصب کنید و با دستور العملها و محیط آن آشنا شوید. ضمناً در وبسایت مذکور به صورت آنلاین می‌توانید از این نرمافزار استفاده کنید. در فعالیت‌های ارائه شده در این قسمت طریقه رسم یک مثلث و محاسبه مساحت آن؛ محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های خاص؛ رسم دایرة مثلثاتی و مشخص کردن زاویه‌ها روی آن و محاسبه نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها در محیط این نرمافزار معرفی می‌شوند.



شکل ۱



فعالیت ۲. رسم مثلث دلخواه ABC

فرض کنیم: $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$. مراحل زیر را مطابق شکل ۲ انجام دهید.

گام اول: در کادر ورودی دستورها (input...) دستور $A=(0,0)$ را وارد کنید.

گام دوم: دستورهای $(3,0)$ و $c: Segment(A,1)$ را وارد کنید.

گام سوم: برای رسم زاویه $\hat{B} = 75^\circ$ دستور $z: Line(A,B)$ را وارد کنید.

گام چهارم: برای رسم زاویه $\hat{A} = 45^\circ$ دستور $z: Line(A,C)$ را وارد کنید.

گام پنجم: برای مشخص شدن نقطه تقاطع دو خط جدید دستور $g: Rotate(f, 45^\circ, A)$ را وارد کنید.

گام ششم: در نوار سمت چپ روی دایره خاکستری رنگ مربوط به

f و g کلیک کنید تا رنگ داخل آنها سفید شود.

گام هفتم: دستورهای زیر را تایپ کنید:
 $b: Segment(A,C)$
 $a: Segment(B,C)$

گام اول: نسبت مثلثاتی Sin

در ابزارهای بالای صفحه، روی گزینه دهم که ابزار ABC در آن قرار دارد و مربوط به تایپ است، کلیک و آن را انتخاب کنید. در کادر باز شده روی «LaTeX Formula» کلیک کنید و در کادر پایین عبارت زیر را تایپ کنید و در نهایت روی OK کلیک کنید. در گامهای زیر را اجرا کنید:

$$\sin B = \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{\text{مقابل ضلع اندازه}}{\text{وتر اندازه}} =$$

$$= \frac{\sqrt{AC \cdot BC}}{\sqrt{AB \cdot BC}} = \frac{\sqrt{1 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

گام دوم: نسبت مثلثاتی Cos

$$\cos B = \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\text{مجاور ضلع اندازه}}{\text{وتر اندازه}} =$$

$$= \frac{\sqrt{AB \cdot BC}}{\sqrt{AC \cdot BC}} = \frac{\sqrt{1 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

گام سوم: نسبت مثلثاتی Tan

$$\tan B = \tan 45^\circ =$$

$$= \frac{\text{مجاور ضلع اندازه}}{\text{مقابل ضلع اندازه}} =$$

$$= \frac{\sqrt{AC \cdot AB}}{\sqrt{AB \cdot BC}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 1}}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{2}}} =$$

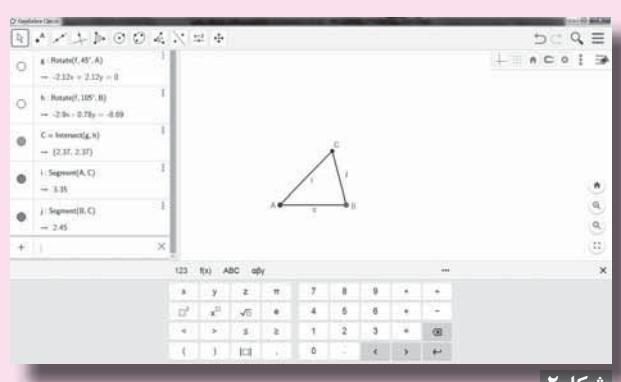
گام چهارم: نسبت مثلثاتی Cot

$$\cot B = \cot 45^\circ =$$

$$= \frac{\text{مقابل ضلع اندازه}}{\text{مجاور ضلع اندازه}} =$$

$$= \frac{\sqrt{AB \cdot AC}}{\sqrt{AC \cdot BC}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 1}}{\sqrt{1 \cdot \sqrt{2}}} =$$

نتایج در شکل ۳ مشخص شده‌اند.

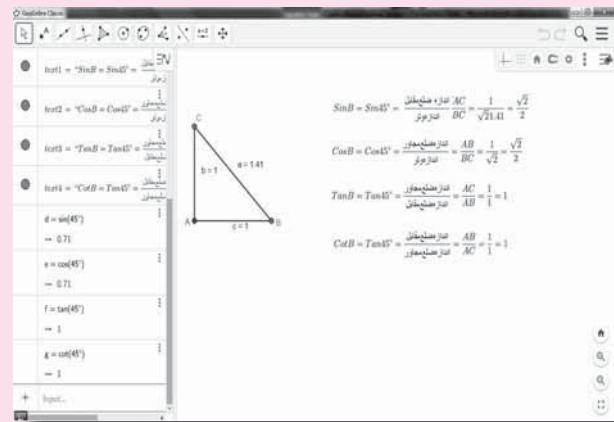


شکل ۲

فعالیت ۳. محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵°

دستورهای زیر را برای رسم مثلث قائم‌الزاویه ABC با $\hat{A} = 90^\circ$ و طول اضلاع قائمه ۱ واحد وارد کنید:

- ۶) $\cos B = \cos 45^\circ = \frac{AB}{BC}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ۷) $\tan B = \tan 45^\circ = \frac{AC}{AB}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$
- ۸) $\cot B = \cot 45^\circ = \frac{AB}{AC}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- ۹) $\sin C = \sin 30^\circ = \frac{AB}{BC}$
 $= \frac{1}{2}$
- ۱۰) $\cos C = \cos 30^\circ = \frac{AC}{BC}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۱۱) $\tan C = \tan 30^\circ = \frac{AB}{AC}$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- ۱۲) $\cot C = \cot 30^\circ = \frac{AC}{AB}$
 $= \sqrt{3}$



شکل ۳

همچنین برای محاسبه هر نسبت می‌توان در قسمت «input..» به صورت زیر توابع را وارد کرد:

- ۱) $\sin(45^\circ)$
- ۲) $\cos(45^\circ)$
- ۳) $\tan(45^\circ)$
- ۴) $\cot(45^\circ)$

که در زیر هر یک مقدار محاسبه شده نمایش داده می‌شود.

فعالیت ۴. محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 60°

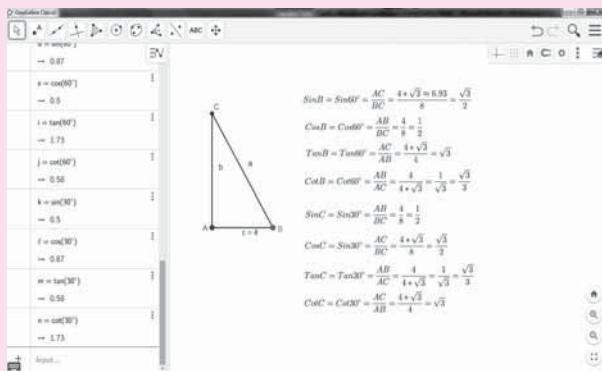
ابتدا مثلث قائم‌الزاویه ABC را که در آن اندازه ضلع AB برابر واحد و اندازه زاویه A برابر 90° درجه و اندازه زاویه B برابر 60° درجه است، با دستورهای زیر رسم کنید:

- ۱) $A = (0, 0)$
- ۲) $c: \text{Segment}(A, 4)$
- ۳) $f: \text{Line}(A, B)$
- ۴) $g: \text{Rotate}(f, 90^\circ, A)$
- ۵) $h: \text{Rotate}(f, 120^\circ, B)$
- ۶) $C = \text{intersect}(g, h)$
- ۷) $a: \text{Segment}(B, C)$
- ۸) $b: \text{Segment}(A, C)$

(روی دایره خاکستری رنگ خطهای f, g و h در سمت چپ کلیک کنید تا سفید شوند و نمایش داده نشوند).

حالا از ابزار ABC مانند فعالیت قبل استفاده کنید و به ترتیب عبارت‌های زیر را تایپ کنید:

- ۱) $\sin B = \sin 60^\circ = \frac{AC}{BC}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
- ۲) $\cos B = \cos 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$
- ۳) $\tan B = \tan 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$
- ۴) $\cot B = \cot 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- ۵) $\sin C = \sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$
- ۶) $\cos C = \cos 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۷) $\tan C = \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- ۸) $\cot C = \cot 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$



شکل ۴

نتایج در صفحه بهصورت شکل ۴ مشخص می‌شوند. برای محاسبه مقدارهای هر یک از نسبت‌های مثلثاتی این زاویه‌ها در قسمت... input... مقدارهای زیر را وارد کنید:

- ۱) $\sin(60^\circ)$
- ۲) $\cos(60^\circ)$
- ۳) $\tan(60^\circ)$
- ۴) $\cot(60^\circ)$
- ۵) $\sin(30^\circ)$
- ۶) $\cos(30^\circ)$
- ۷) $\tan(30^\circ)$
- ۸) $\cot(30^\circ)$

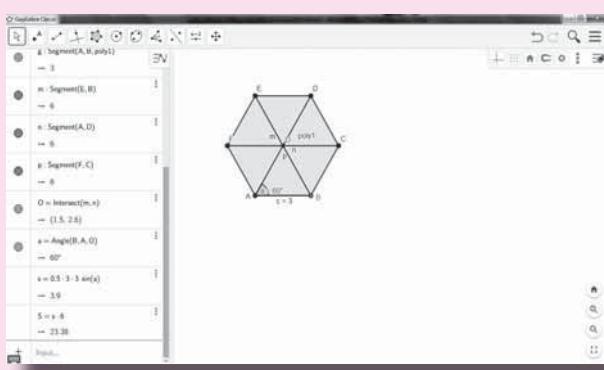
فعالیت ۶. رسم شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۳ واحد و محاسبه مساحت آن

گام اول: نقطه $A = (0, 0)$ را مشخص و پاره خط $AB = 3$ را مشابه فعالیتهای قبل رسم کنید.

گام دوم: ابزار Regular Polygon (چندضلعی منتظم) را انتخاب و سپس روی دو سر پاره خط AB کلیک کنید. در کادر باز شده تعداد اضلاع را وارد کنید که در این مثال برابر ۶ است.

گام سوم: بعد از رسم شش ضلعی، با استفاده از ابزار «Segment» قطراهای شکل را رسم کنید. با استفاده از دستور $O = \text{Intersect}(m, n)$ ، محل تقاطع قطراه را O نام‌گذاری کنید و با استفاده از دستور $a = \text{Angle}(B, A, O)$ مقدار زاویه A از مثلث AOB را در متغیر a قرار دهید.

گام چهارم: چون مثلث AOB متساوی الاضلاع است ($AB = 3$ و $OA = 3$ و $OB = 3$)، با استفاده از دستور محاسبه مساحت مثلث، $s = \frac{1}{2} \times AB \times OA \times \sin(a)$ عبارت را $S = s * 3 * 3 * \sin(a)$ و نام‌گذاری کنید. در نهایت مقدار S را در قسمت $a = \text{Angle}(B, A, O)$ وارد کنید که حاصل برابر با $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ می‌شود. برای محاسبه مساحت شش ضلعی کافی است مقدار محاسبه شده را در ضرب کنید؛ یعنی $S = S * 6$ که برابر است با $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.



شکل ۶

فعالیت ۷. رسم مثلث متساوی الساقین ABC با معلوم بودن اندازه ساق‌ها و زاویه‌ها و محاسبه مساحت آن

فرض کنیم: $B = 120^\circ$ و $\hat{A} = \hat{C} = 30^\circ$. لذا: $AB = BC = 3$. این مثلث مشابه فعالیتهای قبلی به صورت شکل ۷ رسم می‌شود. حال اندازه زاویه B را به کمک دستور $b = \text{Angle}(C, B, A)$ داخل $s = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$ قرار دهید و با استفاده از رابطه مساحت را محاسبه کنید. به این منظور در قسمت Input... دستور زیر را وارد کنید که مقدار $\frac{3}{4}$ را نمایش می‌دهد:

$$S = \frac{3}{4} * 3 * 3 * \sin(b)$$

فعالیت ۵. محاسبه مساحت مثلث ABC

گام اول: مثلث ABC را که در آن اندازه ضلع AB برابر ۸ واحد و اندازه زاویه A برابر 50° درجه و اندازه ضلع AC برابر ۶ واحد است، با اجرای گام‌های زیر مطابق شکل ۵ رسم کنید:

- ۱) $A = (0, 0)$
- ۲) $c: \text{Segment}(A, C)$
- ۳) $f: \text{Line}(A, B)$
- ۴) $g: \text{Rotate}(f, 50^\circ, A)$
- ۵) $d: \text{Circle}(A, 6)$
- ۶) $C = \text{Intersect}(d, g)$

(دو مکان مشخص می‌شود که ما یکی را انتخاب می‌کنیم).

۷. $a: \text{Segment}(B, C)$
۸. $b: \text{Segment}(A, C)$

(روی دایره خاکستری رنگ خطهای f و g در سمت چپ کلیک کنید تا سفید شوند و نمایش داده نشوند).

گام دوم: برای رسم عمود از ابزارهای بالای صفحه، گزینه چهارم ابزار C و قاعده یعنی ضلع AB به ترتیب کلیک کنید. سپس در قسمت Input... عبارت‌های زیر را به ترتیب وارد کنید:

$$H = \text{Intersect}(l, c)$$

$$\text{Segment}(H, C)$$

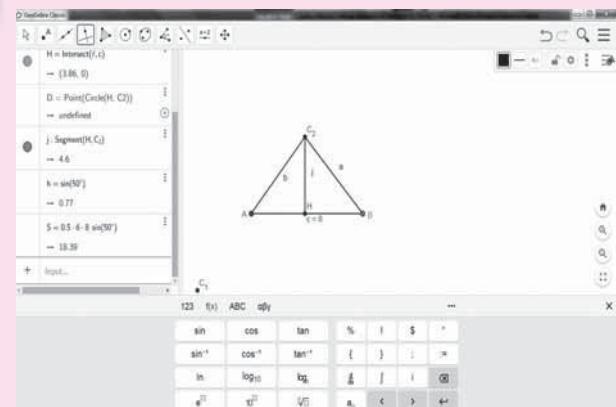
گام سوم: دستورهای زیر را وارد کنید:

$$h = \sin(50^\circ)$$

(که مقدار $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نمایش داده می‌شود).

$$S = \frac{1}{2} * 8 * 6 * \sin(50^\circ)$$

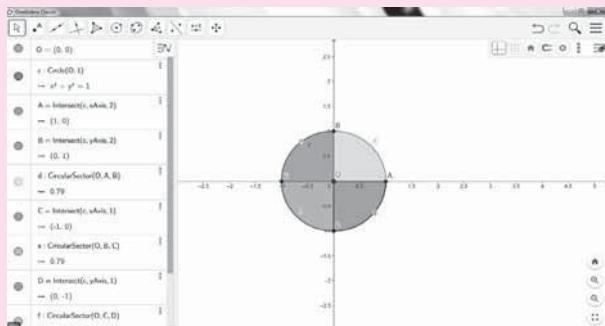
(که مقدار $18\frac{\sqrt{3}}{2}$ نمایش داده می‌شود).



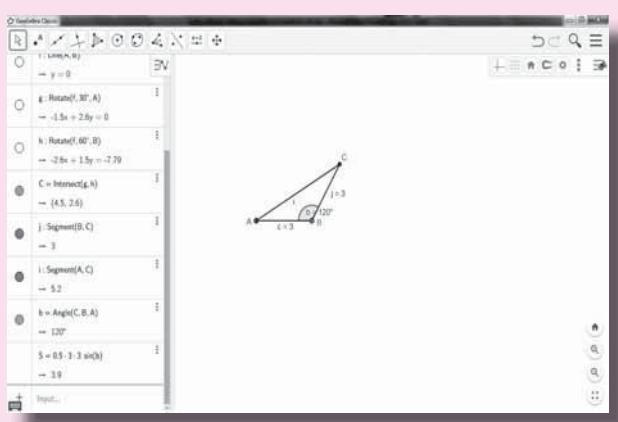
شکل ۵



گام چهارم: به همین ترتیب سه ربع دیگر را نیز مشخص و رنگ آمیزی کنید (شکل ۸).



شکل ۸



شکل ۷

فعالیت ۹. مشخص کردن زاویه‌ها در دایره مثلثاتی

فرض کنید می خواهیم در یک دایره مثلثاتی زاویه‌های 30° و -30° را مشخص کنیم. مجدداً اشاره می کنیم که در جئوگبرا، جهت حرکت بهصورت مبنا همان جهت مثلثاتی است.

گام اول: برای مشخص کردن زاویه 30° ، ابتدا نقطه M را با دستور $M = \text{Point}(c, \text{Cos}(30))$ مشخص و سپس با ابزار Segment پاره خط بین نقطه O و M را رسم کنید. این پاره خط با محور xها زاویه 30° می سازد.

گام دوم: برای مشخص کردن زاویه -30° ، ابتدا نقطه N را با دستور $N = \text{Point}(c, \text{Sin}(-30))$ مشخص کنید و سپس با ابزار Segment پاره خط بین نقطه O و N را رسم کنید، این پاره خط با محور xها زاویه -30° می سازد.

در شکل ۹ این دو زاویه و بهطور مشابه زاویه‌های 90° ، -90° ، 120° ، -120° ، 180° و -180° رسم شده‌اند.

فعالیت ۸. رسم دایره مثلثاتی و رنگی کردن هر ربع آن

گام اول: نقطه O به مختصات $(0, 0)$ را با دستور $O = \text{Point}(0, 0)$ مشخص کنید.

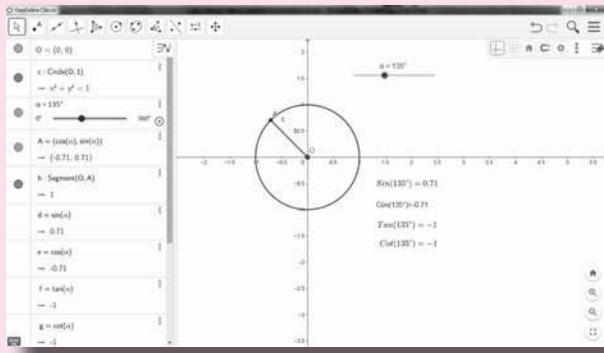
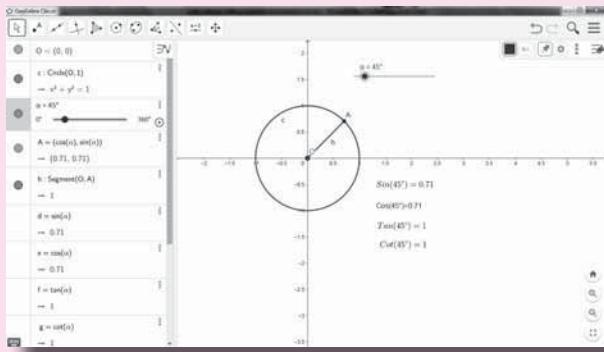
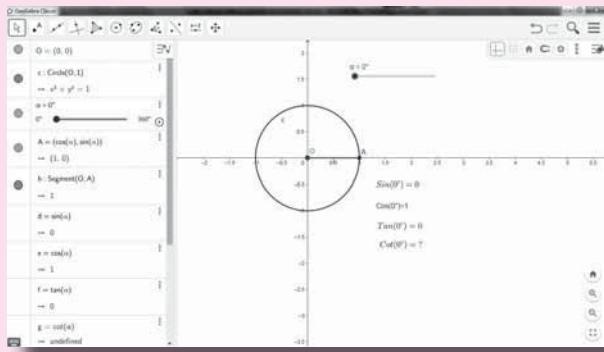
گام دوم: با استفاده از دستور $c: \text{circle}(O, 1)$ دایره c به شعاع واحد را رسم کنید. حال با استفاده از ابزار «Circular Sector» چهار ناحیه را مشخص کنید. برای مشخص کردن ناحیه اول با ابزار فوق، ابتدا روی مرکز دایره کلیک کنید و سپس روی نقطه $(1, 0)$ و بعد روی نقطه $(0, 1)$ کلیک کنید (جهت حرکت برخلاف حرکت عقربه‌های ساعت است) تا ربع اول مشخص شود.

گام سوم: برای تغییر رنگ ناحیه در سمت چپ روی قطاع موردنظر روی علامت «:» و سپس روی Settings کلیک کنید. در پنجره باز شده از سربرگ «Color» رنگ قطاع را به رنگ دلخواه تغییر دهید و با تغییر دکمه لغزنده «Opacity»، مقدار شفافیت رنگ موردنظر را تنظیم کنید.

در این صورت مقادرهای نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر نمایش داده خواهند شد (شکل ۱۰) :

$45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ$

اگر در پنجره سمت چپ در قسمت تعریف نوار لغزنه روی علامت «▶» کلیک کنیم، به صورت خودکار نوار لغزنه تغییر خواهد کرد.

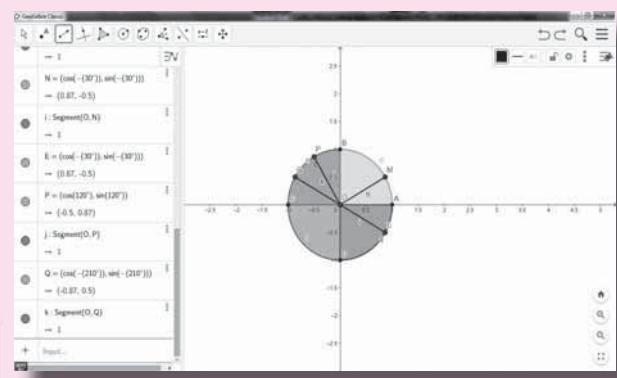


شکل ۱۰

دامنه فعالیتهای مثلثات در قسمت بعدی مطرح خواهد شد.

منابع *

۱. کتاب درسی ریاضی ۱ دوره دوم متوسطه رشته‌های ریاضی - فیزیک و علوم تجربی. ۱۳۹۷. ۲. www.geogebra.org



شکل ۹

فعالیت ۱۰. مشخص کردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه خاص در دایره مثلثاتی

گام اول: یک دایره مثلثاتی مطابق فعالیت قبل رسم کنید. سپس روی ابزار Slider و بعد روی صفحه کلیک کنید. در صفحه بازشده حالت «Angle» را انتخاب کنید و مقدار Min را برابر 0° ، مقدار Max را برابر 360° و مقدار Increment را برابر 90° قرار دهید.

گام دوم: در قسمت Input... دستورهای زیر را وارد کنید:

- ۱) $A=(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$
- ۲) Segment(O,A)
- ۳) $d=\sin(\alpha)$
- ۴) $e=\cos(\alpha)$
- ۵) $f=\tan(\alpha)$
- ۶) $g=\cot(\alpha)$

(برای تایپ کردن حروف یونانی از صفحه کلید برنامه استفاده کنید که در منوی $\beta\alpha\gamma$ قرار دارد).

گام سوم: با استفاده از ابزار ABC چهار متن به این صورت ایجاد کنید: در پنجره مربوط به Text، $\text{Cos}(\alpha)=e$ ، روی LaTeX formula و Advanced کلیک کنید. در کادر همچنین در پایین پنجره، روی Text کلیک کنید. در کادر مربوط به تایپ، عبارت $\text{Sin}(\alpha)=d$ را تایپ کنید البته d و e را باید از قسمت پایین سربرگ دوم که شکل آیکون جئوجبراست، انتخاب کنید. سایر نسبت‌های زیر نیز به همین صورت مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned}\text{Cos}(\alpha) &= e \\ \text{Tan}(\alpha) &= f \\ \text{Cot}(\alpha) &= g\end{aligned}$$

گام چهارم: با حرکت دادن نوار لغزنه ایجاد شده، مقدار مثلثاتی زاویه‌های $360^\circ, 324^\circ, 270^\circ, 180^\circ, 90^\circ$ و 0° نمایش داده می‌شود. اگر در تنظیمات نوار لغزنه، مقدار Increment را برابر 45° قرار دهیم،

به دست آوردن اندازه ضلع مجهول از قضیه نسبت دو ضلع رو به رو در چهارضلعی دلخواه»

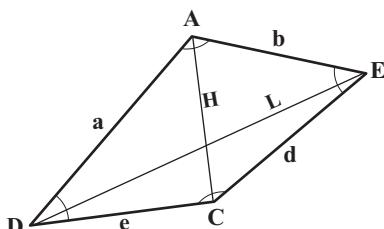
اشاره

در مقاله حاضر این قضیه ارائه شده است که از نسبت دو ضلع رو به رو در هر چهارضلعی دلخواه می‌توان ضلع مجهول چهارم آن را با استفاده از چهار زاویه رأس و اندازه سه ضلع معلوم و بدون داشتن قطر و با اطلاعات اضافه دیگری به دست آورد. بن‌ماهیه اثبات استنتاجی این رابطه قضیه کسینوس‌هاست.

مقدمه

به دست آوردن یک ضلع مجهول از چهارضلعی‌های منتظم کار دشواری نیست. اما اگر چهارضلعی دلخواه مختلف‌الاضلاع باشد، روند طولانی‌تر و پیچیده‌تری باید طی شود. در نهایت هم ممکن است جواب درستی به دست نیاید. لذا وجود رابطه‌ای با دقت بالاتر و دربردارنده مفاهیم جامع‌تر از شکل، ضروری به نظر می‌رسد.

در روند اثبات بسیاری از قضایای هندسی معمولاً از قضایای از پیش ثابت شده استفاده می‌شود. در روند اثبات این قضیه نیز، از قضیه کسینوس‌ها استفاده می‌شود که به شرح زیر است:



روش اثبات

قضیه: نسبت دو ضلع رو به رو در هر چهارضلعی دلخواه از این رابطه به دست می‌آید:

$$\frac{a}{d} = \frac{d - e \cos C - b \cos E}{a - b \cos A - e \cos D}$$

ابتدا چهارضلعی دلخواهی رسم می‌کنیم و دو قطر آن را هم می‌کشیم. واضح است، هر قطر، چهارضلعی را به دو مثلث تبدیل می‌کند. لذا قضیه کسینوس‌ها برای یک قطر و دو مثلث حاصل نوشته می‌شود و این کار برای قطر دیگر نیز انجام می‌دهیم.

$$\begin{cases} L^r = a^r + b^r - 2ab \cos A \\ L^r = e^r + d^r - 2ed \cos C \end{cases} \quad (I)$$

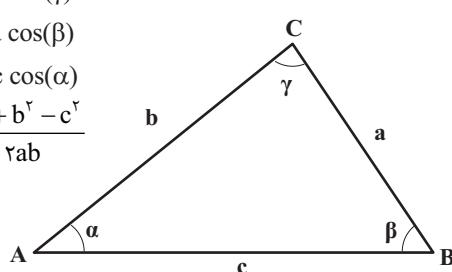
$$\begin{cases} H^r = b^r + d^r - 2bd \cos E \\ H^r = e^r + a^r - 2ea \cos D \end{cases} \quad (II)$$

$$c^r = a^r + b^r - 2ab \cos(\gamma)$$

$$b^r = c^r + a^r - 2ca \cos(\beta)$$

$$a^r = b^r + c^r - 2bc \cos(\alpha)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^r + b^r - c^r}{2ab}$$



مراحل مذکور را برای دو ضلع دیگر نیز تکرار می‌کنیم؛ البته با این تفاوت که از دستگاه زیر شروع می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 - 2abc \cos A = e^2 + d^2 - 2ed \cos C$$

$$e^2 + a^2 - 2e \cos D = b^2 + d^2 - 2bd \cos E$$

$$\frac{a}{d} = \frac{d - e \cos C - b \cos E}{a - b \cos A - e \cos D}$$

که در نهایت رابطه

نتیجه‌گیری

بنابر اثبات فوق، نسبت دو ضلع رو به رو در هر چهارضلعی، از روابط نهایی یاد شده به دست می‌آید که می‌توان هر یک از مجھولات رابطه را بنابر نیاز به دست آورد. برای مثال، اگر سه ضلع و چهار زاویه از یک چهارضلعی دلخواه معلوم باشد، می‌توان اندازه ضلع مجهول را به دست آورد.

پس از مساوی قرار دادن در هر دو دستگاه عملیات جمع اعمال می‌شود:

$$(I) \quad a^2 + b^2 - 2abc \cos A = e^2 + d^2 - 2ed \cos C$$

$$(II) \quad b^2 + d^2 - 2bd \cos E = e^2 + a^2 - 2e \cos D$$

در این مرحله دوباره جمع می‌کنیم:

$$2b^2 - 2bd \cos E - 2abc \cos A = 2e^2 - 2e \cos C - 2e \cos D$$

از عامل‌های مشترک دو طرف فاکتور می‌گیریم:

$$2b(b - d \cos E - e \cos A) = 2e(e - d \cos C - e \cos D)$$

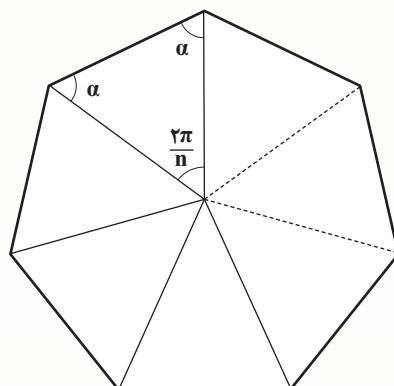
$$2b(b - d \cos E - e \cos A) = 2e(e - d \cos C - e \cos D)$$

$$\frac{b}{e} = \frac{e - d \cos C - e \cos D}{b - d \cos E - e \cos A}$$

ریاضیات در چند دقیقه

چندضلعی‌ها

از زاویه‌های درونی چندضلعی منتظم مورد بحث نیز هست. به عنوان نمونه، در یک «پنجضلعی» با $n=5$ هر یک از زاویه‌های درونی $\frac{2\pi}{5}$ است.



- 1. polygon
- 2. regular
- 3. pentagon

«چندضلعی^۱» در اساس صرفاً ناحیه‌ای محصور و محدود با تعدادی خط راست است. اما این کلمه غالباً اختصار نوع خاصی از چندضلعی‌ها، یعنی چندضلعی‌های «منتظم^۲» با جمیع اضلاع برابر است که شامل پنجضلعی‌ها، ششضلعی‌ها، هفتضلعی‌ها، هشتضلعی‌ها و غیره می‌شود.

چندضلعی‌های منتظم را می‌توان با استفاده از مثلثهایی، معروف به مثلثهای متساوی الساقین که دو زاویه برابر دارند، ساخت. چنان‌که نشان داده شده، رأس‌های مثلثها در مرکز شکل جدید تلاقی می‌کنند و از آنجا که مجموع زاویه‌های متقاطع مرکزی باید 2π رادیان باشد، زاویه‌های واقع در هر رأس برابر $\frac{2\pi}{n}$ است که در آن، n تعداد مثلثها یا ضلع‌های چندضلعی است. از آنجا که می‌دانیم در هر مثلث مجموع سه زاویه π رادیان است، بی‌می‌بریم که مجموع زاویه‌های برابر – یعنی -2α – توسط $\frac{2\pi}{n} = \pi - (\frac{2\pi}{n})$ به دست می‌آید. 2α مقدار هر یک

دوره‌های ریاضی

تعیین علامت ضرایب تابع درجه دوم



اشاره

در شماره قبل درباره استدلال‌های معتبر و نامعتبر، یک دوره‌ی ریاضی داشتیم و بیان کردیم که در این دوره‌ی ریاضی‌ها به پرسش‌هایی پاسخ می‌دهیم که در راستای محتوای کتاب درسی هستند و به طور معمول برای دانش‌آموزان در کلاس درس پدید می‌آیند. پاسخ دقیق به این پرسش‌ها ممکن است زمان زیادی را از کلاس درس بگیرد یا از حوصله تعدادی از دانش‌آموزان خارج باشد. بهمین دلیل تصمیم گرفتیم، برای هر جلسه با تعدادی دانش‌آموز علاقه‌مند یک دوره‌ی ریاضی تشکیل دهیم و به سوال‌ها و ابهام‌های آن‌ها به منظور دانش‌افزایی پاسخ دهیم.

در این شماره با دانش‌آموزان علاقه‌مند به درس حسابان ۱ دوره‌ی ریاضی داشتیم و ایده اصلی بحث را از پرسش‌های دانش‌آموزان در کلاس درس گرفته‌ایم که در بی می‌آید.

چون دهانه سهمی رو به بالاست، پس: $a > 0$. یعنی علامت a مثبت است.



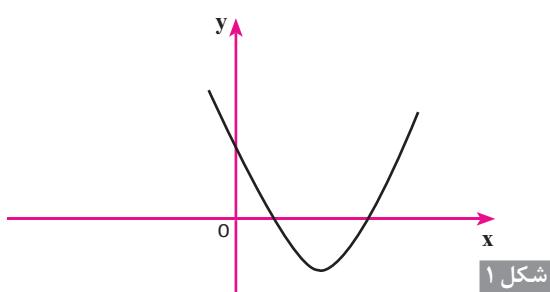
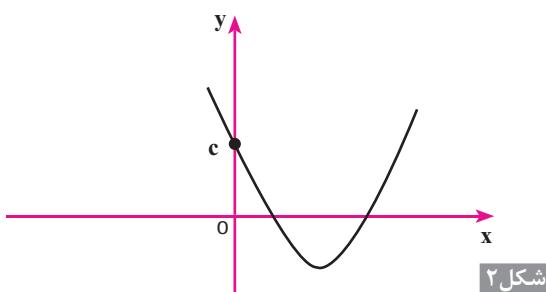
محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها، عدد c را مشخص می‌کند و در اینجا، چون نمودار سهمی محور بها را بالای مبدأ قطع کرده (شکل ۲)، پس علامت c مثبت است.

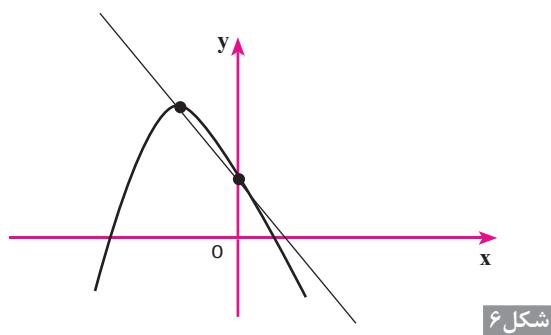


هر تابع درجه دوم دارای صورت کلی زیر است:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

همه می‌دانید که نمودار این تابع یک سهمی در صفحه مختصات است. امروز می‌خواهیم به کمک نمودار متناظر با این تابع، درباره علامت ضرایب آن، یعنی علامت a ، b و c صحبت کنیم. بحث خودمان را با سوال زیر شروع می‌کنیم:

سؤال: یک تابع درجه دوم دارای نمودار شکل ۱ است. علامت‌های a ، b و c را با استفاده از نمودار این تابع بیان کنید.





شکل ۶

علی جان! آیا دلیل یا اثبات این نکته را می‌دانی؟



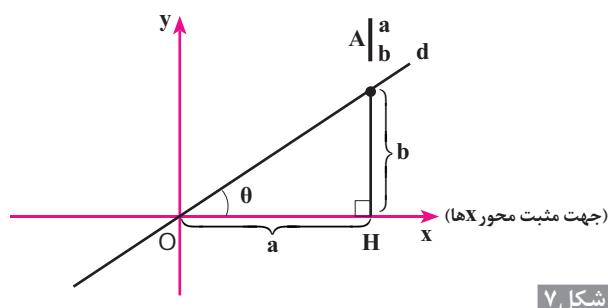
خیر! و حالا سؤال من هم همین است: چرا علامت b متناظر با شبیب این خط است؟



ببخشید، یک سؤال برایم پیش آمد. لطف کنید قبل از آنکه به سؤال علی پاسخ دهید، بفرمایید که منظور از شبیب خط چیست؟



بچه‌ها، آهسته آهسته داریم وارد بحث اصلی این دوره‌می می‌شویم. فرض کنیم d خطی باشد که از مبدأ مختصات می‌گذرد. این خط باجهت مثبت محور x زاویه θ می‌سازد (شکل ۷). بنابر تعریف، $m = \tan \theta$ را شبیب خط d می‌گویند.



شکل ۷

فرض کنید (a, b) نقطه‌ای روی خط d باشد. همان‌طور که در شکل ۷ ملاحظه می‌کنید، زاویه خط باجهت مثبت محور x ها زاویه $AOH = \theta$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

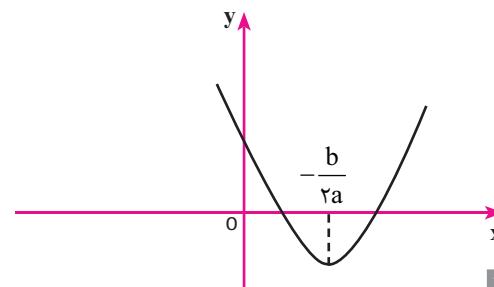
$$\sin \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{a}{c}$$

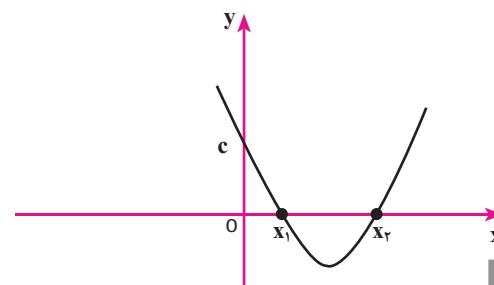
می‌دانیم طول رأس سهمی از دستور $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. مطابق شکل ۳ ملاحظه می‌کنید که: $a > 0$ از آنجا که: $a > 0$, پس باید داشته باشیم: $-b < 0$. یعنی علامت b منفی است.



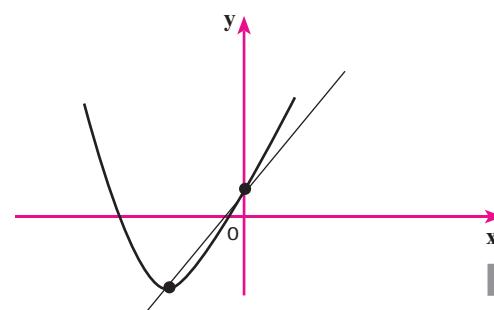
شکل ۳



به نظر من می‌توان به کمک صفرهای تابع درجه دوم، علامت b را مشخص کرد. فرض کنیم x_1 و x_2 در شکل ۴، صفرهای تابع درجه دوم باشند، مطابق شکل ملاحظه می‌کنید که $x_1 < 0$ و $x_2 > 0$ هر دو مثبت هستند، در نتیجه: $x_1 + x_2 > 0$, پس: $\frac{b}{a} < 0$. از آنجا که $a > 0$ در نتیجه داریم: $b < 0$ و علامت b منفی است.

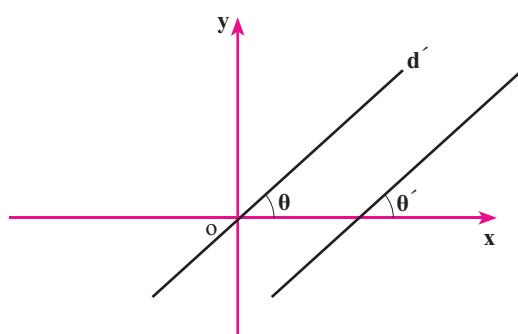


جایی شنیده بودم، شبیب خطی که از رأس سهمی و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها می‌گذرد، متناظر با علامت b در تابع درجه دوم است. اگر شبیب خط مثبت باشد (شکل ۵)، آن‌گاه علامت b مثبت است و در حالتی که شبیب خط منفی باشد (شکل ۶)، علامت b منفی است.



شکل ۵

خودمان از مبدأ مختصات خطی موازی با آن رسم می‌کنیم (شکل ۱۰). آیا می‌توانید بگویید چرا شیب این دو خط با هم برابرند؟



شکل ۱۰

طبق قضیه خطوط موازی و مورب در هندسه، چون محور x ها دو خط موازی d و d' را قطع کرده است (شکل ۱۰)، پس دو زاویه برابر ایجاد می‌کند؛ یعنی: $\theta = \theta'$. از اینجا داریم: $\tan \theta = \tan \theta'$. در نتیجه شیب دو خط d و d' هم برابرند.



آفرین محمد! درست گفتی. بنابراین بچه‌ها، حتماً متوجه شده‌اید که چرا دو خط موازی شیب‌های برابر دارند.

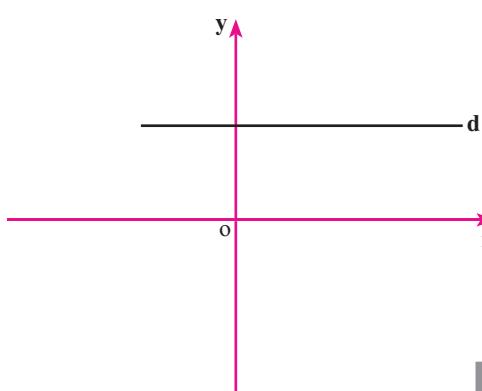


اگر خطی محور x ها را قطع نکند، چگونه شیب آن را تعریف کنیم؟



بنابر تعریف، زاویه بین دو خط موازی برابر با صفر است. چنانچه خطی محور x ها را قطع نکند، با آن موازی است (شکل ۱۱). زاویه خط d با محور x صفر است، پس شیب خط d برابر است با:

$$m = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{0}{1} = 0.$$



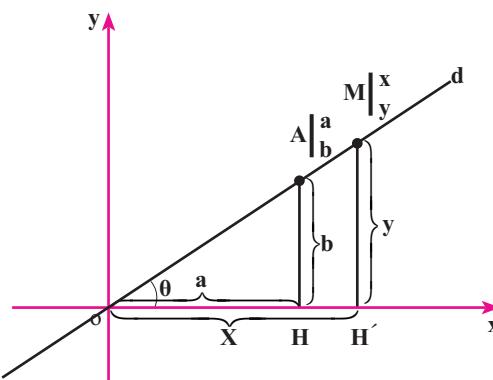
شکل ۱۱

اما می‌دانیم که $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ بنابراین داریم:

$$m = \tan \theta = \frac{\frac{b}{OA}}{\frac{a}{OA}} = \frac{b}{a}$$

پس شیب خط d برابر با $\frac{b}{a}$ است.

اکنون فرض کنید M(x,y) نقطه دلخواه روی این خط باشد (شکل ۸). بنابر رابطه تالس در مثلث داریم:



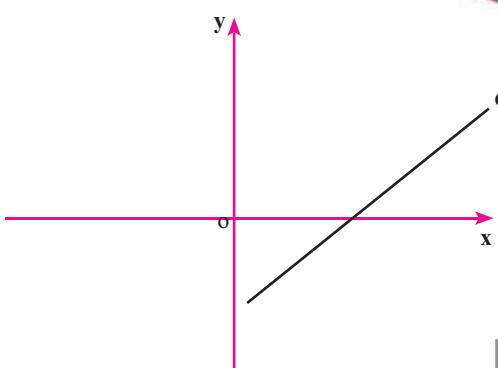
شکل ۸

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{AH}{MH'} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

چون M(x,y) نقطه دلخواه روی خط d است، پس تساوی بالا معادله خط d را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در معادله خط d، ضریب متغیر x همان شیب خط d است. نتیجه: هر خط که از مبدأ و نقطه A(a,b) می‌گذرد دارای معادله $y = \frac{b}{a}x$ است که در آن ضریب x، شیب خط است.

اگر خط از مبدأ مختصات عبور نکند (شکل ۹)، در این

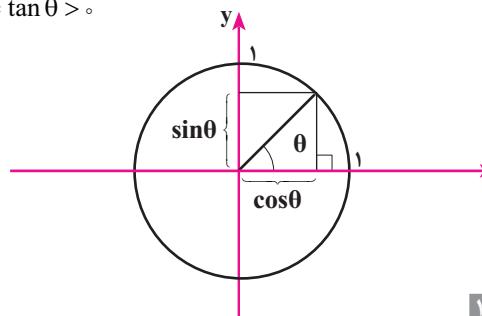
صورت چگونه شیب خط را محاسبه کنیم؟



شکل ۹

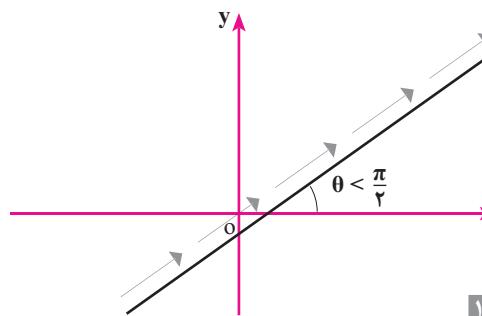
زیرا می‌دانیم که در دایره مثلثاتی، انتهای کمان زاویه حاده در ربع اول است (شکل ۱۴) و در این حالت داریم: $\cos\theta < 0$ و $\sin\theta > 0$. بنابراین:

$$m = \tan \theta > 0.$$



شکل ۱۴

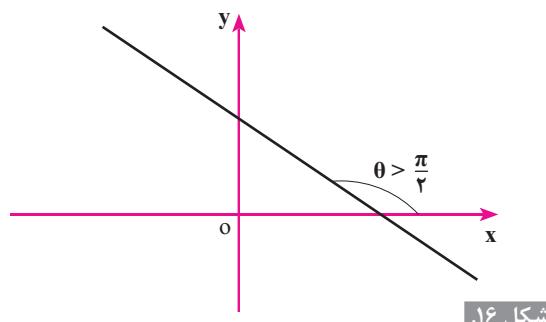
در نتیجه شیب چنین خطهایی مثبت است. بنابراین، اگر گفته شود خطی دارای شیب مثبت است، آن‌گاه زاویه این خط با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ای حاده است. به بیان دیگر، چنانچه روی این خط از چپ به راست در حال حرکت باشیم، به سمت بالا می‌رویم (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

حالت دوم: اگر خط با جهت مثبت محور x ها زاویه قائمه بسازد، چنانچه گفتیم، شیب این خط تعریف نشده است.

حالت سوم: اگر خط با جهت مثبت محور x ها، زاویه منفرجه بسازد (شکل ۱۶)، در این صورت داریم:



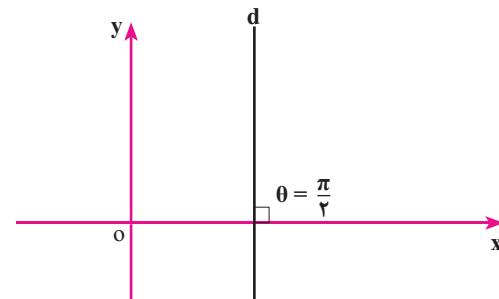
شکل ۱۶

$$m = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 0.$$

نتیجه: اگر خطی موازی با محور x ها باشد، در این صورت شیب آن خط برابر با صفر است. در حالی که خطی بر محور x ها عمود باشد، شیب آن خط تعریف نشده است (شکل ۱۲)؛ زیرا:

$$m = \tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

تعاریف نشده



شکل ۱۲

علی گفت که برای تشخیص علامت b در تابع درجه دوم، کافی است خطی از رأس سهی و نقطه برخورد سهی با محور عرض‌ها بگذرانیم. اگر شیب خط منفی بود، آن‌گاه علامت b منفی است و چنانچه شیب خط مثبت بود، آن‌گاه علامت b مثبت است. حالا سؤال من این است: منظور از شیب خط مثبت و شیب خط منفی چیست؟

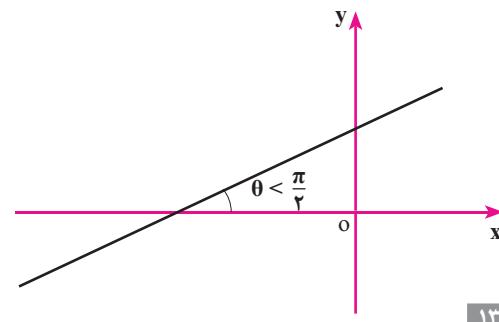


تا اینجا متوجه شدید که شیب خط برابر است با:

$$m = \tan \theta$$

خط می‌تواند با جهت مثبت محور x ها زاویه حاده (تنند) یا قائمه یا منفرجه (باز) بسازد. بنابراین سه حالت داریم:

حالت اول: اگر خط با جهت مثبت محور x ها زاویه حاده بسازد (شکل ۱۳)، در این صورت داریم:

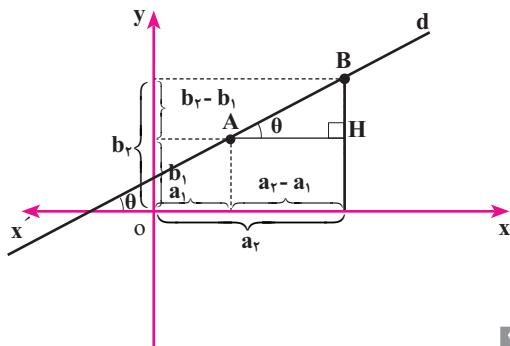


شکل ۱۳

$$m = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > 0.$$

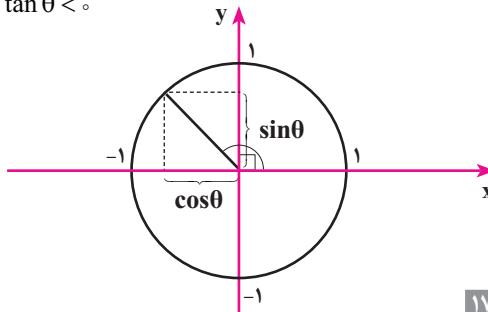
خط d و دو نقطه $A(a_1, b_1)$ و $B(a_2, b_2)$ را روی آن در نظر می‌گیریم (شکل ۱۹). می‌دانیم شیب خط برابر است با:

$$m = \tan \theta$$



زیرا می‌دانیم که در دایرهٔ مثلثاتی، انتهای کمان زاویهٔ منفرجه در ربع دوم است (شکل ۱۷) و در این حالت داریم: $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$. بنابراین:

$$m = \tan \theta < 0$$



شکل ۱۷

شکل ۱۹

واضح است که $\hat{B}AH = \theta$. زیرا: $AH \parallel x$ و $AB \parallel x$ مورب است. اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$\tan \theta = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}} = \frac{BH}{AH} = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

در نتیجهٔ شیب خط d برابر است با:

$$m = \tan \theta = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

ممنون پارساجان! اکنون با خیال راحت می‌توانم به سؤال علی پاسخ بدهم.



فرض کنیم، نمودار سهمی با ضابطهٔ

$f(x) = ax^2 + bx + c$ مطابق شکل ۲۰ باشد. با روش مربع کامل کردن، مختصات رأس سهمی $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ به دست می‌آید؛ زیرا:

$$f(x) = (ax^2 + bx) + c$$

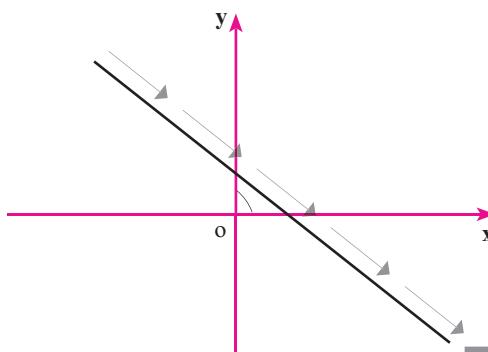
$$\begin{aligned} &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

واز اینجا رأس سهمی $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ به دست می‌آید.

در نتیجهٔ شیب چنین خطهایی منفی است.

بنابراین اگر گفته شود خطی دارای شیب منفی است، آن‌گاه زاویهٔ این خط با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ای منفرجه است. به بیان دیگر، چنانچه روی این خط از چپ به راست در حال حرکت باشیم، به سمت پایین می‌رویم (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

ببخشید من هنوز جواب سؤال را نگرفتم. چرا علامت b در تابع درجهٔ دوم متناظر با شیب خطی است که از رأس سهمی و محل برخورد آن با محور عرض‌ها می‌گذرد؟



آیا به یاد دارید، شیب خطی که از دو نقطه $A(a_1, b_1)$ و $B(a_2, b_2)$ عبور می‌کند، چگونه محاسبه می‌شود؟



بله، فکر کنم تفاضل عرض‌ها به تفاضل طول‌ها، شیب چنین خطی را مشخص می‌کند؛ یعنی:

$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

آیا کسی می‌تواند، مفهوم این رابطه را با مفهوم کلی شیب خط، یعنی $m = \tan \theta$ ، مقایسه کند و توضیح دهد؟



در این حالت S بر B منطبق می‌شود و خط قاطع BS در شکل ۲۰ به خط مماس بر سهمی در نقطه رأس تبدیل می‌شود (شکل ۲۱).



اما می‌دانیم که شیب این خط برابر است با: $m = \frac{b}{2}$. گفتنیم هر خط موازی محور x دارای شیب صفر است. پس: $\frac{b}{2} = 0$ و در نتیجه:

در نتیجه در پاسخ به سؤال شما می‌توان گفت که b برابر با صفر است و می‌دانیم که صفر فاقد علامت است.



امیدوارم از این دوره‌می‌لذت برده باشید و پاسخ سؤال‌ها را خوب فهمیده باشید. تا یک دوره‌می دیگر همگی عزیزانم را به خداوند منان می‌سپارم.

توجه

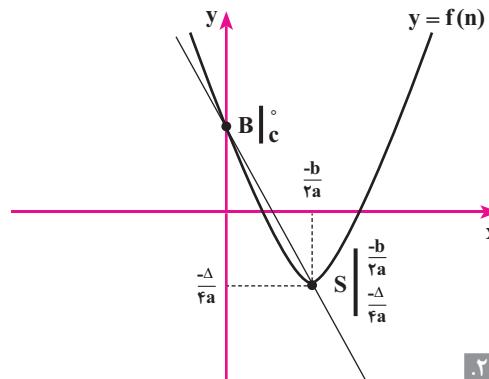
دانش آموزان عزیز:

شما می‌توانید

با طرح پرسش‌هایی از کتاب درسی و ارسال آن‌ها برای دفتر مجله، محتوای یک دوره‌می را آماده کنید.

پس دست به کار شوید و سؤال‌های خود را برای ما بفرستید.

اکنون خطی از رأس سهمی و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها، یعنی نقطه $B\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ ، می‌گذرانیم (شکل ۲۰).



شکل ۲۰.

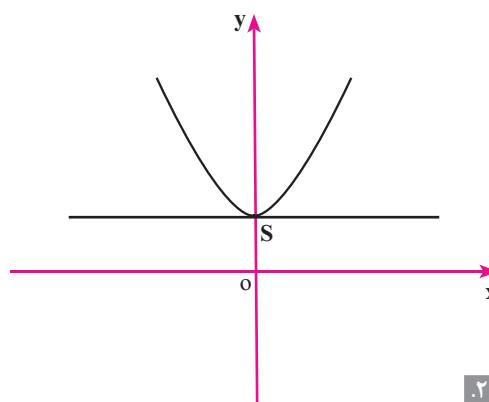
قرار است نشان دهیم که شیب خط BS با علامت b متناظر است. به این منظور شیب خط BS را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{-\frac{\Delta}{2a} - c}{\frac{-b}{2a}} = \frac{\frac{-\Delta - 4ac}{2a}}{\frac{-b}{2a}} = \frac{\frac{-b^2 + 4ac - 4ac}{2a}}{\frac{-b}{2a}} = \frac{b}{2}$$

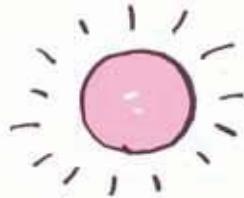
بنابراین ملاحظه می‌کنیم که $m = \frac{b}{2}$. یعنی شیب خط BS و b متحددالعلame هستند.

حال اگر: $m > 0$ ، یعنی شیب خط BS مثبت باشد، آن‌گاه علامت b مثبت، و در حالی که: $m < 0$ ، آن‌گاه علامت b منفی است.

فرض کنیم نمودار تابع درجه دوم به صورت شکل ۲۱ باشد. یعنی رأس سهمی روی محور عرض‌ها باشد. در این صورت درباره علامت b چه می‌توان گفت؟



شکل ۲۱.



تابع از دیدگاه کاربردی



مقدمه

می‌دانیم حرکت و تغییر در ذات طبیعت است. بنابراین، برای شناخت قانونمندی‌های حاکم بر طبیعت و جامعه نمی‌توان از این عامل اساسی و تعیین‌کننده (یعنی حرکت و تغییر) چشم پوشید. دانش و از جمله ریاضیات، قانون وضع نمی‌کند. کار دانش کشف قانون‌ها و ضابطه‌هایی است که در طبیعت و جامعه وجود دارند، نه اختراع آن‌ها.

هر پدیده طبیعی در حرکت است و تغییر می‌کند، ولی تغییر آن به تغییر پدیده‌های دیگر بستگی دارد. البته خود نیز موجب تغییر در پدیده‌ها پدیده‌های دیگر می‌شود. برای مثال:

وقتی درجه حرارت هوا تغییر می‌کند، بلندی ستون جیوه در دماسنچ هم تغییر خواهد کرد.

هرچه بیشتر در آب فرو رویم، فشار بیشتری را از طرف آب بر بدن خود احساس خواهیم کرد.

اگر شیشه بسته و پر از نوشابه را در «فریزر» یخچال بگذاریم، با یخ زدن مایع، حجم آن زیاد می‌شود و درنتیجه، فشار بیشتری به سطح درونی شیشه وارد می‌کند که می‌تواند موجب خرد شدن آن بشود.

با تغییر طول شعاع، سطح جانبی یا حجم گره تغییر می‌کند.

جای یک سیاره بستگی به زمان مشاهده و جای مشاهده کننده دارد.

و بسیاری از این موارد و نظایر آن را می‌توان در طبیعت و یا زندگی روزمره مثال زد. موارد مزبور رابطه بین دو کمیت مستقل ووابسته (تابع) را بیان می‌کنند که توسط یک قانون خاص یا عمومی به هم مرتبط می‌شوند. آن ضابطه یا قانون، توسط یک برابری یا چند معادله، ارتباط بین دو یا چند کمیت را نشان می‌دهد. در واقع، وقتی در ریاضیات، ویژگی حرکت و تغییر بستگی بین پدیده‌های متغیر را در نظر بگیریم و بررسی‌های خود را، نه درباره کمیت‌های ثابت و بی‌تغییر، بلکه درباره مقدارهای متغیر انجام دهیم، گویند با «ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر» سروکار داریم. در ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر، به جای عده‌ها و مقدارهای ثابت، به بررسی بستگی و رابطه بین مقدارهای متغیر می‌پردازیم. در واقع ساده‌ترین مفهوم در ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر، مفهوم رابطه و مفهوم تابع است.

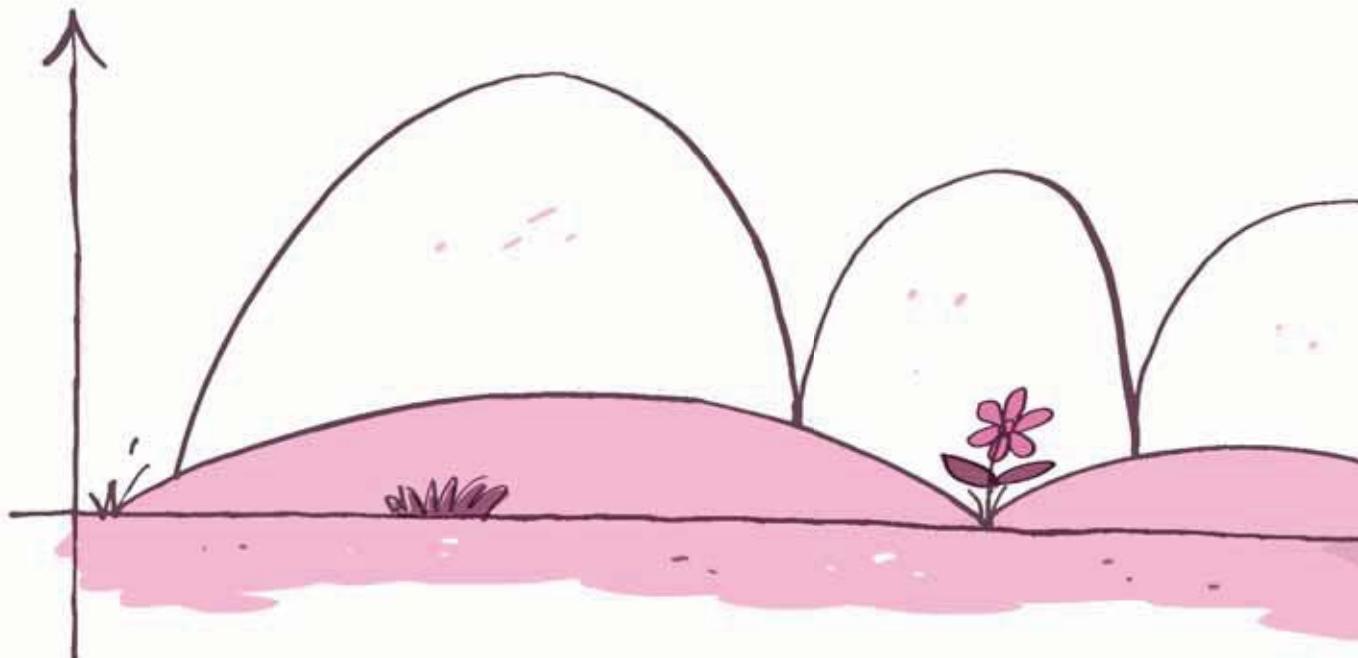
نقش تابع در زندگی روزمره و علوم گوناگون

تا به حال فکر کرده‌اید که چگونه می‌توان ارتفاع یک کوه یا عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کرد؟ یا چطور می‌توان قطر یک ستاره را اندازه‌گیری کرد؟ و یا با چه روشی می‌توان اندازه جمعیت یک کشور را برای سال‌های آتی براورد کرد؟ نکته اصلی در تمام این اندازه‌گیری‌ها، وابستگی این کمیت‌ها به کمیت‌های قابل اندازه‌گیری دیگر است.

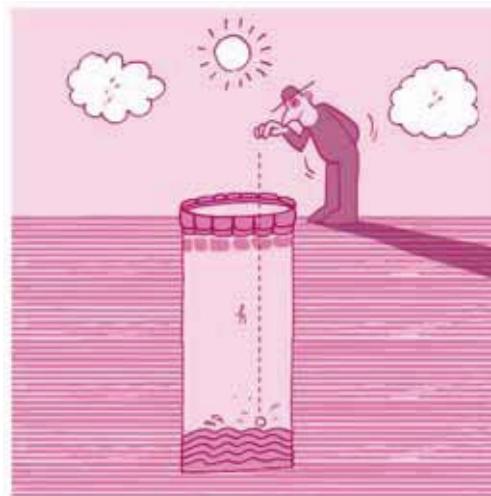
اگر بین دو کمیت رابطه‌ای برقار شود، آنگاه با اندازه‌گیری یکی از این دو کمیت می‌توان مقدار کمیت دوم را به دست آورد. چنین روابطی، همانطور

ورود به مطلب

از آنجا که تابع یکی از کاربردی‌ترین مباحث ریاضیات به شمار می‌رود، و با توجه به مقدمه، در واقع برای بررسی ارتباطات دو یا چند کمیت متفاوت یا ثابت، تابع به کمک ما می‌آید و با تبدیل رابطه‌ها و قوانین بین کمیت‌ها به یک یا چند «برابری» یا «معادله»، آغاز هر بررسی را برای ما امکان‌پذیر می‌سازد. این مبحث را می‌توان «مبحث کلیدی» و یا «مبحث آغازین» بررسی روند تغییرات بین کمیت‌ها» دانست. بنا بر خصیت‌های پدیده‌های متغیر یا ثابت، این موجود آغازین ممکن است به صورت‌های متفاوتی ظهور کند که بنا به تعریف «ضابطه» یا «قانون» نام‌گذاری می‌شود. در این مختصر با مثال‌هایی متنوع و کاربردی و حل مسئله‌هایی کلیدی به بررسی رفتار و خصیت‌های انواع این موجودات آغازین می‌پردازیم.



برخورد سنگریزه با آب داخل چاه را بشنویم، رابطه‌ای به صورت زیر برقرار است:



شکل ۱

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g = 9.8 \frac{m}{s^2}) \quad (1)$$

۶ زنگ تفریح: خرسی از ارتفاع ۵۰۰ متری یک پرتابه پرتاپ می‌شود و پس از ۱۰ ثانیه به سطح زمین می‌رسد. تعیین کنید که خرس چه رنگی است؟

۷ پاسخ: با توجه به رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$t = 10(s), h = 500(m) ; 500 = \frac{1}{2}g(10)^2 ;$$

$$100g = 1000 ; g = 10 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

چون g در قطب نزدیک به 10 است، پس خرس ما خرس قطبی و رنگ آن سفید است.

که در قسمت‌های بعد گفته خواهد شد، ضابطه تابع نامیده می‌شود. در هر علمی، تشخیص این نوع روابط بین کمیت‌های مطرح در آن علم، هدفی مهم و اساسی است. به همین علت، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که در زندگی روزمره و علوم گوناگون کاربردهای گسترده‌ای دارد.

مثال ۱. در زندگی روزمره

میزان بنزین مصرفی یک نوع خودرو در جاده‌ای تخت صدی ده 100 کیلومتر است. یعنی این خودرو در 100 کیلومتر 10 لیتر بنزین مصرف می‌کند. بین دو کمیت مصرفی «V» (حجم) و مسافت پیموده شده «d» (مسافت) رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{100}{10} = \frac{d}{V} ; d = 10 V ; V = \frac{1}{10} d$$

بنابراین، مسافت طی شده، تابعی از میزان بنزین مصرف شده است و برعکس. برای مثال، مقدار مسافتی که این خودرو با 40 لیتر بنزین طی می‌کند، چنین است:

$$(کیلومتر) = 10 \times 40 = 400$$

یا مقدار بنزین مورد نیاز برای این خودرو در هر 100 کیلومتر چنین است: (لیتر) $= \frac{1}{10} \times 100 = 10$

مثال ۲. در علم فیزیک - مکانیک

سنگریزه‌ای (در حالت سکون) را از لبه چاه آبی رها می‌کنیم تا ارتفاع چاه از سطح آب [h] را تعیین کنیم. بین ارتفاع چاه و مدت زمانی که طول می‌کشد تا صدای

مثال ۵. در علم ریاضی

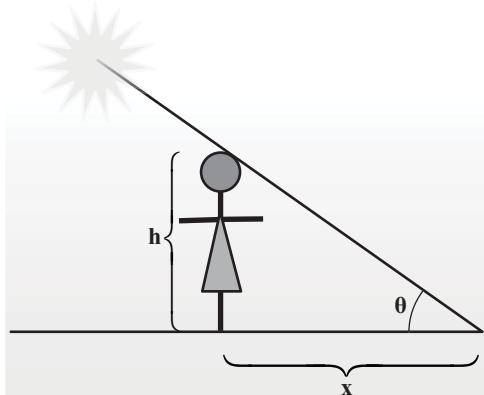
با توجه به شکل ۲، اگر x طول سایه یک مترسک h متري روی زمین باشد، آنگاه x تابعی از زاویه θ خواهد بود که ضابطه آن چنین است:

$$\cot \theta = \frac{x}{h}; x = h \cot \theta \quad (3)$$

پرسش: اگر ارتفاع مترسک ۴ متر و سایه آن نیز ۴ متر باشد، آیا مقدار θ را می‌توان محاسبه کرد؟

پاسخ: بله. با معلوم بودن دو مؤلفه (از سه مؤلفه) می‌توان مؤلفه سوم را از رابطه (۳) حساب کرد:

$$\cot \theta = \frac{x}{h}; \cot \theta = \frac{4}{4} = 1; \theta = 45^\circ$$



شکل ۲.

نتیجه

تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که در ریاضیات مقدماتی و دانشگاهی مطرح است و در واقع اساس و پایه «حسابان» محسوب می‌شود. امروزه ریاضیات در علوم متفاوت و به خصوص فیزیک کاربرد فراوان دارد.

مطالعه پدیده‌های مهم در علوم مهندسی، ریاضی، زیست‌شناسی و پزشکی، اقتصاد و حتی علوم انسانی، دامنه کاربرد ریاضی را هر روزه وسیع تر می‌کند. در این راستا رابطه‌ها و توابع نقش اساسی را ایفا می‌کنند. در پایان، تعریف ساده‌ای از مفهوم «تابع» ارائه می‌دهیم: «تابع، رابطه‌ای مشروط بین دو مجموعه داده یا اطلاعات است که در آن بهطور دقیق به هر عضو از داده‌های اولیه (A) تنها یک عضو از داده‌های ثانویه (B) نظیر شود.»

مثال ۳. در علم فیزیک - نجوم

هرگاه سفینه‌ای به دور سیاره‌ای بگردد و موتورهایش خاموش باشد، تنها نیرویی که به آن وارد می‌شود، نیروی جاذبه سیاره است. بین F (نیروی جاذبه سیاره) و r (فاصله سفینه تا مرکز سیاره) رابطه زیر برقرار است:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

پس نیروی جاذبه سیاره، تابع فاصله بین سفینه تا مرکز سیاره است. در این رابطه هر سه مقدار G (شتات شغل عمومی)، M (جرم سیاره) و m (جرم سفینه) ثابت هستند.

مثال ۴. در علم شیمی

وقتی یک اتم رادیواکتیو مقداری از جرمش را به صورت پرتو منتشر می‌کند، باقی‌مانده اتم تغییرشکل می‌یابد و ماده جدیدی به وجود می‌آید. فرایند تابش و تغییر را «واپاشی رادیواکتیو» می‌نامند و عنصری که اتم‌هایش خود به خود به انجام دادن این فرایند می‌پردازد، رادیواکتیو نام دارد.

برای مثال، کربن رادیواکتیو، به نیتروژن و رادیوم و پس از چند مرحله، رادیواکتیو سرانجام به سرب تبدیل می‌شود. هرگاه y (تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود) و t (مدت زمان گذشته از لحظه فعلی) باشد، رابطه بین y (تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود) و t (مدت زمان گذشته از لحظه فعلی) به قرار زیر است:

$$y = y_0 e^{kt} \quad (2)$$

که در آن هر سه مقدار e ($e \approx 2.7182$)، y_0 و k (ثابت واپاشی) ثابت هستند. بنابراین، تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود در عنصر رادیواکتیو، تابع مدت زمان گذشته از یک زمان معین است.

پرسش: در رابطه (۲) اگر پس از $t = 1$ (ثانیه) تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود نصف شود، مقدار k چقدر است؟

پاسخ: با توجه به: $y = y_0 e^{kt}$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{k(1)}; e^k = \frac{1}{2}; k = -\log_e 2 = -\ln 2$$

$$-1 < \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

دو اثبات برای یک نابرابری

و در نتیجه:

$$(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \\ = \lambda a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C \quad (2)$$

از (1) و (2) نتیجه می‌گیریم:

$$\lambda a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C < a^2 b^2 c^2 \\ \Rightarrow \cos A \cos B \cos C < \frac{1}{\lambda}$$

حال تساوی در (I) با $a=b=c$ حاصل می‌شود که
نتیجه چنین است: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ در نتیجه:

$$\cos A = \cos B = \cos C = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$$

روش دوم: در مثلث ABC، محل تلاقی سه ارتفاع را O و محل تلاقی سه عمودمنصف (مرکز دایره محيطی مثلث) را H می‌نامیم. شعاع دایره محيطی مثلث را هم با R نمایش می‌دهیم. فاصله این دو نقطه، یعنی طول پاره خط OH، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$OH^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

(علاقة مندان می‌توانند طریقه به دست آوردن این فرمول را در کتاب «مثلثات پایه»، نوشته مرحوم جلیل الله قراگوزلو (منبع شماره ۱، فصل سوم) مطالعه کنند.

به وضوح داریم:

$$R^2 \geq 0 \quad \text{و} \quad OH^2 \geq 0$$

پس:

$$1 - 8 \cos A \cos B \cos C \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

مثلث ABC با مشخصات $AB=c$ و $AC=b$ ، $BC=a$ را در نظر می‌گیریم. نابرابری زیر به وضوح برقرار است. (چرا؟)

$$\cos A \cos B \cos C > -1$$

حال برای اثبات (I)، $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ ، دو برهان ارائه می‌کنیم:

روش اول: ابتدا نشان می‌دهیم که در مثلث ABC، رابطه زیر برقرار است:

$$(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) < a^2 b^2 c^2 \quad (1)$$

اثبات: بنا بر قضیه نامساوی مثلثی داریم:

$$a + b < c ; a + c < b ; b + c < a$$

دو طرف این سه نابرابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^2 + b^2 + 2ab < c^2$$

$$a^2 + c^2 + 2ac < b^2$$

$$b^2 + c^2 + 2bc < a^2$$

در نتیجه:

$$a^2 + b^2 - c^2 < -2ab$$

$$a^2 + c^2 - b^2 < -2ac$$

$$b^2 + c^2 - a^2 < -2bc$$

اگر طرفین این سه نابرابری را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) < -\lambda a^2 b^2 c^2$$

به وضوح: $-\lambda a^2 b^2 c^2 < a^2 b^2 c^2$ (چرا؟) پس حکم ثابت است.

از طرف دیگر، بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم:

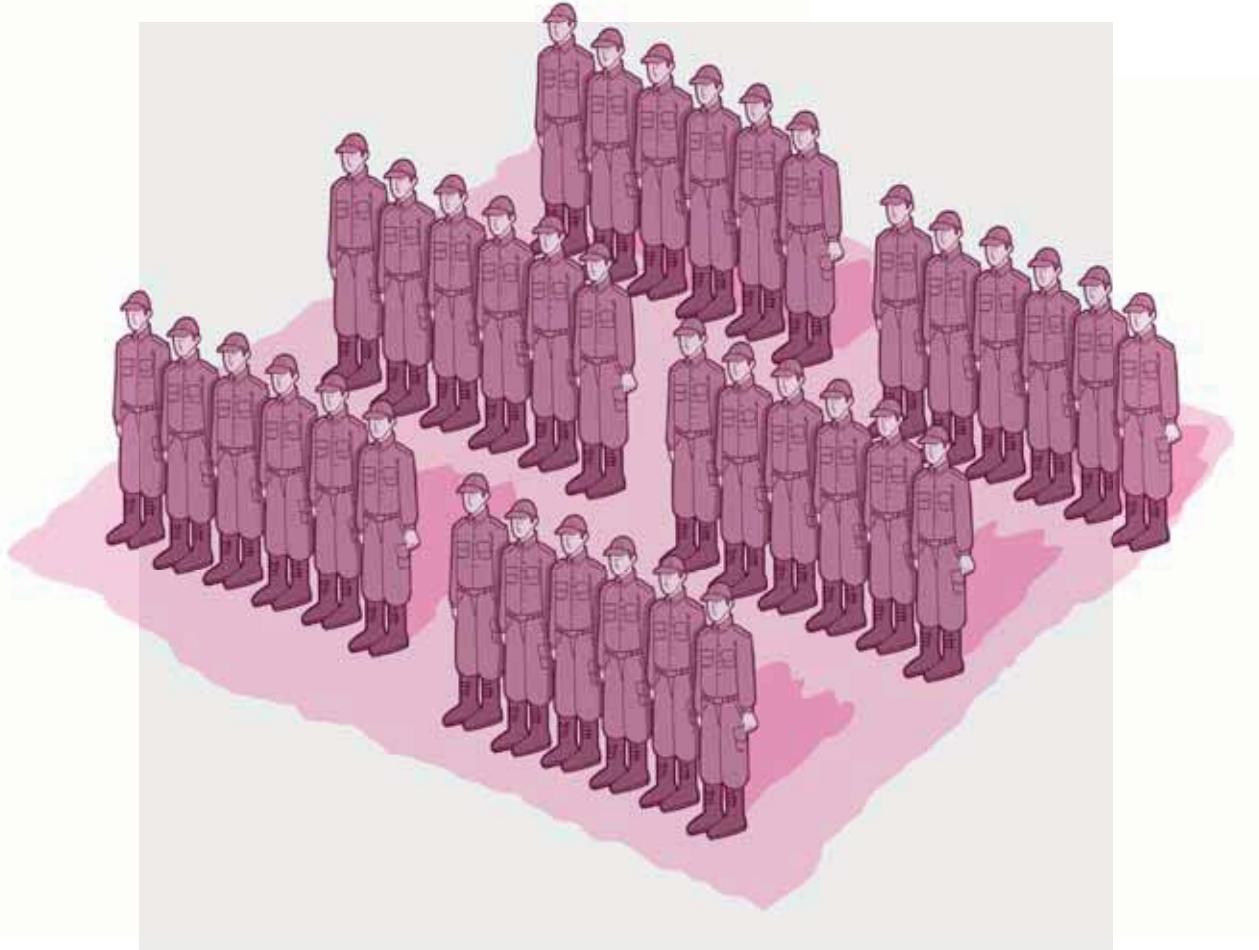
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

منابع *

1. قرائوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.
2. Murty, vedula, four proofs of the inequality $-1 < \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$. Crux mathematicorum with mathematical mayhem. Vol 29,n2. (2003 feb).



از مربع لاتین به مربع جادویی

اشاره

مربع وفقی مربعی است n^* که با عده‌های $1, 2, \dots, n$ پر می‌شود، به طوری که مجموع عده‌های همه سطرها، ستون‌ها و دو قطر آن با هم برابر است. مثلاً نمونه 3^* آن به صورت $\begin{matrix} 8 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix}$ است. به راحتی می‌توان نشان داد که مجموع اعضای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر مربع وفقی n^* برابر است با: $\frac{n^2+n}{2}$. برای $n=2$ مربع وفقی وجود ندارد، ولی برای تمام عده‌های طبیعی دیگر می‌توان یک مربع وفقی ساخت. در این مقاله نحوه ساختن این گونه مربع‌ها تشریح شده است.

به مربع وفقی n^* یک مربع وفقی از مرتبه n می‌گوییم. مربع‌های وفقی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

۱. مربع‌های وفقی از مرتبه فرد؛
۲. مربع‌های وفقی از مرتبه $2k$ به ازای k فرد؛
۳. مربع‌های وفقی از مرتبه $4k$.

مربع‌های وفقی از هر مرتبه‌ای وجود دارند، به جز $n=2$. ساخت مربع‌های وفقی از نوع اول و سوم نسبتاً ساده است و روش‌های متفاوتی برای این کار وجود دارد. ولی ساخت مربع‌های وفقی از نوع دوم مشکل‌تر است. در یکی از روش‌های تولید این مربع‌ها، از مربع‌های لاتین متعامد استفاده می‌شود. در ادامه مختصراً از این گونه اشیای ریاضی سخن می‌گوییم و سپس نحوه ساختن مربع‌های وفقی را از آن‌ها بیان می‌کنیم.

مربع‌های لاتین

یک مربع لاتین از مرتبه $n \times n$ ماتریسی است که در آن هر سطر و هر ستون جایگشتی از یک مجموعه n عضوی است؛ به طوری که هر عدد در هر سطر یا ستون تنها یک بار دیده می‌شود. برای مثال، دو مربع لاتین از مرتبه ۴ روی مجموعه {۱, ۲, ۳, ۴} به صورت زیر هستند:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ایدهٔ مربع‌های لاتین متعامد مربوط به اویلر^۳ است. در سال ۱۷۷۹ او مسئله‌ای دربارهٔ ۳۶ افسر مطرح کرد به این صورت که این افسران به شش هنگ تعلق دارند و در هر هنگ نیز ۶ نفر با ۶ درجهٔ متفاوت حضور دارند. سؤال اویلر این بود که: آیا امکان مرتب کردن این ۳۶ نفر در یک ماتریس مربعی از مرتبه ۶ وجود دارد، به طوری که هر سطر و هر ستون از این ماتریس شامل یک افسر از هر هنگ و هر رتبهٔ دلخواه باشد؟

اعتقاد اویلر این بود که چنین ماتریسی وجود ندارد، گرچه نتوانست آن را ثابت کند. بعدها در سال ۱۹۰۰ ثابت شد که چنین ماتریسی وجود ندارد. سؤالی مشابه مسئلهٔ بالا قرار دادن ۱۶ افسر از چهار هنگ A, B, C و D است که در هر هنگ افسرانی با چهار رتبهٔ a, b, c و d حضور دارند. قرار دادن این ۱۶ افسر در ماتریسی با مشخصات بالا امکان‌پذیر و ماتریس زیر جوابی برای این مسئله است:

$$\begin{bmatrix} Aa & Bb & Cc & Dd \\ Cd & Dc & Ab & Ba \\ Db & Ca & Bd & Ac \\ Bc & Ad & Da & Cb \end{bmatrix}$$

مثالاً در ماتریس بالا درایهٔ BD مربوط به افسر واقع در هنگ B با درجهٔ d است. با حذف a, b, c و d از هر درایهٔ یک مربع لاتین برحسب حروف بزرگ خواهیم داشت و همچنین با حذف حرف‌های D, C, B, A از ماتریس بالا یک مربع لاتین برحسب حرف‌های a, b, c و d وجود دارد و وجود ماتریس بالا نشان‌دهندهٔ آن است که این دو مربع لاتین متعامدند.

اگر مربع‌های لاتین L_1, L_2, \dots, L_r از مرتبه n دو بهدو معتماد باشند، به آن‌ها «متقابلًاً متعامد» می‌گوییم و آن‌ها را با نامad «MOLS»^۴ نشان می‌دهیم. برای هر N , حدی برای تعداد مربع‌های متقابلًاً متعامد از مرتبه n وجود دارد، اگر $N(n)$ بزرگ‌ترین عدد r باشد که به ازای آن r تا MOLS از مرتبه n وجود داشته باشد، قضیهٔ ۱ در ارتباط با (n) وجود دارد.

به یک کاربرد ساده از مربع لاتین توجه کنید. فرض کنید $2n$ تیم قرار است در یک تورنمنت بازی کنند و هر تیم یک بازی در $2n-1$ هفتۀ متوالی انجام می‌دهد. اگر تیمهای هارا با عدددهای $1, 2, \dots, 2n$ برچسب‌گذاری کنیم و قرار دهیم $a_{ij} = k$, به شرطی که تیمهای i و j در k -امین هفته با هم بازی کنند، و همچنین تعریف کنیم: $a_{ii} = 2n$, $a_{jj} = 2n$, در این صورت ماتریس $A = (a_{ij})$ یک مربع لاتین از مرتبه $2n$ خواهد بود. مثلاً برنامۀ چهار تیم با نام‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در سه هفتهٔ متوالی به صورت زیر است:

- هفتهٔ اول: ۱ با ۲, ۳ با ۴
- هفتهٔ دوم: ۱ با ۳, ۲ با ۴
- هفتهٔ سوم: ۱ با ۴, ۲ با ۳

و از این برنامۀ بازی‌ها، مربع لاتین زیر ایجاد می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

مثالاً $a_{33} = 3$, زیرا تیم ۲ با تیم ۳ در هفتهٔ سوم بازی دارد. یکی از خواص مربع لاتین متقارن بودن آن است. بنابراین از هر مربع لاتین متقارن مرتبه n می‌توان برنامۀ بازی‌های n تیم شرکت‌کننده در یک تورنمنت را مشخص کرد. بسیاری از کاربردهای مربع لاتین از مفهومی به نام «تعامد» استفاده می‌کنند.

تعریف: اگر (a_{ij}) و (b_{ij}) دو مربع لاتین از مرتبه n باشند، $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ را متعامد می‌گوییم هرگاه تمام درایه‌های ماتریس $C = (a_i b_j)$ متمایز باشند. برای مثال، مربع‌های لاتین L_1 و L_2 که در بالا معرفی شده‌اند، متعامدند؛ زیرا الحق آن‌ها به یکدیگر به صورت زیر درمی‌آید:

قضیه ۲. اگر p اول باشد، سپس: $N(p) = p - 1$

اثبات: دنباله A_1, A_2, \dots, A_{p-1} از مربع‌ها را به شکل زیر می‌سازیم. درایه سطر i و ستون j ماتریس A_k را با $a_{ij}^{(k)}$ نشان می‌دهیم که:

$$a_{ij}^{(k)} \equiv ki + j \pmod{p}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که هر A_k یک مربع لاتین است و برای $k \neq h$ و A_h, A_k متعامد هستند.

مربع‌های جادویی

یک مربع جادویی از مرتبه n یک ماتریس $n \times n$ است که شامل هر یک از عده‌های $1, 2, \dots, n^2$ می‌شود، به طوری که مجموع درایه‌های روی هر سطر، ستون و یا هر یک از دو قطر، عددی ثابت است. با توجه به اینکه:

$$\frac{1+2+3+\dots+n^2}{2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

پس مجموع درایه‌های هر یک از سطرهای، ستون‌ها و یا قطرهای مربع جادویی برابر با $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر مربع‌های جادویی از مرتبه ۳ و ۴ هستند.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 15 & 12 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 14 & 9 \\ 10 & 13 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

برای هر عدد $n \geq 3$ مربع جادویی از مرتبه n وجود دارد. اگر n فرد باشد، روشی که در قرن هفدهم توسط **دلالوبیری**^۵ ارائه شده، یکی از ساده‌ترین روش‌های است. در این روش عدد ۱ را در مرکز سطر اول می‌گذاریم و همواره در جهت شمال شرق حرکت می‌کنیم و عدد بعدی را در آن درایه قرار می‌دهیم؛ البته به شرطی که آن درایه خالی باشد. اگر آن درایه پر باشد، به سمت جنوب حرکت می‌کنیم و اگر در خارج سطر یا ستونی قرار گرفتیم، در انتخاب‌های دیگر همان سطر یا ستون عدد بعدی را قرار می‌دهیم. مثلاً همین روش مربع‌های جادویی از مرتبه‌های ۵ و ۷ ساخته می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} 7 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 30 & 39 & 48 & 1 & 10 & 19 & 28 \\ 38 & 47 & 7 & 9 & 18 & 27 & 29 \\ 46 & 6 & 8 & 17 & 26 & 35 & 27 \\ 5 & 14 & 16 & 25 & 34 & 36 & 45 \\ 13 & 15 & 24 & 33 & 42 & 44 & 4 \\ 21 & 23 & 32 & 41 & 43 & 3 & 12 \\ 22 & 21 & 40 & 49 & 2 & 11 & 20 \end{bmatrix}$$

قضیه ۱. اگر: $n \geq 2$ ، آن‌گاه: $N(n) \leq n - 1$

اثبات: فرض کنیم L_1, L_2, \dots, L_{n-1} مربع لاتین دو به دو متعامد از مرتبه n باشند. با تغییر برچسب‌گذاری می‌توان فرض کرد که هر یک از مربع‌ها در اولین سطر خود درایه‌های $n, n-1, \dots, 2, 1$ را به همین ترتیب دارد. اکنون درایه واقع در سطر دوم و ستون اول را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه درایه بالایی آن یک است، این درایه یک نیست و چون درایه‌های این موقعیت در L_i مربع لاتین L_1, L_2, \dots, L_{n-1} متمایز هستند، حداقل $n-1$ عدد (از عده‌های $2, 3, \dots, n$) می‌توانند در این موقعیت قرار گیرند؛ پس: $N(n) \leq n - 1$

اگر $N(n) = n - 1$ ، L_1, L_2, \dots, L_{n-1} یک مجموعه کامل از $MOLS$ مرتبه n می‌گوییم.

مثال. سه مربع لاتین زیر، یک مجموعه کامل از سه $MOLS$ مرتبه ۴ هستند:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

و یا چهار مربع لاتین زیر که یک مجموعه کامل از $MOLS$ مرتبه ۵ هستند:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

قضیه ۲ وجود مجموعه‌های کامل را برای عده‌های اول ثابت می‌کند.

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{bmatrix},$$

$$12+8+5+9=12+2+5+15=6+10+11+7=34$$

به چنین مربعی، مربع جادویی «تمام قطربی»^۴ هم می‌گویند. از روش اویلر نیز می‌توانیم این گونه مربع‌ها را بسازیم. به این منظور دو مربع لاتین متعامد انتخاب می‌کنیم که در آن‌ها قطرهای شکسته مجموع یکسانی داشته باشند. برای مثال، می‌توانیم ماتریس‌های M_1 و M_2 در زیر که مربع‌های لاتین از مرتبه ۵ هستند، به یکدیگر الحق کنیم و سپس یک واحد از درایه‌های M_1 در زوج ترکیبی ab کنیم و در ادامه آن را به شکل $5a+b$ بنویسیم. با این کار یک مربع جادویی تمام قطربی به دست می‌آید.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 24 & 25 & 41 & 02 & 13 \\ 42 & 03 & 14 & 25 & 21 \\ 15 & 21 & 22 & 42 & 04 \\ 32 & 44 & 05 & 11 & 22 \\ 01 & 12 & 23 & 24 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & 20 & 21 & 2 & 8 \\ 22 & 3 & 9 & 15 & 16 \\ 10 & 11 & 17 & 22 & 4 \\ 18 & 24 & 5 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 \end{bmatrix}$$

در یک حالت، وقتی که n فرد باشد و بر ۳ بخش پذیر نباشد، می‌توان دو ماتریس A و B را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A = (a_{ij}); a_{ij} = 2i + j - 2 \pmod{n}$$

$$B = (b_{ij}); b_{ij} = 3i + j - 2 \pmod{n}$$

در این صورت A و B مربع‌های لاتین متعامد از مرتبه n خواهد بود و همچنین هر قطری در A و B حاوی تمام عده‌های $1, 2, \dots, n$ است. بنابراین حاصل الحق آن‌ها به یکدیگر و سپس اعمال تغییراتی که در بالا توضیح داده شد، یک مربع لاتین تمام قطربی خواهد بود.

*پی‌نوشت‌ها

1. Orthogonal
2. Euler
3. Mutually orthogonal latin square
4. در واقع اگر q توانی از یک عدد اول باشد، یعنی q^r که p اول است، سپس $N(q)=q-1$
5. De la loubere
6. pandiagonal

*منابع

1. Ian Anderson, A first course in discrete mathematics, Springer Verlag, 2001.
2. J. H. van Lint and R. M. Wilson, A course in combinatorics, Cambridge University Press, 1992.

روش‌های ساختن مربع‌های جادویی از مرتبه زوج کمی پیچیده‌تر است. یکی از روش‌هایی که به اویلر منتسب شده، با استفاده از مربع‌های لاتین متعامد و یا همان MOLS این کار انجام می‌شود مثلاً دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

از الصاق آن‌ها به یکدیگر ماتریس A به دست می‌آید که اگر یک واحد از مختص اول هر یک از زوج‌ها کم کنیم، ماتریس B به دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 43 & 34 & 21 & 12 \\ 24 & 13 & 42 & 31 \\ 32 & 41 & 14 & 23 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 01 & 12 & 23 & 34 \\ 33 & 24 & 11 & 02 \\ 14 & 03 & 32 & 21 \\ 22 & 31 & 04 & 13 \end{bmatrix}$$

اکنون اگر هر درایه ماتریس B را عددی در مبنای ۴ در نظر بگیریم و آن را در مبنای 1^0 بنویسیم (یعنی $ab=b+1^0a$ ، ماتریس C به دست می‌آید که یک مربع جادویی از مرتبه ۴ است.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 15 & 12 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 14 & 9 \\ 10 & 13 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

دلیل این امر نیز واضح است. در ماتریس B و در هر سطر، ستون و یا قطر اصلی هر یک از عده‌های $1, 2, 3$ و 0 دقیقاً یک بار در موقعیت اول درایه‌ها آمده‌اند و هر یک از عده‌های $1, 2, 3$ و 4 نیز یک بار در موقعیت دوم ظاهر شده‌اند. پس مجموع درایه‌های واقع در سطرها، ستون‌ها و قطرهای یکسان است.

نکته‌ای که در ساختن مربع‌های لاتین به روش بالا وجود دارد، این است که بتوانیم دو مربع لاتین متعامد پیدا کنیم که در آن‌ها هر یک از اعضاء دقیقاً یک بار روی هر یک از دو قطر ظاهر شده باشند. نوع دیگری از مربع جادویی به نام «مربع جادویی هندی» وجود دارد که تاریخ آن به قرن دوازدهم برمی‌گردد و این خاصیت اضافی را دارد که در آن مجموع درایه‌های واقع در قطرهای شکسته نیز همان مجموع را دارند. مثلاً در مربع زیر، مجموع سه قطر شکسته برابر با ۳۴ است:

ماتریس‌ها

مثال ۱: بررسی کنید که ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ در خاصیت جابه‌جایی در ضرب ماتریس‌ها صدق نمی‌کنند.

حل: ضرب‌های $(B \times A)$ و $(A \times B)$ به این صورت هستند:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

و بنابراین $AB \neq BA$.

در مثال ۲ ما همه ماتریس‌هایی که با یک ماتریس خاص (خاصیت) جابه‌جایی دارند، توصیف خواهیم کرد.

مثال ۲: همه ماتریس‌های 2×2 را باید که با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشند.

حل: برای شروع، یک ماتریس 2×2 و دلخواه مانند $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را با ماتریس A از چپ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix} \quad \text{و راست ضرب می‌کنیم:}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix} \quad \text{و از طرف دیگر:}$$

با قرار دادن: $AB=BA$ خواهیم داشت: $a=a+b$, $a+c=c+d$ و $b+d=d$

بنابراین: $a=b$ و $c=d$. فرض کنیم S مجموعه همه ماتریس‌های 2×2 که به صورت $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$ به صورت $a, c \in R$ تعریف شوند، باشد. در این صورت هر ماتریس در S با ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Verify	بررسی کردن
2. Satisfy	صدق کردن
3. Commutative	جابه‌جایی
4. Property	خاصیت
5. Multiplication	ضرب
6. Product	حاصل‌ضرب
7. Arbitrary	دلخواه
8. Obtain	به دست آوردن
9. Let	اجازه دادن، فرض کردن
10. Transpose of a matrix	ترانهاده (جابه‌جا شده) یک ماتریس
11. Interchange	تعویض
12. Row	سطر
13. column	ستون
14. Denote	نشان دادن

EXAMPLE 1. Verify that the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

do not satisfy the commutative property for multiplication.

Solution: The products are $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ and $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

so that $AB \neq BA$.

In Example 2 we describe all matrices that commute with a particular matrix.

EXAMPLE 2. Find all 2×2 matrices that commute with the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Then the product of matrix A on the left with matrix B on the right is given by

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a+c & b+d \end{bmatrix} \quad \text{On the other hand, } BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix}$$

Setting $AB=BA$, we obtain

$$a = a + b \quad a + c = c + d \quad \text{and} \quad b + d = d$$

so that $b=0$ and $a=d$. Let S be the set of all 2×2 matrices defined by

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Then each matrix in S commutes with the matrix A.



Transpose of a Matrix

The *transpose* of a matrix is obtained by interchanging the rows and columns of a matrix.

DEFINITION

Transpose of a Matrix

The transpose of a matrix is obtained by interchanging the rows and columns of a matrix.

Transpose If A is an $m \times n$ matrix, the transpose of A, denoted by A^t , is the $n \times m$ matrix with ij term

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}$$

where $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq m$

For example, the transpose of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ is } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Notice that the row vectors of A become the column vectors of A^t .

تعیین جمله عمومی

یک دنباله غیر خطی خاص

مقدمه

در این مقاله سعی داریم برای الگوهای غیرخطی مانند: ۵، ۱۲، ۲۱، ۳۲... که در فصل اول کتاب ریاضی (۱) پایه دهم (رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی) خوانده‌ایم، یک جمله عمومی ارائه دهیم که با استفاده از آن به راحتی و بدون رسم شکل می‌توان جمله ۱۰ام این نوع دنباله‌ها (الگوها) را تعیین کرد.

ذکر این نکته لازم است که دنباله‌های غیرخطی مورد بحث در کتاب درسی مذکور، همگی از نوع درجه دوم‌اند، در حالی که این نوع دنباله‌ها می‌توانند از نوع درجه سوم، درجه چهارم و ... نیز باشند. اندازه درجه این جمله‌های عمومی به متغیری بستگی دارد که آن را با k نشان می‌دهیم. ضمناً اگر k را برابر یک در نظر بگیریم ($k=1$)، در این صورت جمله عمومی مورد نظر به جمله عمومی یک دنباله حسابی، یعنی $t_n = t_1 + (n-1)d$ تبدیل می‌شود که یک دنباله خطی و درجه اول است.

همان‌طور که می‌بینید، جمله اول این دنباله غیرخطی برابر 5 ($t_1 = 5$) و قدر نسبت‌های آن $d_1 = 7$ و $d_2 = 2$ هستند. همچنین، چون: $k=2$ (تعداد ردیفهای پیکان‌های رسم شده)، جمله عمومی مورد نظر درجه دوم خواهد بود.

حال، فرمول مورد نظر را در حالت کلی معرفی و با استفاده از آن جمله عمومی دنباله ذکر شده را تعیین می‌کنیم:

ابتدا با ذکر دو مثال، جمله عمومی مورد نظر را معرفی می‌کنیم:
اما قبل از آن، نماد فاکتوریل را که در فرمول مورد بحث از آن استفاده می‌شود، برای دانش‌آموزانی که با این نماد آشنایی ندارند، تعریف می‌کنیم.

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب عدددهای طبیعی و متولی از 1 تا n را به صورت $n!$ (فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. برای مثال:

رابطه *

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

و تا آخر، بنابراین:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

مثال ۱.

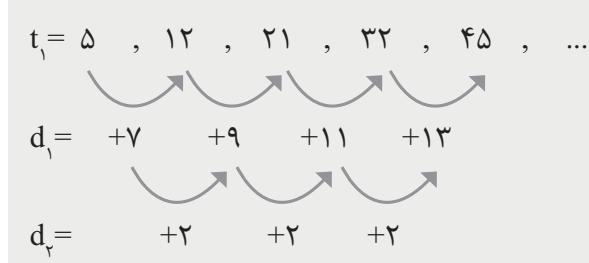
$$t_n = t_1 + (n-1)\frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)]\frac{d_2}{2!} + \dots + [(n-1)(n-2)\dots(n-k)]\frac{d_k}{k!}$$

چون: $k=2$ ، داریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)\frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)]\frac{d_2}{2!}$$

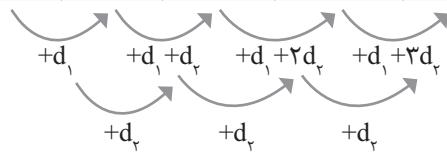
با جای‌گذاری مقدارهای t_1 ، d_1 و d_2 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t_n &= 5 + (n-1) \times 7 + [(n-1)(n-2)] \times \frac{2}{2} \\ &= 5 + (n-1) \times 7 + [(n-1)(n-2)] \\ &= 5 + 7n - 7 + n^2 - 2n + 2 \\ &= n^2 + 4n \Rightarrow t_n = n^2 + 4n \end{aligned}$$



با در نظر گرفتن t_k به عنوان جمله اول می‌توان نوشت:

t_1	جمله اول: t_1	جمله دوم: t_2	جمله سوم: t_3	جمله چهارم: t_4	جمله پنجم: t_5	...
t_1	$t_1 + d$	$t_1 + 2d_1 + d_2$	$t_1 + 3d_1 + 3d_2$	$t_1 + 4d_1 + 6d_2$	\dots	



همان‌طور که می‌بینید، جمله‌عمومی این دنباله به صورت $t_n = t_1 + ad_1 + bd_2$ است که در آن a و b عددهای ثابت و به ترتیب ضرایب d_1 و d_2 هستند. با رسم جدولی برای a و b خواهیم داشت:

شماره جمله	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
a	۰	۱	۲	۳	۴	...	$n-1$
b	۰	۰	۱	۳	۶	...	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

در نتیجه برای $k=2$ داریم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d_1 + \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right] d_2 \\ &= t_1 + (n-1) \frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)] \frac{d_2}{2!} \\ &= t_1 + (n-1) \frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)] \frac{d_2}{2!} \\ \Rightarrow t_n &= t_1 + (n-1) \frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)] \frac{d_2}{2!} \end{aligned}$$

اگر روند فوق را ادامه دهیم، برای $k=3$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + \left(\frac{n-1}{1!} \right) d_1 + \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2!} \right] d_2 \\ &\quad + \left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \right] d_3 \\ \Rightarrow t_n &= t_1 + (n-1) \frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)] \frac{d_2}{2!} \\ &\quad + [(n-1)(n-2)(n-3)] \frac{d_3}{3!} \end{aligned}$$

منبع *

۱. گوه مولفان (۱۳۹۶). کتاب درسی ریاضی (۱) پایه دهم ریاضی فیزیک و علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش. تهران. چاپ دوم.

همان‌طور که مشاهده کردید، به راحتی جمله عمومی دنباله موردنظر را تعیین کردیم. اکنون دنباله‌ای مثال می‌زنیم که جمله عمومی آن درجه سه است:

مثال ۲.

$$\left. \begin{array}{c} 3, 8, 20, 48, 101, \dots \\ +5 +12 +28 +53 \\ +7 +16 +25 \\ +9 +9 \end{array} \right\} k=3$$

جمله عمومی، از نوع درجه سوم است: $t_1 = 3, d_1 = 5, d_2 = 7$ و $d_3 = 9$

با توجه به فرمول کلی (رابطه *) و اینکه $k=3$ داریم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1) \frac{d_1}{1!} + [(n-1)(n-2)] \frac{d_2}{2!} \\ &\quad + [(n-1)(n-2)(n-3)] \frac{d_3}{3!} \end{aligned}$$

با جای‌گذاری مقدارهای t_1, d_1, d_2 و d_3 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t_n &= 3 + (n-1) \times \frac{5}{1!} + [(n-1)(n-2)] \times \frac{7}{2!} \\ &\quad + [(n-1)(n-2)(n-3)] \times \frac{9}{3!} \\ &= 3 + (n-1) \times 5 + [(n-1)(n-2)] \times \frac{7}{2} \\ &\quad + [(n-1)(n-2)(n-3)] \times \frac{9}{6} \\ &= 3 + (n-1) \times 5 + (n^2 - 3n + 2) \times \frac{7}{2} \\ &\quad + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6) \times \frac{9}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{3}{2} n^3 - \frac{11}{2} n^2 + 11n - 4$$

حال به اثبات فرمول مذکور می‌پردازیم:
اثبات: رابطه را برای $k=2$ (جمله عمومی درجه دوم) ثابت می‌کنیم. (روابط مربوط به $k=3, k=4$ و ... به طور مشابه قابل اثبات هستند).

آموزشی

ازدر سلیمان پور باکفایت
آموزش و پرورش ناحیه ۱ ارومیه،
دبیر ریاضی دبیرستان هیئت امنایی و ماندگار شهید کتر چمران

ضرب سریع عدد ها

استفاده کرد.
از نظر محاسباتی، محاسبات مقدارهایی مانند 100×2377 در یک برنامه رایانه‌ای معمولی امکان‌پذیر نیست، زیرا در یک متغیر نمی‌توان بیش از یک عدد 20×30 رقمی ذخیره کرد. در نتیجه انجام این کار مستلزم الگوریتم خاصی است. اکنون الگوریتم مورد نظر را بیان می‌کنیم.

مقدمه
برای ضرب دو عدد، هر یک از رقم‌های یکی باید در تمام رقم‌های دیگری ضرب شود و سپس نتایج با هم جمع شوند. در این مقاله، روشی را بیان می‌کنیم که ضرب دو عدد مستقیماً بدون زیر هم نوشتن محاسبه می‌شود. براساس این روش، می‌توان عدد های دارای رقم‌های خیلی زیاد را در هم ضرب کرده و توسط آن، عدد هایی مانند $100 \times 1000!$ را حساب کرد. کاربرد مهم این روش در محاسبه سریع توان های دوم و سوم عدد های دو یا سه رقمی است.

کلیدواژه ها: ضرب عدد های بزرگ، محاسبه فاکتوریل یک عدد، ضرب سریع

الگوریتم ضرب سریع عدد ها

$$\begin{aligned} & \text{دو عدد } x = \overline{b_1 b_2 b_3} \text{ و } y = \overline{a_1 a_2 a_3} \text{ را در نظر} \\ & \text{می گیریم. برای محاسبه } x \times y \text{ به روش سریع، عدد های } x \text{ و } y \text{ را در مبنای ۱۰ می نویسیم و به صورت زیر عمل} \\ & \text{می کنیم:} \\ & y = b_0 + 10 \cdot b_1 + 100 \cdot b_2 \\ & x = a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 \\ & x \times y = (a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2) \times (b_0 + 10 \cdot b_1 + 100 \cdot b_2) \\ & \quad = a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \times 10 + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \times 100 \\ & \quad \quad + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \times 1000 + (a_2 \cdot b_2) \times 10000 \\ & \quad = x_0 + x_1 \times 10 + x_2 \times 100 + x_3 \times 1000 + x_4 \times 10000 \end{aligned} \tag{1}$$

با توجه به نتیجه حاصل، x رقم یکان، x_1 رقم دهگان، x_2 رقم صدگان و در نهایت x_4 رقم دهزارگان حاصل ضرب است. توجه داریم که اگر یکی از x ها دور قمی باشد، آن‌گاه رقم یکان آن به عنوان جواب ثبت و بقیه آن به عنوان «بردست» به مقدار x_1 بعدی اضافه می‌شود. با توجه به تحلیل فوق نحوه محاسبه هر x_i با توجه به رقم‌های عدد های x و y قابل ذکر است. به عبارت دیگر، برای محاسبه x کافی است رقم‌های ستون

مقدمه
مهم‌ترین زمانی که لازم است ضرب عدد های سریع تر انجام دهیم، زمان انجام محاسبات ریاضی، فیزیک و شیمی است که در آن توان های دوم یا سوم عدد های دو یا سه رقمی ظاهر می‌شوند. ممکن است بخواهیم تحقیقی درباره رقم‌های عدد هایی مانند 100×2377 را به دست آوریم. تاکنون کارهای زیادی در جهت ساده کردن محاسبات انجام گرفته اند. مثلاً در کتاب **کاتلر** روش های ضرب زیادی در حالات خاص بیان شده اند و در فصل دوم این کتاب روشی نوشته شده است که ما آن را به طور دقیق بررسی کرده ایم. بقیه روش ها مانند روش ضرب عدد ها در ۶ در حالت های خاصی درست اند و کلیت ندارند. لذا ارزش یادگیری ندارند. در کتاب **جورج پولیا** به روش های ابتکاری حل مسئله اشاره شده و انگیزه های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته اند. باید توجه کرد: بسیاری از روش های حل سریع مسئله، جذاب و کاربردی هستند، اما جنبه آموزش مفاهیم را ندارند و برای انتقال مفاهیم اولیه تدریس نمی‌توان از آن ها



مثال. ضرب دو عدد سه رقمی را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{r} 523 \\ \times 347 \\ \hline 181481 \end{array}$$

مرحله ۱. ستون سمت راست را در هم ضرب می کنیم و جواب ۲۱ می شود، ۱ را نوشته و ۲ برداشت خواهد شد.

مرحله ۲. دو ستون سمت راست را به صورت ضربدری در هم ضرب می کنیم و ۲۶ حاصل می شود. این مقدار با برداشت جمع می شود و ۲۸ به دست می آید. ۸ را نوشته و ۲ برداشت است.

مرحله ۳. سه ستون را در نظر گرفته و به صورت زیر، در هم ضرب می کنیم.

$$5 \times 7 + 3 \times 3 + 2 \times 4 = 52$$

۵۲ را ب برداشت جمع کنیم و حاصل ۵۴ می شود، ۴ را نوشته و ۵ برداشت است.

مرحله ۴. ضرب دو ستون سمت چپ می شود ۲۶ که اگر آن را با برداشت جمع کنیم، می شود، ۱ را نوشته و ۳ برداشت می شود.

مرحله ۵. ستون آخر ضرب، ستون چپ می شود ۱۵، با برداشت جمع می شود و حاصل ۱۸ نوشته می شود.

دو سؤال برای انجام تحقیقات آتی

۱. چگونه می توان با الگوریتم مشابه الگوریتم مذکور در این مقاله عدههای خیلی بزرگ را از هم تفربیق یا بر هم تقسیم کرد؟

۲. آیا می توان در ضرب عدههای خیلی بزرگ، عدههای داده شده را به چند عدد با رقمهای کمتر تفکیک کرد و ارتباطی بین جواب اصلی و جواب ضربهای کوچک به وجود آورد؟ در این صورت در عمل ضرب، زمان اجرا به طور قابل ملاحظه ای کاهش می یابد.

یکان هر عدد را در هم ضرب کنیم. برای محاسبه x_1 ، باید دو ستون یکان و دهگان را به طور ضربدری در هم ضرب و نتیجه را با هم جمع کنیم. به همین ترتیب ادامه می دهیم و توسط ارقام، نتیجه ضرب نوشته می شود. واضح است رفته تعداد ستون ها بیشتر و سپس دوباره کم می شود.

ما این روش را برای ضرب عدههای دورقمی یا سه رقمی استفاده می کنیم که در محاسبات بسیار ظاهر می شوند. در حل سؤالات کنکور کمتر رخ می دهد که ضرب عدههای بیش از سه رقم لازم باشد، اما به تعداد خیلی زیاد لازم است که عدههای دورقمی یا سه رقمی در هم ضرب شوند. شکل ۱ ترتیب استفاده از ستون های رقمها را در محاسبه xy نشان می دهد. براساس شکل ۱، ابتدا مقدار x و سپس مقدار y محاسبه می شود و تا اتمام ستون ها ادامه می یابد. با تمرین می توان عدههای دورقمی و سه رقمی را در کمترین زمان و به طور دستی محاسبه کرد و مستقیماً جواب را نوشت.

$$\begin{array}{r} a_0 \\ b_0 \\ \hline x_0 = a_0 b_0 \\ \\ a_1 \cancel{x_0} a_0 \\ b_1 \cancel{x_0} b_0 \\ \hline x_1 = a_1 b_0 + b_1 a_0 \\ \\ a_2 \cancel{x_1} a_1 \\ b_2 \cancel{x_1} b_0 \\ \hline x_2 = a_2 b_0 + b_2 a_1 \\ \\ a_3 \cancel{x_2} a_1 \\ b_3 \cancel{x_2} b_1 \\ \hline x_3 = a_3 b_1 + b_3 a_1 \end{array}$$

شکل ۱. ترتیب ضرب ستون ها برای محاسبه xy

منابع*

- بولیا، جرج (۱۳۸۲). خلاقیت ریاضی. ترجمه برویز شهریاری. انتشارات فاطمی. چاپ هفتم. ۱۳۸۲
- کاتر، آن و رودلف مکشین، رولف (۱۳۷۱). روش سریع تراختنبرگ در حساب. ترجمه محمد باقری. انتشارات دانشنامه. تهران.



۵. نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقطه‌های (۱، ۰) و (۲، -۳) می‌گذرد و محور لازماً را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.

۶. یک نقاش قوطی‌هایی از چهار رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً رنگ جدیدی درست کند، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین چهار رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۷. یک آزمون شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی تصمیم دارد به سؤال‌ها به صورت اتفاقی پاسخ دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد:
الف. اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟
ب. اگر بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۸. در یک باشگاه تیراندازی، ۳۰٪ افراد با سلاح نوع A، ۵٪ با سلاح نوع B و ۱۰٪ با هر دو سلاح تیراندازی می‌کنند. مطلوب است احتمال اینکه یک نفر:

- الف. حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.
- ب. فقط با سلاح A تیراندازی کند.

۹. دو سکه و یک تاس را هم می‌اندازیم چقدر احتمال دارد دو سکه مثل هم و تاس زوج باشد؟

ریاضی ۱

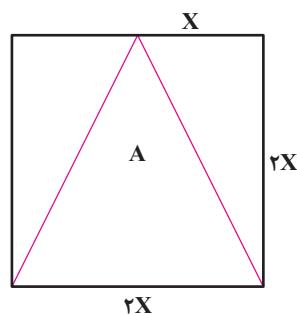
(پایه دهم رشته ریاضی و تجربی)

مجتبی رفیعی

۱. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\text{الف. } \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 = 0 \\ \text{ب. } 3x^2 - 6x + 3 = 1$$

۲. در شکل ۱، اگر بدانیم مجموع عدد محیط و مساحت مثلث A برابر با $\sqrt{5} - 5$ است، آن‌گاه مساحت مربع را بدست آورید.

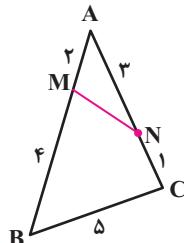


شکل ۱

۳. نامعادله $\frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$ را حل کنید.

۴. نامعادله قدر مطلقی $|2x - 1| \leq 4$ را حل کنید

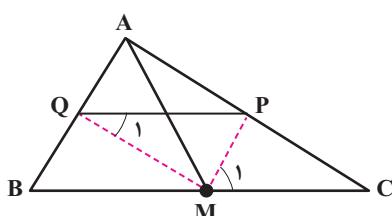
۲. در مثلث شکل ۲، اندازه پاره خط MN را به دست آورید.



شکل ۲

۳. با همان فرض مسئله ۱ در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زاویه‌های AMB و AMC هستند. (شکل ۳).

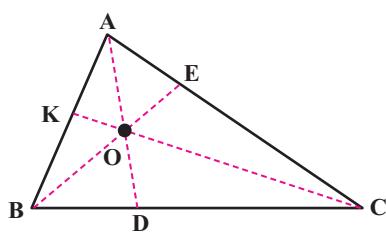
$$\hat{M}_1 + \hat{Q}_1 = 90^\circ$$



شکل ۳

۴. با همان فرض مسئله ۱ در مثلث ABC ، O محل تلاقی سه نیمساز AD ، BE و CK است (شکل ۴). ثابت کنید:

$$\frac{AK}{KB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$



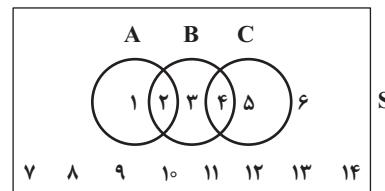
شکل ۴

۵. اگر در مسئله ۴، O محل تلاقی سه ارتفاع AD ، BE و CK باشد، ثابت کنید:

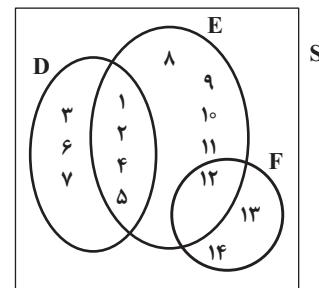
$$\frac{AK}{KB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

۶. به رأس‌های یک n -ضلعی محدب یک واحد اضافه می‌کنیم. تعداد پاره خط‌های واصل بین دو رأس در شکل $n+1$ ضلعی محدب جدید، سه برابر قطرهای شکل اولیه می‌شود. n را به دست آورید.

۱۰. اجتمع دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S در شکل ۲ (شکل بالا) برابر با اشتراک کدام پیشامدها در فضای نمونه‌ای شکل ۳ (شکل پایین) است؟



شکل ۲



شکل ۳

برای هندسه ۱

(پایه دهم رشته ریاضی)

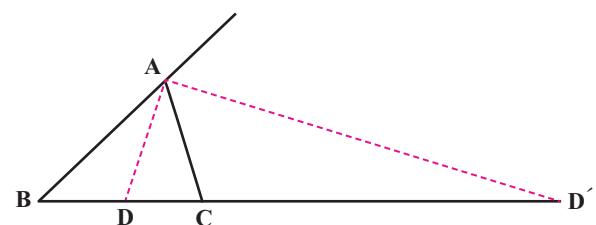
حسین کریمی

۱. با فرض اینکه AD نیمساز زاویه داخلی \hat{A} از مثلث ABC باشد،

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$$

ثبت کنید اگر AD' نیمساز خارجی \hat{A} از مثلث ABC باشد

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{BA}{CA}$$



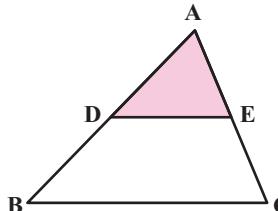
شکل ۱

ریاضی ۲

(پایه یازدهم رشته تجربی)

حمیدرضا دهقان

۱. در شکل ۱ نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث رنگی، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



شکل ۱

۲. اگر $\cot x = \sqrt{\frac{1}{a+b}}$ باشد، در این صورت b را بباید.

۳. نمودار تابع $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ را به روش انتقال رسم کنید. سپس برآ آن را تعیین کنید.

۴. برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل عبارت زیر را بباید.
- $$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$$

۵. معادله $x^2 - 1 = 2^{x-1}$ چند ریشه دارد؟

۶. حاصل $\left[\log_{\sqrt[3]{2}} \right]$ را بباید.

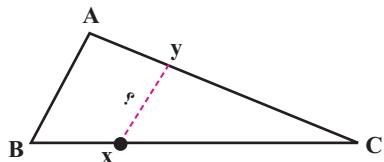
۷. روی نمودار تابع $y = \log_{x^2-3}^{(4x-x^2)}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۸. اگر $\log(xy^2) = 4$ و $\log(x^2y) = 2$ باشد، حاصل $\log(xy^2) - \log(x^2y)$ را بباید.

۹. اگر \log_4^b و \log_4^a ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل \log_2^{ab} چقدر است؟

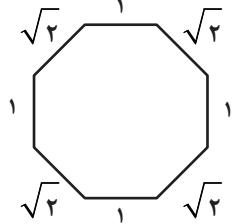
۱۰. انرژی یک زلزله ۸ برابر انرژی زلزله دیگری است. شدت دو زلزله چند ریشتر اختلاف دارند؟ ($\log 2 = 0.3010$)

۷. زمینی به شکل مثلث به طور مساوی در مالکیت دو کشاورز است و یک درخت گردو (X) بر روی یک ضلع از زمین قرار دارد (شکل ۵). زمین را به گونه‌ای به دو قسمت مساوی تقسیم کنید که درخت گردو (X) در مرز تقسیم قرار گیرد.



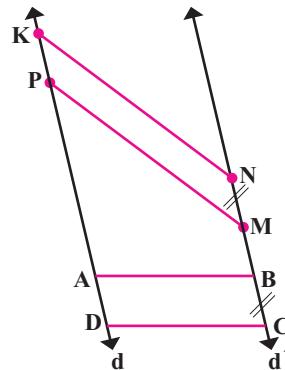
شکل ۵

۸. با استفاده از قضیه پیک مساحت هشت‌ضلعی شکل ۶ را بدست آورید.



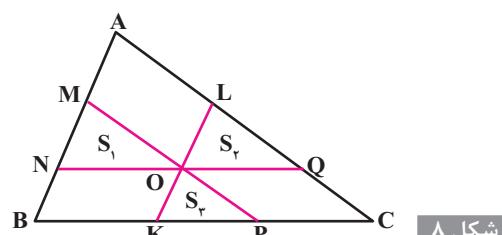
شکل ۶

۹. در شکل ۷ دو خط d و d' موازی و $BC=MN$ ثابت کنید دو متوازی‌الاضلاع $MNKP$ و $ABCD$ هم مساحت هستند.



شکل ۷

۱۰. از نقطه O داخل مثلث ABC به مساحت S (شکل ۸) خط‌هایی به موازات اضلاع مثلث رسم می‌کنیم و مساحت سه مثلث پدید آمده را $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$ نامیم. ثابت کنید: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$



شکل ۸

هندسه ۲

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. در شکل ۱، A و B به فاصلهٔ ۴ و ۲ از خط d قرار دارند. اگر امتداد AB با محور بازتاب زاویهٔ 60° بسازد، آنگاه تصویر AB را نسبت به خط d به دست آورید و A'B' بنامید. محیط و مساحت چهارضلعی AA'B'B را به دست آورید.



شکل ۱

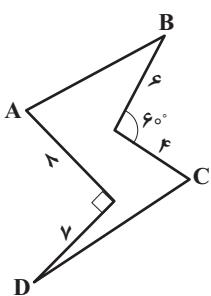
۲. بازتاب نقطه A(2, -1) نسبت به خط $d: 2y - 3x - 6 = 0$ نقطه A' است. مختصات نقطه A' را بیابید.

۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $AC=3$ ، $AB=4$ و $A=90^\circ$. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطه H را نسبت به اضلاع AB و AC مثلث به دست می‌آوریم و D و E می‌نامیم. طول DE کدام است؟

۴. نقطه A(4, 0) نسبت به نقطه O(1, -2) به اندازهٔ 270° درجه دوران می‌دهیم. نقطه دوران یافته را A' می‌نامیم. مختصات A' را بیابید.

۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، نقطه همرسی میانه‌هاست. مجانس نقطه G را نسبت به رأس A و نسبت تجانس $\frac{3}{2}$ را M می‌نامیم. مساحت مثلث BMG را به دست آورید.

۶. دو دایره C(0, 3) و C'(0, 5) مماس خارج‌اند. اگر دو دایره مجانس هم باشند، فاصله مرکز تجانس تا هر یک از مرکزهای دایره‌ها را به دست آورید. (مسئله را برای هر دو حالت در نظر بگیرید؛ هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس).



شکل ۲

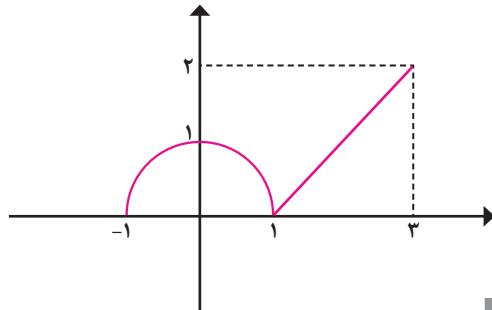
۷. در شکل ۲ اگر محیط چندضلعی تعییر نکند، حداقل مقداری که به مساحت شکل اضافه می‌شود، چقدر است؟

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

محمد تقی طاهری تنجانی

۱. نمودار تابع f در شکل ۱ داده شده است. نمودار تابع $y = -f(1-x)$ را با توجه به آن رسم کنید.



شکل ۱

۲. اگر $f(x^3 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ چقدر است؟

۳. ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$ را به دست آورید.

۴. نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{[2-x]+[x]}$ را در بازه $[2, -2]$ رسم کنید.

۵. از رابطه $x = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x$ مقدار $x = \frac{1}{\pi}$ را به دست آورید.

۶. نمودار تابع $f(x) = \frac{25^x - 1}{5^x - 1}$ را رسم کنید و با توجه به نمودار آن، دامنه و برد f را تعیین کنید.

۷. نشان دهید: $\frac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{\log 2 + \frac{1}{2} \log 6} = 2$

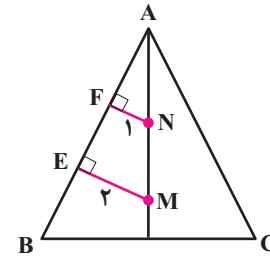
۸. معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_y(x^2 + x + 1) + \log_y(x - 1) = 1$$

۹. اگر $\log_2 x$ و $\log_4 y$ و $\log_{\frac{1}{2}} z$ به ترتیب جمله‌های یک دنباله حسابی باشند، نشان دهید: $x = y + 4$

۱۰. داریم: $\log 2 \approx 0.301$ و $\log 3 \approx 0.477$. کدام یک از عددهای 5^{200} یا 3^{273} بزرگ‌تر است؟

۲. اگر در مسئله قبل، در حالتی که تاس مضرب ۳ می‌آید، از کیسه‌ای که حاوی ۹ مهره است و روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا ۹ چاپ شده است، یک مهره به تصادف بیرون بیاوریم و حالت‌های دیگر تغییر نکنند، احتمال آن را بیابید که هر دو بار که تاس می‌ریزیم، عدد زوج بیاید.
۳. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن دو عدد ۱ و ۳ با هم برابر نباشد. همچنین احتمال آمدن هر یک از عده‌های ۲، ۵ و ۶ سه برابر احتمال آمدن ۳ و $\frac{2}{9} = P(4)$ است. مطلوب است محاسبه $P(\{1, 2, 4\})$ باشد.
۴. شخص A یک تاس و شخص B دو سکه پرتاب می‌کنند. اگر زوج بیاورد، برنده است و چنانچه B حداقل یک بار شیر بیاورد، برنده است. اگر A بازی را شروع کند و به طور مرتب تاس و سکه‌ها را پرتاب کنند، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه A برنده شود.
۵. هرگاه S فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و A، B و C سه پیشامد در S باشند، ثابت کنید:
- $$P[(A \cup B) | C] = P(A | C) + P(B | C) - P[(A \cap B) | C]$$



شکل ۳

هندسه ۳

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

حسین کریمی

۱. می‌دانیم نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند. معادله نیمساز زاویه‌ای را به دست آورید که معادله دو ضلع آن عبارت باشد از:

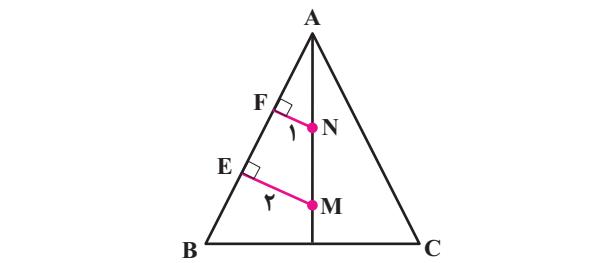
$$d' : 3x + 4y + 5 = 0 \quad d : 5x + 12y + 19 = 0$$

۲. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از یک خط به فاصله معین باشند، دو خط راست موازی با خط مفروض است. معادله مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه xy را تعیین کنید که از خط $3x - 4y + 2 = 0$ به فاصله معین ۶ باشد.

۸. خط $x=4$ را حول مبدأ مختصات به اندازه زاویه‌های 45° ، 90° ، 135° ، 180° ، 225° و 270° دوران می‌دهیم. پس از چند دوران متوالی، از برخورد خط‌ها یک هشت ضلعی به دست می‌آید. مساحت آن را حساب کنید.

۹. دو خط دلخواه d_1 و d_2 و پاره خط $AB=a$ در صفحه مفروض‌اند. پاره خطی به طول AB طوری بیابید که یکسر آن روی d_1 و سر دیگر آن روی d_2 باشد. درباره تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.

۱۰. دو نقطه M و N به فاصله ۱ و ۲ از اضلاع مثلث ABC روی ارتفاع آن واقع‌اند. (شکل ۳). طول کوتاه‌ترین مسیری را بیابید که از M به ضلع AC و از آنجا به ضلع AB و سپس به نقطه N برگرداند.



آمار و احتمال

(پایه یازدهم رشته ریاضی)

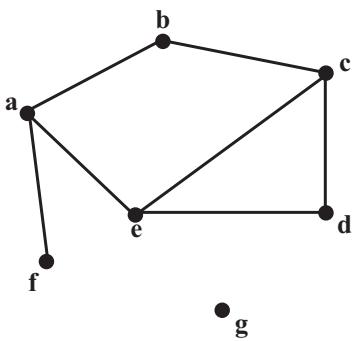
میرشهرام صدر

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر تاس مضرب ۳ بیاید، آن‌گاه از داخل کیسه‌ای که حاوی 10° مهره یکسان است و روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا 10° چاپ شده است، یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. در حالتی که باقی‌مانده تقسیم عدد روی تاس بر ۳ برابر با ۱ باشد، در این صورت یک تاس پرتاب می‌کنیم. اما در حالتی که باقی‌مانده عدد روی تاس بر ۳ برابر با ۲ باشد، گردونه‌ای که روی آن شماره‌های ۱ تا ۸ حک شده است، چرخانده می‌شود تا عقربه روی یک عدد بایستد.

(الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را بنویسید.
ب) مطلوب است محاسبه احتمال آنکه هر دو تاس عدد زوج بیایند.

- الف. گراف G را رسم کنید و مرتبه و اندازه آن را بنویسید.
 ب. درجه رأس‌های G را مشخص کنید.
 پ. کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟
 ت. مجموع درجات رئوس این گراف را بنویسید.

۲. گراف G به صورت زیر رسم شده است:

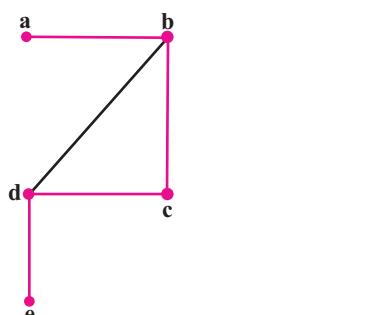


- الف. مجموعه‌های رأس‌ها و یال‌های G را بنویسید.
 ب. مجموعه همسایه‌های رأس‌های f , g و e را مشخص کنید.
 پ. $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید.
 ت. مجموعه $N_G = \{a, b\}$ مجموعه همسایه‌های کدام رأس است؟

۳. گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ مفروض است.
 اگر مجموعه همسایه‌های رأس a دارای ۶ عضو باشد و همه مجموعه همسایه‌های رئوس دیگر تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

۴. در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, f, e\}$ داریم: $N_G(c) = \{a, b\}$ و $N_G(b) = \{a, c\}$ و $N_G(a) = \{b, c, d\}$ و $N_G(f) = \{d\}$ و $N_G(e) = \{\}$ و $N_G(d) = \{a, f\}$ و $N_G(e) = \{\}$ و $N_G(d) = \{a, f\}$ اندازه آن را مشخص کنید.

۵. گراف G به صورت زیر رسم شده است:
 الف. دو زیرگراف فراگیر از G را رسم کنید.
 ب. اگر \bar{G} مکمل گراف G باشد، مجموع درجات رأس‌های \bar{G} را مشخص کنید.



۶. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید که در آن:

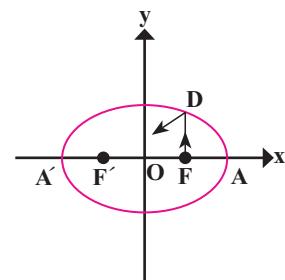
$$C \left| \begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array} \right. \text{ و } B \left| \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right. , A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right.$$

۷. طول وتر پدید آمده از تقاطع خط $3x + 4y - 10 = 0$ با دایرة $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ را به دست آورید.

۸. دو دایره $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 3 = 0$ و $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ متقاطع‌اند. معادله امتداد وتر مشترک آن‌ها را به دست آورید.

۹. گوییم دو دایره متقاطع C و C' در یک صفحه یکدیگر را به زاویه α قطع کرده‌اند، هرگاه زاویه بین مماس‌های رسم شده بر دو دایره در نقطه تلاقی α باشد. شرط عمود بر هم بودن دو دایره $C: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و $C': x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ را به دست آورید.

۱۰. مرکز بیضی شکل ۱ بر مبدأ مختصات و قطرهای آن، مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند. فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر نوری از نقطه F ، عمود بر امتداد AA' بتابد، معادله امتداد بازتابش آن را پس از برخورد با بیضی مشخص کنید.



شکل ۱

۱۱. مثلث ABC را به گونه‌ای رسم کنید که در آن، محیط مثلث برابر با ۱۲، $BC = 4$ و میانه AM برابر با $\frac{3}{5}$ باشد.

ریاضیات گستته

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است.

۶. استخراج t تن مس از یک معدن هزینه‌ای برابر $c=f(t)$ تومان خواهد داشت. $f'(2000) = 10000$ چه مفهومی را می‌رساند؟

۷. تابع علامت به صورت $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ تعریف می‌شود.

نشان دهید تابع $f(x) = x \text{sgn}(x)$ در $x=0$ مشتق ندارد.

۸. کارخانه‌ای برای تولید x ساعت مچی، $c(x) = 1500 + 20x + \frac{x^2}{10}$ تومان هزینه می‌کند.

الف. برای تولید صفر عدد ساعت چه مقدار باید هزینه کند؟
ب. هزینه نهایی چقدر است؟

پ. هزینه متوسط وقتی $x=20$ چقدر است؟

ت. هزینه واقعی تولید بیستویکمین ساعت چقدر است؟

۹. هرگاه $f(x)$ در R پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$ باشد، از رابطه

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + g(2x) = 2x^3$$

۱۰. اگر معادله حرکت ذره‌ای $s(t) = 5 \cos(3t - \pi/4)$ باشد.
الف. سرعت این ذره در زمان t را پیدا کنید.

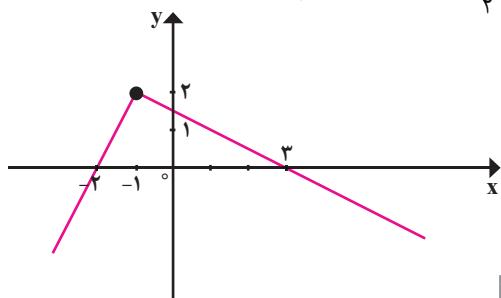
ب. چه وقت این سرعت صفر است؟

ریاضی ۳

(پایه دوازدهم رشته تجربی)

آنالیتا کمیجانی

۱. در شکل ۱ نمودار تابع f رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$



شکل ۱

۶. گراف کامل K_p دارای ۴۵ یال است. در این گراف (G) و (Δ) را مشخص کنید.

۷. از گراف کامل K_p ۱۵ یال حذف کردیم تا گراف مکمل آن به دست آمد. مجموع درجات رأس‌های K_p به علاوه مرتبه K_p بیاید.

حسابان ۲

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

محمد تقی طاهری تنجانی

۱. a و b را طوری بیاید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3x}{x^3 + ax + b} = -\infty$$

۲. حاصل هر یک از حدود زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x - 1} \quad \text{الف.}$$

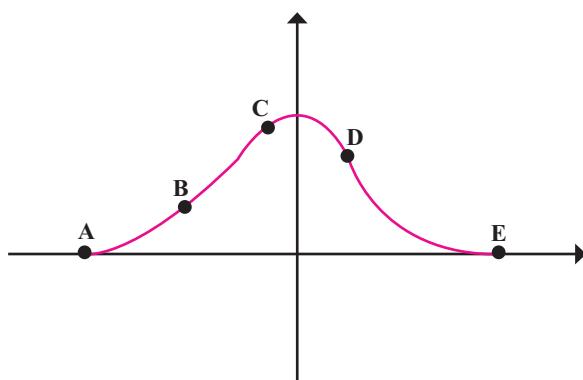
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} \frac{1 + \cos x}{1 + \tan x} \quad \text{ب.}$$

۳. a و b را چنان بیاید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{ax^3 + bx - 1}{2x + 1} - x + 1 \right) = 3$$

۴. اگر منحنی نمایش تابع $f(x) = \frac{(a^3 + 1)x^3 + 4}{x^3 + ax + 25}$ فقط یک جانب قائم داشته باشد، معادله مجانب افقی آن را به دست آورید.

۵. در نظریه نسبیت، جرم ذره‌ای که با سرعت v حرکت می‌کند، از رابطه $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 c^{-2}}}$ به دست می‌آید که در آن، m_0 جرم ذره در حالت سکون و c سرعت نور است. وقتی سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می‌شود، یعنی $v \rightarrow c$ ، چه اتفاقی برای ذره می‌افتد؟



شکل ۳

۶. اگر داشته باشیم: $f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 5h$ ، مقدار $f'(2)$ را به دست آورید.

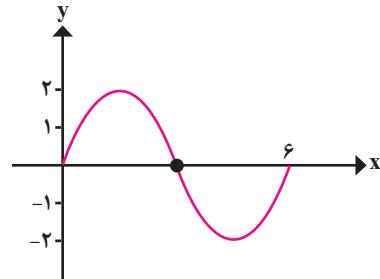
۷. اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x+3} + \sqrt{x}(x+3)}{\sqrt{x^2+3x}}$ باشد، مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

۸. نقطه‌های بحرانی تابع با ضابطه $x^3 - 2(x-2)^2$ را برآورد کنید. محیط این مثلث را به دست آورید.

۹. تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره اکیداً صعودی است. محدوده تغییرات a را به دست آورید.

۱۰. اکسٹرمم نسبی تابع $f(x) = x - \sqrt{x}$ را به دست آورید.

۱۲. شکل ۲ قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. مقادیر a و b را به دست آورید.



شکل ۲

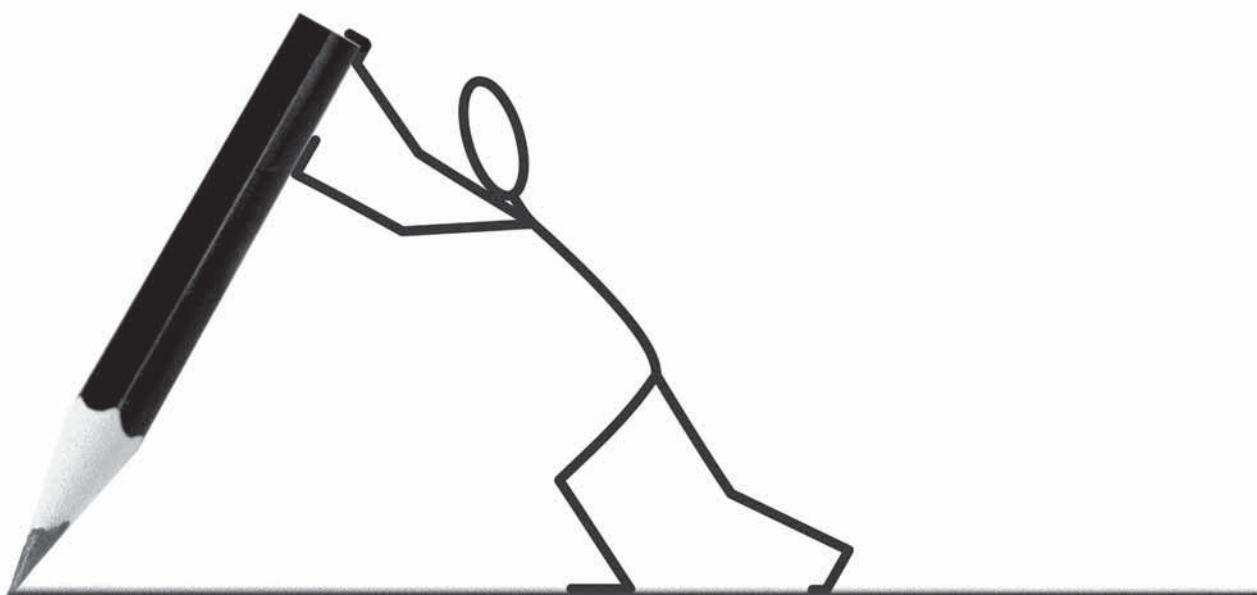
۱۳. حاصل حد های زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2} \quad \text{(ب)}$$

۱۴. اگر داشته باشیم: $g(x) = 2^x$ و $f(x) = \frac{1}{x+3}$ ، حد تابع $(gof)(x)$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ را به دست آورید.

۱۵. در نمودار تابع f که به صورت شکل ۳ داده شده است، شیب خطوط مماس برای نقطه‌های A تا E را با هم مقایسه کنید.



پاسخ مسائل



ریاضی ۱

$$\begin{aligned} a^r &= (2x)^r + x^r = 4x^r + x^r = 5x^r \Rightarrow a = \sqrt{5}x \\ a &= \frac{\sqrt{5}x \times 2x}{2} = 2x^r \\ \text{مساحت مثلث} &= \sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 2x = 2(\sqrt{5} + 1)x \\ \text{محیط مثلث} &= 2x^r + 2(\sqrt{5} + 1)x = 5 - \sqrt{5} \\ \Rightarrow 2x^r + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 5 &= 0 \\ \Delta = b^r - 4ac &= 4(5 + 1 + 2\sqrt{5}) - 4(2)(\sqrt{5} - 5) \\ \Rightarrow 4(6 + 2\sqrt{5}) - 4(2\sqrt{5} - 10) &= 0 \\ = 24 + 8\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 40 &= 64 \\ x_1, x_2 &= \frac{-5 - \sqrt{5}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} & \text{خ} \quad \text{ق} \\ x &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

مسئله ۳. دو نامعادله حل می‌کنیم و از جوابها

اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4} \\ \text{II} \end{array}$$

(I): $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\frac{x^r + \Delta x + 4 - (x^r + \Delta x + 6)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \quad \text{صورت منفی} \rightarrow \text{خرج منفی}$$

$$\text{عبارت مثبت} \rightarrow \text{خ} \quad \text{ق}$$

X	-4	-2
X+2	-	-
X+4	-	+
(x+2)(x+4)	+	+

$$\Rightarrow -4 < x < -2$$

$$\begin{aligned} (\text{II}): \frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} &\Rightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)} &> 0 \end{aligned}$$

از اینجا به بعد مانند قبیل عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^r - 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} &= 0 \quad \text{طرفین} \\ x^r - 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} + \frac{3}{16} &= \frac{3}{16} \\ x^r - 2\left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{16} &= \frac{3}{16} \\ \Rightarrow x^r - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} &= \frac{3}{16} \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^r &= \frac{3}{16} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

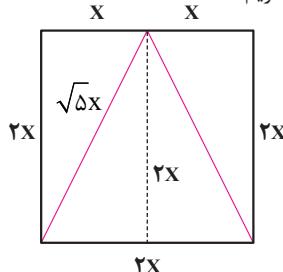
دقت: در هر دو روش جواب به دست آمده باید بیکسان باشد و گرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم. به علاوه اینکه همواره می‌توانیم با جای‌گذاری جواب نهایی به دست آمده در معادله اصلی، از صحت جواب به دست آمده مطمئن شویم.

ب. اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم، به $(\sqrt{3}x)^r = 4x^r$ برمی‌خوریم و حل معادله مشکل می‌شود. بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جمله‌ها بر ۳، معادله را به شکل استاندارد درمی‌آوریم و مانند قبیل ادامه می‌دهیم:

$$3x^r - 6x + 3 = 1 \rightarrow x^r - 2x + 1 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x-1)^r &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow x-1 &= \pm \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \pm \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1 = \frac{3+\sqrt[3]{3}}{3} \\ x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1 = \frac{3-\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

مسئله ۲. با نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث کناری داریم:



$$\begin{aligned} (a+b)^r &= a^r + 2ab + b^r \\ (a-b)^r &= a^r - 2ab + b^r \end{aligned}$$

مسئله ۱. با دیدن عبارت‌های $4x^r$ و $3x^r$ که در آن‌ها x^r مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:

الف. روش اول: در عبارت $a^r - 2ab + b^r$ برابر با $2x^r$ می‌گیریم که در آن صورت $a^r = 4x^r$ خواهد بود:

$$(2x)^r - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{طرفین} \quad (2x)^r - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2x)^r - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$4x^r - 2x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2x - \frac{1}{2})^r = \frac{3}{4} \Rightarrow (2x - \frac{1}{2}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

روش دوم: تمام جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$4x^r - 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4x^r - 2x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^r - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$$

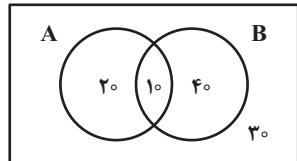
و چون به هر دو سری از سؤال‌ها با هم جواب می‌دهد، تعداد حالات کل برابر است با:

$$4^1 \times 2^5$$

ب. اگر بتواند به هر سؤال پاسخ بدهد یا ندهد، آن وقت برای سؤال‌های چهارگزینه‌ای، ۵ حالت وجود دارد: یکی از چهار گزینه یا اینکه اصلاً جواب ندهد. برای سؤال‌های دوگزینه‌ای هم ۳ حالت وجود دارد: یکی از دو گزینه یا جواب ندادن به سؤال. پس داریم:

$$5^1 \times 3^5$$

مسئله ۸. با توجه به نمودار و شکل ۳ (عددی) روی نمودار بیانگر درصد احتمال هستند:



شکل ۳

الف. احتمال اینکه حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند؛ یعنی با A یا با B یا هر دو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{100} + \frac{5}{100} - \frac{1}{100} = \frac{7}{100}$$

ب. با توجه به نمودار، احتمال اینکه فقط با سلاح A تیراندازی کند $\frac{2}{100}$ است.

مسئله ۹

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

مسئله ۱۰. دو پیشامد A و C در شکل بالا ناسازگارند، چرا که اشتراک آن‌ها تهی است. اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$A \cup C = \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5\}$$

با توجه به شکل بایین، $\{1, 2, 4, 5\}$ اشتراک دو پیشامد D و E است.

$$D \cap E = \{1, 2, 4, 5\}$$

مسئله ۵

$$y = ax^r + bx + c$$

$$(0, -3) : -3 = c$$

$$(1, -4) : a + b - 3 = -4$$

$$\Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow 2a + 2b = -2$$

$$(2, -2) : 4a + 2b - 3 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = -2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$2a = -2 \Rightarrow a = 1$$

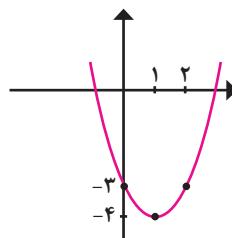
$$2a + 2b = -2 \Rightarrow 2 + 2b = -2$$

$$\Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

$$y = x^r - 2x - 3$$

دامنه

$$y = [-4, +\infty]$$



شکل ۳

مسئله ۶. از ترکیب هر دو رنگ، هر سه رنگ و هر چهار رنگ، رنگ‌های جدید به وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{4!0!} = 6 + 4 + 1 = 11$$

۱۱ رنگ از ترکیب چهار رنگ اصلی به وجود می‌آید.

$$\frac{x^r + x - 2 - (x^r + x)}{x(x+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^r + x - 2 - x^r - x}{x(x+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} > 0$$

صورت منفی
خرج منفی
عبارت مشبّث

x	-2	○	
x	-	-	+
(x+2)	-	○	+
x(x+2)	+	○	-

-۲ < x < 0

نامعادله جواب ندارد.

$$I, II \Rightarrow (-4, -2) \cap (-2, 0) = \emptyset$$

مسئله ۴. ابتدا نامعادله را به نامعادلهای ساده تفکیک می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$4 \leq 2x - 1 < 3x$$

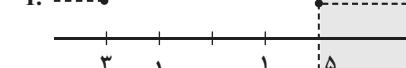
$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} |2x-1| < 3x \rightarrow \begin{cases} 2x-1 < 3x \\ 2x-1 > -3x \end{cases} \\ |2x-1| \geq 4 \rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 4 \\ 2x-1 \leq -4 \end{cases} \end{array} \right. \cap$$

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} 2x-1 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \\ 2x-1 \leq -4 \Rightarrow 2x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

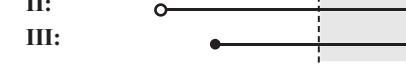
$$(II) \left\{ \begin{array}{l} 2x-1 < 3x \Rightarrow x > -1 \\ 2x-1 > -3x \Rightarrow 5x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$$(III) |x| < a (a \geq 0) \rightarrow x \geq 0$$

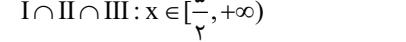
I: -----



II:



III:

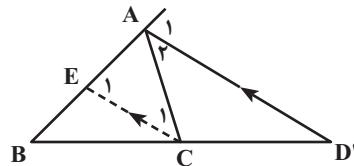


$$I \cap II \cap III : x \in [\frac{5}{2}, +\infty)$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

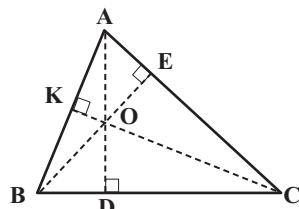
هندسه ۱

مسئله ۱. از رأس C به موازات AD خطی رسم می‌کیم تا AB را در E قطع کند (AD' نیمساز خارجی است: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$).



مسئله ۵.

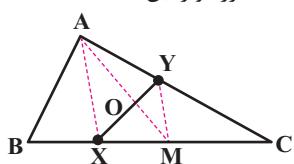
$$\begin{aligned} \triangle AOE \sim \triangle OBD &\Rightarrow \frac{BD}{AE} = \frac{OD}{OE} \quad (1) \\ \triangle AOK \sim \triangle DOC &\Rightarrow \frac{AK}{DC} = \frac{OK}{OD} \quad (2) \\ \triangle OBK \sim \triangle OEC &\Rightarrow \frac{EC}{BK} = \frac{OE}{OK} \quad (3) \\ (1), (2), (3) &\Rightarrow \frac{BD}{AE} \times \frac{AK}{DC} \times \frac{EC}{BK} \\ &= \frac{OD}{OE} \times \frac{OK}{OD} \times \frac{OE}{OK} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{AK}{KB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1 \end{aligned}$$



مسئله ۶.

$$\begin{aligned} 3 \times \frac{n(n-3)}{2} &= \frac{(n+1) \times n}{2} \\ \Rightarrow 2(n-3) &= n+1 \Rightarrow n=5 \end{aligned}$$

مسئله ۷. از M وسط BC به موازات AX خطی رسم می‌کیم تا AC را در Y قطع کند. بنابر ویزگی ۲ مندرج در صفحه ۶۷ کتاب درسی: S(OMX) = S(AOY). از طرف دیگر، می‌دانیم میانه AM مساحت مثلث را نصف می‌کند. پس پاره خط xy مرز دو زمین است.

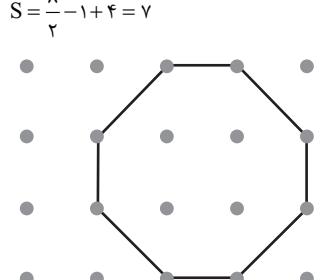


مسئله ۸.

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

تعداد نقاط مرزی - ۱ +

$$S = \frac{\lambda}{2} - 1 + 4 = 7$$



$$\begin{aligned} EC \parallel AD' &\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{A}_1, \hat{C}_1 = \hat{A}_2 \\ \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}_1 &\Rightarrow [AE = AC] \\ EC \parallel AD' &\Rightarrow \frac{BD'}{CD'} = \frac{BA}{EA} \\ AE = AC &\Rightarrow \frac{BD'}{CD'} = \frac{BA}{CA} \end{aligned}$$

مسئله ۲.

$$\begin{aligned} \frac{AM}{AC} &= \frac{AN}{AB} = \frac{3}{6}, \hat{A} = \hat{A} \\ \Rightarrow AMN \approx ABC &\Rightarrow MN = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

مسئله ۳.

$$\begin{cases} MP \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{AP}{CP} \\ MQ \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AQ}{BQ} \\ CM = BM \Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{AQ}{BQ} \Rightarrow QP \parallel BC \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} (1) . \widehat{QPM} &= \hat{M}_1 \\ \widehat{BMA} + \widehat{CMA} &= 18^\circ \\ \Rightarrow \widehat{QMP} &= 9^\circ \\ \Rightarrow \hat{Q}_1 + \widehat{QPM} &= 9^\circ \quad (2) \\ (1), (2) \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{Q}_1 &= 9^\circ \end{aligned}$$

مسئله ۴.

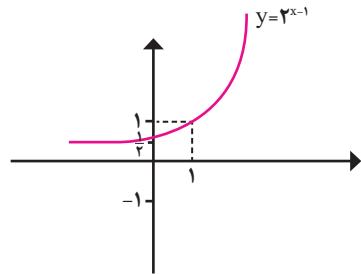
$$\begin{cases} CK \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{CA}{CB} \\ BE \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{BA} \\ AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AK}{KB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = \frac{CA}{CB} \times \frac{BC}{BA} \times \frac{AB}{AC} = 1$$

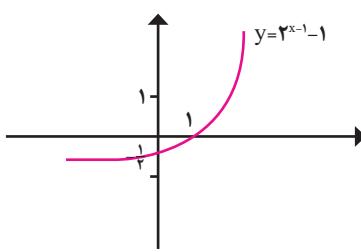
ریاضی ۲

مسئله ۱. چون نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{3}{5}$ است، پس فرض می‌کنیم: $BC=5a$ و $DE=3a$; $DE \parallel BC$ در نتیجه: و چون: $DE=3a$.

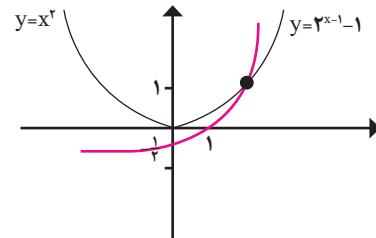
$$\begin{aligned} \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} &\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5} \\ AE = 3b & \\ \Rightarrow AC = 5b & \\ \Rightarrow EC = 5b - 3b = 2b & \end{aligned}$$



نمودار یک واحد به سمت پایین منتقل می شود



حال اگر نمودار $y = x^n$ را نیز رسم کنیم، چون
نمودار تابع نمایی $y = a^x$ باید بالاتر از نمودار $y = x^n$ باشد، درنتیجه معادله یک ریشه دارد.

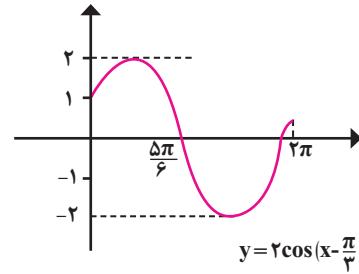


مسئله ۶. از ویژگی های لگاریتم استفاده می کنیم:

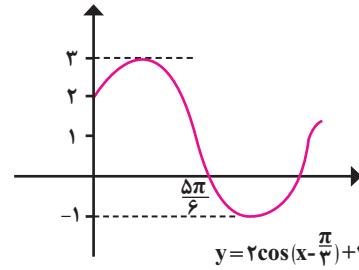
$$\begin{aligned}\log_{b^m}^a &= \frac{n}{m} \log_b^a \\ \left[\log_{\sqrt[n]{b}}^a \right] &= \left[\log_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{a}} \right] = \left[\frac{1}{n} \log_a^b \right] \\ &= \left[\log_a^{\frac{1}{n}} \right] = \left[\log_a^{\sqrt[n]{b}} \right] = ?\end{aligned}$$

حال باید حدود $\log_2^{\sqrt[125]{b}}$ را پیدا کنیم. پس:

$$\begin{aligned}&\text{لگاریتم می گیریم: } 2^x < \sqrt{125} \quad \rightarrow \\ &\log_2^{\sqrt[125]{b}} < \log_2^{\sqrt{125}} < \log_2^4 \\ &\text{ویژگی لگاریتم: } 2 \log_2^{\sqrt[125]{b}} < \log_2^{\sqrt{125}} < 4 \log_2^{\sqrt[125]{b}} \\ &\rightarrow 3 < \log_2^{\sqrt[125]{b}} < 4 \\ &\rightarrow \left[\log_2^{\sqrt[125]{b}} \right] = 3\end{aligned}$$



نمودار یک واحد به سمت بالا منتقل می شود



برد تابع $[-1, 3]$ است.

حال اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، چون:
AH و AC و AH' مسوب در نظر بگیریم،
در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\frac{AH'}{HH'} &= \frac{AE}{EC} = \frac{3\cancel{b}}{\cancel{b}} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow AH' &= 3h \\ HH' &= 2h\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{2} DE \times AH'}{\text{مساحت ذوزنقه}} = \frac{1}{(DE + BC) \times HH'}$$

$$=\frac{\frac{1}{2} \times 3a \times 3h}{\frac{1}{2} (3a + 5a) \times 2h} = \frac{9h}{16h} = \frac{9}{16}$$

مسئله ۲.

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a+b}}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a+b}}} = \sqrt{a+b}$$

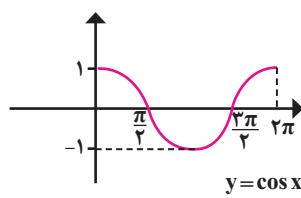
$$\Rightarrow \tan x = a + b \quad (1)$$

$$a \cos^r x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^r x} = a$$

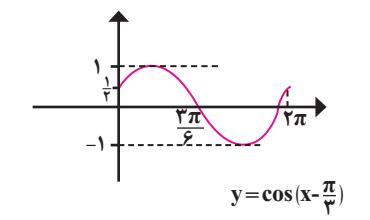
$$\Rightarrow 1 + \tan^r a = \frac{1}{\cos^r x} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 1 + a + b = a$$

$$\Rightarrow b = -1$$

مسئله ۳.

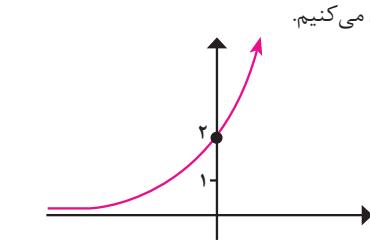


به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست

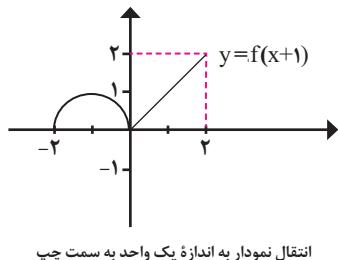


عرضها دو برابر می شوند

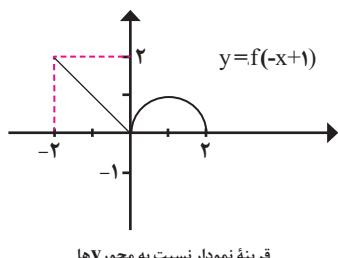
مسئله ۵. ابتدا نمودار تابع نمایی $y = 2^{x-1}-1$ را رسم می کنیم.



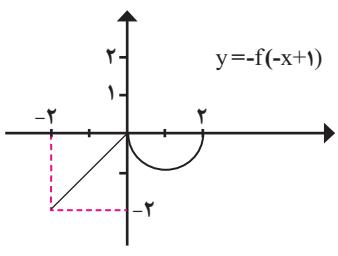
نمودار یک واحد به سمت راست منتقل می شود



انتقال نمودار به اندازه یک واحد به سمت چپ



قرینه نمودار نسبت به محورها



قرینه نسبت به محورها

مسئله ۲

$$f(x^r + x) = (x^r + x)^r$$

$$x^r + x = t \Rightarrow f(t) = t^r$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^r = 5$$

مسئله ۳

$$x^r, x \geq 1 \Rightarrow y_1 \geq 1$$

$$y_1 = x^r \Rightarrow x = \sqrt[r]{y_1}$$

$$x - 1, x < 1 \Rightarrow y_2 < 0$$

$$y_2 = x - 1 \Rightarrow x = y_2 + 1$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[r]{x}, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

مسئله ۴. می دانیم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

از طرف دیگر می توان نوشت:

$$f(x) = \frac{x}{x + [-x] + [x]}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ پس داریم: در نتیجه}$$

$$\begin{aligned} S = \frac{-b}{a} \Rightarrow S = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \log^a + \log^b = \frac{3}{2} \\ \text{ویژگی لگاریتم } \log^a \cdot \log^b = ab \Rightarrow ab = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow ab = \sqrt{5} = \lambda \\ \log^a \cdot \log^b = \log^{\lambda} = \log^{\frac{3}{2}} = 2 \log^{\frac{3}{2}} = 3 \end{aligned}$$

مسئله ۱۰

با توجه به رابطه $\log E = 11/8 + 1/5M$ که مقدار انرژی آزاد شده در زلزله و M شدت زلزله بر حسب ریشه ار است، داریم:

$$\log E_1 = 11/8 + 1/5M_1$$

$$\Rightarrow E_1 = 10^{11/8 + 1/5M_1}$$

$$\log E_r = 11/8 + 1/5M_r$$

$$\Rightarrow E_r = 10^{11/8 + 1/5M_r}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_r} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10^{11/8 + 1/5M_1}}{10^{11/8 + 1/5M_r}} \\ = 10^{11/8 + 1/5M_1 - 11/8 - 1/5M_r} \\ = 10^{1/5(M_1 - M_r)} \end{aligned}$$

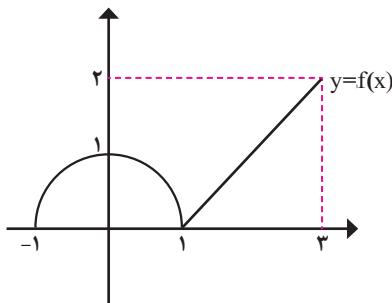
$$\begin{aligned} \lambda = 10^{1/5(M_1 - M_r)} \\ \text{از طرقین لگاریتم در متنای ۱۰ می گیریم} \\ \Rightarrow \log \lambda = \log 10^{1/5(M_1 - M_r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log \lambda = 1/5(M_1 - M_r) \\ \Rightarrow M_1 - M_r = \frac{\log \lambda}{1/5} = \frac{\log r}{1/5} \\ = \frac{3 \log 2}{1/5} = \frac{3 \times 0/3}{1/5} = 0/9 = 0/6 \end{aligned}$$

اختلاف شدت دو زلزله بر حسب ریشه ار

حسابان ۱

مسئله ۱. مراحل رسم تابع موردنظر در زیر آمده است:



مسئله ۷. ابتدا باید دامنه تابع لگاریتمی را تعیین کنیم. پس سه شرط زیر را باید بررسی کنیم:

$$4x - x^r > 0 \Rightarrow x(4 - x) > 0 \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 4$$

$$x^r - 3 > 0 \rightarrow x^r > 3 \Rightarrow |x| > \sqrt[3]{3} \rightarrow x > \sqrt[3]{3} \text{ یا } x < -\sqrt[3]{3}$$

$$x^r - 3 \neq 1 \rightarrow x^r \neq 4 \rightarrow x \neq \pm 2$$

از جوابهای به دست آمده اشتراک می گیریم:

$$D_y = (\sqrt[3]{3}, 4) - \{-2\}$$

حالا باید طولهای صحیح در دامنه را پیدا کنیم که فقط داریم: $x = 3$. سپس عرض آن را می باییم: در صورتی که جواب به دست آمده صحیح باشد، قابل قبول است.

$$f(3) = \log_{\sqrt[3]{3}} 3 = \log_{\sqrt[3]{3}} 3$$

مسئله ۸. از ویژگی استفاده می کنیم:

$$\log(xy^r) = \log x + \log y^r$$

$$= \log x + 2 \log y = 2$$

$$\log(x^r y) = \log x^r + \log y$$

$$= 2 \log x + \log y = 4$$

دستگاه دو معادله دو مجهولی تشکیل می دهیم:

$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 2 \\ 2 \log x + \log y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 2 \\ -4 \log x - 2 \log y = -8 \end{cases}$$

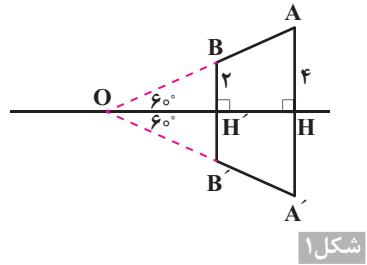
$$-3 \log x = -6 \Rightarrow \log x = 2$$

$$\Rightarrow x = 10^2 = 100 \Rightarrow x = 100$$

$$\log y = 0 \Rightarrow y = 10^0 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\begin{aligned} \log(xy^r) &= \log(100) = \log 10^2 \\ &= 2 \log 10 = 2 \end{aligned}$$

مسئله ۹. ابتدا مجموع ریشه های معادله درجه دوم داده شده را محاسبه می کنیم:



شکل ۱

در مثلث قائم‌الزاویه OBH داریم:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{BH'}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{OB} \\ \Rightarrow OB &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$AB = OA - OB = \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

می‌دانیم که بازتاب طول پاست:
 $AB = A'B' = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

بنابراین محیط چهارضلعی $AA'B'B$ برابر است با:

$$8 + 4 + 2 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 12 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$\begin{aligned} OH^r + AH^r &= OA^r \Rightarrow OH^r + 16 = \frac{64}{3} \\ OH^r &= \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3} \Rightarrow OH = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

در مثلث OAH بنا به قضیة تالس داریم:

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{BH'}{AH} \Rightarrow \frac{OH'}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{4}$$

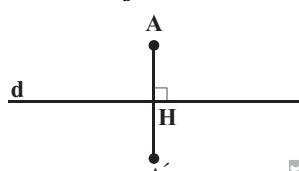
$$\Rightarrow OH' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow HH' = OH - OH' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{AA'B'B} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \left(4 + 8 \right) = 4\sqrt{3}$$

مسئله ۲. ابتدا معادله خط AA' را می‌نویسیم.

$$m_{AA'} = -\frac{1}{m_d} = -\frac{2}{3}$$

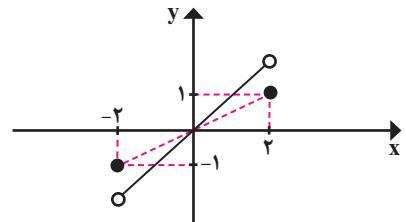


شکل ۲

$$\begin{aligned} \log 2 + \log 3 + \log 2^r & \\ \log 2 + \frac{1}{r} (\log 3 \times 2) & \\ = \frac{\log 2 + \log 3 + 2 \log 2}{\log 2 + \frac{1}{r} (\log 3 + \log 2)} & \\ = \frac{3 \log 2 + \log 3}{2 \log 2 + \frac{1}{r} \log 3} & \\ = \frac{3 \log 2 + \log 3}{\frac{1}{r} (3 \log 2 + \log 3)} = 2 & \end{aligned}$$

مسئله ۷

رسم نمودار تابع به صورت زیر است:



مسئله ۵. عده‌ای $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ معکوس یکدیگرند (زیرا حاصل ضربشان برابر واحد است). فرض کنیم: $A = (2 - \sqrt{3})^x$, پس: $A + \frac{1}{A} = \frac{1}{3}$.

$$A^r - \frac{1}{3}A + 1 = 0$$

$$3A^r - A + 3 = 0$$

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 36}}{6} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 3 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{r}} = 3$$

$$\Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = 9$$

$$(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = \frac{1}{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{r}} = \frac{1}{3}$$

$$(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{9}$$

مسئله دو جواب دارد.

مسئله ۸

$$\log_v(x^r + x + 1)(x - 1) = 1$$

$$(x^r + x + 1)(x - 1) = v$$

$$x^r - 1 = v \Rightarrow x^r = v$$

$$x = 2$$

مسئله ۹

$$2 \log 4 = \log v^x + \log \left(\frac{1}{v}\right)^y$$

$$\log 4^r = \log v^x \times \left(\frac{1}{v}\right)^y$$

$$16 = \frac{v^x}{v^y} \Rightarrow v^{x-y} = 2^4$$

$$x - y = 4 \Rightarrow x = y + 4$$

مسئله ۱۰

$$\log 10 = \log 2 \times 5 \Rightarrow 1 = \log 2 + \log 5$$

$$\Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{699}$$

$$\log 5^{100} = 200 \cdot \log 5 \approx 200 \cdot \frac{1}{699} = 139 / 8$$

$$\log 3^{777} = 777 \cdot \log 3 \approx 777 \cdot \frac{1}{477} = 130 / 2$$

بنابراین: $\log 5^{100} > \log 3^{777}$ و چون تابع

لگاریتم یک به یک است، پس: $5^{100} > 3^{777}$.

مسئله ۶. (با فرض $x \neq 0$) فرض $5^x = 1$, یعنی با فرض

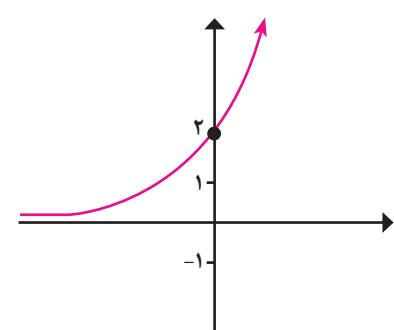
$$(x \neq 0)$$

$$f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x - 1} = \frac{(5^x + 1)(5^x - 1)}{5^x - 1} = 5^x + 1$$

تابع f در $x = 0$ تعریف نمی‌شود.

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = (0, +\infty) - \{2\}$$



۳ هندسه

مسئله ۱. بازتاب پاره خط AB را به دست

می‌آوریم و $A'B'$ می‌نامیم. امتداد AB و $A'B'$ یکدیگر را در O قطع می‌کنند.

در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{AO}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

پس مساحت مثلث MGB برابر است با:

$$S_{MGB} = \frac{1}{2} GB \times MG \times \sin 12^\circ$$

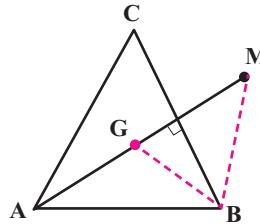
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2$$

ب) اگر تجانس را معکوس فرض کنیم (شکل ۶)، داریم:

$$GM = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$S_{GMB} = \frac{1}{2} GB \times GM \times \sin 6^\circ$$

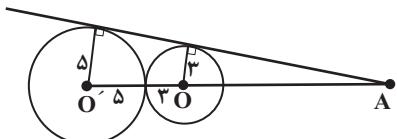
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2$$



شکل ۶

مسئله ۶. الف) اگر دو دایره مماس خارج باشند (شکل ۷)، نقطه $k = \frac{5}{3}$ برخورد مماس مشترک خارجی و خطالمرکزین، مرکز تجانس است:

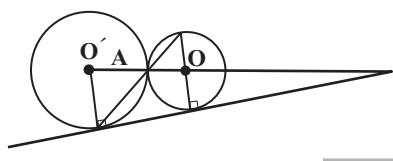
$$\frac{OA}{OA+8} = \frac{3}{5} \Rightarrow OA = 12$$



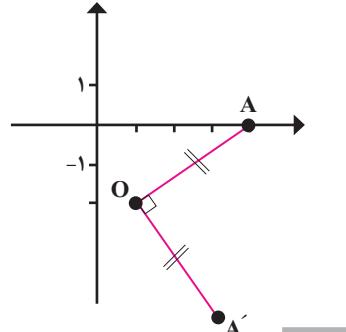
شکل ۷

فاصله A تا مرکز O' برابر است با:
 $OA' = O'O + O'A = 2$.

ب) اگر تجانس معکوس را در نظر بگیریم (شکل ۸)، مرکز تجانس معکوس دو دایره نقطه تماس دو دایره است. بنابراین: $AO = 3$ و $.AO' = 5$



شکل ۸



شکل ۹

و معادله خط برابر است با:

$$y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

محل برخورد خطوط d و AA' را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ 2y - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(-\frac{43}{13}, \frac{15}{13}\right)$$

اگر مختصات A' را با (x', y') نمایش دهیم، H وسط A و A' است.

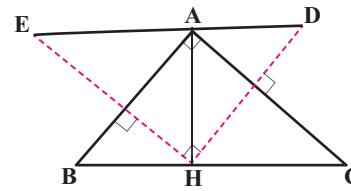
$$H = \left(-\frac{43}{13}, \frac{15}{13}\right) = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{112}{13} \\ y = \frac{43}{13} \end{cases}$$

$$A' = \left(-\frac{112}{13}, \frac{43}{13}\right)$$

مسئله ۳. در مثلث قائم الزاویه ABC (شکل ۳) داریم:

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$$

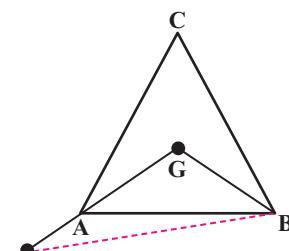


شکل ۳

بازتاب نقطه H نسبت به ضلع AC نقطه D است. بنا به تعریف، بازتاب خط AD عمودمنصف HD است. پس: $AD = AH = \frac{8}{5}$ و $AH = AD$. به همین ترتیب: $AE = AH = \frac{8}{5}$ و $DE = AE - AD = \frac{8}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$. بنابراین:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$GB = \frac{2}{3} \times m = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$



شکل ۵

الف) از طرف دیگر در تجانس مستقیم، تجانس G نسبت به نقطه A نسبت به نقطه M است. بنابراین:

$$MG = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

مسئله ۴. نقطه A را نسبت به O. 270° دوران می دهیم و دوران یافته آن را A' می نامیم. چون $A' \perp OA$: پس $\angle OA' = 90^\circ$. اکنون معادله خط OA' را می نویسیم:

$$m_{AO} = \frac{0+2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

$$m_{AO'} = -\frac{3}{2}, y+2 = -\frac{3}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

مسئله ۱۰. از M بر AC عمود می‌کنیم و به اندازه خودش ادامه می‌دهیم تا M' به دست آید (شکل ۱۴). بازتاب M نسبت به ضلع AC است. محل برخورد' MM' با AC را O می‌نامیم. $OM' = 2$

در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع و نیم‌ساز یکی هستند. پس هر نقطه روی نیم‌ساز از دو ضلع به یک فاصله است، یعنی:

$$MO = ME = 2$$

در مثلث قائم‌الزاویه AMO داریم: $MM' = 4$. تصویر' M' نسبت به ضلع AB را به دست می‌آوریم و "M" می‌نامیم. "M" بازتاب' M' نسبت به AB است.

"M" را به N وصل می‌کنیم تا AB را در' قطع کند.

"M" را به H' وصل می‌کنیم تا M'H' ضلع AC را در نقطه H قطع کند. کوتاه‌ترین مسیر است، زیرا:

$$MH = HM', H'M' = M'H'$$

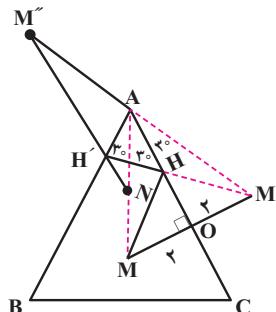
$$MH + HH' + H'N$$

$$= HM' + HH' + H'N$$

$$= (HM' + HH') + H'N$$

$$H'M' = M'H'$$

$$= M''H' + H'N = M''N$$



شکل ۱۴

حال کافی است طول N' را حساب کنیم. داریم: $AMM'' = AM' = AM$; زیرا مثلث متساوی‌الاضلاع است: $AM'' = AM' = 4$. در مثلث M''AN بنا به قضیه کسینوس داریم:

$$M''N' = AN' + AM'' -$$

$$2(AN)(AM'') \cos 12^\circ.$$

$$= (2)^\tau + (4)^\tau - 2(2)(4) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2 + 8 = 28$$

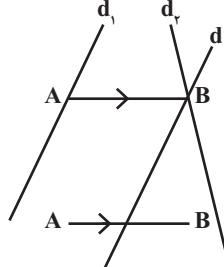
$$M''N = 2\sqrt{7}$$

راه دوم: مساحت هشت‌ضلعی براساس مربع محیط بر آن برابر است با:

$$S = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$= 2(4)^2(\sqrt{2} - 1) = 32(\sqrt{2} - 1)$$

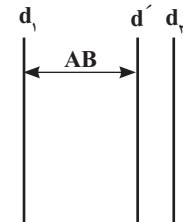
مسئله ۹. دو خط d_1 و d_2 و پاره‌خط a را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱). خط d_1 را به اندازه برداری موازی و مساوی \overline{AB} منتقل می‌کنیم. انتقال یافته آن را d'_1 می‌نامیم. محل برخورد' d'_1 با d_2 را B می‌نامیم. حال نقطه B را به اندازه a و به موازات آن و در جهت خلاف آن منتقل می‌کنیم. محل برخورد' d'_1 با d_2 را A می‌نامیم. AB پاره‌خط موردنظر است.



شکل ۱۱

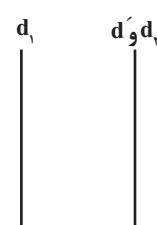
اگر d_1 و d_2 متقاطع باشند، همانند شکل ۱۱، مسئله یک جواب دارد.

اگر d_1 و d_2 موازی باشند و فاصله آن‌ها بیشتر از AB باشد (شکل ۱۲) مسئله جواب ندارد.



شکل ۱۲

اگر d_1 و d_2 موازی باشند و فاصله آن‌ها مساوی AB باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. اگر d_1 و d_2 موازی باشند و فاصله آن‌ها کمتر از AB باشد، مسئله جواب ندارد.



شکل ۱۳

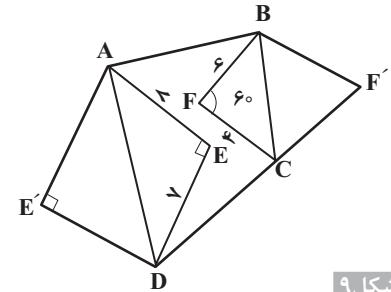
مسئله ۷. بازتاب نقطه F را نسبت BC به دست می‌آوریم (شکل ۹). بنابر ویژگی بازتاب داریم: $FC = F'C$, $BF = BF'$. پس نقطه F به F' تصویر می‌شود. مساحت چهارضلعی $BF'CF$ را به دست می‌آوریم.

$$BFC \cong BF'C \Rightarrow S_{BFC} = S_{F'CB}$$

$$S_{BFC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$S_{BF'CF} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{AEBE'} = 2S_{AED} = 2\left(\frac{1}{2}(8 \times 7)\right) = 56$$



شکل ۹

مقدار مساحت اضافه شده برابر است:

$$56 + 12\sqrt{3}$$

مسئله ۸. راه اول: خط $x = 4$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم می‌کنیم و درجه دوران می‌دهیم. اگر همین طور دوران را ادامه دهیم، به یک هشت‌ضلعی منتظم رسیم که مساحت آن برابر است با:

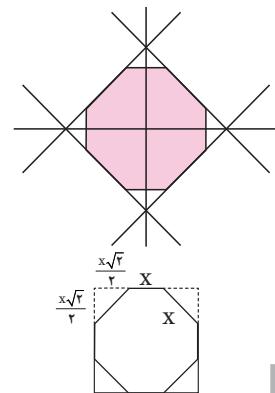
$$S_{\text{اعلی}} = S_{\text{مربع}} - 4S_{\text{مثلث}} = 16 - 4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x(1 + \sqrt{2}) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{1 + \sqrt{2}} = 4(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow S_{\text{اعلی}} = 16 - (16(2 + 1 - 2\sqrt{2}))$$

$$= 16(1 - 3 + 2\sqrt{2}) = 16(2\sqrt{2} - 2)$$

$$= 22(\sqrt{2} - 1)$$



شکل ۱۰

آمار و احتمال

مسئله ۱. (الف) در پرتاب یک تاس، مضربهای ۳ عدددهای ۲ و ۶ هستند. در حالتی که تاس ۱ یا ۴ بیاید، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم این دو عدد بر ۳ برابر با ۱ است. چنانچه تاسی ۲ یا ۵ بیاید، آن‌گاه برابر با ۰ است. چنانچه تاسی ۳ یا ۶ بیاید، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم این دو عدد بر ۳ برابر با ۲ است. به کمک نمودار درختی زیر می‌توان فضای نمونه این پدیده تصادفی را نوشت:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{3, 6\} \times \{1, 2, 3, \dots, 10\} \\ A_2 &= \{1, 4\} \times \{1, 2, 3, \dots, 6\} \\ A_3 &= \{2, 5\} \times \{1, 2, 3, \dots, 8\} \\ S &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \end{aligned}$$

فضای نمونه این آزمایش تصادفی دارای ۴۸ عضو است:

$$n(S) = 2 \times 10 + 2 \times 6 + 2 \times 8 = 48$$

(ب) برای محاسبه احتمال آنکه هر دو عدد زوج بیانند، دو دیدگاه وجود دارد:

دیدگاه اول: استفاده از فرمول کلاسیک احتمال:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

قبل از استفاده از این فرمول باید مطمئن شویم که فضای نمونه هم‌شانس است. به این منظور باید احتمال زوج و فرد بودن را برای تاس، کیسه مهره‌ها و دستگاه چرنده محاسبه کنیم. می‌دانیم که در پرتاب یک تاس همگن داریم:

$$P(\text{فرد}) = P(\text{زنگ}) = \frac{1}{2}$$

مسئله ۲. چنانچه از کیسه‌ای که روی مهره‌های آن شماره‌های ۱ تا ۹ چاپ شده باشد، یک مهره به تصادف خارج کنیم، خواهیم داشت:

$$P(\text{فرد}) = \frac{5}{9} ; P(\text{زنگ}) = \frac{4}{9}$$

چون احتمال زوج و فرد آمدن یکسان نیست، بنابراین فضای نمونه هم‌شانس نیست و در این حالت نمی‌توان از دستور کلاسیک احتمال استفاده کرد. بنابراین فقط می‌توان با استفاده از دستور احتمال کل مسئله را حل کرد.

$$P(\text{زوج}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} ; P(\text{فرد}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

همچنین در دستگاه چرنده، ۴ عدد زوج و ۴ عدد فرد داریم، پس:

$$P(\text{زوج}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} ; P(\text{فرد}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که احتمال زوج یا فرد بودن در این فضای نمونه یکسان است. پس فضای نمونه هم‌شانس است. در نتیجه می‌توان از دستور کلاسیک احتمال استفاده کرد. بیشامد

مسئله ۳.

$$\begin{cases} P(1) = P(3) \\ P(2) = P(5) = P(6) = 3P(3) \\ P(4) = \frac{2}{9} \end{cases}$$

فرض کنیم: $x = P(3)$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} P(1) = P(3) = x \\ P(2) = P(5) = P(6) = 3x \\ P(4) = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^6 P(a_i) = 1$$

$$\Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$+ P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 3x + x + \frac{2}{9} + 3x + 3x = 1$$

$$\Rightarrow 11x = 1 - \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{7}{99}$$

بنابراین داریم:

$$P(1) = P(3) = \frac{7}{99}$$

$$P(2) = P(5) = P(6) = \frac{21}{99}$$

$$p(\{1, 2, 4\}) = p(1) + p(2) + p(4)$$

$$= \frac{7}{99} + \frac{21}{99} + \frac{2}{99} = \frac{30}{99}$$

مسئله ۴. اگر p_1 را احتمال برنده شدن A و q_1 را احتمال بازنشده شدن A در نظر بگیریم، داریم:

$$p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3}$$

چنانچه p_1 را احتمال برنده شدن B و q_2 را احتمال بازنشده شدن B در نظر بگیریم، داریم:

$$p_2 = \frac{3}{4}, q_2 = \frac{1}{4}$$

برای محاسبه احتمال آنکه A برنده شود،

حالاتی متفاوتی را داریم:

حالت ۱. در پرتاب اول شخص A زوج بیاورد:

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

حالت ۲. ابتدا شخص A فرد و شخص B هر

دو سکه‌اش پشت و سپس شخص A زوج بیاورد:

$$q_1 \times q_2 \times p_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

می‌دانیم پیشامدهای مذکور از هم مستقل هستند، به همین سبب احتمال‌های آن‌ها را درهم ضرب کرده‌ایم.

آنکه هر دو عدد زوج باشند، برابر است با:

$$B = \{(6, 2), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (6, 10),$$

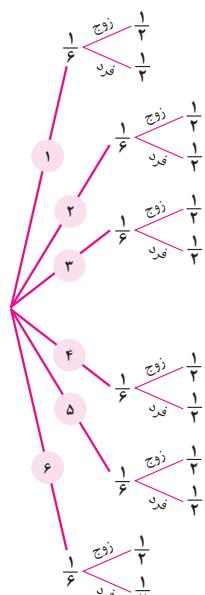
$$(4, 2), (4, 4), (4, 6),$$

$$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8)\}$$

بنابراین داریم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

دیدگاه دوم: استفاده از دستور احتمال کل



$$P(\text{زوج}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مسئله ۲. چنانچه از کیسه‌ای که روی مهره‌های آن شماره‌های ۱ تا ۹ چاپ شده باشد، یک مهره به تصادف خارج کنیم، خواهیم داشت:

$$P(\text{فرد}) = \frac{5}{9} ; P(\text{زنگ}) = \frac{4}{9}$$

چون احتمال زوج و فرد آمدن یکسان نیست،

بنابراین فضای نمونه هم‌شانس نیست و در این

حالت نمی‌توان از دستور کلاسیک احتمال

استفاده کرد. بنابراین فقط می‌توان با استفاده از

دستور احتمال کل مسئله را حل کرد.

$$P(\text{زوج}) = P(\{2\}) \times P(\text{زنگ}) = \frac{4}{9}$$

$$+ P(\{4\}) \times P(\text{زنگ}) = \frac{4}{9}$$

$$+ P(\{6\}) \times P(\text{زنگ}) = \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{54}$$

$$\Delta OAO': \widehat{OAO'} = \pi - \alpha$$

$$\Delta : OAO': \cos(\pi - \alpha) = \frac{R^r + R'^r - d^r}{2RR'}$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow R^r + R'^r = d^r$$

شرط عمودبرهم بودن دو دایره

$$O \begin{vmatrix} a \\ 2 \\ b \\ 2 \end{vmatrix}, O' \begin{vmatrix} a' \\ 2 \\ b' \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow d^r = OO'^r = \left(\frac{a-a'}{2} \right)^r + \left(\frac{b-b'}{2} \right)^r$$

$$R^r = \frac{a^r + b^r - 4c}{4},$$

$$R'^r = \frac{a'^r + b'^r - 4c'}{4}$$

$$C \perp C' \Leftrightarrow R^r + R'^r = d^r$$

$$\Leftrightarrow aa' + bb' = 4(c + c')$$

$$\text{مسئله ۷.} \quad \text{چون: } F, P \text{ پس: } D \begin{vmatrix} 4 \\ y \end{vmatrix}$$

$$OA = \lambda$$

$$\Rightarrow a = \lambda, DF = y, DF' = 16 - y$$

$$F'F^r + FD^r = F'D^r$$

$$\Rightarrow 64 + y^r = (16 - y)^r$$

$$\Rightarrow y = 6 \Rightarrow D \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

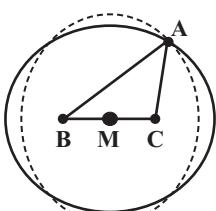
بازتابیش نور از F' (کانون دیگری پیضی) می‌گذرد.

$$\text{پس با توجه به } D \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \end{vmatrix} \text{ داریم:}$$

$$\text{معادله بازتابیش: } F'D = F'D^r \Rightarrow 3x - 4y + 12 = 0$$

مسئله ۸.

پاره خط $BC = 4$ را رسم می‌کنیم. $AB + AC = 12 - 4 = 8$ پس مکان هندسی رأس A روی بیضی به کانون‌های B و C و مقدار ثابت 8 قرار دارد. اکنون دایره‌ای به مرکز M و به شعاع $3/5$ رسم می‌کنیم تا بیضی را در A قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.



مسئله ۲.

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^r + b^r}} = 6 \Rightarrow \frac{|3x - 4y + 2|}{5} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 28 = 0 \\ 3x - 4y + 32 = 0 \end{cases}$$

مسئله ۳. فرض کنیم $x^r + y^r + ax + by + c = 0$ معادله دایره باشد.

$$A \in \text{دایره} \Rightarrow 1 + 9 + a + 3b + c = 0$$

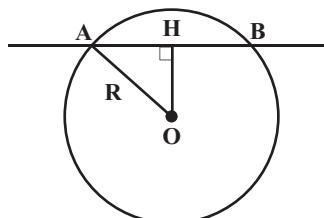
$$B \in \text{دایره} \Rightarrow 16 + 4 + 4a + 2b + c = 0$$

$$C \in \text{دایره} \Rightarrow 9 + 1 - 3a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^r + y^r - 2x + 4y - 20 = 0$$

مسئله ۴.



$$O \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, R = 5 \Rightarrow OH = \frac{|3 - 8 - 14|}{\sqrt{9 + 16}} = 3$$

$$AB = 2 \times AH = 2\sqrt{R^r - OH^r} = 2\sqrt{25 - 9} = 8$$

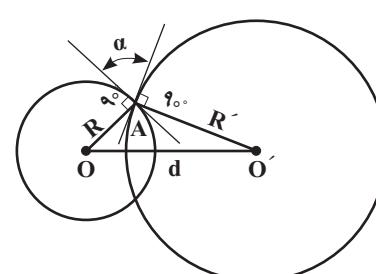
مسئله ۵.

$$\Delta : C - C' = 0$$

$$\Rightarrow \Delta : (x^r + y^r + x + y - 4) - (x^r + y^r - 2x + 3y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta : 3x - 2y - 1 = 0$$

مسئله ۶.



حالت ۳. ابتدا شخص A فرد و شخص B هر

دو سکه‌اش پشت و سپس در مرحله دوم بازی،

هر دو بازنده و در مرحله سوم بازی شخص A

زوج بیاورد:

$$q_1 \times q_2 \times q_1 \times q_2 \times p_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

و به همین ترتیب بازی ادامه پیدا می‌کند.

برای اینکه شخص A برنده شود، باید

حالت‌های ۱ یا ۲ یا ۳ یا... رخ دهد. بنابراین داریم:

$$P(A) = p_1 + q_1 q_2 p_1$$

$$+ q_1 q_2 q_1 q_2 p_1 + q_1 q_2 q_1 q_2 q_1 q_2 p_1 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \dots$$

ملحوظه می‌کنیم که حاصل جمع بالا،

مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول

$$q = \frac{1}{8} \text{ است. بنابراین داریم: } a = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$$

مسئله ۵.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) | C &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C))}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A | C) + P(B | C) - P[(A \cap B) | C] \end{aligned}$$

هندسه ۳

مسئله ۱. فرض کنیم $A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ نقطه‌ای از مکان باشد.

فاصله A از $d' = d$ فاصله A از

$$\Rightarrow \frac{|3x + 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5x + 12y + 19|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$\Rightarrow 13(3x + 4y + 5) = \pm 5(5x + 12y + 19)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x - 4y - 15 = 0 \\ 4x + 7y + 10 = 0 \end{cases}$$

حسابان ۲

مسئله ۱. چون حد صورت برابر -2 است، پس حد مخرج باید از سمت راست به صفر میل کند:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + ax + b = 0 \\ 4 + 2a + b = 0 \quad (1)$$

از طرف دیگر، مخرج همواره باید یک عبارت به توان 2 باشد تا عالمت آن مشبّت باشد. برای این کار باید دلتای مخرج برابر صفر شود تا ریشه مضاعف داشته باشد و $x=2$ ریشه مضاعف مخرج باشد.
بنابراین:

$$-\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4 \\ a = -4 \Rightarrow b = 4$$

مسئله ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

ب. حد صورت یک عدد مثبت است و حد مخرج در همسایگی چپ $\frac{3\pi}{4}$ از چپ به صفر نزدیک می‌شود. لذا حد کسر فوق برابر $-\infty$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx - 1 - x(2x+1) + 2x+1}{2x+1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a-2)x^2 + (b+1)x}{2x+1} = 3$$

باید صورت و مخرج هم درجه باشند. چون مخرج از درجه یک است، پس ضریب x^2 یعنی $a-2$ برابر صفر است. از آجا داریم: $a=2$ از طرف دیگر: $\frac{b+1}{2} = 3$. لذا: $b=5$.

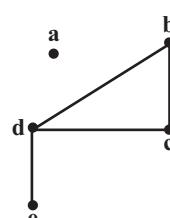
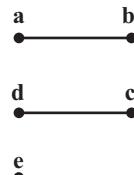
$$f(x) = \frac{(a^2 + 1)x^2 + 4}{x^2 + ax + 25} \quad \text{برای آنکه تابع} \\ \text{ فقط یک جانب قائم داشته باشد، باید مخرج} \\ \text{کسر ریشه مضاعف داشته باشد.}$$

$$\Delta = a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a = \pm 10$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a^2 + 1)x^2 + 4}{x^2 + ax + 25} = a + \\ \Rightarrow a = 10$$

مسئله ۵. وقتی $c^- \rightarrow v$ آنگاه: v^+ یعنی مخرج عبارت به سمت صفر نزدیک می‌شود و یا به عبارت دیگر بسیار کوچک می‌شود. در نتیجه کل کسر بسیار بزرگ می‌شود. چون مخرج

الف) دو زیرگراف فرآگیر G عبارتند از:



ب) چون مجموع درجات رأس‌های هر گراف از مرتبه p ، به علاوه مجموع درجات رأس‌های گراف مکملش برابر است با مجموع درجات رأس‌های گراف K_p ، پس با توجه به اینکه G گرافی از مرتبه $p=5$ است، داریم:

$$\text{مجموع درجات رأس‌های } K_p = p(p-1)$$

$$\begin{aligned} p &= 5 \\ \Rightarrow p(p-1) &= 5(5-1) = 20 \\ \text{مجموع درجات رأس‌های } G &= 10 + \underbrace{G}_{x} = 10 + x \\ \Rightarrow 20 &= 10 + x \Rightarrow x = 10 \end{aligned}$$

مسئله ۶. تعداد یال‌ها در گراف کامل K_p از رابطه $e(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ به دست می‌آید، بنابراین:

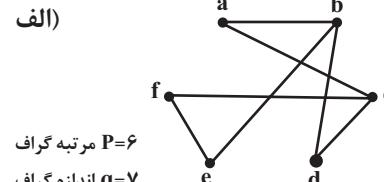
$$45 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p = 10 \\ \Rightarrow \Delta(K_{10}) = \delta(K_{10}) = 9$$

مسئله ۷. می‌دانیم مکمل گراف K_p گراف تهی است. پس اگر بخواهیم از K_p یال حذف کنیم تا گراف تهی به دست آید، باید همه یال‌هایش را حذف کرده باشیم. بنابراین:

$$15 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p = 6 \\ \text{ولذا مجموع درجات رأس‌ها به علاوه} \\ \text{مرتبه این گراف برابر است با: } 15+6=21$$

ریاضیات گستته

مسئله ۱.



مرتبه گراف $P=6$

اندازه گراف $q=7$

رأس‌های c و f با e مجاورند (ب)

مجموع درجات رئوس (ت)

مسئله ۲

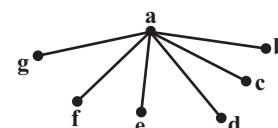
$$\text{الف) } E(G) = \{ab, af, ae, bc, cd, de, ec\}, \\ V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$N_G(e) = \{d, c, a\},$$

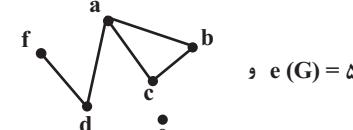
$$N_G(g) = \{\}, N_G(f) = \{a\}$$

$$(p) \delta(G) = 0, \Delta(G) = 3$$

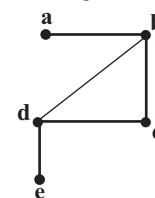
مسئله ۳. با توجه به تعریف، مجموعه همسایه‌های رئوس گراف G به شکل زیر رسم می‌شود:



مسئله ۴. با توجه به تعریف مجموعه همسایه‌ها برای هر رأس داریم:



مسئله ۵. با توجه به گراف G یعنی:





دانش پژوهی
دانش پژوهی

ب مجله‌های رشد آشنا شوید

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تدبیری منتشر می‌شود:

مجله‌های دانش آموزی

برای دانش آموزین پیش‌دستی و پایه‌ی ابتدایی
برای دانش آموزان پایه‌ی دو و سوم درجه‌ی ابتدایی
رشا

مجله‌های هنری

برای داشتن اعزام دوره‌ی اموزش موسسه‌دهم
رشا

برای داشتن اعزام دوره‌ی اموزش موسسه‌دهم
رشا

مجله‌های دانش آموزی

کسر از هر عدد مثبتی کوچکتر است، پس کل
کسر از هر عدد مثبتی بزرگتر است و در نتیجه:

$$\lim_{v \rightarrow c^-} m = +\infty$$

مسئله ۶. عبارت فوق بدین معنی است که هرگاه
تصمیم‌گیریم از معدنی که در حال استخراج
تن مس از آن هستیم، یک تن دیگر استخراج کنیم،
تقریباً هزینه‌اضافی ۱۰۰۰۰۰ تومان را باید پردازیم.

مسئله ۷.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

در حقیقت، $|x|$ و مشتق تابع f در

تعریف نمی‌شود. زیرا:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1$$

مقدار حد راست و حد چپ در $x=0$ برابر
نیست. پس حد موجود نیست.

مسئله ۸.

تومان ۱۵۰۰ = ۱۵۰۰ (الف)

$$c'(x) = 20 + \frac{x}{5} \text{ هزینه نهایی (ب)}$$

$$c(x) = \frac{c(20)}{x} = \frac{c(20)}{20} = \text{هزینه متوسط (پ)}$$

$$\frac{1940}{20} = 97 \text{ تومان}$$

$$c(21) - c(20) = 24 / 1 \text{ تومان}$$

مسئله ۹. از $x=4$ نتیجه می‌گیریم:
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 4$. از طرف دیگر:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + g(2x) = 2x^2$$

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}\right) + 2g'(2x) = 4x$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{1}{2}f'(1) + 2g'(4) = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(4) + 2g'(4) = 8 \Rightarrow g'(4) = 3$$

$$\text{مسئله ۱۰. } S'(t) = -5 \times 3 \sin(3t - 0 / 4)$$

$$\Rightarrow -15 \sin(3t - 0 / 4) \text{ معادله سرعت}$$

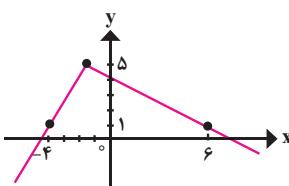
$$S'(t) = 0 \Rightarrow \sin(3t - 0 / 4) = 0$$

$$3t - 0 / 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

ریاضی ۳

مسئله ۱. ابتدا نقاط مشخص شده روی نمودار را می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع g ، نقطه‌های نمودار تابع f این تغییرات را دارند: عرض‌ها دو برابر می‌شوند، طول‌ها دو برابر می‌شوند، و به عرض‌ها یک واحد اضافه می‌شود.

x	y	x	y	x	y	x	y
-2	0	-2	0	-4	0	-4	1
-1	2	-1	4	-2	4	-2	5
3	0	3	0	6	0	6	1



مجله‌های بزرگ‌سال تخصصی:
به صورت فصلنامه و سه‌ماهانه در سال تدبیری منتشر می‌شود:

مجله‌های بزرگ‌سال عمومی:
به صورت ماهانه و هشت شماره در هر سال تدبیری منتشر می‌شود:

- ❖ رشد آموزش ابتدایی
- ❖ رشد تکنولوژی آموزش
- ❖ رشد مدیریه فردی
- ❖ رشد علم

مسئله ۲. از نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که:
در نتیجه: $a=2$. از طرف دیگر، دوره
تناوب تابع در شکل برابر ۶ است، بنابراین:

$$T = 6 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \rightarrow |b| = 2$$

$$\rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به آنکه نمودار اصلی تابع سینوس در طرف راست محور y ابتدا ماقزیم دارد و سپس مینیمم، و این نمودار نیز به این صورت است، بنابراین: $b = \frac{1}{3}$.

مسئله ۳

$$\text{(الف)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{(ب)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-9}{x^2-4\sqrt{2x-5}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-9}{x^2-4\sqrt{2x-5}-2} \times \frac{\sqrt{2x-5}+2}{\sqrt{2x-5}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x-5}+2)}{4x-4-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x-5}+2)}{3(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(\sqrt{2x-5}+2)}{3} = \frac{6 \times 4}{3} = 8$$



مجله‌های بزرگ‌سال تخصصی برای معلمان، مدیران، مربیان، و کارشناسان کرومه‌دانشگاه ارسی و... همچنین و متشر می‌شود:

- ❖ مفتا: تهران، خیابان ایشان‌شهر شملی، ساختمان شماره ۴۰
- ❖ امورش و بروش، پلاک ۲۶۰
- ❖ تلفن و نمایه: ۰۲۱-۷۷۷۰۷۷۷۰

گلستان

نموده اشتراک مجلات و شد به در روش زیر:
الف. مراجعه به وگاه مطبوعات از www.roshnmagi.com و ثبت نام
در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی باشند.
ب. واپرس مبلغ اشتراک بدشماره حساب ۰۰۰۳۶۹۳۶۹۳ پاکت تغییرات، شعبه
سمراء آرامشیان کد ۹۵۳۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ پاکت تغییرات، شعبه
هرمراه بروک تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی از طریق دونکار

<p>◆ عنوان مجلدات در حواسی:</p> <p>.....</p>	<p>◆ نام و نام خانوادگی:</p> <p>.....</p>	<p>◆ تاریخ تولد:</p> <p>.....</p>	<p>◆ میلان تصدیقات:</p> <p>.....</p>
<p>◆ تلقنی:</p> <p>.....</p>	<p>◆ شهنشاہی کامل پستی:</p> <p>.....</p>	<p>◆ استان:</p> <p>.....</p>	<p>◆ خیابان:</p> <p>.....</p>
<p>◆ پلاک:</p> <p>.....</p>	<p>◆ شماره سیاست:</p> <p>.....</p>	<p>◆ شماره فحیش یا لایک:</p> <p>.....</p>	<p>◆ مبلغ برداختی:</p> <p>.....</p>
<p>◆ اکر قبیل مشترک مجهد رشد پوده بید نهاده اشتراک خود را بروزرسانی:</p> <p>.....</p>	<p>◆ اهداف:</p> <p>.....</p>		

- ◆ هزینه اشتراک سالانه محلات عمومی رشد (هشت شهار): ٠٠٠٠٥٤ دیال
- ◆ هزینه اشتراک سالانه محلات تخصصی (رشد آسه شهار): ٠٠٠٢٣٦ دیال

مسئلة

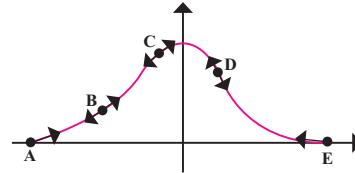
$$g(f(x)) = g(r^x) = \frac{-r}{r^x + r}$$

حد این تابع را وقتی $x \rightarrow 0^+$ می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{-3}{\frac{1}{2^x} + 3} \sim \frac{-3}{2^{+\infty} + 3} \sim \frac{-3}{+\infty} = 0$$

مسئله ۵. خطهای مماس را در نقطه‌های C، D

E، B، A کیمی رسم می کنیں:



شیب خطهای مماس در نقطههای A، B و C ثابت است.

خط مماس در نقطه B و پس از آن در نقطه A به

$m_B > m_A > m_C$ محورها متمایل ترند، بنابراین:

شیب خطهای مماس در نقطه‌های L و E منفی

سی و سه مماس در مسند نا بد مسحور چهار ستمیل نزدیکی داشتند.

$$m_B \geq m_A \geq m_C \geq m_D \geq m_{B'} \geq m_{A'} \geq m_{C'} \geq m_{D'}$$

1. *Antarctic* (with *Antarctic*) *Antarctic* (with *Antarctic*)

٧. بـ صـرـصـ

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = mh + \delta$$

حد سمت چپ تساوی، وقتی $\rightarrow h$ به

تعريف مشتق در نقطه $x=2$ تبدیل می‌شود. پس

ز طرفین، حد در نقطه $h=0$ می‌گیریم:



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>