

پژمان

ریاضی



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



رشد

دوره بیست و هشتم

شماره ۱



۱۱۱

پاییز ۱۳۹۷

۸۰ صفحه

۲۰۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پيامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



↑ کاربرد ریاضی در باستان شناسی ♦ نقش ریاضی در حل مسائل واقعی زندگی ♦ دوره همی ریاضی
♦ میز و صندلی ها را به سمت سود هل دهید! ♦ باز خوانی مسئله زمین پدر بزرگ ♦ مسابقه عکاسی ریاضی

ملا محمد باقر بن زین العابدین یزدی

در پایان باب هفتم فصلی در استخراج عددهای زائد و ناقص، و فصلی در استخراج «عددهای متحاب» نوشته است. بهتر است بدانیم، دو عدد a و b را متحاب گوییم هرگاه مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد a برابر با عدد b و مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد b برابر با عدد a باشد. برای مثال، عددهای ۲۸۴ و ۲۲۰ را در نظر بگیرید. مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۸۴ برابر با عدد ۲۲۰ است و مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۲۰ برابر با ۲۸۴ است. در ادامه هم فصلی در بیان نسبت‌ها آمده است.



از آثار دیگر محمدباقر یزدی می‌توان به این موارد اشاره کرد:

۱. شرح مقاله‌العاشره من (تحریر) اصول اقلیدس
۲. حاشیه بر تحریر الکره و الاسطوانه
۳. فتوحات غیبیه که به فارسی نوشته شده و در آن شرحی بر «اعمال هندسی» ابوالوفای بوزجانی آمده و نسخه خطی آن در کتابخانه «آستان قدس رضوی» موجود است.
۴. شرح کتاب الاشکال الکریه
۵. حاشیه بر اکر تاووذوسیوس

ایشان از ریاضی‌دانان دوره صفویه و معاصر با شاه عباس اول است. از تاریخ تولدش اطلاع دقیقی در دست نیست، ولی با توجه به نوشته میرزا رضی مستوفی، در کتاب «ربیع‌المنجمین»، تاریخ وفاتش بعد از ۱۰۶۹ هجری قمری بوده است. زیرا او در این کتاب از محمد باقر یزدی با دعای «رحمة الله علیه» یاد کرده است.

مهم‌ترین اثر محمدباقر یزدی کتاب «عیون الحساب» است که به عربی نوشته شده و به نظر می‌رسد به تقلید از کتاب «مفتاح الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی به نگارش درآمده است. این کتاب در هفت باب نوشته شده است.

عیون الحساب توسط محمدباقر بن میراسماعیل خاتون آبادی به زبان فارسی ترجمه شده و نسخه خطی این ترجمه در کتابخانه مجلس موجود است. نوه محمدباقر یزدی که نام کاملش محمدباقر بن محمدحسین بن محمدباقر یزدی است و به او هم «محمدباقر» می‌گفتند، در سال ۱۱۰۶ هجری قمری شرحی به زبان عربی بر عیون الحساب جدش نوشته و آن را «کفایة اللباب فی شرح مشکلات عیون الحساب» نامیده است. ظاهراً نسخه اصل کتاب «کفایة اللباب» به دست نوه محمدباقر یزدی در اختیار آقای ابوالقاسم قربانی بوده است. هفت باب نوشته شده در عیون الحساب عبارت‌اند از:

- ❖ **باب اول:** در حساب عددهای صحیح که در آن، یزدی حالت‌های خاصی از معادله درجه پنجم را حل کرده است و روشی برای محاسبه ضرایب بسط دوجمله‌ای به دست می‌دهد.
- ❖ **باب دوم:** در حساب کسرها.
- ❖ **باب سوم:** در حساب اول نجوم.
- ❖ **باب چهارم:** در مساحت.
- ❖ **باب پنجم:** در استخراج مجهولات با تناسب
- ❖ **باب ششم:** در استخراج مجهولات با خطایین. منظور از خطایین روشی برای تقریب ریشه‌های حقیقی یک معادله است. ابوریحان بیرونی در کتاب «التفهیم» به توضیح حساب خطایین نیز پرداخته است.
- ❖ **باب هفتم:** در جبر و مقابله.

رشد

ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و هشتم
- شماره پی در پی ۱۱۱
- پاییز ۱۳۹۷
- شماره ۱
- ۸۰ صفحه
- ۲۰۰۰۰ ریال



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میر شهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
میر شهرام صدر
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
مجتبی قربانی آرنای
محمدتقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
آزادبه حسین فرزنان

وبگاه:
www.roshdmag.ir

پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-
motevasete2

پيامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۳۷۴)
نمایر مجله: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸

چاپ و توزیع:
شرکت افست

شمارگان:
۶۴۰۰ نسخه

حرف اول

کلاس درس ریاضی / سردبیر ۲

آموزشی

- ریاضیات و موسیقی / سیدعلی‌رضا اشرفی ۴
- تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش پذیری / محمدتقی طاهری تنجانی ۸
- نقش ریاضی در حل مسائل واقعی زندگی / تألیف و ترجمه: آزاده حسین فرزنان ۱۶
- کاربرد ریاضی در باستان‌شناسی / آناهیتا کمیجانی ۱۹
- قضیه پ- / حمیدرضا امیری ۲۰
- بازخوانی مسئله زمین پدر بزرگ / حسین کریمی ۲۲
- آشنایی با احتمال و کاربردهای آن / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ۲۶
- آزمایشگاه ریاضی / دکتر محمدعلی فریبرز عراقی ۳۰
- زاویه بین دو عقربه / محمدصادق نودری ۳۸
- دوره‌های ریاضی - استدلال‌های معتبر و نامعتبر / میر شهرام صدر ۴۰
- نظریه مجموعه‌ها - چيستی و چرایی / محمدرضا امیری ۴۴
- فصل مشترک صفحه و استوانه / حسین کریمی ۴۷
- میز و صندلی‌ها را به سمت سود هل دهید! / حسین نامی ساعی ۵۶
- مسائل برای حل ۶۰

ریاضی اندیشیدن

نطق خاک و نطق آب و نطق گل...! (قسمت اول) / غلامرضا یاسی پور تهرانی ۵۸

ریاضیات در چند دقیقه

فرمول‌های دو برابر زاویه ۷ - هندسه‌های ناقلیدسی و ناکلاسیک ۱۵ - زاویه‌های رادیانی ۴۶ - دایره‌ها ۵۵ - چندوجهی‌ها / غلامرضا یاسی پور تهرانی ۸۰

گفت و گو

جشنواره خوارزمی از نگاه دبیر جشنواره / مصاحبه‌کننده و تنظیم: محمدرضا امیری ۱۲

آموزش ترجمه متون ریاضی

کدام تابع نیست؟ / حمیدرضا امیری ۳۶

گزارش

گزارشی از جشنواره جوان خوارزمی / دکتر مجتبی قربانی ۴۸

زنگ تفریح

اثبات بدون کلام / تهیه و تنظیم: میر شهرام صدر ۵۱

میزگرد

میزگرد با حضور مؤلفان کتاب درسی - خط به خط کتاب درسی را مطالعه کنید / تهیه و تنظیم: محمدرضا امیری ۵۲

پاسخ‌ها

راهنمای حل مسائل ۶۷

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲) طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

کلاس درس ریاضی

«مجله ریاضی برهان» در سال ۱۳۷۰ و در «انتشارات مدرسه» به صورت فصلنامه تولد یافت. پس از گذشت ۱۱ سال، چاپ آن را به دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سپردند تا سال ۱۳۹۴ که به ماهنامه تبدیل شد. در این میان، پند سالی آقای هوشنگ شرقی به عنوان مدیردافلی مجله قبول زحمت فرمودند. از ابتدای امسال، مجله ریاضی برهان متوسطه ۲ مجدداً به شکل فصلنامه و در سه شماره ۸۰ صفحه‌ای چاپ و منتشر می‌شود و مسئولیت مدیریت دافلی آن به آقای میرشهرام صدر سپرده شده است که قبلاً نیز به مدت ۱۵ سال این زحمت را بر عهده داشتند. از آقای شرقی تشکر و قدردانی می‌کنم و از خداوند بعیر و علیم برای آقای صدر توفیق خدمت و موفقیت روزافزون خواستارم. دوستان عزیز و فهیم، در این سه شماره قصد دارم به بعضی از بردهمی‌های متداول نسبت به مفاهیم ریاضی و در قالب «یک جلسه درس ریاضی» که به صورت واقعی برای فوردم اتفاق افتاده است، بپردازم تا شاید نگاه شما به مطالب و مفاهیم ریاضی دقیق‌تر و شفاف‌تر شود و از این بردهمی‌ها در امان بمانید!

وارد کلاس که شدم، پس از احوال‌پرسی مقتصری با بپه‌ها و مضور و غیاب، از بپه‌ها پرسیدم: «کسی می‌دونه بین اتاد و معارله چه فرقی هست؟» (این دانش‌آموزان در سال‌های قبل اتادها و معادلات را خوانده بودند). از یکی از دانش‌آموزان که فط فیللی فویی هم داشت، فواهش کردم پای تفته بیاید و پاسخ‌های بپه‌ها را دسته‌بندی کند و روی تفته بنویسد. حاصل دسته‌بندی چنین شد:

۱. عده‌ای از بپه‌ها تفاوتی بین دو مفهوم معارله و اتاد قائل نبودند و اظهار داشتند که اتاد همان معارله است!

۲. تعدادی از دانش‌آموزان می‌گفتند: آقا هر اتادی معارله است ولی هر معارله‌ای لزوماً اتاد نیست (بدون اینکه تعریفی برای این دو مفهوم ارائه دهند).

۳. تعدادی از بپه‌ها برعکس گروه دوم حکم می‌کردند که: آقا هر معارله‌ای اتاد است!



۴. در این میان تعداد اندکی از دانش‌آموزان کلاس تعریف‌هایی برای هر یک از این دو مفهوم بیان می‌کردند و هیچ مقایسه‌ای بین آن‌ها انجام نمی‌دادند. از آنجا که تصمیم نداشتیم هر یک از این دو مفهوم را تعریف کنیم و مقایسه‌ی میان این دو را به صورت مستقیم برای بچه‌ها بازگو کنیم، هیچ‌یک از نظرات ارائه شده را تأیید یا رد نکردیم و این نظرات فقط روی تخته نوشته شده بود. سپس از کلاس خواستیم تا چهار نفر را به عنوان نمایندگان این چهار نظر متفاوت معرفی کنند تا پای تخته بیایند و برای پاسخ‌فردشان دلیل بیاورند یا مثالی بزنند. بلافاصله بچه‌ها چهار گروه شدند و شروع کردند به بحث با هم و تولید مثال برای نوشتن روی تخته کلاس.

پس از گذشت تقریباً نیم ساعت بحث و مناظره، و دلیل‌ها و مثال‌هایی که هر گروه برای تومیه یا اثبات پاسخ خود می‌آوردند، از من خواستند بین آن‌ها و نظراتشان قضاوت کنیم. ولی من باز هم هیچ نظری یا مثالی را تأیید یا رد نکردم. البته در این زمان تقریباً بچه‌ها دو گروه شده بودند و هیچ فردی بلا تکلیف یا بی‌تفاوتی در کلاس وجود نداشت. این تقریباً همان هدف اصلی من از طرح این سؤال بود. گروه‌های اول و سوم قانع شده بودند که پاسخ درستی به سؤال من ندرده‌اند.

بالاخره تصمیم گرفتم کمک کنیم تا بچه‌ها به این دو مفهوم دست پیدا کنند و خودشان آن‌ها را بسازند. روی تخته نوشتیم: $(A^2 - B^2)$ و $(A+B)^2$ و $(A-4)^2$ و از بچه‌ها خواستیم تا بگویند هر کدام از این‌ها چیست. اکثر دانش‌آموزان پاسخ دادند که $(A^2 - B^2)$ «اتحاد مزدوج» و $(A+B)^2$ «اتحاد اول» است؛ تعاریری از بچه‌ها چون x را در عبارت $(x^2 - 4)$ دیده بودند گفتند: آقا سومی معادله است، اما عده‌ای هم گفتند: آقا این‌ها که شما روی تخته نوشته‌اید، نه معادله هستند و نه اتحاد! این‌ها هر کدام چند جمله‌ای هستند.

من نظرات این دانش‌آموزان را تأیید کردم و به کمک آن‌ها برای بقیه کلاس توضیح دادم که اتحاد چیست و معادله چه مفهومی دارد و این‌ها چه تفاوتی با هم دارند. در پایان این جلسه، علاوه بر اینکه بچه‌ها همگی به صورتی دقیق به تعریف این دو مفهوم دست یافتند، من هم توانستم برداشته‌های آن‌ها را کشف و تا حدی از ذهنشان پاک کنم.

* پی‌نوشت

۱. اتحاد یک تساوی بین دو عبارت جبری است که به ازای تمام مقادیر، برای متغیر یا متغیرهای همواره برقرار است. اما معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از مقادیر برای متغیر یا متغیرهایش برقرار است. تساوی $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ یک اتحاد جبری و تساوی $x^2 + x^2 = 0$ یک معادله جبری است. اولی برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ برقرار است و دومی فقط به ازای $x=0$ یا $x=-1$ برقرار است.

ریاضیات و موسیقی

اشاره

بیشتر مطالب این نوشته برگرفته از کتاب معروف جف سوزوکی است که در سال ۲۰۰۹ توسط «انجمن ریاضی آمریکا» به چاپ رسید. بخش‌هایی از این کتاب که به نقش ایرانیان در تاریخ تمدن و به‌خصوص ریاضیات می‌پردازد، مورد انتقاد نویسنده این مقاله است. در این نوشته ما ریاضیات را از روزهای آغازین آن که با هنر و موسیقی رابطه نزدیکی داشت، مورد توجه قرار داده‌ایم.

از یونانیان توسط ایرانیان اسیر و به بابل منتقل شدند. روایتی وجود دارد مبنی بر اینکه فیثاغورس ساموسی در میان این گروه بود.

فیثاغورس مسافرت‌های زیادی به دور و اطراف جهان داشت و بنا بر نقل قول‌هایی از مورخان و اندیشمندان یونانی، او از سال ۵۳۵ قبل از میلاد در مصر بود و پیش از بازگشت به یونان، پنج سال در بابل به سر برد که در آن زمان بخشی از جغرافیای ایران بود.

فیثاغورس، فیلسوف و ریاضی‌دان یونان باستان، طی سال‌های ۵۰۰ تا ۵۶۹ پیش از میلاد در یونان می‌زیست. محل تولد و مرگ وی جزیره «ساموس» در یونان است. در کتاب‌های تاریخی نقل شده است که **کمبوجیه**، پسر **کوروش**، مصر را در سال ۵۲۵ قبل از میلاد به امپراتوری ایران اضافه کرد. جغرافیای ایران در زمان مرگ او بزرگ‌ترین امپراتوری بود که جهان تا آن زمان به خود دیده بود. طی فتح مصر، تعدادی

آنچه سبب مهاجرت فیثاغورس از یونان شد، باورهای فلسفی او درباره نقش عددها در زندگی انسان است که با عقاید آن روز یونانی‌ها مغایرت داشت.

در «کروتون» که زادگاه **میلون**، کشتی‌گیر افسانه‌ای یونان باستان است، فیثاغورس مکتبی مخفی و عرفانی راه‌اندازی کرد که حدود یک قرن دوام آورد. هدف وی این بود که ریاضیات را براساس قوانین اخلاقی و فیزیکی بیان کند. وی با یکی از زنان فیلسوف پیرو خود به نام **تیانو** ازدواج کرد و از او صاحب پسری به نام **تلاگوس** و سه دختر به نام‌های **دامو**، **اریگ** نته و **ماییا** شد. بنابر روایتی تاریخی، میلون حامی فیثاغورس و دختر او یکی از اولین فیثاغورسیان بوده است. هیچ‌کدام از آثار فیثاغورس باقی نمانده‌اند و ما فقط آنچه را در اختیار داریم که از سوی پیروانش نقل شده است.

روابط متعدد میان عددها مورد توجه فیثاغورس و پیروان او قرار گرفت. آن‌ها به دنبال تجزیه و تحلیل جهان فیزیکی از نظر روابط این عددها بودند. برای مثال، آن‌ها ظاهراً کشف کردند که مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 است. فیثاغورس و پیروان او اعتقادات و باورهای عجیبی در خصوص زیبایی و نظم ریاضی داشتند. شاید بهترین شاهد زیبایی ریاضیات از مطالعه فیثاغورس درباره موسیقی به دست می‌آید. بنابر روایتی مشکوک، فیثاغورس به‌طور اتفاقی از کنار یک آهنگری عبور می‌کرد که ناگهان متوجه شد، سروصدای چکش دلیپذیر است. پس از تحقیقات دریافت که «وزن چکش» و «آهنگ ایجاد شده توسط آن»، رابطه‌ای عددی با یکدیگر دارند. این شروع مطالعه موسیقی از دیدگاه ریاضی بود.

فیثاغورسیان به‌جای استفاده از چکش، از یک تک‌تار استفاده کردند که یک ساز زهی با یک پل متحرک بود. اگر پل مزبور سیم را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، دو بخش را می‌توان یکی پس از دیگری (به‌صورت ملودیک) یا به‌طور هم‌زمان (هارمونیک) کشید. در هر دو مورد، صداها با هم هماهنگی خواهند داشت. اگر پل به صورتی حرکت کند که سیم به نسبت ۲ به ۱ تقسیم شود، آن‌گاه نسبت ۲:۱ نیز هماهنگی دیگری تولید می‌کند. فرض کنید یک آلت موسیقی را به‌گونه‌ای تنظیم کنیم که سیم‌ها نسبت ۴:۳:۲ یا ۶:۴:۳ داشته باشند. این آلت سه نت تولید خواهد کرد، با این ویژگی که هر ترکیبی از

نت‌ها یک هم‌صدایی تشکیل می‌دهد.

با این حال، یک مجموعه سه‌نتی بسیار محدود است و بنابراین نت‌های دیگری هم اضافه شدند. الگوهای متفاوتی به کار رفتند، اما در نهایت تقسیم وقفه ۲:۱ به هشت نت استاندارد در نظر گرفته شد و **اقلیدس** اولین کسی بود که این تقسیم‌بندی را مورد توجه قرار داد؛ اگرچه این تقسیم‌بندی قطعاً پیش از او وجود داشت. از این یافته‌ها او به این سؤال رسید که: چگونه می‌توانیم حاصل توان یک عدد صحیح را برابر عدد صحیح دیگری بسازیم؟ اگر دو عدد صحیح عامل‌های اول متفاوتی داشته باشند، مشکل حل نشدنی است؛ در بهترین حالت می‌توان امید به یک تقریب مناسب را داشت.

فیثاغورس علاوه بر تحقیق درباره موسیقی، سنت بررسی نتایج ریاضی را به شیوه‌ای معنوی و فکری آغاز کرد و در نتیجه ریاضیات را به هنری آزاد تبدیل کرد. در واقع او روش قیاسی ریاضیات را معرفی و در عین حال دامنه آن را به خواص نظری موضوع‌های انتزاعی محدود کرد.

ریاضیات مصریان و بابلی‌ها به مسائل عملی مربوط می‌شد؛ مثلاً محاسبه ارتفاع هرم یا هزینه حفر یک کانال. این نوع ریاضیات، به دلیل ارتباط با کار تجربی، تنها برای بردگان مناسب تلقی می‌شد. برخی نوشته‌ها بیان می‌کنند، زمانی که فیثاغورس در بابل زندگی می‌کرد، برده بود. یونانیان این نوع از ریاضیات عملی و محاسباتی را حساب می‌نامیدند. تفاوت بین حساب و هندسه را در افکار فیثاغورس می‌توان چنین بیان کرد که قضیه «مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع»، قانونی حسابی است. در حالی که قضیه «اگر دو متوازی‌الاضلاع قاعده و ارتفاع برابر داشته باشند، هر یک می‌توانند تشریح شده و مجدداً چنان پیکربندی شوند که متوازی‌الاضلاع دیگر را شکل دهند»، یک حکم هندسی است.

به‌نظر می‌رسد فیثاغورسیان برای اولین بار به کشف و اثبات حداقل پنج قضیه در هندسه، مشهور هستند. چهار مورد از آن‌ها عبارت‌اند از:

۱. مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر با مجموع دو زاویه قائمه است.

فیثاغورس علاوه بر تحقیق درباره موسیقی، سنت بررسی نتایج ریاضی را به شیوه‌ای معنوی و فکری آغاز کرد و در نتیجه ریاضیات را به هنری آزاد تبدیل کرد



شبیبه به داستانی است که در مورد تالس نقل شده. داستان دیگر آن است که فیثاغورس این قضیه را در مصر، از طناب‌بافانی آموخت که به راحتی قادر بودند با استفاده از رشته‌های گره‌دار ۳ - ۴ - ۵ مثلث قائم‌الزاویه درست کنند. ولی تاکنون هیچ نشانه‌ای از آگاهی مصریان از قضیه فیثاغورس به دست نیامده است.

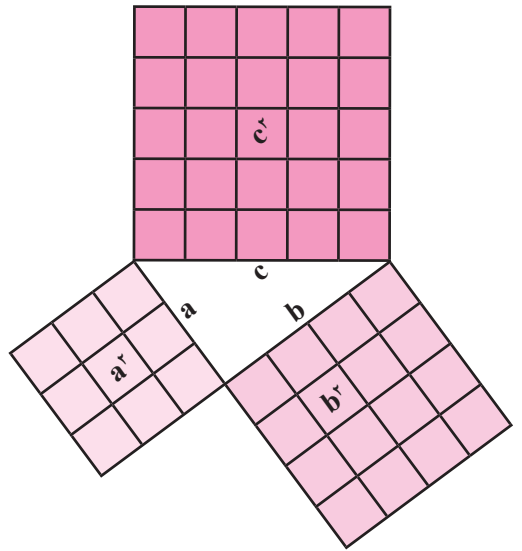
اگر فیثاغورس این قضیه را مستقلاً کشف نکرده باشد، ممکن است آن را در بابل آموخته باشد. مشخص‌تر اینکه فیثاغورس ممکن است ترسیم آنچه را که امروز سه‌گانه فیثاغورسی می‌نامیم، آموخته باشد: سه‌تایی مرتب (a,b,c) از عددهای صحیح مثبت را که در برابری $a^2 + b^2 = c^2$ صدق می‌کنند، یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامند. فیثاغورس چندین سه‌تایی را از راه ترسیم یافت. برای مثال، اگر a یک عدد فرد، b نصف $a^2 - 1$ و c یک واحد بیشتر از b باشد، آنگاه داریم: $a^2 + b^2 = c^2$. برای مثال، اگر $a=5$ ، $b = \frac{1}{2}(5^2 - 1) = 12$ و $c = 13 = 12 + 1$ ، آنگاه: $5^2 + 12^2 = 13^2$ و از این رو (۱۳، ۱۲، ۵) یک سه‌تایی فیثاغورسی است. در شکل ۱ اثباتی بدون برهان از این قضیه برای حالتی خاص ارائه شده است.

۲. مجموع زاویه‌های یک چندضلعی محدب برابر است با « $n-2$ » برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث.
۳. مجموع زاویه‌های خارجی در یک چندضلعی محدب برابر مجموع چهار زاویه قائمه است.
۴. فضای اطراف یک نقطه را می‌توان با مثلث، مربع، یا شش ضلعی‌های منتظم پر کرد.

آخرین قضیه به کشف فیثاغورس در خصوص سه مورد از پنج جسم منتظم افلاطونی اختصاص دارد: هرم تشکیل شده از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، مکعب تشکیل شده از چند مربع، و دوازده‌وجهی تشکیل شده از پنج ضلعی‌های منتظم. کشف پنجم فیثاغورس، قضیه معروف اوست که بیان می‌کند: مربع وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه برابر حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر است. برخی ادعا می‌کنند که فیثاغورس پس از کشف رابطه بین اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، یک گاو نر و در برخی روایت‌ها صد گاو قربانی کرد.

پروکلوس در قرن پنج میلادی نسبت به این افسانه اظهار تردید می‌کند، زیرا پیروان فیثاغورس به تناسخ ارواح اعتقاد داشتند و مخالف سرسخت قربانی کردن حیوانات بودند. همچنین این داستان به طرز مشکوکی

برخی اکتشاف‌های فیثاغورس به کمیت‌های گنگ منتهی می‌شدند و این باعث شد که پیروان فیثاغورس منکر وجود عددهایی غیر از عددهای گنگ شوند. ما نمی‌دانیم کمیت‌های گنگ چگونه یا توسط چه کسی کشف شدند. حتی هویت اولین زوج از کمیت‌های گنگ ناشناخته است. یکی از کاندیداهای خوب، ضلع و قطر یک پنج‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره است. هیپاسوس، کاشف این کمیت، به دلیل افشای روش‌های فیثاغورسی طراحی پنج‌ضلعی منتظم در یک دایره و دوازده‌وجهی منظم در کره، برای بیگانگان، از این آیین اخراج شد. این مکتب به تدریج شروع به دخالت در سیاست‌های محلی کرد و از این‌رو از سوی مقامات حکومتی سرکوب شد. همان‌گونه که بیان شد، این مکتب نزدیک یک قرن به حیات خود ادامه داد.



شکل ۱ اثبات قضیه فیثاغورس بدون برهان و با شکل برای حالت $(a,b,c) = (3,4,5)$

*منبع
Jeff Suzuki, Mathematics in Historical Context, The Mathematical Association of America, 2009

ریاضیات در چند دقیقه

فرمول‌های دو برابر زاویه

فرمول‌های مجموع دو زاویه امکان می‌دهند که سینوس‌ها و کسینوس‌های دوبرابر زاویه‌ها را پیدا کنید. همچنین، آن‌ها گسترش کاربرد سینوس‌ها و کسینوس‌ها را، در خارج از حوزه باریک زاویه‌های مجاز در مثلث (۰ تا 90°)، ممکن می‌سازند. این فرمول‌ها با استفاده از بررسی مثلث‌های ساخته شده از دو مثلث چسبیده به یکدیگر، مطابق شکل مقابل استخراج شده‌اند:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

قرار دادن $A=B$ ، فرمول‌های دو برابر زاویه تعمیم‌یافته زیر را به دست می‌دهد:

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1$$

فرمول‌های مجموع دو زاویه امکان محاسبه سینوس‌ها و کسینوس‌های زاویه‌های ترکیب شده، از قبیل A و B را در این جفت مثلث میسر می‌کنند.

*منبع
MATHS IN MINUTES/Paul Glendinning/
Quercus 2012



اشاره

در سال نهم و در درس ریاضی با مفاهیم چندجمله‌ای و تقسیم چندجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در این مقاله سعی ما بر آن است که ضمن توسعه مفاهیم مربوطه، به نکاتی در مورد بخش پذیری چندجمله‌ای‌ها و مسائلی در این رابطه بپردازیم.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش پذیری

عمل تقسیم چندجمله‌ای‌ها شباهت زیادی به عمل تقسیم در عددهای صحیح دارد. «رابطه تقسیم» فوق را می‌توان به این صورت نوشت: $P(x) = (3x^2 - x + 6)Q(x) + 17$. در حالت کلی، قضیه زیر که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم، همواره برقرار است.

✱ **قضیه:** اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم کنیم، چندجمله‌ای‌های منحصر به فرد $t(x)$ و $R(x)$ چنان وجود دارند که: $P(x) = t(x) \cdot Q(x) + R(x)$ که در آن: $P(x)$ مقسوم، $Q(x)$ مقسوم‌علیه، $t(x)$ خارج قسمت و $R(x)$ باقی‌مانده تقسیم است.

تذکر:

باقی‌مانده تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک چندجمله‌ای یا صفر است و یا درجه باقی‌مانده، کمتر از درجه مقسوم‌علیه است.

مثال ۱. با استفاده از قضیه تقسیم، خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم $P(x) = 3x^4 - x^2 + 2x + 5$ را بر $Q(x) = x^2 - 2$ به دست آورید.

حل: چون درجه $P(x)$ برابر ۴ و درجه $Q(x)$ برابر ۲ است، پس درجه خارج قسمت ۲ می‌شود. از طرف دیگر، چون درجه باقی‌مانده باید از درجه مقسوم‌علیه (یعنی ۲) کمتر باشد، پس باقی‌مانده یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر یک است. فرض می‌کنیم: $t(x) = a_1x + a_0$ و $R(x) = b_1x + b_0$. باید مقادیر

یک چندجمله‌ای بر حسب متغیر x و از درجه n (عدد صحیح نامنفی است) به صورت $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ تعریف می‌شود که در آن a_n, \dots, a_1, a_0 عددهای حقیقی‌اند و ضرایب چندجمله‌ای نامیده می‌شوند. در ضمن: $a_n \neq 0$. برای آنکه چندجمله‌ای از درجه n باشد، باید قطعاً جمله‌ای شامل x^n موجود باشد.

تساوی دو چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ در صورتی برابرند که درجه دو چندجمله‌ای با هم برابر و ضرایب‌های متناظر با هم برابر باشند.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

در ریاضی پایه نهم با الگوریتم خاصی که دو چندجمله‌ای را برهم تقسیم می‌کرد، آشنا شدید. برای مثال، به منظور تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 3x^4 - x^2 + 2x + 5$ بر $Q(x) = x^2 - 2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 3x^4 - x^2 + 2x + 5 \\ \underline{3x^4 - 6x^2} \\ -x^3 + 6x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-x^3 + 2x} \\ 6x^2 + 5 \\ \underline{6x^2 - 12} \\ 17 \end{array}$$



a_1 ها و b_1 ها را پیدا کنیم. طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= t(x)Q(x) + R(x) \\ 3x^4 - x^3 + 2x + 5 &= (a_1x^2 + a_0)(x^2 - 2) + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

دو طرف وقتی با هم برابرند که پس از ساده‌سازی، ضریب هر توان x در دو طرف یکسان باشد. پس از ساده‌سازی طرف دوم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 3x^4 - x^3 + 2x + 5 &= a_1x^4 + a_0x^2 + (a_0 - 2a_1)x^2 + (b_1 - 2a_0)x - 2a_0 + b_0 \end{aligned}$$

با برابر قرار دادن ضرایب متناظر در دو طرف تساوی نتایج زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_0 = -1 \\ a_0 - 2a_1 = 0 \\ b_1 - 2a_0 = 2 \\ -2a_0 + b_0 = 5 \end{cases}$$

از تساوی‌های فوق داریم: $a_1 = 3$ و $a_0 = -1$ و $b_1 = 17$ و $b_0 = 5$ بنابراین: $t(x) = 3x^2 - x + 6$ و $R(x) = 17x + 5$.

ما در سطرهای بالاتر این تقسیم را به‌روش متداول حل کرده‌ایم. می‌توانید جواب‌ها را مقایسه کنید و از صحت عملیات مطمئن شوید. **مثال ۰۲:** باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^{10} + 2x^{10} + 3$ بر $Q(x) = x - 1$ را به‌دست آورید.

حل: آیا می‌توانیم مانند مثال قبل عمل کنیم؟ واضح است که عملیات بسیار طولانی خواهد شد. از روش متداول تقسیم دو چندجمله‌ای نیز کار بسیار زمان‌بر خواهد بود. ولی با استفاده از قضیه تقسیم می‌توانیم راهی بسیار کوتاه برای این مثال بیابیم: در اینجا باقی‌مانده صفر یا از درجه صفر است. در هر حال یک عدد ثابت است. فرض کنیم: $R(x) = a$. اگر $t(x)$ را خارج‌قسمت در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= t(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ x^{10} + 2x^{10} + 3 &= (x - 1)t(x) + a \end{aligned}$$

تساوی اخیر برای هر عدد حقیقی x برقرار است؛ از جمله $x = 1$. با این جای‌گذاری داریم:

$$1^{10} + 2(1)^{10} + 3 = 0 \cdot t(x) + a \Rightarrow a = 6$$

پس: $R(x) = 6$

به‌طور کلی می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

*** قضیه:** باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $Q(x) = ax + b$ برابر است با: $P\left(\frac{-b}{a}\right)$.

$M(x) = R(x)$ و $M(x)$ همان چندجمله‌ای است که از جای گذاری به جای x^2 در $P(x)$ حاصل شده است:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 = 0 &\Rightarrow x^2 = 1 \\ P(x) &= 4(x^2)^2 - 3x(x^2) + 2x + 1 \\ &= 4(1)^2 - 3(1) + 2x + 1 = 2x + 2\end{aligned}$$

تذکر:

در مطلب بالا از این نکته استفاده شد که طبق خواص چندجمله‌ای‌ها، اگر دو چندجمله‌ای از حداکثر درجه n ، در $n+1$ مقدار برابر باشند، همواره با هم برابرند.

مثال ۵. باقی مانده تقسیم زیر را بر $x^2 + 1$ به دست آورید.

$$P(x) = x^9 + x^7 + x^4 + x^3 + x + 1$$

حل: مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم: $x^2 + 1 = 0$. این معادله ریشه حقیقی ندارد، اما می‌توان نوشت: $x^2 = -1$. حال در عبارت $P(x)$ به جای x^2 عدد (-1) را قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}P(x) &= x(x^2)^4 + x(x^2)^3 + (x^2)^2 + x(x^2) + x + 1 \\ &= P(x^2 = -1) = x(-1)^4 + x(-1)^3 + (-1)^2 \\ &\quad + x(-1) + x + 1\end{aligned}$$

$$\text{باقی مانده} = R(x) = x + x + 1 - x + x + 1 = 2x + 2$$

همان‌طور که در مثال بالا مشاهده شد، اگر در تقسیم عبارت $P(x)$ بر $Q(x)$ مقسوم‌علیه ریشه نداشته باشد، آن را بر حسب بزرگ‌ترین درجه مقسوم‌علیه حل می‌کنیم و در مقسوم قرار می‌دهیم.

مثال ۶. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید $P(x) = (x+1)^{2n-1} + x^{n+1}$ بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است.

حل: ابتدا مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \\ x + 1 = -x^2 \end{cases}$$

با جای گذاری نتایج بالا در $P(x)$ داریم:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x+1)^{2n-1} + x^{n+1} = (-x^2)^{2n-1} + x^{n+1} \\ &= -x^{4n-2} + x^{n+1} = x^{n+1}(-x^{3n-3} + 1) \\ &= x^{n+1}(-x^3)^{n-1} + 1 = x^{n+1}(-1)^{n-1} + 1 \\ &= x^{n+1}(-1+1) = 0\end{aligned}$$

مثال ۳. اگر باقی مانده تقسیم $P(x) = x^4 - 6x^2 + x + a$ بر $2x - 4$ برابر ۵ باشد، مقدار a را تعیین کنید.

حل: طبق قضیه بالا ریشه مقسوم‌علیه را در عبارت مقسوم قرار می‌دهیم. این مقدار همان باقی مانده تقسیم است:

$$\begin{aligned}2x - 4 = 0 &\Rightarrow x = 2 \\ P(2) &= 5 \Rightarrow 16 - 24 + 2 + a = 5 \Rightarrow a = 11\end{aligned}$$

*بخش پذیری: هرگاه باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ برابر صفر شود، می‌گوییم $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

برای مثال، چندجمله‌ای $P(x) = x^2 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است، زیرا $P(-1) = 0$.

در قضیه بالا مشاهده شد که برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای از درجه یک کافی است ریشه مقسوم‌علیه را به دست آوریم و آن را در مقسوم جای گذاری کنیم. برای حالتی که درجه مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از یک باشد، چه باید کرد؟ با ذکر مثالی این مطلب را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴. باقی مانده تقسیم عبارت زیر را بر $x^2 - 1$ تعیین کنید.

$$P(x) = 4x^{10} - 3x^5 + 2x + 1$$

حل: در روش اول می‌توان باقی مانده را $R(x) = ax + b$ نظر گرفت و با نوشتن رابطه تقسیم و متحد قرار دادن ضرایب به $R(x) = 2x + 2$ رسید.

ما این مسئله را به روشی دیگر بررسی می‌کنیم تا به یک قاعده کلی هم برسیم. فرض کنیم $R(x)$ باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ باشد. داریم:

$$P(x) = (x^2 - 1) \times t(x) + R(x)$$

می‌دانیم که به ازای دو عدد x_1 و x_2 داریم: $x^2 = 1$. با جای گذاری این مقادیر داریم:

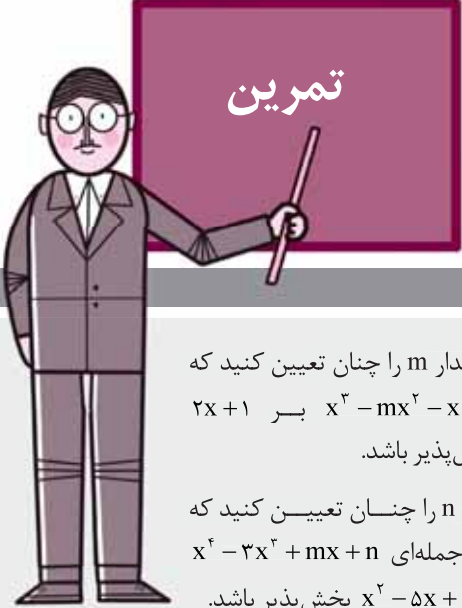
$$P(x_1) = R(x_1), P(x_2) = R(x_2)$$

حال اگر در چندجمله‌ای $P(x)$ به جای x^2 عدد ۱ را قرار دهیم، به یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر یک مانند $M(x)$ می‌رسیم و داریم: $M(x_1) = P(x_1)$, $M(x_2) = P(x_2)$

زیرا x_1 و x_2 در رابطه $x^2 = 1$ که در چندجمله‌ای $P(x)$ جای گذاری کرده ایم، صدق می‌کنند.

تا اینجا دریافتیم که دو چندجمله‌ای حداکثر درجه یک M و P وجود دارند که به ازای دو مقدار x_1 و x_2 با هم برابرند. پس

اگر n فرد باشد، با تبدیل y به $-y$ می‌توان به اتحاد دیگر خواسته شده در این قسمت رسید.
حالا شما می‌توانید تمرین‌های زیر را خودتان انجام دهید:



تمرین

- مقدار m را چنان تعیین کنید که $x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد.
- m و n را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^4 - 3x^2 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش پذیر باشد.
- باقی‌مانده تقسیم x^{1397} را بر $x^2 + x + 1$ به دست آورید.
- نشان دهید $a^{49} + b^{21}$ بر $a^7 + b^3$ بخش پذیر است.
- باقی‌مانده تقسیم $P(x) = x^{10}$ را بر عبارت جبری زیر به دست آورید.
 $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
- هرگاه باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ و $x-2$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ را به دست آورید.
- اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^2 + ax + 1$ بر $x^2 - 3x + b$ بخش پذیر باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

باقی‌مانده برابر صفر است و لذا $P(x)$ بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است.

در پایان به بررسی یک اتحاد مهم که در بخش مشتق در درس ریاضی ۳ و حسابان از آن استفاده می‌شود، می‌پردازیم:

مثال ۷. الف) نشان دهید $a^n - 1$ بر $a - 1$ بخش پذیر است ($n \in \mathbb{N}$).
(ب) ثابت کنید:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

(پ) اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

(ت) با فرض $a = \frac{x}{y}$ و استفاده از قسمت‌های ب و پ ثابت کنید:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - yx^{n-2} + \dots - y + 1)$$

حل: الف)

$$P(a) = a^n - 1$$

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow P(1) = 1^n - 1 = 0$$

(ب) فرض کنیم: $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$. با ضرب طرفین در a و محاسبه $aS - S$ داریم:

$$\begin{cases} aS = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \\ S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} \end{cases}$$

$$aS - S = a^n - 1 \Rightarrow S(a - 1) = a^n - 1$$

$$(a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1) = a^n - 1$$

(پ) با تبدیل a به $-a$ در قسمت قبل داریم:

$$(-a)^n - 1 = (-a - 1)((-a)^{n-1} + \dots + (-a)^2 - a + 1)$$

اگر n فرد باشد داریم:

$$-a^n - 1 = -(a + 1)(a^{n-1} - \dots + a^2 - a + 1)$$

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - \dots + a^2 - a + 1)$$

(ت) داریم:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

با تبدیل a به $\frac{x}{y}$ داریم:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1 = \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1\right)$$

طرفین عبارت را در y^n ضرب و سپس ساده می‌کنیم:

$$x^n - y^n = y\left(\frac{x}{y} - 1\right) \times y^{n-1}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1\right)$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

* منابع
۱. اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید (۱۳۸۹). حسابان سال سوم آموزش متوسطه رشته ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۲. صفایی، نوید و عسگری، علی (۱۳۸۹). حسابان (ج ۱). مؤسسه الگوی توسعه نمونه. تهران. چاپ دوازدهم.
۳. رضوی، مجید (۱۳۸۶). حسابان. انتشارات قندیل. تهران.



اشاره

در این چند صفحه، مصاحبه‌ای با علی‌رضا الله‌یاری دبیر جشنواره جوان خوارزمی تهیه شده است که در ادامه به سؤالاتی که از ایشان پرسیده شده است، پرداخته می‌شود.

از آن‌ها صورت می‌گیرد. ولی بحث ورود به دانشگاه این بود که وزارت علوم براساس یک مجموعه اطلاعات، برگزیدگانی را وارد دانشگاه می‌کرد. الان این برگزیدگان باید در کنکور شرکت کنند و ۹۰ درصد رتبه قبولی را در رشته موردنظرشان به دست آورند. آن وقت ما اسم آن‌ها را به سازمان سنجش می‌دهیم که شرایط ویژه‌ای برایشان قائل می‌شوند. این ربطی به جشنواره جوان ندارد. پذیرش در کنکور از طرف وزارت علوم بررسی و بازنگری می‌شود. این موضوع همه‌المپیادها و جشنواره‌ها را شامل می‌شود و خاص جشنواره جوان هم نیست.

■ ابتدا خودتان را معرفی کنید؟

● من علی‌رضا الله‌یاری، دبیر جشنواره جوان خوارزمی هستم؛

■ این جشنواره چند سال است که برگزار می‌شود و

هنوز هم مزایایی همچون معافیت از کنکور برای برگزیدگان این جشنواره قائل هستید؟

● برگزیدگان جشنواره جوان خوارزمی یک سلسله جایزه‌های نقدی از طرف آموزش و پرورش دریافت می‌کنند که خیلی خاص و مهم نیستند. از دست وزیر آموزش و پرورش لوح دریافت می‌کنند، اسمشان وارد «بنیاد علمی نخبگان» می‌شود و حمایت‌هایی



نظام آموزش و پرورش
ما تا حد زیادی
«آموزش محور» است. لذا
جشنواره جوان خوارزمی
در بخش دانش آموزی
می کوشد موجی را در
بدنه دانش آموزی ما، یعنی
دانش آموزان پایه های
دهم، یازدهم و دوازدهم
دوره متوسطه ایجاد کند
که از حالت آموزش محور
کمی فاصله بگیرند و به
پژوهش هم بپردازند

■ به سؤال بعدی من هم جواب دادید. می خواستم بپرسم اهمیت وجود جشنواره خوارزمی را در چه می دانید. ● دقیقاً ما از این منظر نگاه می کنیم که دانش آموز کارهای پژوهشی انجام دهد و در این زمینه تمرین کند. البته تنها بخش کوچکی از این درس های تئوری را که معلمان عزیز تدریس می کنند، می توان کاربردی کرد. همه جای دنیا هم توقع در سطح دانش آموزی در همین حد است. بیشتر از این باعث سرخوردگی می شود. به هر حال، موجی که به وجود آمده، بسیار برای ما ارزشمند است و در آینده هم برای خود این دانش آموزان بسیار مفید خواهد بود.

■ خوب حالا یک سؤال چالشی: آیا در جشنواره تقلب وجود دارد؟ منظورم این است که خیلی از دانش آموزان با این تفکر که برگزیدگان جشنواره از قبل معلوم هستند، سمت جشنواره نمی آیند. آیا این تفکر درست است؟

■ هر دوره جشنواره برگزیدگانی دارد. چقدر این افراد رصد می شوند و چقدر به آنها بها می دهند؟ ● ببینید، حقیقت این است که نظام آموزش و پرورش ما تا حد زیادی «آموزش محور» است. لذا جشنواره جوان خوارزمی در بخش دانش آموزی می کوشد موجی را در بدنه دانش آموزی ما، یعنی دانش آموزان پایه های ده، یازدهم و دوازدهم دوره متوسطه ایجاد کند که از حالت آموزش محور کمی فاصله بگیرند و به پژوهش هم بپردازند. خوب خوش بختانه در سطح استان ها و کشور موجی ایجاد شده است که بچه ها را با پژوهش آشنا می کند و می توانند آموزه هایشان را در کلاس درس در حد خودشان به کارهای کاربردی تبدیل کنند. موضوع ارزشمند این است که دانش آموزان به این سمت وسو بروند. جشنواره جوان خوارزمی در بخش دانش آموزی واقعاً انتظاری بیشتر از این ندارد. یعنی ما توقع اختراع یا چیز دیگری را نداریم....

در جشنواره خوارزمی، چه در سطح دانش آموزی و چه در سطح دانشجویی و بین المللی، ما به طرح نگاه می کنیم و این طرح در هر رشته تحصیلی که باشد باید تمام شده و موفقیت آمیز باشد

نه، این کاملاً غلط است. این طرز نگاه شاید در بدنه خود جشنواره هم وجود داشته باشد. اما با توجه به تعداد طرح های ارسالی و تعداد برگزیدگان، این کاملاً مشهود است که امکان رخ دادن چنین اتفاقی وجود ندارد. ببینید، ما هر سال بین شش تا هفت هزار طرح ارسالی داریم که البته امسال به هشت هزار طرح رسید. از این میان، حدود ۱۱۰۰ تا ۱۲۰۰ طرح به مرحله استانی تهران و نهایی راه یافتند. «دانشگاه شهید رجایی تهران» این طرح ها را بررسی کرد و از بین آن ها، ۶۰ تا ۷۰ طرح را به هیئت داوران ما معرفی کرد که حدود ۳۰ طرح برگزیده شدند. آنچه که برای ما در گروه های تخصصی اهمیت دارد، راستی آزمایی در این طرح ها است.

منظور تان از راستی آزمایی چیست؟

منظورمان این است که از آغاز تا انتهای طرح توسط هیئت داوران و اعضای گروه های تخصصی بررسی می شود که این طرح به این دانش آموز تعلق دارد یا خیر. ما طرح های بسیار قوی داشتیم که هیئت داوران آن ها را نپذیرفتند، چون تعلق آن ها به دانش آموز برای هیئت داوران محرز نشد. شاید یکی به دانش آموز کمک کرده، یا در سطح یک دانشجو بوده و از دانش آموز بر نمی آمده است و یا اولیای دانش آموز بیش از اندازه کمک کرده اند. ما به شدت روی این موضوع حساس هستیم. تاکنون خوش بختانه به ما گزارشی نرسیده که فلان طرحی که برگزیده شده، متعلق به طراح نبوده است. بنابراین، من وجود تقلب را به شدت تکذیب می کنم.

آیا در جشنواره بخشی مجزا مربوط به ریاضیات وجود دارد؟

بله، ما یک گروه علمی و بخشی داریم با عنوان «گروه ریاضیات» که رئیس آن از گروه ریاضیات دانشگاه شهید رجایی است و اعضای هیئت علمی این دانشگاه در کنار سایر اعضای هیئت علمی، تیم دآوری این گروه را تشکیل می دهند.

برگزیدگان بخش ریاضی معمولاً با مقاله شرکت می کنند یا اختراع یا ...؟

در بخش ریاضی تا اینجا دانش آموزی نداشته ایم که با مقاله شرکت کند؛ دانش آموزی که روی تئوری یا

مبثی از ریاضی کار کرده باشد و این کارش را ارائه داده باشد و به نتیجه برسد. در جشنواره خوارزمی، چه در سطح دانش آموزی و چه در سطح دانشجویی و بین المللی، ما به طرح نگاه می کنیم و این طرح در هر رشته تحصیلی که باشد (فرقی نمی کند)، باید تمام شده و موفقیت آمیز باشد و استانداردهای ما را هم رعایت کرده باشد. در بخش ریاضیات هم همین طور است. بله ما هر سال هم برگزیده ای داریم که مثلاً فرضیه، قضیه یا فرمولی را اثبات یا رد کرده است.

■ آنچه من از صحبت های شما درباره جشنواره خوارزمی متوجه شدم، استقلال این جشنواره و اتکای آن به خود افراد است و مثلاً کلاس المپیاد برای دانش آموزان علاقه مند به شرکت در جشنواره وجود ندارد. آیا همین طور است؟

● دقیقاً همین طور است. چون ما طرح محور هستیم، آموزش هم نمی دهیم و اصلاً بی معنی است. نظام ارزشیابی ما هم این گونه نیست. کار باید خودجوش باشد. درک و فهم علمی باید از سمت دانش آموز مطرح شود و تمام کارهای اجرایی اش را هم دانش آموز باید انجام دهد. البته گروهی یا فردی اشکالی ندارد.

■ با توجه به تجربه های شما و آمار و اطلاعاتی که درباره دانش آموزان برگزیده در جشنواره خوارزمی دارید، آیا ویژگی مشترکی برای همه آن ها می توانید نام ببرید؟

● بله، این ها با برگزیده شدن، اعتماد به نفس خیلی بالایی به دست می آورند و برای ادامه راهشان مصمم می شوند و شوق و ذوقی پیدا می کنند. این بسیار ارزشمند است. چون در زندگی به موفقیت بزرگی رسیده اند. در واقع این قدم اولی بوده است برای قدم های موفق بعدی. شهامت پیدا می کنند که پویاتر باشند و در آینده برای هدف هایشان تلاش کنند. این در تمام سطوح جشنواره کاملاً صدق می کند.

همه این دانش آموزان چه ویژگی هایی دارند؟

● بسیار سخت کوش هستند که اگر نبودند، هیچ وقت موفق نمی شدند. کاری را که شروع می کنند، به بهترین صورت تا آخر انجام می دهند و به پایان می رسانند. کارشان را نیمه کاره رها نمی کنند و

دانش آموزان
برگزیده
اعتماد به نفس
خیلی بالایی
درونشان به وجود
می آید و برای
ادامه راهشان
مصمم می شوند و
شوق و ذوقی پیدا
می کنند

است کاملاً متفاوت باشد. ما به هیچ وجه برای هیچ کس و هیچ جا سهمیه قائل نیستیم.

■ با توجه به اینکه بچه ها از سال یازدهم و دوازدهم وارد فضای کنکور و تست زدن می شوند، اگر آن ها برای جشنواره خوارزمی وقت بگذارند، آیا به پیشرفت تحصیلی شان کمک می کند؟
● بله حتماً ولی این تصمیم را خود دانش آموز باید بگیرد که به سمت تئوری و نظری برود یا به سمت کاربردی بودن. اطلاعاتی که دریافت می کند و استفاده از این اطلاعات و دیدن نتیجه استفاده از آن. دانش آموزی که به طور تئوری نقاشی را بلد است، با دانش آموزی که نقاشی می کند، تفاوت دارد.

■ ممنون از فرصتی که در اختیار ما گذاشتید. ای کاش تمام داوری ها مثل جشنواره بود. کاش نظام آموزشی ما در برخی مدارس صرفاً روی سؤالات چهارگزینه ای بنا نمی شد. باز هم ممنون.
● ممنون از شما بابت وقتی که گذاشتید و نظر لطفتان. از آشنایی با شما و مجله برهان خیلی خوش حال شدم.

این خیلی خوب است. همت، شهامت و پویایی دارند و از هوش هیجانی خوبی برخوردارند. معمولاً هم روابط اجتماعی شان خوب است، چون این موضوع در دفاع کردن از طرح خیلی اهمیت دارد.

■ چه توصیه ای به دانش آموزان علاقه مند به شرکت در جشنواره دارید؟
● حتماً طرح هایشان را به ما بدهند و دقت کنند که طرح به پایان رسیده باشد.

■ از میان برگزیدگان چه تعداد از تهران و چه تعداد از شهرستان هستند؟
● ما اصلاً بخش استانی نداریم. این خیلی مهم است، دقت کنید! ما سهمیه نداریم. ما نه برای استان ها، نه برای گروه های تخصصی و رشته ها، و نه برای دختران یا پسران سهمیه نداریم. صرفاً ملاک های کیفی برای ما اهمیت دارند، و نه کمی. چنانچه شاید در یک سال، استان خراسان رضوی هفت برگزیده، استان تهران دو برگزیده، آذربایجان شرقی سه برگزیده و استان خوزستان پنج برگزیده داشته باشد. سال بعد هم ممکن

ریاضیات در چند دقیقه

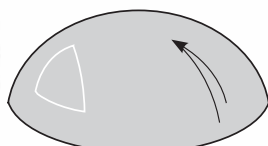
هندسه های ناقلیدسی و ناکلاسیک

هندسه ناقلیدسی، هندسه ای است که بر رویه یا در فضایی غیر از صفحات تخت آشنای هندسه اقلیدسی مبتنی است. در این گونه وضعیت ها، اصل پنجم هندسه اقلیدس که می گوید: دقیقاً یک خط گذرنده از یک نقطه و موازی خط مفروض دیگر موجود است، به کار نمی رود. به عنوان نمونه، هندسه یک رویه کروی را در نظر می گیریم. در اینجا خط به کمانی از دایره عظیمه حول پیرامون کره تبدیل می شود. اگر نقطه ای غیر واقع بر این خط انتخاب کنیم، در این صورت هر دایره عظیمه دیگر گذرنده از این نقطه تازه با دایره اولیه مان برخورد می کند. بنابراین، هیچ خط موازی واقع بر رویه یک کره وجود ندارد!

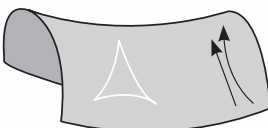
هندسه های ناقلیدسی را می توان به هندسه های بیضوی یا خمیدگی مثبت، از قبیل رویه یک کره، و هندسه های هذلولوی یا خمیدگی منفی، از قبیل زینی که در شکل نشان داده شده است، تقسیم کرد. نیز ممکن است هندسه های موسوم به ناکلاسیک را به کار برد که در آن ها می توان خط های بسیاری گذرنده از یک نقطه و موازی یک خط مفروض رسم کرد.



خمیدگی صفر



خمیدگی مثبت



خمیدگی منفی



نقش ریاضی در حل مسائل واقعی زندگی

اشاره

اگرچه به اعتقاد بسیاری، مطالعه مفاهیم ریاضی همانند دل سپردن به نغمه و موسیقی و شعری زیباست که با یادگیری این مفاهیم به دنیایی زیبا، عمیق، جذاب و رویایی سفر می‌کنیم، اما در این میان واقعیتی غیرقابل کتمان نیز وجود دارد: درک و یادگیری مفاهیم ساده و عمیق ریاضی، کاربردی غیرقابل انکار در زندگی واقعی مان دارد. امروزه در اغلب مسائل پیچیده شهری و روستایی، مانند ترافیک، آلودگی هوا، بالا بردن بازده واحدهای تولیدی و آموزشی، تشخیص و درمان بیماری‌ها، مصرف بهینه آب و سموم در صنعت کشاورزی و... ریاضی ابزاری را در اختیار ما قرار داده که بی‌اغراق بیشتر و بهتر از هر وسیله دیگری گره‌گشای مشکلاتی است که با آن‌ها مواجه هستیم. به منظور درگیری بیشتر شما با این مسائل و آشنایی تان با نقش و تأثیر علم ریاضی در حل این مسائل، از دوره جدید فصلنامه برهان، در هر شماره با طرح پرسشی واقعی به گوشه‌ای از کاربردهای واقعی ریاضی می‌پردازیم. این پرسش‌ها از نمونه مسائل مسابقاتی انتخاب می‌شوند که با هدف نشان دادن کاربردهای واقعی ریاضی در دنیا مطرح شده‌اند. بهتر است کار روی این مسائل به صورت گروهی و در مدرسه باشد. اگرچه حل آن‌ها متضمن صرف چند ساعت زمان است، اما هم‌افزایی ایده‌های مختلف شما در گروهتان می‌تواند خالق راه‌هایی بدیع و تازه باشد. ایده‌ها و راه‌حل‌هایتان را با معلمان ریاضی تان نیز به اشتراک بگذارید و از نظراتشان استفاده کنید. در پایان، راه‌حل‌هایتان را به نشانی مجله برهان بفرستید تا با نام خودتان در مجله چاپ شود. در هر شماره بهترین و خلاقانه‌ترین راه‌حلی که به دست ما رسیده است، به نام اعضای گروه منتشر خواهیم کرد.

اوکراین و کشورهای متعددی از روسیه تا انگلستان تحت تأثیر مواد رادیواکتیویته قرار گرفتند. خسارت‌های جانی، مالی و زیست‌محیطی این فاجعه هنوز نیز به چشم می‌خورد.

علت اصلی وقوع این حادثه و فاجعه عظیم، دو خطای انسانی پشت سر هم بود که دلیل آن‌ها خستگی دو نفر از کارمندان نیروگاه گزارش شد.

به گفته رئیس پلیس شهر بزرگ تهران در تابستان ۱۳۹۴، عامل اصلی ۶۰ درصد تصادف‌های جاده‌ای، خستگی رانندگان بوده است.

در اولین قسمت این بخش به طرح مسئله‌ای می‌پردازیم که در مسابقه‌ای جهانی در سال ۲۰۰۷ در کشور هلند برگزار شده بود. مراحل مقدماتی این مسابقه در بسیاری از کشورهای جهان برگزار می‌شود که در ایران نیز به همت و تلاش «خانه ریاضیات اصفهان» هر ساله مراحل اولیه آن برگزار شده است.

در اولین ساعت‌های بامداد ۲۶ آوریل ۱۹۸۶ انفجار فاجعه‌باری در «نیروگاه هسته‌ای چرنوبیل» در کشور «اوکراین» فعلی اتفاق افتاد. در اثر این حادثه، میلیون‌ها نفر در بیش از ۲۲۱۸ شهر و روستا در

تأثیر خستگی و رانندگی ممتد و بدون استراحت، با تأثیر مواد مخدر یکسان است. خستگی باعث می‌شود تعادل عصبی راننده کاهش یابد که این امر موجب تصادف‌های سنگین جاده‌ای می‌شود. این موضوع، یعنی خستگی ناشی از رانندگی ممتد، زمانی مفهوم و معنی عمیق‌تری پیدا می‌کند که بدانیم تنها در ۱۰ سال گذشته بیش از ۲۲۰ هزار نفر در تصادف‌های جاده‌ای جان خود را از دست داده‌اند. این آمار از کشته‌شدگان ما را بیشتر به یاد یک جنگ تمام عیار می‌اندازد!

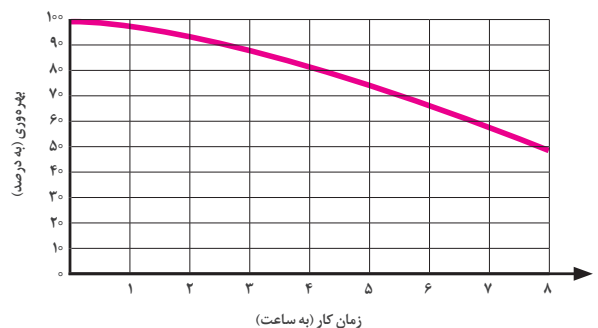
همه ما تجربه گرفتن یک تصمیم اشتباه را در زمان خستگی داشته‌ایم. هزینه این تصمیم‌های اشتباه برای خودمان و برای جامعه‌مان چقدر بوده است و چقدر خواهد بود؟

هرچند به اعتقاد بسیاری از جامعه‌شناسان و روان‌شناسان، «کار» سازنده شخصیت فرد و جامعه است، اما اگر راندمان و کیفیت انجام کار افت کند، همین نیروی مثبت سازنده، به نیروی عظیم ویرانگری تبدیل می‌شود. سؤال مهم این است که: چگونه می‌توانیم با روش‌های علمی از افت کار مفید جلوگیری کنیم و راه‌های مقابله با افت کیفیت کار کدام‌اند؟ واضح است که با جواب به این سؤال می‌توانیم از صرف هزینه‌های گزاف جلوگیری کنیم.

یکی از ایده‌های حل این مسئله، استراحت‌های مناسب در زمان انجام کار توسط کارمند، مدیر، معلم و دانش‌آموز است. اما این استراحت چگونه باید برنامه‌ریزی شود؟ با چه نظم و ترتیبی و در چه مدت‌زمانی؟ چگونه می‌توانیم در محیط کار، ضمن حفظ قوانین و تأمین خواسته‌های مدیران کارخانه، شرکت یا مدرسه، بالاترین راندمان را نیز حفظ کنیم؟

یک تجربه واقعی

در یک مطالعه واقعی در یک شرکت صنعتی بزرگ آلمانی، رابطه بین بهره‌وری و تعداد ساعت‌های کار به صورتی که در نمودار ۱ می‌بینید، معلوم شد.



نمودار ۱ نمایش رابطه بین بهره‌وری و زمان کار

در این موارد با افزایش ساعت کاری، بهره‌وری کاهش می‌یابد و همان‌طور که در نمودار مشخص است، بعد از هشت ساعت کار بی‌وقفه و بدون استراحت، بهره‌وری به ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

از طرف دیگر مطالعات نشان داده‌اند، زنگ استراحت میزان بهره‌وری را افزایش می‌دهد، به گونه‌ای که همواره بعد از هر استراحت، بهره‌وری شخص بیشتر از بهره‌وری او قبل از وقت استراحت خواهد بود. در شرکت آلمانی مورد بحث نتایج زنگ‌های استراحت به شرح زیر بوده‌اند:

۱. استراحت قبل از پنج ساعت کاری به اندازه ۴ دقیقه، باعث می‌شود که راندمان کار به زمان $3/5t$ قبل از استراحت برگردد. مثلاً اگر شخصی از ۸ صبح، ۴ ساعت متوالی کار کند، یعنی تا ساعت ۱۲ ظهر، و سپس ۲۰ دقیقه استراحت کند، راندمان کار او به $3/5 \times 20 = 12$ دقیقه، یعنی ۷۰ دقیقه قبل از استراحت و به راندمان ساعت ۵:۵۰ می‌رسد.

۲. یک زنگ استراحت بعد از پنج ساعت کاری به اندازه ۴ دقیقه، باعث می‌شود که راندمان کار به ۳۴ دقیقه قبل از استراحت برگردد. مثلاً اگر شخصی که از ۸ صبح، ۶ ساعت متوالی تا ساعت ۲ بعدازظهر کار کند و سپس ۲۰ دقیقه استراحت کند، راندمان کار او به $3 \times 20 = 60$ دقیقه، یعنی ۱ ساعت قبل از استراحت و راندمان ساعت ۱ بعدازظهر می‌رسد.

پرسش نخست

در شرکتی که به آن اشاره کردیم، روز کاری از ساعت ۸ صبح شروع و در ساعت ۵ بعدازظهر پایان می‌یابد. در ساعت ۱۲:۰۰ زنگ ناهار یک ساعته‌ای برای کارکنان تعریف شده است. پس روز کاری ۹ ساعت طول می‌کشد که ۸ ساعت آن ساعت کاری واقعی است. هر شخص حداکثر 1600 wpu (واحد کار تولیدی در ساعت) می‌تواند بهره‌وری داشته باشد.

هیئت‌مدیره شرکت مایل است که حداکثر میزان بهره‌وری هر شخص را در طول یک روز کاری بداند:

الف. از روی نمودار ۱ کل میزان بهره‌وری هر شخص در یک روز کاری ۸ ساعته بدون استراحت را تقریباً محاسبه کنید.

ب. اگر یک زنگ ناهار یک ساعته از ساعت ۱۲ تا ۱ به کارکنان داده شود و ساعت کاری از ۸ صبح تا ۵ بعدازظهر تغییر کند، مقدار تقریبی بهره‌وری را محاسبه کنید. دقیقاً مشخص کنید که چطور از نمودار استفاده کرده‌اید.



می شود، به دست آورید.

ج. اگر زمان یک ساعته استراحت را به بازه‌های برابر کوچک‌تر تقسیم کنیم، میزان بهره‌وری افزایش می‌یابد. به نظر شما بهترین بازه استراحت چند دقیقه خواهد بود؟ بیشینه (ماکزیمم) میزان بهره‌وری را در این شرایط محاسبه کنید.

پرسش سوم

بیشتر کارکنان ترجیح می‌دهند که بدون استراحت مستمر کار کنند و زودتر کارشان تمام شود. برای مثال، یک روز تعطیلی بیشتر شود یا همه روزهای کاری کوتاه‌تر شوند. در غیر این صورت کارکنان زمان استراحت طولانی‌تر را ترجیح می‌دهند. هیئت‌مدیره شرکت با هر نوع مدل کاری موافق است، به شرط آنکه هر شخص هفته‌ای ۱۹۲۰۰ (wpu) واحد کار کند. کارخانه هر روز از ساعت ۷:۳۰ تا ۱۸:۳۰ باز است:

الف. پیش‌بینی کنید که آیا شخصی می‌تواند با ۴ روز کار این میزان بهره‌وری را برآورده سازد؟

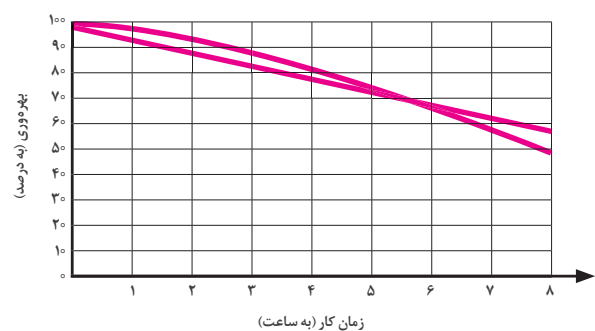
ب. طرحی جذاب برای کارکنان پیش‌بینی کنید، به شکلی که کارکنان در هفته ۵ روز کار کنند.

راه‌حل‌های خود را با توضیح کامل روی نمودار ارائه دهید.

*پی‌نوشت

1. wpu: working per unit

در ادامه، برای ساده‌تر شدن محاسبه میزان بهره‌وری تصمیم گرفته شد که از یک معادله خطی استفاده شود. نمودار خطی انطباق داده شده در نمودار ۲ داده شده است.



نمودار ۲ نمایش رابطه بین بهره‌وری در زمان کار به کمک نمودار خطی انطباق داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در مدل جدید فرض شده است که برای ۸ ساعت کار مستمر بدون استراحت، بهره‌وری از ۱۰۰ درصد به ۶۰ درصد کاهش می‌یابد.

پرسش دوم

الف. میزان بهره‌وری کل را برای ۸ ساعت کار مستمر بدون استراحت، به دست آورید.

ب. میزان بهره‌وری را برای یک روز کاری واقعی که ساعت کاری از ۸:۰۰ صبح تا ۱۲:۰۰ و از ۱۳:۰۰ تا ۱۷:۰۰ تعریف



کاربرد ریاضی در باستان‌شناسی

نمونه‌ای از سال‌یابی کربن ۱۴ در مطالعات باستان‌شناسی ایران

مطالعات باستان‌شناسی در «غار قلعه‌بزی» واقع در «مبارکه اصفهان» است. این مطالعات نشان می‌دهند که شکارچیان عصر سنگ حدود ۴۳ هزار سال پیش در استان اصفهان می‌زیستند. در سال ۱۳۸۴، برای تخمین قدمت فسیل‌های این منطقه، چند نمونه ذغال تاریخ‌گذاری و به روش رادیوکربن برداشت شد که با توجه به اهمیت آن‌ها، با دقت زیادی سال‌یابی شدند.

نتایج سال‌یابی تاریخی در غار پارینه سنگی قلعه‌بزی، سکونت در این منطقه را بین ۴۰ تا ۴۳ هزار سال پیش تعیین کرد. فسیل‌های این منطقه از نخستین مکان‌های پارینه سنگی میانی در ایران هستند که با این روش سال‌یابی شده‌اند. بنابر نتایج این تحقیق، استان اصفهان در حال حاضر دارای قدیمی‌ترین آثار سال‌یابی شده سکونت انسان در فلات مرکزی ایران است.

* پی‌نوشت
۱. لگاریتم طبیعی یک عدد، لگاریتمی است در مبنای عدد e که عددی گنگ و تقریباً برابر ۲/۷۱ است. لگاریتم طبیعی عدد X به صورت $\text{Log}_e X$ یا $\text{Ln} X$ نوشته می‌شود.

ارگانیسم زنده، جریان دریافت کربن می‌شود، کربن ۱۴ دچار واپاشی می‌شود و جایگزین هم نمی‌شود. با استفاده از نسبت درصد کربن ۱۴ در بافت فسیلی، به درصد کربن ۱۴ در بافت زنده، عمر فسیل تعیین می‌شود.

باستان‌شناسان با استفاده از فرمول زیر، سن یک اثر باستانی را تعیین می‌کنند که در آن: Ln لگاریتم طبیعی، $\frac{n_f}{n_0}$ درصد کربن ۱۴ در نمونه باستانی به درصد کربن ۱۴ در بافت زنده، و $t_{\frac{1}{2}}$ نیمه عمر کربن ۱۴ است:

$$T = \left(\frac{\ln\left(\frac{n_f}{n_0}\right)}{-0.693} \right) \times t_{\frac{1}{2}}$$

مثلاً اگر یک فسیل با ۱۰ درصد کربن ۱۴ نسبت به یک جان‌دار زنده داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$T = \left(\frac{\ln(0.10)}{-0.693} \right) \times 5700$$

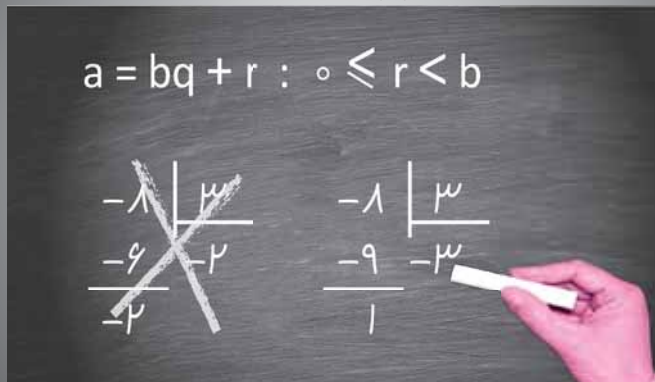
$$T = \left(\frac{-2.303}{-0.693} \right) \times 5700$$

$$T = (3/322) \times 5700 \Rightarrow T \approx 18940$$

آثار تاریخی هر کشور، هویت مردم، تمدن باستانی و پیشینه تاریخی آن سرزمین را نشان می‌دهد. یکی از موضوع‌های مهم در بررسی آثار باستانی، تعیین قدمت آن‌هاست که روش‌های متفاوتی دارد. روش «سال‌یابی کربن ۱۴» که از روش‌های تعیین عمر آثار باستانی است و با این روش سن نمونه‌های کربن‌دار تخمین زده می‌شود، یکی از مشهورترین این روش‌هاست. کربن ۱۴ تولید شده توسط تابش‌های کیهانی با اکسیژن هوا ترکیب می‌شود و «دی‌اکسید کربن» تولید می‌کند. گیاهان این دی‌اکسید کربن را طی فرایند «فتوسنتز» جذب می‌کنند و دی‌اکسید کربن به الیاف گیاهان متصل می‌شود. انسان‌ها و حیوانات گیاهان را می‌خورند و کربن ۱۴ را دریافت می‌کنند.

اتم‌های کربن ۱۴ همیشه در حال واپاشی‌اند، ولی به وسیله اتم‌های جدید با سرعت ثابتی جایگزین می‌شوند. یعنی بدن ما در هر لحظه مقدار ثابتی از ایزوتوپ کربن ۱۴ را داراست و این موضوع در مورد همه جان‌داران، از جمله حیوانات و گیاهان نیز صدق می‌کند. پس از مرگ یک

قضیه



ریاضیات گسسته
پایه دوازدهم، رشته ریاضی

اشاره

می‌دانیم طبق قضیه تقسیم، اگر a عددی صحیح (مقسوم) و b عددی طبیعی (مقسوم‌علیه) باشد، در این صورت عددهای صحیح و منحصر به فردی چون q (خارج قسمت) و r (باقی‌مانده) یافت می‌شوند، به قسمی که: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$. در این مقاله قصد داریم با اصطلاحات مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده به طرح و حل مسائلی بپردازیم. در همه مسائل مطرح شده فقط از دو رابطه موجود در قضیه تقسیم، یعنی $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ استفاده می‌شود. در حل مسائل بخش‌هایی را به صورت نقطه چین یا جای خالی باقی گذاشته‌ایم تا شما نیز در حل مسئله شرکت کنید و فعالیت‌ها را انجام دهید.

حل: اجزای تقسیم عبارتند از: مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده که باید آن‌ها را به دست آوریم. ابتدا یک تقسیم فرضی می‌نویسیم و فرض‌های مسئله، یعنی $a = 12r$ و $r = b - 1$ (حداکثر باقی‌مانده) را در آن قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} a &= bq + r \Rightarrow 12(b-1) = bq + (\dots) \\ \Rightarrow 12b - \dots &= bq + b - 1 \Rightarrow 11b - bq = 11 \\ \Rightarrow b(11-q) &= 11 \times 11 \Rightarrow \begin{cases} b = 11 \\ 11-q = \dots \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} b = 1 \\ 11-q = \dots \end{cases} \end{aligned}$$

حالت ۲ امکان‌پذیر است، زیرا اگر $11 - q = 11$ ، یعنی $q = 0$ که در این صورت با توجه به رابطه $a = bq + r$ خواهیم داشت: $a = \dots$ که با فرض مسئله، یعنی $a = 12r$ در \dots است. پس باید $b = 11$ و $11 - q = \dots$ یا $q = \dots$ باشد و بنابراین: $r = b - 1 = \dots$ یا $a = 12r$ یا $a = \dots$.

توجه دارید که اگر در طرف راست تساوی $*$ ، مثلاً عدد ۱۲ به دست می‌آید، می‌باید همه حالت‌هایی را که ضرب دو عدد طبیعی ($b \in \mathbb{N}$) مساوی با ۱۲ است، بررسی کنیم و با فرض‌های مسئله مطابقت دهیم تا تناقضی ایجاد نشود.

مسئله ۱: در یک تقسیم، اگر ۵۸ واحد از مقسوم کم کنیم، ۶ واحد از خارج قسمت کم و به باقی‌مانده ۲ واحد اضافه می‌شود. مقسوم‌علیه را در این تقسیم بیابید.

حل: برای حل این نوع مسائل ابتدا یک تقسیم فرضی به شکل $a = bq + r$ را در نظر می‌گیریم. سپس مفروضات و معلومات داده شده را روی این تقسیم پیاده می‌کنیم (توجه داریم که تساوی $a = bq + r$ فرض ماست و هر کجا که لازم باشد از این تساوی استفاده می‌کنیم).

$$\begin{aligned} \text{فرض‌های داده شده} \\ a &= bq + r \xrightarrow{\quad} a - 58 = b(q - 6) + r + \dots \\ \Rightarrow a - 58 &= bq - \dots + r + 2 \quad (*) \\ a = bq + r &\xrightarrow{\quad} -58 = -6b + 2 \Rightarrow -6b = -60 \Rightarrow b = \dots \end{aligned}$$

(توجه دارید که در تساوی $*$ ، اگر به جای a در سمت چپ طبق فرض قرار دهیم: $a = bq + r$ ، این مقدار از طرفین حذف می‌شود).

مسئله ۲: در یک تقسیم مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

مسئله ۳. بزرگ‌ترین عدد طبیعی چون a را بیابید که اگر بر ۱۹۳ تقسیم شود، باقی‌مانده تقسیم، چهاربرابر مکعب خارج قسمت باشد.

حل: طبق فرض‌های مسئله و تقسیم فرضی که در نظر می‌گیریم، داریم:

$$a = 193q + r, r = 4q^2, 0 \leq r < 193$$

اگر به جای r در تساوی قرار دهیم $4q^2$ ، خواهیم داشت: $a = 193q + 4q^2$ که یک معادله دوجمله‌ای از درجه ۳ بر حسب q است. اگر از نامساوی $0 \leq r < 193$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$0 \leq 4q^2 < 193, r = 4q^2 \Rightarrow 0 \leq 4q^2 < 193$$

نامساوی اخیر چون در Z بررسی می‌شود، به راحتی محدوده‌ای برای Z مشخص می‌کند و براساس آن محدوده‌ای برای a به دست می‌آید:

$$0 \leq q \leq 3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} 0 \leq q^3 \leq \dots \xrightarrow{\text{تقسیم بر 4}} 0 \leq 4q^3 < 193$$

واضح است که اگر داشته باشیم: $q=0$ ، در این صورت: $r = 4q^2 = \dots$ و لذا: $a=0$ که عددی طبیعی برای a به دست نمی‌آید. پس به ازای $q=1$ ، $q=2$ و $q=3$ برای a مقادیر مثبت و صحیح به دست می‌آید که به ازای $q=3$ بزرگ‌ترین مقدار برای a حاصل می‌شود:

$$q = 3 \Rightarrow r = 4q^2 = 4 \times 3 \dots = 108, a = 193q + r \Rightarrow a = 193 \times 3 + 108 \Rightarrow a = \dots$$

مسئله ۴. ثابت کنید در هر تقسیم دلخواه، اگر k برابر مقسوم‌علیه را به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و به خارج قسمت k واحد اضافه می‌شود.

حل: فرض کنیم تقسیم دلخواه ما به صورت $a = \dots$ مفروض باشد. پس می‌توان نوشت:

$$a + kb = bq + \dots + r \Rightarrow (a + kb) = \underbrace{b(q+k)}_{q'} + r (*)$$

در تساوی فرض، یعنی $a = bq + r$ ، همواره داریم: $0 \leq r < b$ و چون تغییر نکرده است، در تساوی $*$ نیز داریم $0 \leq r < b$. لذا باقی‌مانده همان r است و تغییر نکرده، ولی در تساوی $*$ داریم: $q' = q + k$ یعنی k واحد به خارج قسمت قبل اضافه شده و خارج قسمت جدید به دست آمده است.

نکته‌ای مهم و جالب

می‌دانیم که اگر x عددی حقیقی باشد، همواره می‌توان نوشت: $x = n + t$ که در آن داریم: $n \in Z$ و $0 \leq t < 1$. طبق تعریف، n همان جزء صحیح x نامیده می‌شود؛ یعنی $[x] = n$.

$$(3/7 = 3 + 0/7, -5/7 = -6 + 0/7, 12 = 12 + 0)$$

از طرف دیگر در قضیه تقسیم، با فرض اینکه $a \in Z, b \in N$ و $0 \leq r < b$ داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}, 0 \leq \frac{r}{b} < 1 \xrightarrow{\text{تعریف جزء صحیح}} q = \left[\frac{a}{b} \right]$$

با توجه به نکته فوق و بدون انجام مراحل تقسیم، باقی‌مانده تقسیم عدد ۱۳۹۷ را بر ۲۳ بیابید.

$$q = \left[\frac{a}{b} \right] = \left[\frac{1397}{23} \right] = 60, r = a - bq$$

$$\Rightarrow r = 1397 - (23 \times \dots) = \dots$$

مسئله ۵. عدد زوج n را بر ۳۷ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده تقسیم ۲۵ به دست می‌آید. اگر $\frac{n+4}{2}$ را بر ۳۷ تقسیم کنیم، باقی‌مانده چه عددی است؟

حل: طبق فرض و بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$n = 37q + 25 \Rightarrow n + 4 = 37q + \dots$$

از طرف دیگر، چون طبق فرض n زوج است و داریم: $n = 37q + 25$ پس q باید فرد باشد (چرا؟) یعنی باید، $q = 2k + 1$ که اگر در آخرین تساوی قرار دهیم: $q = 2k + 1$ ، خواهیم داشت:

$$n + 4 = 37(2k + 1) + 25 \Rightarrow \frac{n + 4}{2} = \frac{37 \times 2k}{2} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{n + 4}{2} = 37k + 33 \Rightarrow r = 33$$



۱. در یک تقسیم، ۶ واحد به مقسوم‌علیه و ۵۴ واحد به مقسوم اضافه کردیم و باقی‌مانده و خارج‌قسمت تغییری نکردند. خارج قسمت را بیابید (جواب: $q=9$).

۲. اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۵ و ۶ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌مانده تقسیم این عدد را بر ۳۰ بیابید.

۳. تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد طبیعی که وقتی بر ۹۷ تقسیم شوند، باقی‌مانده تقسیم از دو برابر مجذور خارج قسمت ۳ واحد بیشتر باشد، چه عددی است؟

۴. اگر در یک تقسیم، مقسوم ۹۰۰ واحد بیش از مقسوم‌علیه باشد و باقی‌مانده ۸۷ باشد، خارج‌قسمت را بیابید.



بازخوانی مسئله زمین پدر بزرگ

● **کاوه:** در واقع مسئله به طرز رسم مربعی ختم می‌شود که از هر ضلع آن فقط یک نقطه را در دست داریم.

● **شهریار:** کاوه جان حرفت کاملاً درست است، اما چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ من پیشنهاد می‌کنم تا فردا همگی روی این مسئله فکر کنیم.

فردا رسید و دوستان دور هم جمع شدند. از چهره‌ها معلوم بود که به جز بابک بقیه به نتیجه‌ای نرسیده‌اند. تصمیم گرفتند که جمشید نحوه پیدا کردن ابعاد زمین را توسط پدر و عموهایش برای آن‌ها تعریف کند.

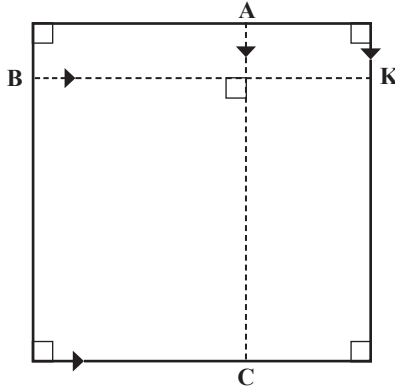
● **جمشید:** انجام کار برای آن‌ها هم ساده نبود. آن‌ها هم چند روزی فکر کردند. به خصوص که یکی از عموهایم مهندس بود و او بود که توانست مسئله را ختم به خیر کند.

در شماره ۱۰۹ «برهان ریاضی» و در ایستگاه چهارم اندیشه و ادب ریاضی (صفحه ۳۹)، مسئله زمین پدر بزرگ جمشید با قلم شیوای آقای هوشنگ شرقی به صورت زیر از طرف جمشید برای دوستانش کاوه، شهریار، فرهاد، بابک و مازیار مطرح شده بود.

● **جمشید:** پدر بزرگ من سال‌ها پیش از دنیا رفته بود. او زمینی داشت دقیقاً مربع‌شکل و دور تا دور زمین را درختان گردو کاشته بود. او قبل از آنکه از دنیا برود، وصیت کرده بود زمین را بین پدرم و سه پسر دیگرش به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند. ولی وقتی سر زمین رفتند، دیدند که عده‌ای از خدا بی‌خبر درختان دور زمین را قطع کرده و برده‌اند و فقط روی هر ضلع مربع یک درخت باقی مانده است. آن‌ها به چه روشی عمل کردند تا حدود زمین را مشخص کنند؟

راه حل عمومی به این صورت بود:

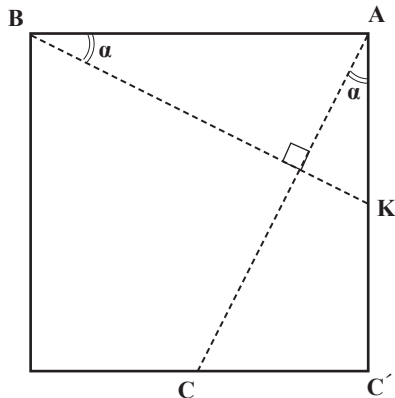
چهار درخت را در نقاط A, B, C و D در نظر می‌گیریم. (شکل ۱). AC را رسم می‌کنیم و سپس از B عمودی بر آن می‌کشیم. BK را مساوی AC جدا می‌کنیم. K را به D وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. اولین ضلع مربع روی امتداد DK است. سپس از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم تا امتداد دو ضلع دیگر مربع به دست آیند. از B بر این دو امتداد عمود رسم می‌کنیم تا مربع به دست آید.



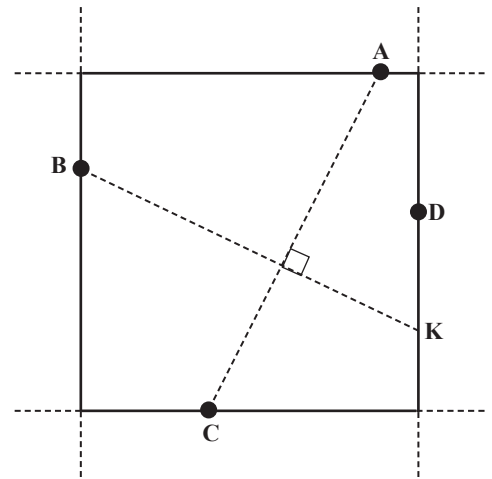
شکل ۲

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر AC بر دو ضلع مربع عمود نباشد (که به تبع آن موازی با دو ضلع دیگر هم نخواهد بود) آیا می‌توان BK را هم‌اندازه و عمود بر آن پیدا کرد به طوری که K هم روی ضلع چهارم مربع باشد؟

ابتدا حالت خاص شکل ۳ را در نظر گرفتیم و مشاهده کردیم: $AC=BK$ و $AC \perp BK$ و K نیز روی مربع واقع است. از آنجا به این فکر افتادم که ضرورتی نیست، نقاط A و B حتماً روی رأس‌ها باشند. چون می‌توان AC را به موازات خودش روی دو ضلع روبه‌رو و BK را نیز به موازات خودش روی دو ضلع روبه‌روی دیگر لغزاند که نه عمود بر هم بودند نشان دچار مشکل شود و نه هم‌اندازه بودندشان. بدین ترتیب بود که در حالت کلی از دو لم زیر استفاده کردم:

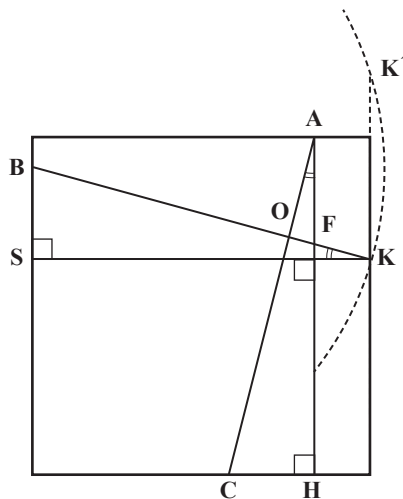


شکل ۳



شکل ۱

من از عمومی پرسیدم این راه از کجا به ذهن شما خطور کرد؟ و در ثانی، با رسم BK هم‌اندازه و عمود بر AC ، چه تضمینی است که K نقطه‌ای از مربع باشد؟
عموجان گفت: «اگر از یک ضلع مربع دو نقطه مانند D و K را داشته باشیم، مسئله همان‌گونه که دیدی به راحتی حل می‌شود. اما باید نقطه پنجم (K) را به دست آوریم. می‌دانیم در هر مربع ضلع‌های مجاور هم‌اندازه و بر هم عمودند. بنابراین اگر A و B دو نقطه واقع بر دو ضلع مجاور از یک مربع باشند و از آن نقاط خطوطی به موازات ضلع‌های مجاورشان رسم کنیم (AC و BK)، آن‌گاه BK و AC مساوی یکدیگرند (هم‌اندازه با ضلع مربع) و نیز بر هم عمود خواهند بود (زاویه‌های رأس‌های مربع قائمه هستند: $AC \perp BK$ و $AC=BK$).



شکل ۶

پس اگر دایره‌ای به مرکز B و به شعاع AC رسم کنیم، با ضلع چهارم و یا با امتداد آن در یک یا دو نقطه مشترک خواهد بود که یکی از آن نقاط K است و خواسته‌ی لم را تأمین می‌کند.

$$BK = AC, AH = KS \Rightarrow \triangle ACH \cong \triangle BSK \xrightarrow{\text{و-ض}} \hat{A} = \hat{K} \\ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{F} \Rightarrow \hat{O} = 90^\circ \Rightarrow BK \perp AC$$

نتیجه: اگر A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی باشند، آن‌گاه پاره‌خط BK هم‌اندازه و عمود بر AC وجود دارد که روی ضلع چهارم و یا در امتداد آن واقع است.

چهرهٔ بچه‌ها مملو از شادی بود؛ به‌خاطر حل شدن مسئله و هم به‌خاطر مطالب جدیدی که یاد گرفته بودند. فقط چهرهٔ فرهاد بود که نشان از کمی عدم رضایت داشت.

● **بابک:** من راه‌حل دیگری هم دارم. البته نه اینکه خودم حل کرده باشم، نه. دیروز سراغ کتاب‌های دایره‌المعارف هندسه رفتم و در یکی از آن کتاب‌ها راه‌حلی دیدم که برایتان آورده‌ام.

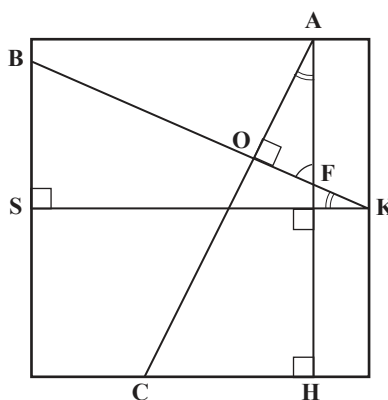
● **مازیار:** دایره‌المعارف هندسه؟ تا به حال اسمش را نشنیده بودم.

● **بابک:** دایره‌المعارف هندسه که توسط استاد محمدهاشم رستمی تألیف و جمع‌آوری شده و در «انتشارات مدرسه» به چاپ رسیده، بی‌نظیر است. تا امروز ۱۸ جلد آن چاپ شده و چند جلد دیگر آن آمادهٔ چاپ است.

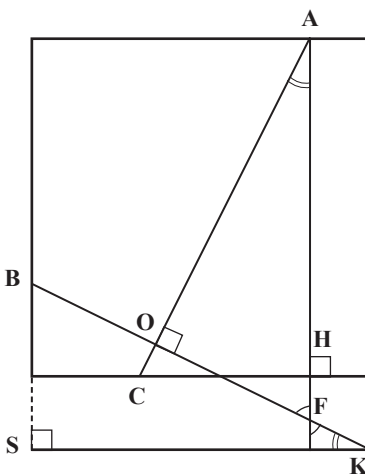
لم ۱: نقاط A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی را در نظر می‌گیریم. از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا ضلع چهارم یا امتداد آن را در K قطع کند. در این صورت: $BK=AC$.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 90^\circ - \hat{F} \\ \hat{K} = 90^\circ - \hat{F} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{K} \left. \begin{array}{l} \text{و-ض} \\ AH = KS \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و-ض}} \triangle AHC \cong \triangle BSK$$

و در نتیجه: $BK=AC$



شکل ۴



شکل ۵

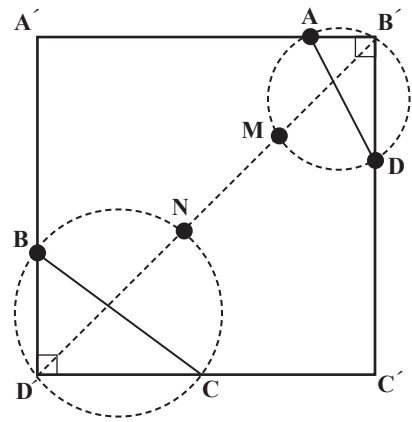
لم ۲: نقاط A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ K روی ضلع چهارم و یا در امتداد آن با شرط $AC=BK$ موجود است؛ به طوری که BK و AC بر هم عمودند.

در مربع به ضلع a داریم: $AC \geq a$

یکی از مهم‌ترین خصوصیت‌های این مجموعه، تفکیک کتاب‌ها با موضوع‌های مشخص است. فهرست‌بندی آن نیز فوق‌العاده دقیق است که پیدا کردن مسائل مربوط به موضوعی خاص را آسان‌تر می‌کند. در این کتاب‌ها، علاوه بر بیان و حل مسائل متنوع، قضیه‌ها و تعریف‌ها، حتی اشاره‌ای هم به تاریخ ریاضیات شده است.

راه‌حل دوم مسئله ۱

فرض کنیم مربع $A'B'C'D'$ همان مربع گذرا از چهار نقطه A, B, C, D باشد. داریم: $D'B' = 90^\circ$. بنابراین دایره به قطر AD از رأس B' و دایره به قطر BC از رأس D' خواهد گذشت.



شکل ۷

محل برخورد $B'D'$ (قطر مربع) را با دو دایره، نقطه‌های M و N می‌نامیم. نقطه M وسط کمان $\widehat{B'D'}$ و نقطه N وسط کمان $\widehat{A'D'}$ است. (قطر $B'D'$ نیم‌ساز زاویه‌های \hat{B}' و \hat{D}' است، پس: $\widehat{AM} = \widehat{MD}$ و $\widehat{BN} = \widehat{NC}$) اکنون به شرح زیر عمل می‌کنیم: دایره‌های BC و دایره دیگری به قطر AD رسم و وسط‌های دو کمان \widehat{BC} و \widehat{AD} را به هم وصل می‌کنیم (M وسط \widehat{AD} و N وسط \widehat{BC} است). امتداد MN دو دایره را در نقطه‌های B' و D' قطع می‌کند. از نقطه B' دو خط گذرا از A و D و از نقطه D' دو خط گذرا از B و C رسم می‌کنیم. این خط‌ها در نقاط A' و C' متقاطع خواهند بود و مربع $A'B'C'D'$ همان مربع خواسته شده است.

گویا سؤالی ذهن فرهاد را بد جوری به خودش مشغول کرده بود و می‌شد به وضوح آن را در چهره او دید. بچه‌ها مشغول صحبت بودند، اما فرهاد گوشه‌ای با قلم و کاغذی که در دست داشت، غرق فکر بود. توجه همه بچه‌ها به فرهاد جلب شد. مازیار پرسید: «چی شده؟ مشکلی پیش آمده؟»

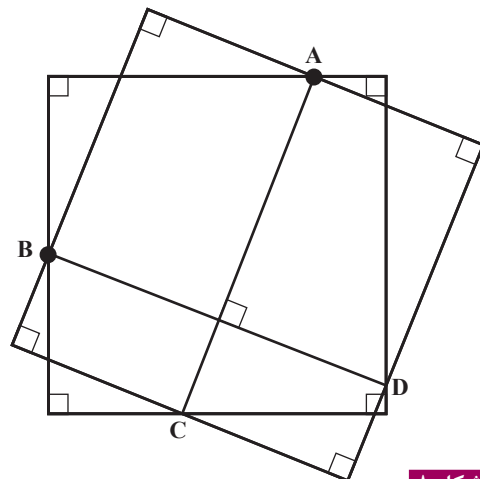
● **فرهاد:** صبر کنید، مسئله همیشه جواب یکتا ندارد. الان متن کامل آن را می‌نویسم...

دقایقی بعد، او متن زیر را ارائه کرد:

«اکنون به یک مشکل بر می‌خوریم: اگر در راه‌حل اول، نقطه K بر نقطه D منطبق باشد، یعنی چهار نقطه A, B, C, D چنان باشند که: $AC=BD$ و $AC \perp BD$. در این صورت امتدادی به نام DK خواهیم داشت و امتداد اولین ضلع از مربع به دست نخواهد آمد. همچنین در راه‌حل دوم، اگر وسط دو کمان یعنی نقطه‌های M و N بر هم منطبق باشند، در آن صورت امتدادی به نام MN خواهیم داشت تا دایره‌ها را در نقاط B' و D' قطع کنند و در این صورت دو رأس از مربع به دست خواهند آمد. این مشکل زمانی رخ می‌دهد که مانند مشکل راه‌حل اول، $AC=BD$ و $AC \perp BD$ باشد.

به‌عنوان تمرین دلیل انطباق M و N را در حالت خاص فوق اثبات کنید.

پس نتیجه می‌گیریم که در صورت مسئله باید قید می‌شد که دو پاره‌خط واصل بین درخت‌های روبه‌رو در زمین پدربزرگ جمشید، هم‌اندازه و عمود بر هم نیستند.



شکل ۸

* پی‌نوشت
۱. از صفحه ۱۷۶ دایرة‌المعارف
هندسه، جلد ۱۳

آشنایی با احتمال و کاربردهای آن



مقدمه تاریخی

منشأ پیدایش حساب احتمال پرسش‌هایی بود که در قرن هفدهم، شخصی که در بازی‌های شانسی حرفه‌ای بود برای پاسکال، فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، دربارهٔ امکان وجود روش‌های علمی برای برنده شدن در بازی‌های شانسی مطرح کرد. این شاخه از ریاضیات از آن زمان تاکنون پیشرفت‌های زیادی کرده است و از روش‌ها و نتایج آن در همهٔ رشته‌های دانش بشری استفاده می‌شود.

در دوران قبل از تاریخ نیز احتمال برای بشر به صورت‌های متفاوت، به خصوص به صورت نقش شانس، وقوع اتفاق‌های تصادفی و دیگر موارد ظاهر شده است. ولی فقط در این اواخر آن را از دید علمی مورد بررسی دقیق قرار داده‌اند که این خود یکی از نقاط ضعف تاریخ فرهنگ بشری است.

بازی‌هایی که به شانس متکی هستند، از زمان‌های بسیار دور رایج و متداول بوده‌اند. در حفاری‌های باستان‌شناسان، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده شده است. با این شواهد به نظر می‌رسد که نوعی تصور خام از احتمال در تصمیم‌گیری‌ها مؤثر بوده است.

استفاده از شانس برای بعضی از مقاصد قضایی و فرهنگی متداول و عمل به آن در محاکمه‌های مشکل معمول بوده است. برای مثال، در مواردی که تعیین مقصر بسیار مشکل می‌نمود، عموماً به شانس توسل می‌جستند و معتقد بودند که با این روش قوای ماوراءالطبیعه دخالت می‌کنند و مقصر معلوم خواهد شد.

امروزه در مواردی که بی‌هیچ شکی نمی‌توان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می‌شود. برای مثال، هیئت منصفه معمولاً با قرعه انتخاب می‌شود، و در

اغلب مسابقات برای شروع بازی از پرتاب سکه بهره می‌گیرند. جامعه‌شناسان معتقدند که تکیه بر شانس، ناشی از آن است که همهٔ عوامل مؤثر در یک تصمیم‌گیری را نمی‌توان یکدفعه و یکجا در نظر گرفت. مثلاً در شرایطی که انسان قادر به تصمیم‌گیری نیست، به طالع‌بینی، پیش‌گویی، و... روی می‌آورد و از این طریق بر شانس تکیه می‌زند. این قبیل کارها، صرفاً نوعی تسکین برای کسانی است که به علت بی‌خبر بودن از حال و آیندهٔ خود در تلاطم‌اند.

به نظر می‌رسد که از زمان‌های بسیار دور، شانس تأثیر زیادی در تکامل و بقا داشته است. بعضی از قبایل شکارگاه‌های خود را به تصادف انتخاب می‌کردند. اگرچه انتخاب تصادفی شکارگاه‌ها در آن زمان بی‌اساس و بی‌محتوا جلوه می‌کند ولی یکی از اثراتش این است که دست‌کم مانع انهدام کامل شکارهای یک منطقه و یا احياناً برخورد‌های قبیله‌ای بر سر شکارگاه‌ها می‌شده است. حتی مشاهده شده که در بعضی موارد، انتخاب همسر نیز براساس شانس انجام می‌گرفته است. این عمل در جوامع آن روزگار دست‌کم راهی برای تثبیت تنوع ژن‌ها می‌توانسته باشد.

با وجود این همه کاربرد و اهمیت شانس در جوامع بشری، متفکران معتبر تا قبل از عصر علوم جدید (علوم متکی بر تجربه) آن را یا انکار کردند و یا اگر قادر به انکار آن نبودند، از دیدگاه علمی آن را قابل بحث نمی‌دانستند.

توماس اکویناس (Thomas Aquinas) معتقد بود که شانس چیزی جز تقارن و وحدت دو یا چند علت نیست. به عقیدهٔ وی، مرموز جلوه دادن شانس تنها به این علت است که فهم بشری نمی‌تواند تمام علل را دریابد و تأثیرات متقابل آن‌ها را درک کند. در مثال معروفی می‌گویند: «رابایی را در نظر بگیرید که

احتمال از دیدگاه تاریخی و کاربردی

اکنون در اینجا چند مسئله تاریخی در زمینه احتمال را مطرح می‌کنیم و به صورت مختصر روش حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

مسئله ۱. احتمال اینکه دو عدد صحیح مثبت که به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، تابعی از عدد π و برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ است. لازم به ذکر است که چارتر مشهور در حدود سال ۱۹۰۴ این حکم ریاضی را به‌طور تجربی آزموده است. به این ترتیب که به هر یک از ۵۰ شاگردش گفت پنج جفت عدد صحیح مثبت را به‌طور تصادفی بنویسند. از میان ۲۵۰ جفت عددی که به این طریق به‌دست آمد، ۱۵۴ جفت نسبت به هم اول بودند و احتمال برابر $\frac{154}{250}$ بود. او این نسبت را برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ گرفت و عدد $\frac{3}{12}$ را به‌دست آورد که نزدیک به عدد π است: $\pi = 3.141592\dots$

*** فعالیت ریاضی:** دانش‌آموزان عزیز می‌توانند این کار را با تعداد بیشتری از دوستان خود در مدرسه آزمایش کنند و به نتایجی شگفت‌انگیز دست یابند و نشان دهند با چه تعداد آزمایش، حاصل به عدد واقعی π ، یعنی $\frac{3}{14}$ خواهد رسید. با افزایش نفرات، به عدد $\frac{3}{14}$ (با چهار رقم اعشار درست) برای عدد π به‌طور تجربی و به کمک احتمال خواهند رسید. (نتایج را در جدولی ثبت و به مربیان خود نشان دهید). این موضوع شگفت‌آور است؛ اینکه انتخاب تصادفی جفت‌هایی از عددهای صحیح مثبت بتواند ارتباطی با عدد π داشته باشد، دور از تصور است. چشم‌انداز محاسبه عملی مقدار π از طریق آزمایش‌های تکراری که ضمن آن‌ها تولیدکننده جفت‌های عددهای صحیح نمی‌داند از این جفت‌ها چه استفاده‌ای می‌شود، به کلی باورنکردنی به نظر می‌رسد.

متذکر می‌شویم، ریاضیاتی که برای نشان دادن برابری احتمال فوق با $\frac{6}{\pi^2}$ لازم است، فراتر از محدوده‌ای است که برای بحث قائل شده‌ایم. با این حال، اگر دخالت π در چنین نتایجی شگفت‌آور است، ملاحظه مثال ساده دیگری که مطرح می‌کنیم، تا حدی این شگفتی را توجیه می‌کند.

مسئله ۲. فرض می‌کنیم دو عدد مثبت x و y که هر دو کوچک‌تر از عدد ۱ هستند، به تصادف انتخاب و نوشته شود.

احتمال اینکه همراه با عدد ۱، یک سه‌تایی $(x, y, 1)$ از اعداد به‌دست آید که اضلاع یک مثلث منفرجه‌الزاویه باشند، برابر با $\frac{\pi - 2}{4}$ است.

دو خدمتکار دارد. به هر کدام از آن‌ها جداگانه دستور می‌دهد، در زمان معینی در مکان معینی باشند. از آنجا که خدمتکاران از نقشه‌آرباب خبر ندارند، این تقارن و برخورد در یک زمان و مکان را امری تصادفی تلقی می‌کنند و حال آنکه اگر آن‌ها اطلاعات آرباب خود را می‌داشتند، هیچ‌گاه به توجیهات متکی بر شانس توسل نمی‌جستند.»

در ادامه همین طرزتفکر، اسپینوزا (*Spinoza*) ادعا کرد که هر چیزی بنا بر ضرورت طبیعت تعیین شده‌است و به طریق مشخص عمل می‌کند. نسبت دادن شانس به یک رویداد، به‌طور صرف بیانگر نقص اطلاعات ماست. وی همانند اکویناس شانس را بی‌اساس و موهوم می‌داند و عقیده دارد: «شانس چیزی جز ناآگاهی ما از حقایق نیست». توجه به این مطلب مهم است که ناسازگاری شانس با مقولاتی نظیر اراده آزاد، مسئولیت و... فیلسوف را از رسیدن به نسخه‌ای قطعی در زمینه شانس تقریباً محروم می‌سازد. بررسی هرچند کوتاه این قبیل مقولات که به شانس مربوط می‌شوند، خود به مقالات متعدد نیاز دارد که در این مختصر نمی‌گنجد.

در قرون وسطا که کشفیاتی در ستاره‌شناسی، فیزیک و طب به‌دست آمد، دیگر برای علوم آکادمیک جای آن نبود که نقش تجربه و داده‌های تجربی را انکار کنند. از اینجا نقطه عطفی در علوم آغاز شد. از جمله فیلسوفان بزرگی که در این مقطع می‌توان از آن‌ها یاد کرد، فرانسس بیکن (*Fransis Bacon*) است که نوشته‌های او بی‌شک بیشترین انتقاد را از روش‌های علمی گذشتگان در بردارد.

او متفکران را به تغییر رویه از روش‌های علمی تجربیدی به روش‌های تجربی دعوت کرد و خواستار ابداع روش‌هایی شد که به کمک آن‌ها بتوان داده‌های تجربی و نتایج به‌دست آمده از مشاهدات را تفسیر کرد. به این منظور است که بیکن را پدر روش‌های علمی - تجربی می‌دانند که همان روش علوم امروزی است.

با رشد و ترقی و توسعه روش‌های تجربی، توسعه علم احتمال نیز آغاز شد. لازم به ذکر است که مقدار خیلی کمی از محاسباتی که به‌طور صوری در احتمال آغاز شد، مربوط به علوم تجربی می‌شد. طی سال‌های متمادی، احتمال به‌طور کامل به محاسباتی در بازی‌های شانسی اختصاص داشت. به همین دلیل است که شروع رسمی تاریخ احتمال، مصادف با انتشار مقالاتی درباره بازی‌های شانسی در اواخر دوره رنسانس در ایتالیا است.

اگر نامعادله (۱) برقرار باشد، از $(x, y, 1)$ مثلثی به دست خواهد آمد، ولی چنین مثلثی ممکن است حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه و یا منفرجه‌الزاویه باشد. برای ملاحظه این مطالب که نوع زاویه به مقدار $x^2 + y^2$ بستگی دارد، قانون کسینوس‌ها را در مثلث ABC به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 = 1 + 2xy \cos \hat{A} \quad (2)$$

(توجه داریم که رابطه کسینوس‌ها چنین است:

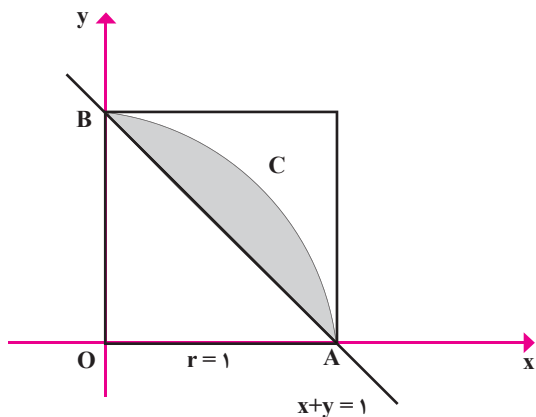
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad \text{پس:}$$

$$(1^2 = y^2 + x^2 - 2xy \cos \hat{A})$$

در رابطه (۲)، اگر \hat{A} زاویه‌ای منفرجه باشد، $\cos \hat{A}$ منفی است و در غیراین صورت چنین نیست. پس شرط اینکه ΔABC منفرجه‌الزاویه باشد، این است که داشته باشیم:

$$x^2 + y^2 < 1 \quad (3)$$

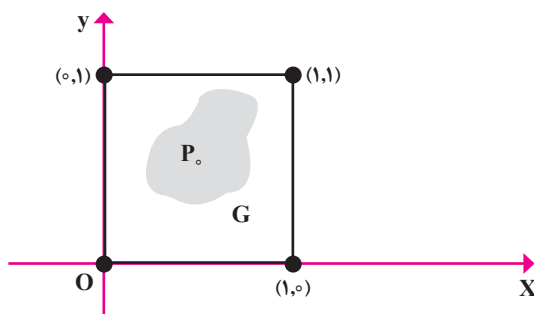
حال نقاط (x, y) که در نابرابری $x+y > 1$ صدق می‌کنند، در بالای قطر AB از مربع واحد قرار دارند (مطابق شکل ۳).



شکل ۳

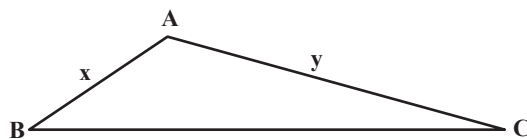
و نقاطی که در نابرابری (۳) صدق می‌کنند، داخل دایره‌ای به شعاع واحد ($r=1$) قرار دارند (زیرا برای نقاط روی دایره داریم: $x^2 + y^2 = 1$). پس، مجموعه نقاطی که هم در نابرابری (۱) و هم در نابرابری (۳) صدق می‌کنند، در ناحیه سایه‌دار بین ربع دایره و قطر مربع قرار دارند. بنابراین احتمال اینکه مثلث منفرجه‌الزاویه‌ای را به دست دهد، چنین است:

برای توجیه این ادعا، ملاحظه می‌کنیم که هر جفت از عددی‌های x و y نقطه‌ای مثل $P(x, y)$ را در مربع واحد مشخص می‌کنند (مطابق شکل ۱) که مختصات آن (x, y) است. چون هر یک از مختصات به تصادف از بازه واحد انتخاب می‌شود، احتمال قرار گرفتن نقطه متناظر $P(x, y)$ در هر جای مربع یکی است. به بیان دقیق‌تر، احتمال اینکه P داخل ناحیه‌ای مانند G از مربع قرار گیرد، برابر است با نسبت مساحت G به مساحت کل مربع (شکل ۱). چون مساحت مربع برابر با واحد است، احتمال قرار گرفتن P در G برابر با مساحت G است.



شکل ۱

اکنون مثلثی به اضلاع x , y و ۱ در نظر می‌گیریم (مطابق شکل ۲):



شکل ۲

هر یک از ضلع‌های x و y که هر دو از یک کوچک‌ترند، از ضلع $BC=1$ کوچک‌تر هستند. چون بزرگ‌ترین زاویه مثلث، مقابل به بزرگ‌ترین ضلع است، می‌بینیم که زاویه‌های B و C کوچک‌تر از زاویه A هستند. و چون فقط یک زاویه هر مثلث می‌تواند منفرجه باشد، در مثلث ABC اگر چنین زاویه‌ای وجود داشته باشد، زاویه A است. حال برای اینکه طول‌های x , y و ۱ هر نوع مثلثی تشکیل دهند، مجموع هر دو تا از آن‌ها باید بیش‌تر از سومی باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$x+y > 1 ; 1+x > y ; 1+y > x$$

پس شرط اینکه مثلثی تشکیل شود، در حالت عمومی و به‌طور خلاصه چنین است (دو حالت دیگر بدیهی است):

$$x+y > 1 \quad (1)$$



اشاره شود و آن مسئله بسیار شگفت آور «سوزن بوفون» (بوفمن) است. این مسئله در واقع راه‌حلی تقریبی است برای به‌دست آوردن عدد پی (π) و ابتدا از سوی ژرژ-لویی کلاک کنت دو بوفون مطرح شده است.

مسئله ۳. فرض کنید یک برگه یا سطحی داریم که روی آن به فواصل معین خطوط موازی کشیده‌ایم. با فرض اینکه فاصله خطوط ۱ باشد، سوزنی به طول ۱ واحد انتخاب می‌کنیم.

(این سوزن می‌تواند بیشتر یا کمتر از ۱ واحد نیز باشد). سوزن را به دفعات (بیش از ۳۰۰ مرتبه) به‌طور تصادفی روی برگه یا صفحه می‌اندازیم. تعداد دفعاتی را که سوزن یکی از آن خطوط را قطع می‌کند، نسبت به کل دفعات می‌سنجیم. این نسبت (یعنی در واقع احتمال برخورد سوزن به خطوط موازی) حدود $\frac{1}{\pi}$ می‌شود. و این مستقل از نسبت طول سوزن به فاصله دو خط موازی است. هرچه تعداد دفعاتی که سوزن را می‌اندازیم رو به بی‌نهایت میل کند، تقریب عدد پی (π) به خودش نزدیک‌تر می‌شود. حالت خاص این قضیه چنین است:

اگر طول سوزن به‌طور دقیق نصف فاصله بین خطوط باشد، احتمال برخورد به خطوط $\frac{1}{\pi}$ می‌شود.

(برای اطلاع بیشتر دربارهٔ اثبات، در اینترنت Buffon's Needle را جست‌وجو کنید).

مساحت مثلث AOB - مساحت ربع دایره AOB = مثلث قطعه ABC

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\pi(1^2) - \frac{1}{4}(1)(1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{\pi - 1}{4} \end{aligned}$$

در اینجا حکم ثابت می‌شود.

به مسائل تاریخی بسیاری در مورد احتمال می‌توان اشاره کرد که در رابطه با علوم پایه هستند؛ از جمله موضوع‌های زیر:

- é اصل عدم قطعیت هایزنبرگ؛
- é اصل مکملی؛
- é الکترومغناطیسی؛
- é بستهٔ موج؛
- é تابع احتمال؛
- é تابع موج؛
- é مکانیک کوانتومی؛
- é معادلهٔ شرودینگر.

و بسیاری از موضوع‌های دیگر که بدون تابع احتمال و بررسی احتمالی وقوع رویداد موردنظر و بدون وارد کردن قوانین احتمال، امکان تصمیم‌گیری و نتیجه‌گیری نزدیک به غیرممکن بود. در اینجا لازم است که به یکی دیگر از مسائل مهم تاریخی در مورد احتمال

(قسمت اول)

آزمایشگاه ریاضی

مقدمه

ریاضیات در تمام شاخه‌های آن به زندگی واقعی مربوط می‌شود و به‌کارگیری مفاهیم آن در فعالیت‌های روزانه به زندگی راحت‌تر و جذابی منجر می‌شود. ریاضیات اساس موفقیت در مباحث متنوع دوران تحصیل دانش‌آموز است و آزمایشگاه ریاضی می‌تواند تا حد زیادی به پیشرفت سطح دانش ریاضی او کمک کند.

آزمایشگاه ریاضی مکانی است که دانش‌آموز در آن مفاهیم ریاضی را طی انجام فعالیت‌های متفاوت و استفاده از انواع ابزارهای کمک‌آموزشی یاد می‌گیرد و آن‌ها را توسعه می‌دهد. این فعالیت‌ها ابتدا با حضور معلم انجام می‌شوند و در ادامه ممکن است توسط خود دانش‌آموز به منظور یادگیری بهتر گسترش یابند و با هدف ایجاد انگیزه و علاقه در وی برای توسعه دانش ریاضی او دنبال شوند. گرچه ریاضیات علمی تجربی نظیر فیزیک، شیمی یا زیست‌شناسی نیست، آزمایشگاه ریاضی قادر است سهمی بسزا در یادگیری مفاهیم متفاوت ریاضی و ایجاد مهارت در حل مسئله را دارا باشد. بر این اساس مجموعه مقالاتی با این عنوان به‌منظور آشنایی دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه دبیرستان ارائه می‌شود تا با چگونگی انجام فعالیت‌ها در آزمایشگاه ریاضی آشنا شوند.

معرفی آزمایشگاه ریاضی و هدف‌های آن

امروزه سبک آموزش ریاضی به‌گونه‌ای تغییر کرده است که به دانش‌آموزان فرصت‌هایی برای بیان ایده‌های آن‌ها داده می‌شود. این فرصت‌ها به‌منظور ایجاد خلاقیت در امر یادگیری ریاضی داده می‌شوند. تحقق این امر مستلزم ایجاد مکانی است که امکان اخذ بازخورد سریع از معلمان و دانش‌آموزان فراهم باشد. آزمایشگاه ریاضی چنین فرصت‌هایی را به‌وجود می‌آورد.

در کلاس‌های عادی ریاضی چنین فرصت‌هایی برای دانش‌آموز مهیا نمی‌شود. آن‌ها غالباً شنونده هستند و

آنچه را که معلم تدریس می‌کند، مشاهده و یادداشت می‌کنند. به مهارت‌های حل مسئله و تحلیل مسائل و توسعه آن‌ها هم توجهی نمی‌شود. آزمایشگاه ریاضی این ویژگی را خواهد داشت که به یادگیرنده فواید طولانی‌مدت را ارائه می‌دهد، طوری که آموخته‌های وی فراموش نخواهد شد. این آزمایشگاه جایی است که دانش‌آموز می‌تواند مفاهیم ریاضی را بیاموزد و آن‌ها را توسعه دهد، قضا و واقعیت‌های ریاضی را طی فعالیت‌هایی و با به‌کارگیری ابزارهای کمک‌آموزشی متنوعی اثبات کند و در آنجا با مدل‌سازی، آزمایش و محاسبه یک مفهوم ریاضی را درک کند.

هدف‌های تشکیل آزمایشگاه ریاضی عبارت‌اند از:

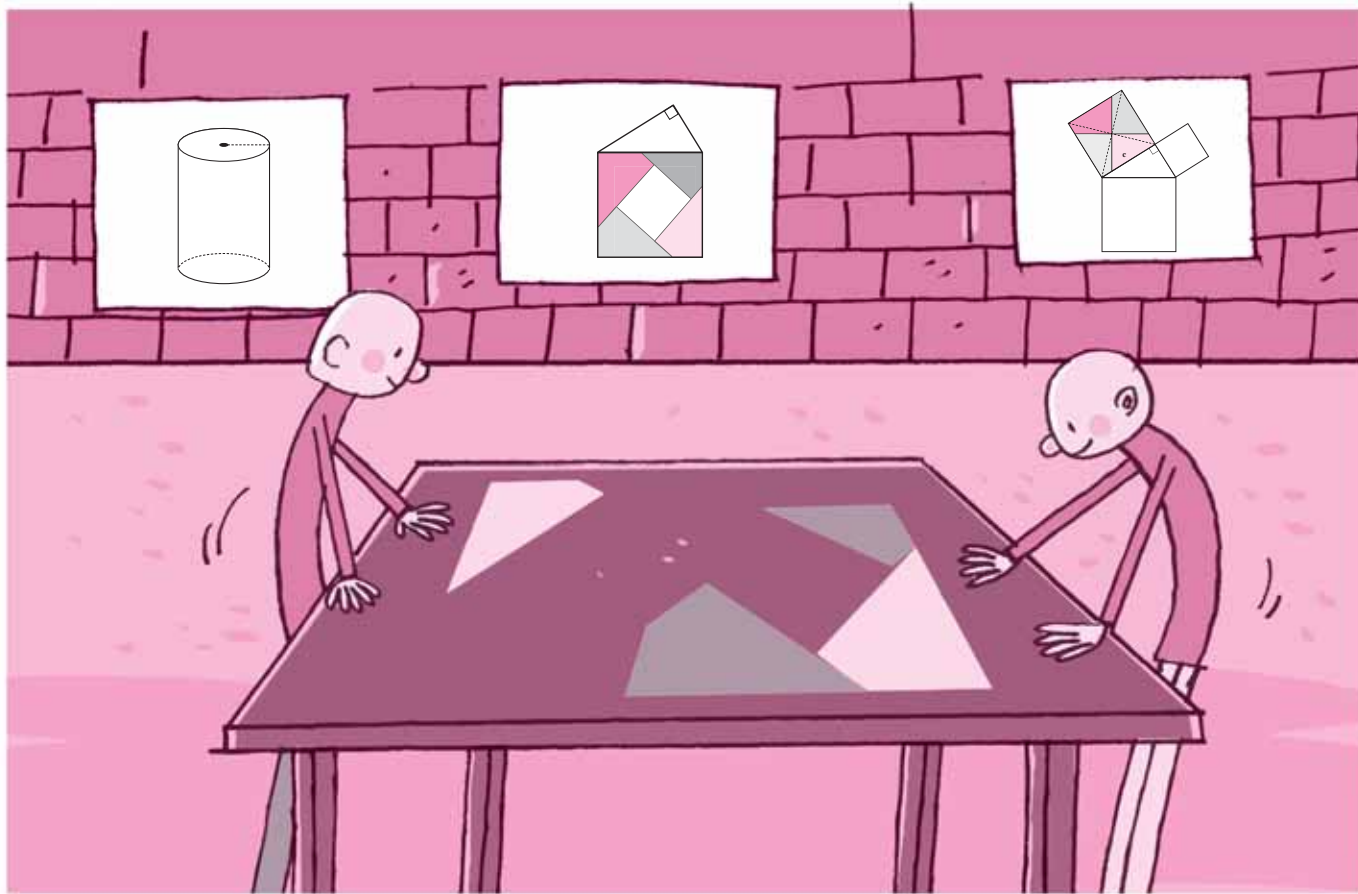
۱ کمک به دانش‌آموز برای آنکه به راحتی و با علاقه یک موضوع درسی را فراگیرد و رابطه بین مفاهیم ریاضی و زندگی روزمره را به نمایش بگذارد.

۲ ارائه قلمرو بیشتری برای مشارکت فردی و تشویق دانش‌آموزان به اینکه به یادگیرنده‌هایی خودمختار و مستقل تبدیل شوند. آزمایشگاه اجازه می‌دهد، هر دانش‌آموز در فضای ذهنی خود قرار بگیرد و با بهره‌گیری از دست و ذهن وسیع‌تر خود، به سهولت نسبت به موضوع شناخت پیدا کند.

۳ مهیا ساختن این امکان که دانش‌آموزان با همراهی معلم به تفکر و بحث با یکدیگر بپردازند و مفاهیم ریاضی را به شکل مؤثری تلفیق کنند. این شرایط فرصتی را برای فهم دقیق قوانین و واقعیت‌های ریاضی پدید می‌آورد تا دانش‌آموز این قاعده‌ها را در خودش درونی کند و آن‌ها را با استفاده از مدل‌سازی و روش‌های مربوطه کشف و اثبات کند.

۴ اعطای این توانمندی به معلم که ایده‌های ریاضی را با به‌کارگیری شیء‌ها، مدل‌ها، نمودارها، عکس‌ها، رایانه، نرم‌افزارهای ریاضی و سایر ابزارهای کمک‌آموزشی نشان دهد و تشریح کند و انگیزه یادگیری را در دانش‌آموز بالا ببرد.

۵ فراهم آوردن این امکان که دانش‌آموز فعالیتی را چندین بار تکرار و آن را اصلاح کند و دوباره



ریاضی براساس توانمندی‌های دانش‌آموز، ایجاد علاقه در جهت تفکر روی یک مسئله ریاضی و حل آن از طریق اصول و قوانین ریاضی، و در نهایت، به کارگیری این تفکر در زندگی خود، از هدف‌های موردنظر این آزمایشگاه است.

آزمایشگاه ریاضی سال‌هاست که در مدرسه‌های کشورهای چین، ژاپن و آمریکا برپا شده است و رضایت‌مندی دانش‌آموزان و اولیای آن‌ها و معلمان را به همراه داشته است. طراحی اولیه آزمایشگاه ریاضی به هزینه بالایی نیاز ندارد و با ابزارهای کمک‌آموزشی و لوازم و وسایلی برای مدل‌سازی و در نهایت تعدادی رایانه، این مکان تجهیز می‌شود. انتظار می‌رود چنین مکانی در هر مدرسه‌ای ایجاد شود و بر حسب نیازمندی‌ها و آنچه که قرار است در آن مورد آموزش قرار گیرد، تجهیز شود و تغییرات لازم در گذر زمان و به منظور ارتقای آن داده شود. در این آزمایشگاه می‌توان شخصی را با تخصص

روی مسئله فکر و آن را حل کند. این امر به توسعه توانایی تشخیص او کمک می‌کند و سبب علاقه‌مندی و سهولت در یادگیری می‌شود. ضمن آنکه تنوع روش‌ها در حل یک مسئله بر موضوع راه‌حل‌های چندگانه در یادگیری تأکید می‌کند.

ساختن محیطی مساعد و شادی‌بخش برای دانش‌آموزان تا طی انجام فعالیت به شکل عملی، با احساس و روحیه مثبتی موضوع موردنظر را یاد بگیرند. در این راستا معلم نقش بسزایی در بالا بردن انگیزه یادگیری و افزایش این حس خوب خواهد داشت که به شکوفایی استعدادها و نهفته دانش‌آموزان، با استفاده از روش‌های نوین و طرح مسائل ابتکاری و پرورش روحیه نوآوری و خلاقیت و ایجاد تفکر بر پایه استدلال‌های ریاضی منجر می‌شود. به کارگیری رایانه و نرم‌افزارهای آموزش ریاضی و بهره‌مندی از شبکه اینترنت به منظور آموزش مجازی، آموزش مدل‌سازی

**آموزش با رایانه
و به کارگیری
نرم افزارهای
آموزشی، چون
«جئوجبرا»،
«متمتیکا» یا
«متلب»، حائز
اهمیت است**

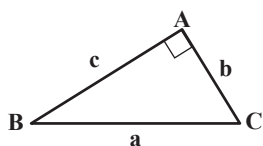
ابزارهای کمک آموزشی به منظور به دست آوردن یک رابطه یا قانون ریاضی ارائه می دهیم تا آشنایی اولیه با آزمایشگاه ریاضی حاصل شود.

فعالیت اول: قضیه فیثاغورس

معمولاً در اثبات های مربوط به هندسه در آزمایشگاه ریاضی از روش برش، تا کردن و چسباندن کاغذ استفاده می شود. هدف اولیه این فعالیت اثبات قضیه فیثاغورس در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع a ، b و c است که a ضلع روبه رو زاویه قائمه فرض می شود.

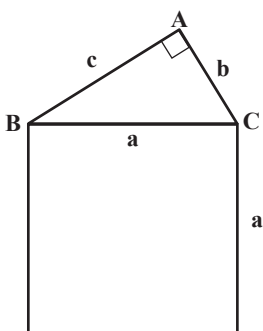
مراحل انجام این فعالیت به صورت زیر است:

۱. مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع a ، b و c سانتی متر، مطابق شکل ۱، رسم و آن را برش زده و روی یک صفحه مقوایی بچسبانید.



شکل ۱

۲. مربعی به ضلع a سانتی متر رسم کنید و برش دهید. سپس آن را مطابق شکل ۲ در کنار ضلع a مثلث قائم الزاویه بچسبانید.



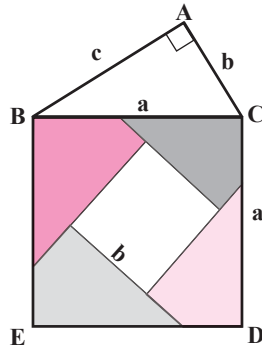
شکل ۲

۳. به طور مشابه دو مربع دیگر به اضلاع b سانتی متر و c سانتی متر بریده و آن ها را هم در کنار اضلاع متناظر دو مثلث مطابق شکل ۳ بچسبانید.

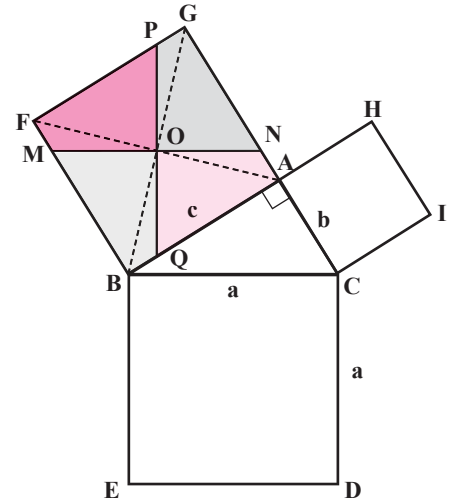
ریاضی در حد کارشناسی به کار گمارد که به نوعی دستیار معلم محسوب می شود. او باید دارای مهارت های خاص در انجام فعالیت های عملی باشد. در حال حاضر تقریباً تمام دبیرستان ها دارای آزمایشگاه در درس های فیزیک، شیمی و زیست شناسی هستند و برقراری آزمایشگاه ریاضی در کنار این آزمایشگاه ها، همان طور که در این علوم تجربی یادگیری مطالب را به شکل عملی تقویت می کند، در علم ریاضی نیز مثر خواهد بود. فعالیت های آزمایشگاه ریاضی به زمینه های متفاوت نظیر هندسه، حساب و جبر و... تعلق دارند که به شکل فردی یا گروهی و با راهنمایی و هدایت معلم انجام می گیرند. ضمن آنکه برخی از این فعالیت ها در کلاس درس هم قابل اجرا هستند. موضوع آموزش ریاضی در آزمایشگاه ریاضی می تواند در برنامه آموزشی منظم دوران تحصیلی دانش آموزان به صورت الزامی گنجانده شود و همانند سایر آزمایشگاه های علوم، مکمل آموزش کلاسی تلقی شود. فرایند ارزیابی و سنجش دانش آموزان در درس ریاضی هم می تواند مبتنی بر اخذ حداقل امتیاز کسب شده در آزمایشگاه باشد. این امتیاز توسط متصدی آزمایشگاه یا خود معلم، در قالب های متفاوت، نظیر مهارت های تحقیق گروهی و انجام پروژه هایی خاص در آزمایشگاه یا حتی منزل، در راستای افزایش کارایی علمی دانش آموزان به همراه کسب مهارت های اجتماعی داده می شود. بدین منظور معلمان ارجمند باید از روش هایی استفاده کنند که به افزایش تجربیات آموزشی آن ها در امر آموزش ریاضی بینجامد. بر این اساس، مسئولان امر طی دوره های آموزشی باید معلمان ریاضی را به گونه ای آماده کنند که مهارت های لازم را به منظور استفاده از آزمایشگاه ریاضی در کلاس های ریاضی یا مکانی که بدین منظور طراحی شده است، به دست آورند.

در این راستا، آموزش با رایانه و به کارگیری نرم افزارهای آموزشی، چون «جئوجبرا»، «متمتیکا» یا «متلب»، حائز اهمیت است. در واقع آزمایشگاه ریاضی باید طوری اجرا شود که دانش آموز نه فقط در زمان های حضور در مدرسه بتواند فعالیت های آن را انجام دهد، بلکه در اوقات فراغت هم قادر باشد، چنین فعالیت هایی را انجام دهد. در ادامه دو نمونه از فعالیت مقدماتی در درس هندسه را با استفاده از وسایل و

یعنی در مثلث قائم‌الزاویه ABC، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.



شکل ۴



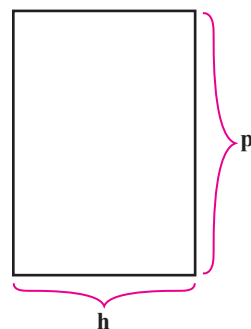
شکل ۳

به عنوان نمونه در انجام این فعالیت می‌توان اضلاع مثلث ABC را ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر در نظر گرفت. در حالت کلی سه عدد که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، سه‌تایی‌های فیثاغورسی نام دارند.

فعالیت دوم: محاسبه حجم استوانه و مخروط دوار قائم

در این فعالیت روشی ساده و عملی برای یافتن فرمول حجم استوانه و مخروط ارائه می‌شود. البته این روش یک اثبات دقیق ریاضی فرمول نیست، ولی به صورت توصیفی و شهودی ذهن دانش‌آموز را برای پذیرفتن این فرمول‌ها آماده می‌کند. ابتدا حجم یک استوانه دوار قائم را محاسبه می‌کنیم.

۱. صفحه‌ای مقوایی بردارید و روی آن مستطیلی به طول p سانتی‌متر و عرض h سانتی‌متر مطابق شکل ۵ برش دهید. (به‌عنوان مثال، $p=3\text{ cm}$ و $h=2\text{ cm}$).



شکل ۵

۴. اکنون تمام رأس‌های مربع‌ها را مطابق شکل ۳ نام‌گذاری کنید.

۵. قطرهای مربع ABFG را رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه‌ای چون O قطع کنند (شکل ۳).

۶. از نقطه O خطی به موازات BC رسم کنید تا دو ضلع مربع ABFG را در نقطه‌های M و N قطع کند (شکل ۳).

۷. عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کنید تا دو ضلع دیگر این مربع را مطابق شکل ۳ در نقطه‌های P و Q قطع کند. به این ترتیب مربع ABFG به ۴ چهارضلعی تقسیم می‌شود. این چهارضلعی‌ها را رنگ کنید (شکل ۳).

۸. هر چهارضلعی حاصل در این مربع را برش دهید. همچنین مربع ACIH را نیز برش دهید و آن‌ها را مطابق شکل ۴ روی مربع BCDE بگذارید.

با انجام این مراحل مشاهده می‌کنیم که مربع ACIH و ۴ چهارضلعی مذکور به طور کامل مربع BCDE را می‌پوشانند.

بنابراین:

$$S_{BCDE} + S_{ACIH} = \text{مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌ها}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + S_{ABFG}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

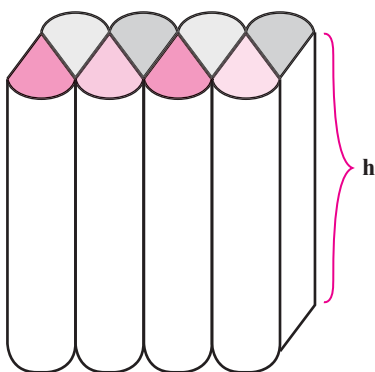
مکعب مستطیل به ابعاد r ، h و $\frac{p}{4}$ حاصل می‌شود که حجم آن با حجم استوانه برابر است. با توجه به اینکه $p = 2\pi r$ ، لذا داریم: بنابراین حجم مکعب مستطیل حاصل برابر است با: حجم مکعب مستطیل $V \approx$ (حجم استوانه)

$$= \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

$$= \frac{p}{4} \times r \times h$$

$$= \pi r \times r \times h$$

$$= \pi r^2 h$$



شکل ۸

به این ترتیب حجم استوانه به‌طور تقریبی حاصل می‌شود. توجه شود که هرچه تعداد قطعات حاصل در مرحله ۴ افزایش یابد، حجم جسم حاصل به حجم مکعب مستطیل نزدیک‌تر و در نهایت مقدار دقیق‌تری برای حجم استوانه حاصل می‌شود.

در ادامه فعالیت، با استفاده از رابطه حاصل برای حجم استوانه، حجم مخروط دوار قائم را می‌یابیم.

۶. مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعده r بسازید.

بدین منظور با استفاده از پرگار دایره‌ای به شعاع

شکل ۹، قطاع AOB را طوری در نظر بگیرید که طول

\widehat{AB} با محیط قاعده مخروط، یعنی $2\pi r$ برابر باشد.

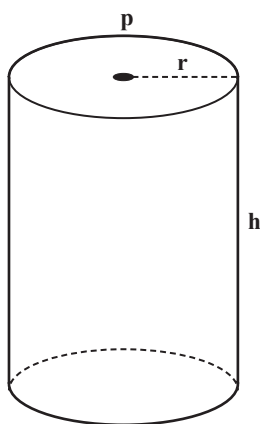
حال قطاع AOB را روی این مقوا برش دهید و آن را

طوری خم کنید که شعاع‌های OA و OB روی هم

قرار گیرند. به این ترتیب مخروطی با مولد l ساخته

می‌شود (شکل ۹).

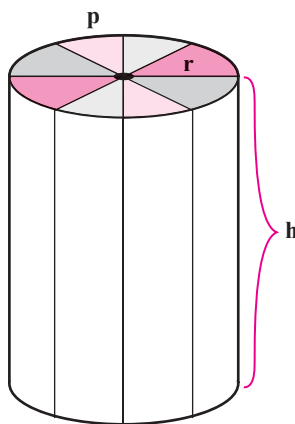
۲. مقوا را به آرامی طوری خم کنید که دو عرض مستطیل روی هم قرار گیرند. سپس محل تماس عرض‌ها را مطابق شکل ۶ به یکدیگر بچسبانید تا یک استوانه حاصل شود. در این حالت h ارتفاع استوانه و p محیط قاعده آن می‌شود. شعاع قاعده این استوانه را r فرض کنید.



شکل ۶

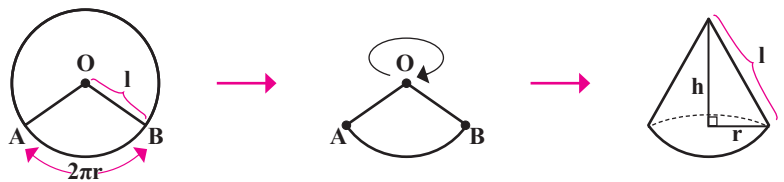
۳. با استفاده از خمیر یا خاک رس داخل این استوانه را پر کنید.

۴. استوانه حاصل را مطابق شکل ۷ به هشت قسمت یکسان تقسیم کنید و آن‌ها را برش دهید.



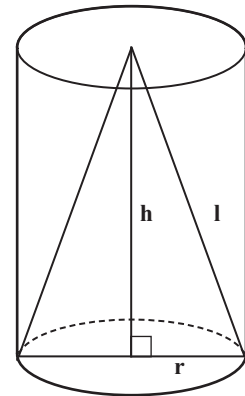
شکل ۷

۵. قطعات حاصل را مطابق شکل ۸ به‌طور متناوب کنار یکدیگر قرار دهید. با این کار به‌طور تقریبی یک



شکل ۹

۷. استوانه‌ای با همان ارتفاع h و شعاع قاعده r بسازید (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

۸. مخروط حاصل را پر از شن کنید و سپس شن‌ها را از داخل مخروط به درون استوانه بریزید.

۹. مرحله ۸ را تکرار کنید تا استوانه کاملاً پر شود. مشاهده می‌کنید، نیاز است سه بار مخروط را پر از شن کنیم تا استوانه کاملاً پر شود. به این ترتیب حجم مخروط ثلث حجم استوانه‌ای با همان ارتفاع h و شعاع قاعده r است؛ یعنی: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (حجم مخروط)

این نوع فعالیت‌ها را می‌توان برای یافتن سطح جانبی یا سطح کل استوانه و مخروط یا حجم کره، و همچنین اثبات هندسی اتحادهای جبری یا اثبات قضیه تالس، خواص گوناگون مثلث‌ها، و سایر مسائل هندسی انجام داد. همان‌طور که اشاره شد، یکی از هدف‌های آزمایشگاه ریاضی این است که مفاهیم، قضایا و روابط ریاضی به‌گونه‌ای ارائه شوند که دانش‌آموز آن‌ها را در حافظه بلندمدت خود قرار دهد و برای دوره زمانی طولانی به‌خاطر بسپرد و با گذر زمان فراموش نکند. ایجاد خلاقیت و درک استعدادهای دانش‌آموزان در آزمایشگاه ریاضی تحقق می‌یابد. مدل‌سازی در این آزمایشگاه رکن مهم یادگیری است، طوری که قوانین ریاضی قابل فهم و به سادگی آموخته می‌شوند.

با استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توان موضوع یادگیری را سرعت بخشید و جذابیت زیادی را برای مخاطب ایجاد کرد

در آزمایشگاه ریاضی می‌توان به ریاضی با نگاه جدیدی وارد شد و کاربردهای ریاضی را هم‌زمان با موضوع‌های درسی به دانش‌آموزان ارائه داد. در واقع نگرشی از نوع سوم می‌توان به ریاضی داشت و در کنار هدف آموزش و یاددهی مفاهیم ریاضی توسط معلم (نگرش نوع اول)، یادگیری آن‌ها توسط دانش‌آموز (نگرش نوع دوم)، نگاه جدیدی با اولویت دادن به کاربردهای ریاضی در سایر علوم و زندگی روزمره ایجاد کرد. بر پایه این نگاه سوم، ریاضی از نوع سوم، یعنی ریاضی و کاربردهای آن به‌طور هم‌زمان شکل می‌گیرد. آزمایشگاه ریاضی قادر است بستری برای رسیدن به این هدف باشد. به‌علاوه می‌تواند انگیزه یادگیری را در دانش‌آموز افزایش دهد و شوق حل مسئله و بالا بردن معلومات ریاضی را در آن‌ها به‌وجود آورد. یکی از ابزارهای مهم کمک‌آموزشی رایانه است که قابلیت یاددهی مفاهیم ریاضی را به شکل مؤثری دارد. با استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توان موضوع یادگیری را سرعت بخشید و جذابیت زیادی را برای مخاطب ایجاد کرد. در مواردی که انجام محاسبات پیچیده ریاضی مشکل است و به صرف وقت زیاد نیاز دارد، می‌توان با بهره‌مندی از این نوع نرم‌افزارها به سرعت به نتیجه دست یافت. در علوم مهندسی ضروری است اعمالی چون حل دستگاه معادلات، محاسبه مقدار توابع، رسم نمودارها، مشتق‌گیری و نظایر آن به سرعت محاسبه شوند تا از نتایج آن‌ها برای رسیدن به هدف‌های اصلی بهره گرفت. امروزه انجام سریع محاسبات ریاضی بسیار مورد توجه است و به‌کارگیری رایانه نقشی اساسی در علوم کاربردی ایفا می‌کند. بر این اساس لازم است دانش‌آموزان با حداقل یک نرم‌افزار ریاضی آشنا شوند تا بتوانند اعمال و محاسبات ریاضی را در محیط آن نرم‌افزار انجام دهند. این امر در آزمایشگاه ریاضی قابل انجام است. در قسمت‌های بعدی، براساس کتاب‌های درسی ریاضی دوره دوم متوسطه و با استفاده از نرم‌افزار آموزشی «جنوجبرا»، مطالب درسی طی فعالیت‌های متنوع و هدف‌دار آموزش داده می‌شوند.

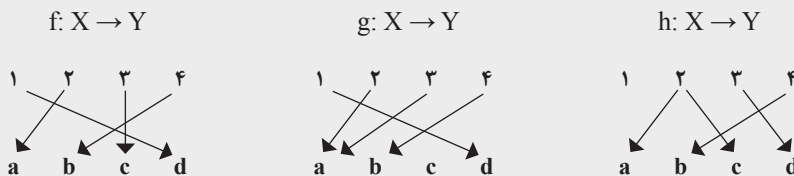
* منابع

1. Minara Yeasmin, Developing Mathematics Laboratory - A Shift from narrow goals towards higher goals for quality elementary education in mathematics, Imperial Journal of interdisciplinary Research, Vol.2, Issue 11, 2016.
2. G. Balasubramanian and R.P. Sharma, CBSE, Guidelines for Mathematics Laboratory in Schools, Class X, Dehli, 2006.

کدام تابع نیست؟

مثال ۲.۴.۰

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4\}$ و $Y = \{a, b, c, d\}$.



حل: f یک تابع است. g نیز تابع است. مشکلی ندارد که یک عضو از هم‌دامنه تصویر هیچ‌یک از ورودی‌ها نباشد و اشکالی ندارد که a از هم‌دامنه تصویر دو عضو 2 و 3 از دامنه باشد.

می‌توانیم از نمادگذاری دو خطی برای نوشتن آن‌ها به صورت زیر استفاده کنیم:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \text{ و } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & a & b \end{pmatrix}$$

اما h تابع نیست. در واقع، به دو دلیل تابع بودن آن رد می‌شود:

اول، عضو 1 از دامنه به هیچ عضوی از «هم‌دامنه» نگاشته نشده است.

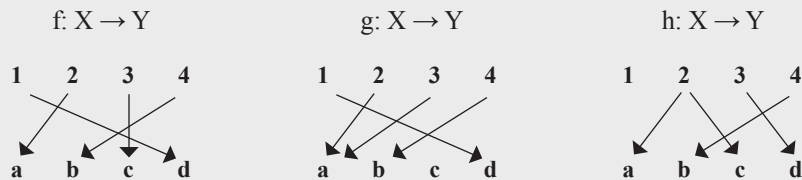
دوم، عضو 2 از دامنه به بیش از یک عضو در هم‌دامنه (a و c) نگاشته شده است. توجه کنید که یکی از این دو مشکل کافی است تا یک قاعده، تابع نشود.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Diagram	نمودار
2. Represent	نمایش دادن
3. Problem	مسئله، مشکل
4. Codomain	هم‌دامنه
5. Image	تصویر
6. Input	ورودی
7. Reason	دلیل
8. Element	عضو، عنصر
9. Mapped	نگاشته شده
10. Notation	نمادگذاری

Example 0.4.2

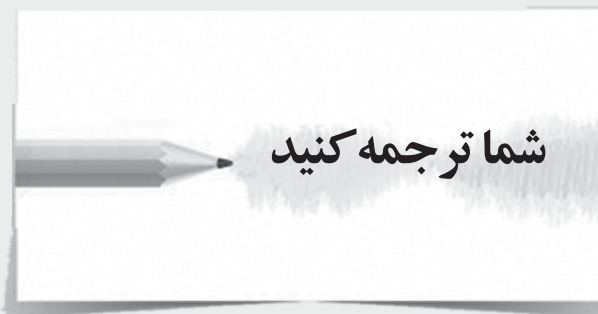
Which of the following diagrams represent a function? Let $X=\{1,2,3,4\}$ and $Y=\{a,b,c,d\}$



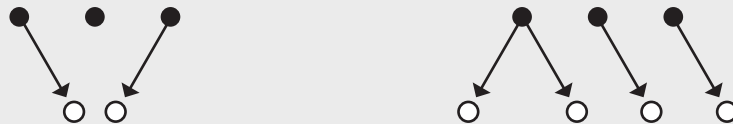
Solution: f is function. So is g . There is no problem with an element of the codomain not being the image of any input, and there is no problem with a from the codomain being the image of both 2 and 3 from the domain. We could use our two-line notation to write these as

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & a & b \end{pmatrix}.$$

However, h is not a function. In fact, it fails for two reasons. First, the element 1 from the domain has not been mapped to any element from the codomain. Second, the element 2 from the domain has been mapped to more than one element from the codomain (a and c). Note that either one of these problems is enough to make a rule not a function.



In general, neither of the following mappings are functions:



It might also be helpful to think about how you would write the two-line notation for h . We would have something like:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & a, c? & d & b \end{pmatrix}.$$

There is nothing under 1 (bad) and we needed to put more than one thing under 2 (very bad). With a rule that is actually a function, the two-line notation will always "work".



زاویه بین دو عقربه

اشاره

در برخی از کتابها فرمولی برای محاسبه زاویه بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار می‌آورند، در این مقاله به نحوه شکل‌گیری و استفاده از این فرمول می‌پردازیم.

هدف از بحث زیر آن است که آمادگی پاسخ‌گویی به هر یک از سؤال‌های فوق را به دست آورید. بدین منظور ابتدا لازم است به نکات زیر توجه کنید:

نکته ۱. وضع عقربه‌ها هر ۱۲ ساعت مجدداً تکرار می‌شود. مثلاً عقربه‌ها در ساعت "۴:۴۵:۱۵" عیناً به همان وضعی قرار دارند که در ساعت "۱۶:۴۵:۱۵" هستند. بنابراین در تعیین زاویه بین دو عقربه مذکور در ساعت "h:m:n" اگر زمان مربوط به بعد از ساعت ۱۲ باشد، یعنی $h > 12$ ، می‌توان از $12, h$ واحد کم کرد و

مسئله ۱. در ساعت '۱۴:۴۵' زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه است؟

مسئله ۲. در ساعت "۲۱:۳۰:۴۵" زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه است؟

مسئله ۳. بین ساعت ۴ و ۵ صبح، لحظه‌ای که دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار بر هم منطبق می‌شوند، به کدام یک از لحظه‌های زیر نزدیک‌ترند؟

۱. ۴:۲۰' ۲. ۴:۲۱'

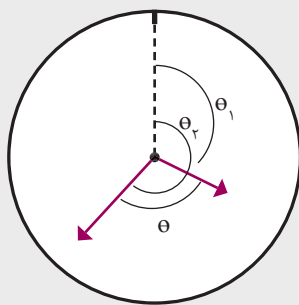
۳. ۴:۲۲' ۴. ۴:۲۳'

نقشه حل مسئله

- θ_1 ، مقدار چرخش ساعت‌شمار از مبدأ پس از h ساعت و m دقیقه و n ثانیه را به دست می‌آوریم.
- θ_2 ، مقدار چرخش دقیقه‌شمار را از مبدأ پس از m دقیقه و n ثانیه به دست می‌آوریم.

تذکر: مقدار h در تعیین θ_2 تأثیری ندارد، زیرا دقیقه‌شمار رأس هر ساعت حرکت خود را از مبدأ مجدداً آغاز می‌کند.

$$\theta = |\theta_1 - \theta_2| \text{ زاویه بین دو عقربه}$$



$$\theta_2 > \theta_1 \rightarrow \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\theta_1 > \theta_2 \rightarrow \theta = \theta_1 - \theta_2$$

تعیین زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت " $h:m:n$ " به نحو زیر است:

$$\theta_1 = 30 \cdot h + \frac{m}{60} \times 30 + \frac{n}{(60)^2} \times 30$$

$$\theta_2 = \frac{m}{5} \times 30 + \frac{n}{5 \times 60}$$

$$\theta = |\theta_1 - \theta_2| = \left| 30 \cdot h - \frac{11}{2}m - \frac{11}{12}n \right|$$

مسئله ۱. زاویه بین دو عقربه در ساعت $14:45'$ همان زاویه بین دو عقربه در ساعت $2:45'$ است:

$$\theta = \left| 2 \times 30 - \frac{11}{2} \times 45 \right| = \left| 60 - 247.5 \right| = 187.5$$

مسئله ۲. همان $21:30':45''$ همان $9:30':45''$ است:

$$\theta = \left| 9 \times 30 - \frac{11}{2} \times 30 - \frac{11}{12} \times 45 \right|$$

$$= \left| 270 - 165 - 4/125 \right| = 101/125$$

مسئله ۳. زاویه بین دو عقربه در ساعت $4:m'$ برابر است با:

$$\left| 4 \times 30 - \frac{11}{2}m \right| = 0$$

$$m = \frac{240}{11} = 21/8 \text{ به } 22 \text{ دقیقه نزدیک تر است}$$

زاویه بین دو عقربه را در ساعت " $h_1:m':n$ " که $0 < h_1 = h - 12 < 12$ و همچنین $0 < m < 60$ و $0 < n < 60$ به دست آورد.

پس در مسئله ۱ زاویه بین دو عقربه در ساعت $2:45'$ و در مسئله ۲ زاویه بین دو عقربه را در ساعت $9:30':45''$ به دست می‌آوریم.

نکته ۲. عقربه ساعت‌شمار در هر یک ساعت (60 دقیقه یا 60^2 ثانیه) به اندازه $\frac{1}{12} \times 360^\circ$ یعنی 30° می‌چرخد. (چرا؟)

مثال. در مدت $30':45''$ هر یک از عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه می‌چرخند؟

پاسخ:

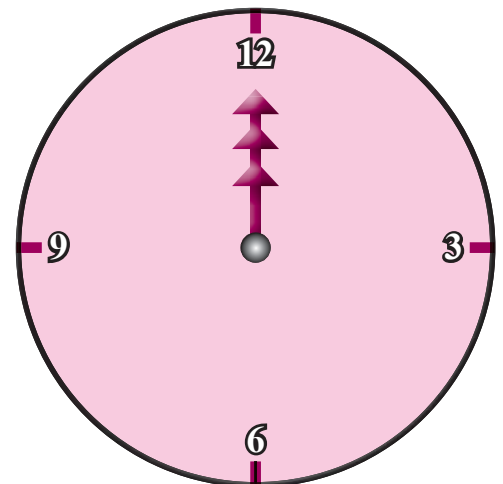
مقدار چرخش ساعت‌شمار:

$$\frac{30}{60} \times 30^\circ + \frac{45}{(60)^2} \times 30^\circ = 15/275 \text{ درجه}$$

مقدار چرخش دقیقه‌شمار:

$$\frac{30}{5} \times 30^\circ + \frac{45}{5 \times 60} \times 30^\circ = 184/5 \text{ درجه}$$

نکته ۳. مبدأ حرکت را برای عقربه‌ها لحظه $0:00:00$ که در شکل نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم.



دوره‌می ریاضی

استدلالات‌های معتبر و نامعتبر

اشاره

به‌طور معمول در کلاس درس ریاضی، پرسش‌هایی برای دانش‌آموزان مطرح می‌شوند که پاسخ به آن‌ها به وقت زیادی نیاز دارد. در بعضی موارد، سؤال‌ها به‌گونه‌ای هستند که پاسخ‌گویی به آن‌ها به پیش‌نیازهایی هم وابسته است که تأمین آن‌ها شاید از حوصله کلاس خارج باشد. به همین دلیل با دانش‌آموزان علاقه‌مند به مباحث ریاضی یک دوره‌می ریاضی تشکیل داده‌ایم، به‌طوری که دانش‌آموزان سؤالات و ابهام‌های خود را درباره مطالب کتاب درسی بیان می‌کنند و معلم ضمن پاسخ به این‌گونه پرسش‌ها، مطالبی را به منظور دانش‌افزایی ارائه می‌دهد.

در این شماره به پاسخ سؤال‌ها و ابهام‌هایی در مبحث «آشنایی با منطق ریاضی» درباره استدلالات‌های معتبر و نامعتبر می‌پردازیم. در ضمن از شما دانش‌آموزان عزیز درخواست می‌کنیم که سؤال‌ها و ابهام‌هایی را که از متن کتاب‌های درسی ریاضی برایتان به‌وجود آمده است، برایمان بفرستید تا در دوره‌می‌های بعدی به آن‌ها پاسخ دهیم.

این استدلال معتبر است، زیرا نتیجه آن با ضرورت منطقی از مفروضات استدلال ناشی شده است. به عبارت دیگر، غیرممکن است که مفروضات آن راست باشند و نتیجه آن دروغ باشد. پس می‌گوییم: «استدلالی معتبر است که دارای مفروضات راست و نتیجه دروغ نباشد.»

با این توضیح برای استدلال معتبر، پس استدلالی نامعتبر است که مفروضات آن راست و نتیجه آن دروغ باشد. درست است آقا؟



آفرین علی جان! درست است.



لطفاً یک استدلال نامعتبر مثال بزنید؟ یعنی استدلالی را مثال بزنید که مفروضات آن راست و نتیجه آن دروغ باشد.



فرما، این هم یک مثال خوشگل!



در کتاب درسی آمار و احتمال در توضیح منطق ریاضی نوشته شده است: «این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلالات‌ها می‌پردازد و اعتبار استدلال را مشخص می‌کند.»



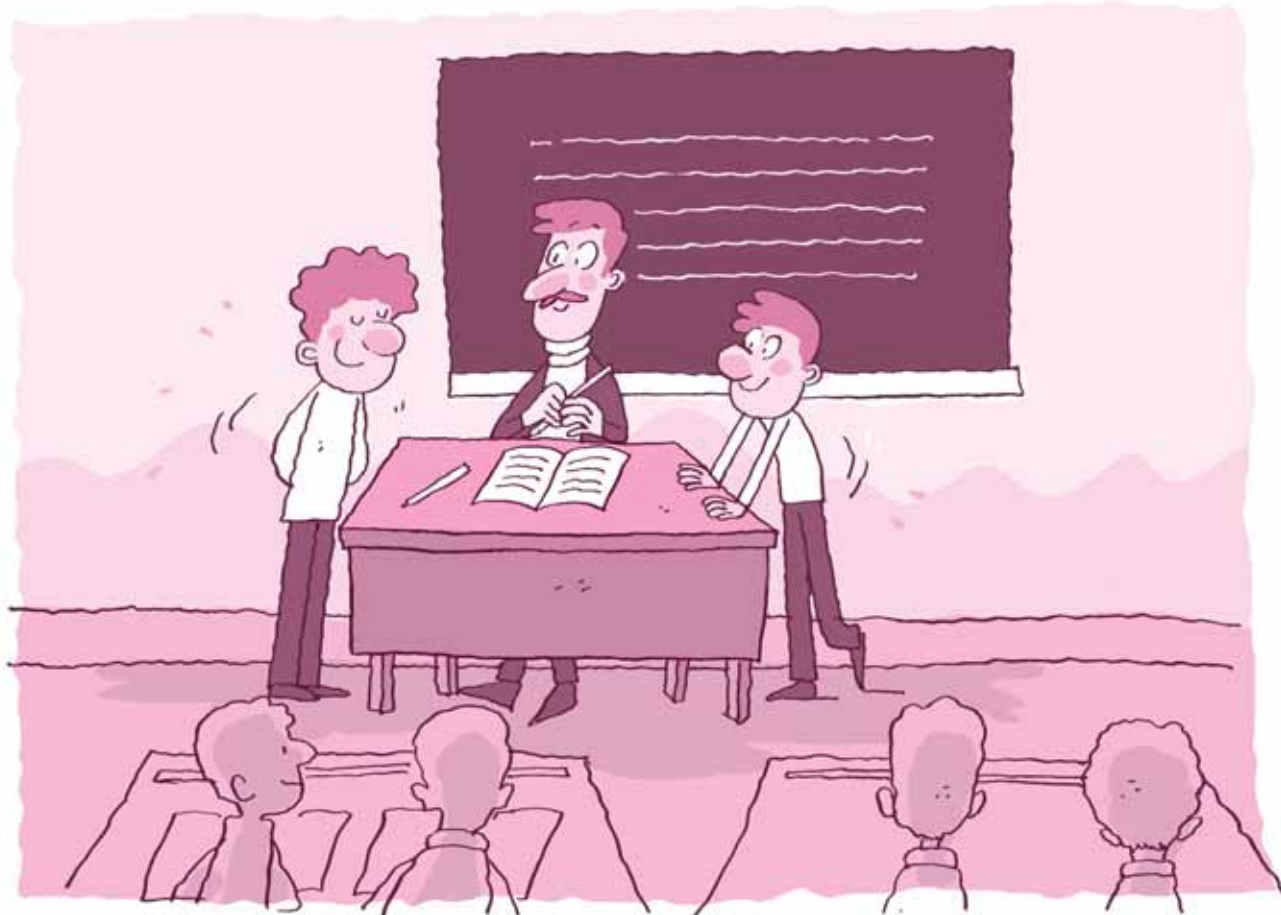
منظور از اعتبار استدلال چیست؟ یعنی منطق ریاضی به‌طور دقیق چه کاری انجام می‌دهد؟ استدلال نامعتبر چیست؟

عزیزم بهتر است اندکی تأمل کنید. بعد از اینکه مفهوم گزاره و ترکیب گزاره‌ها تدریس شد، به‌طور دقیق‌تر می‌توان به این سؤال پاسخ داد، به استدلال ساده زیر توجه کن:



تیم ملی فوتبال ایران، یا تیم ملی فوتبال استرالیا، به جام جهانی می‌رود.
تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.



همه ماهی‌ها پستان دارند.
همه نهنگ‌ها ماهی‌اند.

نتیجه: همه نهنگ‌ها پستاندارند.

اگر بیل گیتس (مؤسس شرکت مایکروسافت)
مالک تمام طلاهای بانک مرکزی باشد، آنگاه او
ثروتمند است.
بیل گیتس مالک تمام طلاهای بانک مرکزی نیست.

نتیجه: بیل گیتس ثروتمند نیست.

در ادامه معلم به تدریس کتاب پرداخت و با
مشارکت دانش‌آموزان، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را
تکمیل کردند، تا اینکه برای یکی از دانش‌آموزان سؤالی
پیش آمد.

آقا اینکه گفتید گزاره دارای ارزش
راست یا دروغ است، آیا می‌توان گفت
معتبر یا نامعتبر است؟



نه آقا جان! بچه‌ها خوب گوش کنید.
راستی گفتم «خوب گوش کنید»،
یاد خاطره‌ای از دوران دانش‌آموزی



خودم افتادم:

آن‌وقت‌ها معلمی داشتیم که در چنین مواقعی

مفروضات این استدلال راست هستند، اما نتیجه
دروغ است. چنین استدلال‌هایی نمی‌توانند معتبر باشند،
زیرا امکان ندارد مفروضات یک استدلال معتبر راست،
ولی نتیجه آن دروغ باشد.

آیا ممکن است استدلال معتبری
موجود باشد که مفروضات آن دروغ،
ولی نتیجه آن راست باشد؟



بله. حالا به استدلال زیر توجه کنید:



می‌گفت: «بچه‌ها، خوب گوش بگیرید!»

بعد، چندتا از بچه‌های شیطان کلاس، به جای اینکه به صحبت‌های معلم گوش کنند، گوش‌های خود را با انگشت می‌گرفتند و بدون اینکه به حرف‌های معلم توجه کنند، فقط سر خود را به نشانه فهمیدن تکان می‌دادند. این در حالی بود که هنوز گوش‌هایشان را با انگشت گرفته بودند. خب، کجا بودیم؟

آقا می‌خواستید فرق بین ارزش راست یک گزاره و استدلال معتبر را بیان کنید.



اعتبار استدلال به رابطه بین گزاره‌های آن استدلال اشاره دارد. یعنی بین مجموعه‌ای از گزاره‌ها به‌عنوان مفروضات استدلال، و یک گزاره که



نتیجه استدلال است، رابطه‌ای وجود دارد. بنابراین اعتبار هرگز نمی‌تواند درباره یک گزاره به خودی خود به کار رود. زیرا رابطه مورد نیاز نمی‌تواند درون یک گزاره حضور یابد. از طرف دیگر، راست یا دروغ بودن (صدق یا کذب) ویژگی یک گزاره است.

یک سؤال دیگر، صدق و کذب گزاره یعنی چه؟ وقتی می‌گوییم ارزش یک گزاره راست است، یعنی چه اتفاقی افتاده است؟



همه ما در جهانی زندگی می‌کنیم که با رویدادهای مختلفی روبه‌رو هستیم. برای مثال، ارزش گزاره «برف سفید است» راست است، زیرا با جهان واقعی



مطابقت دارد.

یعنی در هر جای جهان، هر برفی را ملاحظه کنید، دارای رنگ سفید است. به چنین گزاره‌ای «گزاره کلی» می‌گوییم. زیرا وقتی می‌گوییم: «برف سفید است»، یعنی: «برای هر برفی، برف سفید است.»

گاهی گزاره جزئی است و درباره یک اسم خاصی صحبت می‌کند. مثلاً گزاره «ارتفاع برج میلاد ۴۳۵ متر است»، درباره ارتفاع یک برج خاص صحبت می‌کند و چون ارتفاع ۴۳۵ متر برای برج میلاد با جهان واقعی مطابقت دارد، ارزش این گزاره راست است.

ارزش گزاره جزئی «اصفهان شهری در استان تهران است» دروغ است. زیرا با جهان واقعی مطابقت ندارد و ارزش گزاره «مجموع زاویه‌های داخلی مثلث بزرگ‌تر از 180° است»، در هندسه اقلیدسی دروغ است. گزاره‌هایی هم وجود دارند که قادر نیستیم آن‌ها را با جهان واقعی انطباق دهیم؛ مانند حدس‌ها در ریاضیات. این گزاره‌ها نمی‌توانند هم درست و هم نادرست باشند؛ مانند «حدس گلدباخ» که در صفحه ۳ کتاب آمار و احتمال آمده است. بنابراین اگر گزاره‌ای با جهان واقعی مطابقت داشته باشد، دارای ارزش راست و در غیر این صورت ارزش آن دروغ است. در ادامه بعد از چند جلسه که معلم آموزش درس آشنایی با منطق ریاضی را به پایان برد، رو به بچه‌های کلاس کرد و گفت: «حالا وقت آن رسیده است که به سؤال علی درباره اعتبار استدلال پاسخ کامل‌تری بدهیم.

استدلال صوری زیر را در نظر بگیرید. این استدلال یکی از قواعد منطق به‌شمار می‌رود.

$$\begin{array}{l} \forall x : x \Rightarrow y \\ \forall y : y \Rightarrow z \\ \hline \therefore \forall x : x \Rightarrow z \end{array}$$

بر مبنای قاعده بالا دو مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۱.

هر تهرانی، ایرانی است.
هر ایرانی، آسیایی است.

نتیجه: هر تهرانی، آسیایی است.

مثال ۲.

هر تهرانی، اصفهانی است.
هر اصفهانی، ایرانی است.

نتیجه: هر تهرانی، ایرانی است.

برای اینکه استدلال نامعتبر جذاب تر شود، استدلال زیر را به گونه‌ای آورده‌ایم که شبیه استدلال‌های معتبر باشد. این استدلال نامعتبر است و دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است:

اگر شما در حال خواندن این مقاله هستید، آن‌گاه شما خواب نیستید.
شما خواب نیستید.

نتیجه: شما در حال خواندن این مقاله هستید.



* پی‌نوشت‌ها

1. Sound
2. Valid
3. invalid

* منابع

۱. آمار و احتمال پایه یازدهم. دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. ۱۳۹۶.
۲. نبوی، لطف‌الله (۱۳۹۴). مبانی منطق جدید. انتشارات سمت، تهران.
۳. تیدمن، پل و کمین، هاروارد (۱۳۹۳). درآمدی نو به منطق نمادین - منطق جمله‌ها. ترجمه دکتر رضا اکبری. انتشارات دانشگاه امام صادق (ع). تهران، چاپ چهارم.

به نظر شما تفاوت این دو استدلال چیست؟



استدلال مثال ۱ دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است، اما در استدلال مثال ۲، فرض «هر تهرانی، اصفهانی است»، دروغ است. این در حالی است که هر دو استدلال بر مبنای قاعده‌ی گفته شده در منطق، دارای استدلال صوری درست هستند.



آفرین! خوب تشخیص دادید. استدلال مثال ۱ دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است و از قواعد منطق پیروی می‌کند که در منطق به آن استدلال «متقن^۱» و معتبر می‌گویند. استدلال مثال ۲ «معتبر^۲» است، زیرا این نوع استدلال صوری و از قواعد منطق پیروی می‌کند، اما مقدمه‌ی اول آن دارای اعتبار معنایی نیست و دروغ است. این نوع استدلال، استدلال متقن محسوب نمی‌شود.



لطفاً کمی بیشتر درباره‌ی استدلال‌های «نامعتبر^۳» توضیح دهید.



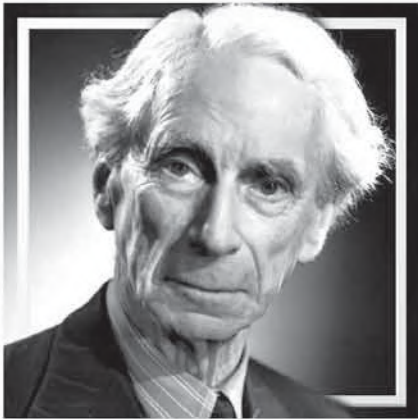
ساختن استدلال‌های نامعتبر با داشتن هر نوع ترکیبی از راست یا دروغ بودن مقدمه‌ها و نتیجه، بسیار آسان است. کافی است گزاره‌هایی راست یا دروغ را که هیچ ربطی به یکدیگر ندارند، بیان کنیم؛ مانند:



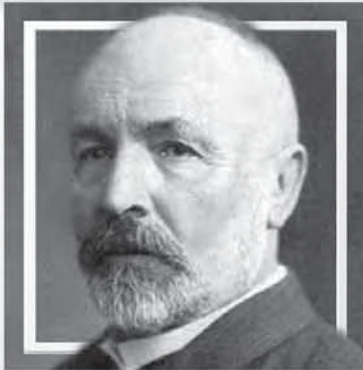
آفریقا یک قاره است.
گلستان نوشته‌ی سعدی است

نتیجه: ۲ عددی زوج است.

این استدلال دارای مفروضات و نتیجه‌ی راست است، اما واضح است که هیچ‌کس با این استدلال فریب نمی‌خورد. زیرا بین مفروضات و نتیجه با ضرورت منطقی رابطه‌ای وجود ندارد.



راسل



کانتور

نظریه مجموعه‌ها

چیستی و چرایی

اشاره

نظریه مجموعه‌ها بعد از «منطق ریاضی» از درس‌های اصلی و جزو مهم‌ترین موضوع‌های ریاضیات، و از ارکان و مبانی ریاضیات است. تقریباً تمامی شاخه‌های ریاضیات به نوعی از این درس بهره می‌برند. امروزه نظریه مجموعه‌ها جزئی تفکیک‌ناپذیر از علم حساب، جبر، آنالیز، احتمال، جبر خطی و ... به‌شمار می‌آید و کاربرد آن در هر یک از این علوم ضروری است، در این فرصت تا حدی با چیستی و چرایی‌های این نظریه آشنا شویم.

«نظریه مجموعه‌ها»^۱ در دهه ۱۹۴۰ به‌عنوان موضوعی بحث‌انگیز بین ریاضی‌دانان مطرح بود و در دهه ۱۹۵۰ رسماً مورد استفاده قرار گرفت. «نظریه طبیعی مجموعه‌ها» اولین پیشرفت و گسترش نظریه مجموعه‌ها محسوب می‌شود.

نظریه طبیعی مجموعه‌ها بر پایه درکی غیررسمی و بی‌قاعده از مفهوم مجموعه به‌عنوان گردایه‌ای از اشیا (که عضو یا عنصر گفته می‌شود) استوار بود، در حالی که «نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها» تنها از واقعیت‌هایی در مورد مجموعه‌ها و عضویت استفاده می‌کرد که از طریق یک سلسله اصول موضوع تعریف شده و قابل اثبات بودند. این اصول موضوع از درک ما از مفهوم دسته، گردایه یا مجموعه‌ای از اشیا و اعضایشان نتیجه شدند. یکی از هدف‌های تنظیم این اصول فرار از پارادوکس‌هایی بود

که در این زمینه مطرح می‌شدند. نظریه طبیعی مجموعه‌ها از آغاز با پارادوکس‌های متعددی از جمله پارادوکس معروف راسل^۲ (ضمیمه ۲ مقاله) مواجه شد.

امروزه در ریاضیات مجموعه‌ها بسیار اهمیت دارند. در ریاضیات جدید، بخش عمده‌ای از ابزارهای ریاضی، مانند عدد، رابطه، تابع و غیره، بر پایه مجموعه‌ها تعریف شده‌اند. نظریه طبیعی مجموعه‌ها در اواخر قرن ۱۹ توسط جرج کانتور پایه‌گذاری شد تا به ریاضی‌دانان امکان دهد که با مجموعه‌های نامتناهی کار کنند. به کمک چنین نظریه‌ای می‌توان روی مجموعه‌ها هر عملی را بدون محدودیت انجام داد یا هر مجموعه‌ای را بدون محدودیت در نظر گرفت که این ما را به سوی پارادوکس‌هایی چون پارادوکس راسل سوق می‌دهد. در حقیقت در ادامه گسترش نظریه مزبور این سؤال‌ها برای ریاضی‌دانان پیش آمد که:

۱ آیا واقعاً چیزهایی که ما به‌عنوان مجموعه در نظر می‌گیریم، مجموعه هستند؟

۲ چه چیزی را می‌توان به‌عنوان مجموعه در نظر گرفت و چه چیزی را نمی‌توان؟

۳ معیار ما برای اینکه بگوییم یک شی ریاضی مجموعه است یا نه چیست؟

در پاسخ به همین پرسش‌های اساسی بود که نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها گسترش یافت. به هر حال، امروزه ریاضی‌دانانی که از نظریه مجموعه‌ها به‌عنوان یک شاخه از ریاضیات صحبت می‌کنند، عموماً بر این باورند که نظریه جرج کانتور عملاً درگیر پارادوکس‌ها نمی‌شود که این موضوع خود مطلبی قابل بحث است. او از برخی از این پارادوکس‌ها آگاه بود، ولی آن‌ها را بیان نکرد. چرا که معتقد بود، این پارادوکس‌ها نظریه مجموعه‌های او را بی‌اعتبار می‌سازند. البته اطمینان از این مطلب دشوار است، زیرا او اصل موضوع یا قاعده‌ای را بیان نکرده است.

در نظریه طبیعی مجموعه‌ها، مجموعه به‌عنوان یک دسته از اشیای مشخص توصیف می‌شود. به این اشیا که مجموعه را تشکیل می‌دهند، اعضا یا عناصر مجموعه می‌گوییم. عضوهای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند؛ از انواع عددها و افراد جامعه گرفته تا خود مجموعه‌ها. برای مثال، عدد ۴ عضوی از مجموعه عددهای زوج است. مجموعه عددهای زوج مجموعه‌ای بزرگ و نامتناهی است که این نشان می‌دهد، نیازی نیست که مجموعه متناهی باشد؛ یعنی به تعدادی متناهی عضو داشته باشد.

اگر شی x متعلق به مجموعه A باشد، می‌گوییم: «مجموعه A شامل عنصر x است.» یا: « x متعلق است به مجموعه A ».

در این صورت می‌نویسیم: « $x \in A$ »

\in نماد تعلق یا عضویت است که از حرف «پسیلون» یونانی گرفته شده و به‌وسیله پتانو معرفی شده است.

اگر x عضوی از مجموعه A نباشد می‌نویسیم: « $x \notin A$ ». بنابراین مجموعه به صورت کامل با اعضایش معرفی می‌شود. مثلاً مجموعه عددهای ۵، ۳، ۲ با مجموعه تمام عددهای اول کوچک‌تر از ۶ برابر است.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که دو مجموعه چه زمانی با یکدیگر برابرند؟

برابری یا تساوی در مجموعه‌ها (بین دو مجموعه) این‌گونه تعریف می‌شود: «دو مجموعه A و B با یکدیگر برابرند، هرگاه هر عضو دلخواه A در B و هر عضو دلخواه B در A باشد و می‌نویسیم: « $B=A$ »

اما آیا مجموعه‌ای هم وجود دارد که دارای هیچ عضوی نباشد؟ بله، و به آن مجموعه «تهی» یا «نول» می‌گوییم و آن را با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که مجموعه دقیقاً با اعضایش شناخته می‌شود، می‌توان منحصر به فرد بودن مجموعه تهی را تضمین کرد.

به راستی چه مشکلی در نظریه‌ای که تا به حال ارائه داده‌ایم وجود دارد؟ مشکل در ساختار مجموعه است؟ و اینکه واقعاً مجموعه چیست؟ در نظریه‌ای که ارائه شد، برداشتی که از یک مجموعه می‌شود، مانند کیسه‌ای است که تعدادی (متناهی یا نامتناهی) عضو را در آن قرار می‌دهیم.

آیا به راستی هر چه که در بین دو آکولاد قرار دهیم، یک مجموعه نام دارد؟ یا به‌طور دقیق‌تر آیا می‌توانیم هر مجموعه‌ای را به دلخواه خودمان تشکیل دهیم؟ نظرات و پاسخ‌های خودتان را برایمان ارسال کنید.

ضمیمه

۱. پارادوکس یا متناقض‌نما به هر گزاره یا نتیجه‌ای گفته می‌شود که با گزاره‌های قبلی گفته شده در همان نظریه یا دستگاه نظری، یا با یکی از باورهای قوی پیش‌زمینه، شهود عقلی یا باور عمومی در تناقض باشد. اگر پارادوکس به معنای تناقض با یکی از گزاره‌های همان نظریه‌ای باشد که پارادوکس در آن پدید آمده است، این امر ضعفی جدی برای آن نظریه محسوب می‌شود و آن را بی‌اعتبار می‌کند. اما پارادوکس‌های بسیاری وجود دارند که نه با دستگاه نظری که از آن پدید آمده‌اند، بلکه با باور عمومی ما در تناقض‌اند. برای این قبیل پارادوکس‌ها در واقع این نام دقیقی نیست.

پارادوکس در منطق به حکم یا احکامی ظاهراً صحیح گفته می‌شود که به تناقضی می‌انجامند یا با شهود مطابقت نمی‌یابند. در عین حال، به جملات متناقض و حتی مخالفی که یک حقیقت واحد را بیان می‌کنند نیز پارادوکس می‌گویند.

۲. پارادوکس راسل: نامه‌ای که راسل به همکار خود فرگه نوشت، بسیار مشهور است. او این نامه را در بهار سال ۱۹۰۱، هنگامی که فرگه روی اثر خود، یعنی «اصول ریاضیات» کار می‌کرد، فرستاد و در آن پارادوکسی را مطرح کرد که بعدها به نام پارادوکس راسل شناخته شد. این پارادوکس از مشهورترین پارادوکس‌های تاریخ ریاضیات است. پارادوکس او چنین بود: «آیا مجموعه همه مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند، عضوی از خودش است یا نه؟!» به عبارت دیگر، مجموعه R را مشتمل بر همه مجموعه‌هایی در نظر بگیرید که عضو خودشان نیستند؛ یعنی:

$$R = \{x \mid x \text{ عضو خودش نیست}\}$$

حال آیا R عضوی از خودش است یا خیر؟

۱. اگر R عضوی از خودش باشد، پس واجد شرایط اعضای R است؛ یعنی عضو خودش نیست!

۲. اگر R عضوی از خودش نباشد، پس واجد شرایط اعضای R نیست؛ یعنی عضو خودش است!

اینجا نیز روشن نیست که در نهایت این مجموعه (یعنی R) عضو خودش هست یا خیر. صورت‌های گوناگونی از این پارادوکس وجود دارند. برای مثال، یک شکل ساده آن به این صورت است: «فرض کنید که در شهری آرایشگری وجود دارد که فقط و فقط سرکسانی

را اصلاح می‌کند که خودشان سر خود را اصلاح نمی‌کنند. به علاوه، هر کسی که خودش سر خودش را اصلاح نمی‌کند، سرش را پیش این آرایشگر اصلاح می‌کند! حال به عقیده شما این آرایشگر سر خودش را اصلاح می‌کند یا خیر؟»

پاسخ بسیار حیرت‌انگیز است: «اگر این آرایشگر سر خودش را خود اصلاح نکند، پس در زمره افرادی است که سر خودشان را خود اصلاح نمی‌کنند. در نتیجه سر خودش را اصلاح می‌کند! اما اگر این آرایشگر سر خودش را خود اصلاح کند، پس در زمره افرادی است که سر خودشان را اصلاح می‌کنند. در نتیجه سر خودش را اصلاح نمی‌کند!» در حقیقت روشن نیست که در نهایت این آرایشگر با سر خود چه می‌کند! اصلاحش می‌کند یا خیر؟

* پی‌نوشت‌ها

1. Set theory
2. Element

۳. پارادوکس راسل در پشت جلد شماره قبل مجله تشریح شده است.

* منابع

۱. شهریاری، پرویز و دیگران (۱۳۹۴). دانشنامه ریاضی. شرکت انتشارات کانون فرهنگی آموزش. تهران.
۲. لین، شووینگ و لین، یوفنگ (۱۳۹۳). نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن. ترجمه عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.
۳. کتاب درسی آمار و احتمال پایه یازدهم رشته ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی.
4. www.danesh.roshd.ir

ریاضیات در چند دقیقه

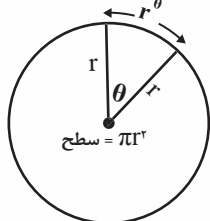
زاویه‌های رادیانی

ریاضی‌دانان در مقابل واحدهای باستانی درجه، دقیقه و ثانیه‌های کمان، غالباً زاویه‌ها را بر حسب واحدهایی موسوم به «رادیان» (radian) بیان می‌کنند. رادیان‌ها که مبتنی بر هندسه دایره هستند، امتیازهای بسیاری دارند. به‌ویژه آن‌ها کار با توابع مثلثاتی را بسیار ساده‌تر می‌کنند.

مفهوم شهودی رادیان به بهترین وجه با بررسی دایره‌ای به شعاع ۱ درک می‌شود. در این صورت زاویه بین دو خط برحسب رادیان، برابر است با طول کمانی که بین دو خط با دایره‌ای به شعاع ۱، به مرکز واقع بر تقاطع دو خط‌مان رسم شده است.

از آنجا که اندازه پیرامون دایره توسط $C=2\pi r$ به دست می‌آید، اگر داشته باشیم: $r=1$ ، در این صورت $C=2\pi$ خواهد شد. بنابراین کمان X از دایره

دارای زاویه θ رادیان است که در آن داریم: $\theta=2\pi x$.
برای مثال، برش دایره به چهار قطعه برابر، زاویه قائمه‌ای به دست می‌دهد که برابر است با 2π ضرب در $\frac{1}{4}$ یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان.



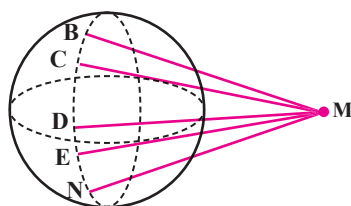
یک پیامد ظریف: اگر قطاع دایره‌ای به شعاع r، مثلاً یک تکه کیک، دارای زاویه θ رادیان باشد، در این صورت طول کمان دایروی کیک صرفاً $r\theta$ است. بنابراین زاویه‌هایی که با رادیان اندازه‌گیری می‌شوند، طریقی ساده در اندازه‌گیری طول کمان‌ها ارائه می‌دهند.

فصل مشترک صفحه و استوانه

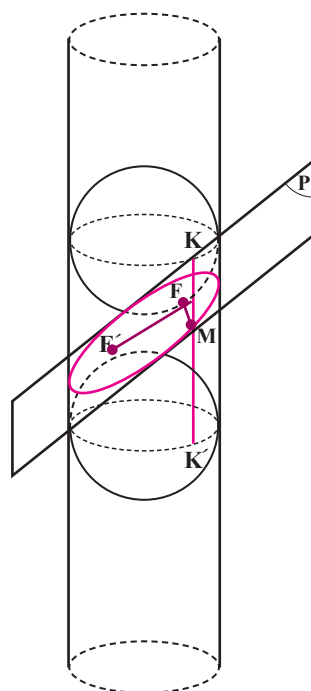
(شکل ۱) باشد که هم روی صفحه P است و هم روی استوانه. پس داریم:

$$\begin{cases} MF = MK & (\text{شکل ۲}) \\ MF' = MK' & (\text{شکل ۱}) \end{cases} \Rightarrow MF' + MF = MK' + MK = K'K$$

یعنی: $MF' + MF = 2a$ که نشان می‌دهد، منحنی فصل مشترک، بیضی است.

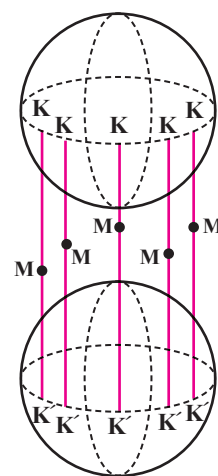


شکل ۲



شکل ۳

فرض کنیم صفحه P ، استوانه دوار، به قطر قاعده d را قطع کرده باشد (و بر آن عمود نباشد). فصل مشترک آن دو یک منحنی است (منحنی رنگی در شکل ۳). دو کره به قطر d درون استوانه چنان قرار می‌دهیم که هر یک مماس بر صفحه P هم باشند. نقطه‌های تماس با صفحه را F و F' می‌نامیم. در نتیجه از هر نقطه صفحه P مانند M که به F و F' وصل کنیم، آن‌گاه MF و نیز MF' مماس بر کره‌ها خواهند بود. اندازه قطعه مماس مشترک دو کره را با $2a$ نشان می‌دهیم (مانند شکل ۱) و داریم: $K'K = 2a$.



شکل ۱

حال اگر دو کره محاط در استوانه باشند و M نقطه‌ای روی استوانه و بین دو کره باشد، داریم: $K'M + MK = 2a$. همچنین می‌دانیم که اگر M نقطه‌ای در خارج کره باشد، آن‌گاه تمام مماس‌های رسم شده بر کره برابرند: $MB = MC = MD = \dots$ (شکل ۲).

حال فرض کنیم M نقطه‌ای دلخواه از منحنی رنگی



گزارشی از جشنواره جوان خوارزمی

حمایتی این سازمان به اجرا درآمد. تأسیس «بنیاد ملی نخبگان» نیز در همین راستا بوده است. بخش‌هایی از فرایند حمایت از جامعه علمی و فرهیختگان کشور در سیمای برگزاری «جشنواره بین‌المللی و جوان خوارزمی» تجلی پیدا کرده است که سابقه اولین دوره آن به سال ۱۳۷۸ برمی‌گردد. «جشنواره جوان خوارزمی» خاستگاه و رهیافت سنجیده‌ای برای ارزش‌گذاری و اهمیت بخشیدن به تلاش جوانان کشور است. بر این اساس، این جشنواره به نام دانشمند، ریاضی‌دان و منجم بزرگ **ابوجعفر محمدابن موسی خوارزمی** نامیده شده است. خوارزمی یکی از درخشان‌ترین چهره‌ها در میان دانشمندان اسلام است که در قرن سوم هجری می‌زیست.

از دوره سوم (۱۳۶۸) بخش دانش‌آموزی نیز به این جشنواره وارد شد و برگزیدگان بخش دانش‌آموزی نیز مورد تقدیر قرار می‌گرفتند. اما از سال ۱۳۷۸ به منظور هم‌سان‌سازی سطح رقابت‌ها، توجه بیشتر به نوآوران و دانش‌پژوهان جوان، و ترغیب جوانان برای شرکت در این رقابت علمی، جشنواره‌ای با آیین‌نامه و فرایندهای علمی و اجرایی مستقل برای جوانان شکل گرفت و آغاز به کار کرد که چون مولودی از جشنواره بین‌المللی

در دین اسلام از علم و عالم بسیار تمجید شده است، تا آنجا که حدیثی در زمینه اهمیت علم و عالم وجود دارد که می‌فرماید: «مداد العلماء افضل من دماء الشهداء». یعنی مداد عالم از خون شهیدان بالاتر و بافضیلت‌تر است. بر این اساس و به‌خاطر اهمیت موضوع، در قانون اساسی جمهوری اسلامی ایران حمایت از عالمان و فرهیختگان عرصه علم و فناوری، تقویت روح بررسی، تتبع و ابتکار در تمام زمینه‌های علمی، فنی، فرهنگی و معارف اسلامی، از طریق قدردانی و ارج نهادن به مقام والای پژوهشگران مورد توجه قرار گرفته است. در راستای تحقق هدف‌های مذکور، اساس‌نامه «سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران» در سال ۱۳۵۹ در «شورای انقلاب اسلامی» به تصویب رسید و بنیان‌گذاری آن از سال ۱۳۶۶ در سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران بنا نهاده شد.

بدین ترتیب، کشف، جذب و پرورش استعدادها در زمینه‌های علمی و صنعتی، حمایت و پشتیبانی از مخترعان، مبتکران و پژوهشگران داخلی، استفاده از استعدادهای بالقوه کشور و انتقال تجربه‌های علمی و فنی سایر کشورها به داخل کشور، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین مأموریت‌ها و محورهای اصلی فعالیت‌های

مرحله کشوری بخش
دانش آموزی این
جشنواره همه ساله
در «دانشگاه تربیت
دبیر شهید رجایی»
برگزار می‌شود
و دانش آموزان
شاخه‌های نظری،
کاردانش و
فنی و حرفه‌ای باهم به
رقابت می‌پردازند



خوارزمی بود، همچنان نام دانشمند، ریاضی‌دان و منجم بزرگ «ابوجعفر محمدابن موسی خوارزمی» برای آن حفظ شد و برای نشان دادن تفاوت سطح برگزاری ناشی از محدودیت سنی، عنوان «جشنواره جوان خوارزمی» برای آن برگزیده شد. در این جشنواره، عنوان نشان، طرح تندیس، مجوز برگزاری سالانه و صدور گواهی‌نامه‌های مربوط به کسب رتبه در آن، متعلق به سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی، وزارت علوم و تحقیقات و فناوری است.

بخش دانش‌آموزی جشنواره فقط شامل دوره دوم متوسطه (سال‌های دهم، یازدهم و دوازدهم) است که در شاخه‌های نظری، کاردانش و فنی و حرفه‌ای برای دانش‌آموزان برگزار می‌شود. هیئت داوران عالی‌ترین مرجع تصمیم‌گیری علمی و تخصصی جشنواره است که وظایف آن عبارت‌اند از:

- بررسی و ارزیابی نهایی ارزش علمی و فنی طرح‌های ارزیابی شده در گروه‌های تخصصی؛
- انتخاب برگزیدگان نهایی جشنواره؛
- رتبه‌بندی طرح‌های برگزیده در سه سطح اول، دوم و سوم؛
- بررسی مجدد طرح‌های مورد اعتراض.

مرحله کشوری بخش دانش‌آموزی این جشنواره همه ساله در «دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی» برگزار می‌شود و دانش‌آموزان شاخه‌های نظری، کاردانش و فنی و حرفه‌ای باهم به رقابت می‌پردازند. به گفته رئیس ستاد بخش دانش‌آموزی نوزدهمین جشنواره جوان خوارزمی در سال ۱۳۹۶، تعداد ۸ هزار و ۲۶۹ طرح مربوط به دانش‌آموزان و هنرجویان دوره متوسطه به دبیرخانه‌های استانی جشنواره جوان خوارزمی ارجاع شدند که توسط کارشناسان استانی در گروه‌های علمی مورد ارزیابی قرار گرفتند. از این تعداد، ۱۱۹۹ طرح منتخب استانی به مرحله کشوری راه پیدا کردند. وی اظهار داشت: «طرح‌ها در گروه‌های

دبیرخانه جشنواره، نام و مشخصات برگزیدگان را به بنیاد ملی نخبگان، سازمان سنجش، برخی صندوق‌های حمایتی، مراکز رشد و پارک‌های فناوری، برخی سازمان‌های علمی و صنعتی حامی جشنواره و... اعلام می‌کند

علمی برق و الکترونیک، رایانه، مکترونیک، مکانیک، فیزیک و نجوم، شیمی، ریاضی، عمران و معماری، علوم زیستی و پزشکی، کشاورزی و منابع طبیعی، زبان و ادبیات فارسی، علوم اجتماعی و روان‌شناسی، علوم دینی و قرآن پژوهی، هنر، نانو تکنولوژی و طرح‌های میان‌رشته‌ای بررسی و ارزیابی شدند که پس از دفاع حضوری داوران استانی و طراحان، ۷۶ طرح به مرحله داوری نیمه‌نهایی جشنواره راه پیدا کردند.»

رئیس ستاد بخش دانش‌آموزی جشنواره جوان خوارزمی یادآور شد: «پس از این مرحله، تعداد ۶۲ طرح به مرحله داوری نهایی راه یافتند و پس از آن نیز با داوری طرح‌ها در هیئت داوران مشترک وزارت علوم و وزارت آموزش و پرورش، ۳۰ طرح به‌عنوان برگزیده نهایی کشوری نوزدهمین جشنواره جوان خوارزمی در بخش دانش‌آموزی انتخاب و در رتبه‌های اول تا سوم معرفی شدند. در بخش ریاضی، طرح **مهدی صالح**، با عنوان «بررسی خطوط در فضای سه‌بعدی با رویکرد دنباله استومی»، موفق به اخذ رتبه دوم کشوری و طرح آقای **متین امینی**، با عنوان «اثباتی برای حدس کیمبرلینگ درباره دنباله‌های امضا»، موفق به اخذ رتبه سوم کشوری شد. در شماره‌های بعد مصاحبه‌ای با این عزیزان از طریق این مجله صورت خواهد گرفت.

چگونگی تشویق و حمایت از برگزیدگان جشنواره‌های جوان خوارزمی

دبیرخانه جشنواره خوارزمی می‌کوشد تا هدف شناسایی و معرفی و طرح‌های برتر را به‌کارگیری فرایندهای مناسب و دقیق به‌خوبی به انجام رساند و هر ساله به فراخور شرایط بودجه در اختیار، در مراسم نهایی لوح تقدیر، تندیس و پاداش نقدی متناسب با رتبه برگزیده را اهدا می‌کند. اما این فقط حلقه‌ای از یک زنجیره و مرحله‌ای از آغاز راه است که می‌باید توسط دیگر نهادها و سازمان‌های مرتبط به سرانجام مطلوب برسد. لازم است هر یک از طرح‌ها و مجریان آن‌ها به فراخور شرایط، ماهیت و قابلیت‌های فنی و علمی برای تحقیق و توسعه، تولید محصول و تجاری‌سازی، مورد حمایت مادی و معنوی قرار گیرند.

در این راستا دبیرخانه جشنواره، نام و مشخصات برگزیدگان را به بنیاد ملی نخبگان، سازمان سنجش،

برخی صندوق‌های حمایتی، مراکز رشد و پارک‌های فناوری، برخی سازمان‌های علمی و صنعتی حامی جشنواره و... اعلام می‌کند تا مطابق با آیین‌نامه و مقررات خود امکان بهره‌مندی از تسهیلات و حمایت‌های مادی و معنوی را برای برگزیدگان فراهم کنند. متأسفانه بررسی و نظرسنجی از برگزیدگان دوره‌های قبل نشان می‌دهد، آن‌ها در دریافت و بهره‌مندی از تسهیلات و خدمات این نهادها با آیین‌نامه‌های پیچیده، شرایط سخت و رویه‌های زمان‌بر روبه‌رو هستند که گاهی به بخشیدن عطا به لقا منجر می‌شود.

آنچه که دبیرخانه برای تشویق و حمایت از برگزیده امکان انجام آن را دارد، عبارت است از:

۱. اهدای لوح تقدیر، تندیس جشنواره و جایزه نقدی از سوی سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران.
۲. صدور گواهی‌نامه کسب رتبه در جشنواره جوان خوارزمی برای مجری و همکاران طرح با تعیین درصد مشارکت.
۳. معرفی برگزیدگان به «سازمان سنجش آموزش کشور» برای استفاده واجدین شرایط از امکانات آیین‌نامه تسهیلات به برگزیدگان علمی برای ورود به دوره‌های تحصیلی بالاتر.
۴. معرفی برگزیدگان به بنیاد ملی نخبگان برای استفاده از تسهیلاتی که براساس آیین‌نامه پشتیبانی و حمایت از نخبگان و استعدادها برتر به برگزیدگان جشنواره‌های معتبر کشور ارائه می‌کند.
۵. معرفی برگزیدگان هر دوره به حامیان جشنواره برای بهره‌مندی از پاداش‌هایی که نسبت به آن متعهد شده‌اند.
۶. معرفی برگزیدگان به برخی برنامه‌های علمی، خبری یا گزارشی صدا و سیما برای معرفی گسترده‌تر طرح به مخاطبان.
۷. افزایش راهکارهای تعامل و همکاری با صندوق‌های حمایتی و بنگاه‌های اقتصادی برای تسهیل رویه معرفی برگزیدگان جشنواره جوان خوارزمی و فراهم ساختن امکان استفاده از تسهیلات مالی آن‌ها، و با نهادها و مراکز چون «صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران»، «صندوق توسعه صنایع الکترونیک»، «صندوق ضمانت سرمایه‌گذاری صنایع کوچک»، و...

نشانی پستی دبیرخانه بخش دانش‌آموزی ستاد جشنواره جوان خوارزمی:

تهران، خیابان سپهبد قرنی، نبش چهارراه سمیه، ساختمان زنده‌یاد علاقه‌مندان وزارت آموزش و پرورش، طبقه هفتم، مرکز ملی پرورش استعدادها درخشان و دانش‌پژوهان جوان، «دبیرخانه بخش دانش‌آموزی جشنواره جوان خوارزمی»

کدپستی: ۱۵۹۹۹۵۸۱۱۱

تلفن: ۰۲۱ - ۸۲۲۸۴۱۷۹

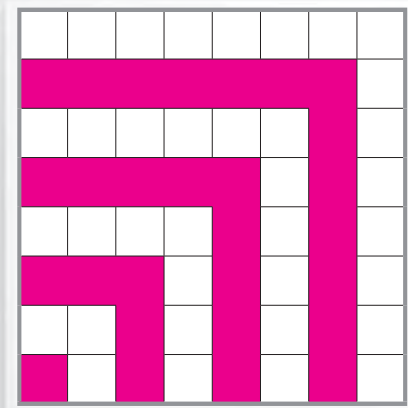
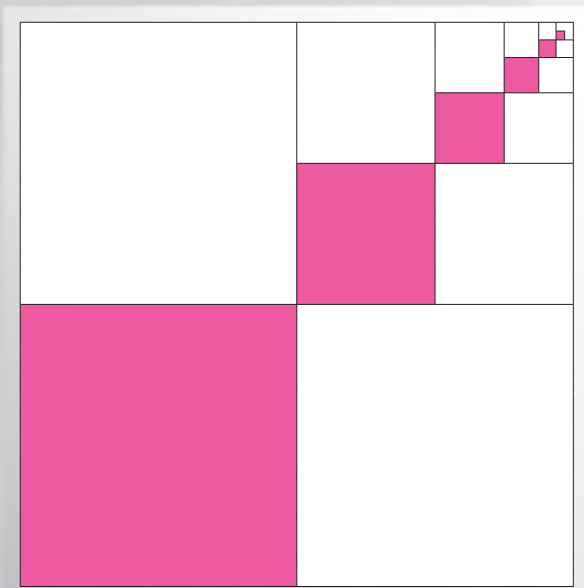
دورنگار: ۰۲۱ - ۸۲۲۸۴۱۸۴

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
 میانگین حسابی دو عدد
 نا کمتر از میانگین هندسی آنهاست.

اثبات بدون کلام

اشاره

اثبات آوردن در ریاضیات ذاتی است و امری زاید نیست، بلکه وابسته به ماهیت ریاضی است. ماهیت ریاضیات اثبات‌پذیر است. اثبات بدون کلام یک باور روان‌شناختی است. نمودارها به ما کمک می‌کنند که قضیه‌ها را بفهمیم و برهان را دنبال کنیم. همین و بس.



$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

حاصل جمع n عدد طبیعی فرد اولیه برابر با مربع تعداد آنهاست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots = \frac{1}{3}$$

میزگرد با حضور مؤلفان کتاب درسی



■ **میرشهرام صدر:** با سلام خدمت شما مؤلفان محترم کتاب درسی هندسه ۳ و تشکر از حضور شما در این مصاحبه. مبحث ماتریس‌ها را در فصل اول کتاب هندسه ۳ می‌بینیم. چرا مبحث ماتریس‌ها در پایه دوازدهم آمده است؟ آیا تا به حال برای محاسبه‌ها به ماتریس



نیاز نداشتند؟ اگر ماتریس را نمی‌گفتیم، چه اتفاقی می‌افتاد؟

● **امیری:** ببینید در سنوات گذشته بچه‌ها در سال دوم ماتریس را می‌خواندند و خیلی هم مفصل می‌خواندند. یعنی «درت‌میان» و ضرب‌های ماتریس‌های ۲ در ۲ و بالاتر را می‌خواندند بدون اینکه کاربرد غیرماتریسی در این مبحث برای دانش‌آموزان بازگو شود. اما، با توجه به اینکه یکی از پایه‌های ما در دوره دوم متوسطه کم شد - یعنی پایه نهم که معادل اول دبیرستان سابق بود - در این سه سال که داشتیم، حجم درس‌ها طوری نبود که بتوانیم دوباره به این موضوع بپردازیم. به خصوص که در برنامه درسی ما هم ماتریس با کاربردهایش آمده بود. بنابراین تنها کتابی که می‌توانستیم در آن به مبحث ماتریس بپردازیم، با توجه به حجم کتاب‌ها و مطالب گفته‌شده در آن‌ها کتاب هندسه ۳ بود.

■ **چرا جای مبحث ماتریس در هندسه است؟**

● **امیری:** اگر می‌خواستیم در کتاب حسابان بیاوریم که به هیچ موضوعی مرتبط نبود. در آمار و احتمال هم همین‌طور. مشکل ما، هم این مطلب و هم سنگین شدن کتاب بود. لذا مبحث ماتریس را که در برنامه درسی ریاضی هم آمده است، فقط می‌توانستیم در کتاب هندسه ۳ بیاوریم. با توجه به اینکه از ماتریس در فصل ۳ کتاب نیز استفاده شده است.

خط به خط کتاب درسی را مطالعه کنید

اشاره

در این شماره با مؤلفان کتاب درسی «هندسه ۳»، آقایان حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی و محمدرضا سعیدصالحی نشست صمیمانه‌ای داشتیم که ضمن آن، توصیه‌ها و مطالبی را برای شما دانش‌آموزان پایه دوازدهم مطرح کردند تا بهتر بتوانید از مطالب این کتاب استفاده کنید.

پس در واقع نوعی اجبار وجود داشته است؟

● **ریحانی:** ما اجبارهای متفاوتی داریم. مثلاً اجبار کاهش حجم داریم. کاهش حجم به‌طور رسمی هم به ما ابلاغ شده است و تأکید شده است، مواد سال آخر در سال‌های پایین‌تر گفته نشوند. اما چون مطالب باید دارای انسجام باشند، خیلی وقت‌ها نمی‌توان این موضوع را به‌طور کامل رعایت کرد. ضمن اینکه موضوع ماتریس به‌عنوان مفهومی که تعمیمی از اعداد است، نسبت به مباحث دیگر اولویت پیدا می‌کند و شاید عقلانی باشد که این مفهوم مثلاً نسبت به «دنباله» اولویت داشته باشد. پس شاید بهتر باشد، اسم آن را به جای اجبار، ضرورت بگذاریم.



● سابق بر این عقیده داشتند، دانش آموزی که از رشته ریاضی فیزیک وارد دانشگاه می‌شود، باید اطلاعاتی هم درباره شاخه‌های رشته ریاضی محض داشته باشد. ولی امروز فکر می‌کنند، دانش آموزی که در رشته ریاضی تحصیل می‌کند، در حال آماده شدن برای ورود به دانشگاه و تحصیل در رشته‌های ریاضی، مهندسی و یا مدیریت است. بنابراین، زیرساخت‌های مناسبی برای ادامه تحصیل و آموزش عمومی در نظر گرفته شده است و نیازی نیست که ما به‌طور خاص مطالبی را که مربوط به رشته ریاضی محض دانشگاهی است، برای دانش‌آموزان دبیرستانی بگوییم.

● **ریحانی:** نکته حائز اهمیت این است که در کتاب‌های جدید ریاضی رشته‌های تجربی، ریاضی و انسانی، هماهنگی نسبتاً زیادی وجود دارد.

مقداری از محتوای ریاضی فرمال (به‌صورت فرمولی) مبحث مقاطع مخروطی حذف شده است، چرا؟

● **امیری:** ببینید کتاب‌ها باید طوری نوشته شوند که معلم‌های سراسر کشور بتوانند کل کتاب را درس بدهند. آیا در سال‌های گذشته این‌گونه بود؟ خیر. یعنی مثلاً ما می‌گفتیم فلانی «گسسته‌کار» است، یا فلانی «دیف» (حسابان دیفرانسیل و انتگرال) می‌گوید. شاید بعضی از مدرسه‌ها این ظرفیت را داشتند که روی معلمی این‌گونه سرمایه‌گذاری کنند و برای یک کلاس در هر کتاب یک معلم بیاورند. اما آیا همه مدارس چنین ظرفیتی را داشتند؟ پس هدف اول این بود که معلم دارای لیسانس ریاضی، به راحتی



بتواند این کتاب‌ها را درس بدهد.

اما هدف دوم. نمی‌دانم شما در دانشگاه برای بچه‌های مهندسی و یا رشته ریاضی، درس ریاضی ۱ را گفته‌اید یا نه؟ من گفته‌ام و وقتی به بحث مقاطع مخروطی می‌رسیدم، بچه‌ها خیره و با تعجب مرا نگاه می‌کردند. خوب، پس این‌همه وقتی که در سال چهارم صرف شده، به هدر رفته است. مبحثی که عمق نداشته باشد، ماندگاری هم ندارد. بنابراین اگر مقاطع مخروطی را به این صورت گفتیم، این را به وزارت علوم گزارش خواهیم داد که هم استنادی که می‌خواهند در دانشگاه ریاضی ۱ بگویند، تکلیف خود را بدانند و از اول، مباحث را به‌طور کامل درس بدهند، و هم ما عمیق‌تر و مفهومی‌تر مطالب را بیان کنیم. مثلاً در فصل مقاطع مخروطی که فرمودید، ما به‌صورت فرمال فقط به دایره و سهمی اشاره کرده‌ایم، چون همه دانش‌آموزان با هر دوی این‌ها آشنایی دارند و دیگر اینکه ذهن بچه‌ها را با فرمول و نکته‌هایی که حتی خیلی وقت‌ها ما معلم‌ها را هم گیج می‌کند، پر نکنیم.

دلیل حذف مبحث خط و صفحه از کتاب هندسه تحلیلی سال دوازدهم چیست؟

● **سید صالحی:** ما احساس کردیم خیلی از مطالب، از جمله همین خط و صفحه‌ای که شما فرمودید، با عمق خیلی کمی درس داده می‌شوند. یعنی قبل از اینکه دانش‌آموز مطلب را کامل درک کند، ما وارد مبحث بعدی می‌شویم؛ بحث‌های قضیه و اثبات. حتی در ادامه، یعنی در دانشگاه هم این بروز پیدا می‌کند. پس خلأیی که وجود داشت، نفهمیدن موضوع و استدلال درست در حل مسئله، به‌خصوص خط و صفحه بود.



● از صحبت‌هایی که شما فرمودید، یک سؤال برای من پیش آمد که اگر اجازه دهید، آن را بپرسم. شما فرمودید، مشکل در استدلال دانش‌آموز بود! خوب فکر نمی‌کنید، به جای اینکه قدرت استدلال و تحلیل دانش‌آموزان را افزایش دهید، صورت مسئله را حذف کرده‌اید؟

● **سید صالحی:** عمق یادگیری در کتاب‌های هندسه سابق وجود نداشت. یعنی شما اگر سؤالی را خارج از کتاب در امتحانات مطرح می‌کردید، تقریباً بیشتر دانش‌آموزان قادر به پاسخ‌گویی آن نبودند. شما به کتاب‌های مرجع هم که نگاه کنید، می‌بینید خیلی از آن‌ها صریحاً گفته‌اند که زودتر از موعد وارد استدلال استنتاجی شدن، غلط



است. پس ما خواستیم که بر این مبنا باشیم که دانش آموز اول شهود را متوجه شود، سپس خاصیت‌ها، و بعد جبر و خواص جبری را.

■ در مورد بردارها کم صحبت کردیم. آیا آوردن بردارها در کتاب صرف آموزش بردارها بوده است، یا مسائلی را هم که به کمک بردارها حل می‌شوند، داشته‌اید؟ اصلاً اگر بردارها در کتاب هندسه گفته نمی‌شد، چه اتفاقی می‌افتاد؟

● امیری: همان‌طور که آقای سیدصالحی فرمودند، بحث تعمیم است. مثلاً فضای «دوبعدی» را همه بچه‌ها قبلاً شناخته‌اند و فضای سه‌بعدی فضایی است که بچه‌ها با آن روبه‌رو هستند. شما اگر روند تألیف را ببینید درمی‌یابید که ما اول فضای دوبعدی را معرفی کرده‌ایم، یعنی نقطه، خط و خود دستگاه مختصات را در فضای دوبعدی ساخته‌ایم و بعد وارد فضای سه‌بعدی شده‌ایم. خوب دانش آموز به سرعت سراغ این می‌رود که آیا مطالبی که در فضای دوبعدی خوانده است، اینجا هم استفاده می‌شود؟ این تعمیم است.

در ادامه اگر از خط و صفحه گفته‌ایم، آن‌ها را در دستگاه محورهای مختصات آورده‌ایم و صفحه‌های خاص را معرفی کرده‌ایم. اما معادله خط و معادله صفحه در حالت کلی گفته نشده‌اند که اگر گفته می‌شدند، در ادامه می‌باید چند مطلب دیگر، مثل وضعیت خط و صفحه، و مطالبی را که در دوره قبل به دانش آموزان گفته

می‌شدند، می‌گفتیم.

هدف دیگر اینکه چون بچه‌های پایه دوازدهم امسال هم امتحان نهایی دارند و هم کنکور، این کتاب طوری تألیف شده است که بتوان آن را واقعاً تا حدود اواخر اسفندماه به‌طور کامل تدریس کرد تا بچه‌ها برسند، هم برای امتحان نهایی روی سؤال‌های تشریحی کار کنند، و هم برای کنکور خودشان را آماده کنند.

● ریحانی: البته سبک کتاب هم مثل سابق نیست که ابتدا تدریس توسط معلم انجام شود بعد هم دانش‌آموزان تمرین‌ها را حل کنند. چرا که کتاب‌های سال دوازدهم هم مثل سال‌های پایین‌تر، «فعالیت‌محور» هستند و دانش‌آموزان باید در مسائل کتاب درگیر شوند. در این فضا معلم فقط باید دانش‌آموزان را هدایت کند. این فضا خود مانع می‌شود که فقط سیلی از تعاریف، احکام، گزاره‌ها و قضیه‌ها دنبال هم ردیف شوند.

■ در خاتمه، ضمن تشکر از حضور شما استادان محترم، اگر توصیه‌ای برای دانش‌آموزان در خصوص مطالعه این کتاب برای درک بهتر آن و یا هر موردی که درباره این کتاب دارید، بفرمایید تا بچه‌ها استفاده کنند.

● ریحانی: ببینید، برای تألیف این کتاب‌ها خیلی زحمت کشیده شده، از بهترین استادان استفاده شده و ساعت‌ها بحث و گفت‌وگو

و نقد و بررسی انجام شده است. پس این توقع وجود دارد که با تکیه بر خود کتاب درسی و با آن جلو بروند. باور کنید با این کار بهتر می‌توان به هدف‌ها دست یافت، تا اینکه مثلاً مسائل حاشیه‌ای برای ما مطرح باشد و قبل از اینکه به کتاب بپردازیم، برویم سراغ چیزهایی مثل نکته و حاشیه‌هایی که واقعاً قصد و منظور مؤلفان نبوده‌اند. بنابراین توصیه‌ای که ما این است که از کتاب درسی استفاده کنند.

سالی که پیش رو داریم، سال حساسی است. چون بچه‌هایی که برای اولین بار دوازدهمی هستند، برای اولین بار از کتاب‌های جدید استفاده می‌کنند و کنکور می‌دهند. آن‌ها اگر مثلاً در هندسه تحلیلی، تست‌های بردار یا مباحث دیگر، سؤالات کنکور سال‌های اخیر را حل کنند، به نوعی سردرگم می‌شوند. یعنی چند سال کنکور باید برگزار شود تا ببینند در چه حیطه‌ای لازم است مطالعه کنند. برای این‌ها چه توصیه‌ای دارید که بهترین نوع مطالعه را داشته باشند و به نتیجه برسند؟

امیری: اولین توصیه من به دانش‌آموزان این است که خط به

خط کتاب درسی را مطالعه کنند؛ چه متن و چه تمرین‌ها. در این کتاب تعداد مثال‌ها نسبت به سال قبل بیشتر است و خیلی‌ها را هم به‌طور کامل حل کرده‌ایم که هر کدام از آن‌ها می‌تواند یک سؤال چهارگزینه‌ای باشد.

توصیه دوم من این است که دانش‌آموزان با معلم‌ها پیش بروند و خیلی به کتاب‌های کمک‌آموزشی تکیه نکنند؛ مگر کتاب‌هایی که توسط سازمان پژوهش تأیید شده‌اند. مطلب بعدی اینکه طراح سؤال که قرار است از کتاب‌های جدید، تست برای کنکور طرح کند، هیچ‌وقت سراغ کتاب‌های نظام قدیم نمی‌رود، پس مینا کتاب‌های جدید است. نکته بعدی اینکه «تست» یعنی مسئله‌ای با راه‌حل کوتاه. اگر شما مسائل حل شده کتاب را فهمیده باشید، هیچ مشکلی در حل آن تست هم نخواهید داشت.

دانش‌آموزان ما فهیم‌اند و می‌دانند که هر تست با هدف‌های کتاب تطابق دارد یا نه. پس قدم اول تسلط کامل بر مطالب کتاب است، چرا که ۶۰ تا ۷۰ درصد سؤالات کنکور، معمولاً از متن کتاب درسی طرح می‌شوند.

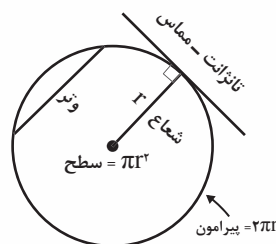
ریاضیات در چند دقیقه

دایره‌ها

دایره به صورت مجموعه‌ای از نقاطی تعریف می‌شود که از نقطه مرکزی P به فاصله‌ای برابر شعاع r قرار دارند. دایره یکی از اعضای اولیه‌ای است که در اصول اقلیدس امری بدیهی فرض شده است. خم محصور گذرنده از جمیع نقاط خارجی دایره، پیرامون دایره است و طول پیرامون - یعنی C - توسط معادله $C = 2\pi r$ ، با شعاع r به دست می‌آید. در حالی که سطح دایره - یعنی A - توسط معادله $A = \pi r^2$ حاصل می‌شود. به این طریق، دایره ضرورتاً به یکی از دو ثابت بزرگ ریاضیات - یعنی π - منجر می‌شود.

دایره خم‌ها، خط‌ها و سطح‌های دیگری را نیز تعریف می‌کند. «کمان» (arc) بخش محدودی از پیرامون دایره است، در حالی که «قطاع» (sector) ناحیه‌ای از دایره‌ای است که توسط دو شعاع و یک کمان محصور شده است. «وتر»

(chord) خط راستی از میان دایره بین دو نقطه بر پیرامون آن است، و «قطعه» (segment) سطحی است داخل دایره که توسط پیرامون و یک وتر محدود شده است. «تانژانت» (tangent) خط راستی است که بر دایره در یک نقطه منفرد مماس است.



جنبه‌های گوناگون دایره، اعم از شعاع، پیرامون و سطح دایره، به گونه‌ای تنگاتنگ با تعریف ثابت π مرتبط‌اند، در حالی که خط‌ها و سطح‌های گوناگون هندسی‌ای نیز از دوایر استخراج شده‌اند.



میز و صندلی‌ها را به سمت سود هل دهید!

تولید و... و حداقل کردن هزینه، ریسک و... استفاده می‌شود. روش اصلی علم تحقیق در عملیات پیدا کردن بهترین پاسخ برای مسائل پیچیده‌ای است که به زبان ریاضی مدل‌سازی شده‌اند و باعث بهتر شدن یک فرایند می‌شوند و...

اگر مقاله «مسئله کارگاه کیف و کفش آقای آشفته» را خوانده‌اید، پیشنهاد می‌کنم برای فهم بهتر راه‌حل این نوع مسائل، آن مقاله را پیدا کنید و حتماً بخوانید.

برگردیم به مسئله و حل آن. برای حل این مسئله و پیدا کردن اینکه پدرم چه تعدادی میز و صندلی تولید کند تا بیشترین فایده را ببرد، لازم است که مسئله را به صورت یک برنامه خطی درآوریم. به این منظور تعداد میزها را x_1 و تعداد صندلی‌ها را x_2 در نظر می‌گیریم. معادله و یا تابع سود تولید میز و صندلی را Z و به این صورت فرض می‌کنیم: تولید هر میز ۴۰ هزار تومان و هر صندلی ۲۰ هزار تومان منفعت دارد. بنابراین، تابع سود به این صورت است:

$$Z = 40x_1 + 20x_2$$

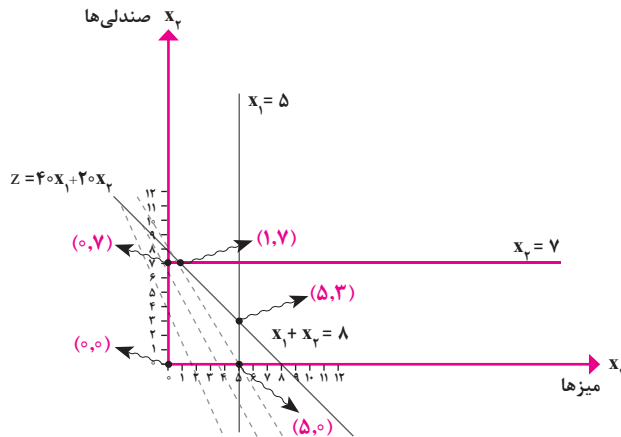
پدرم نجار است. شغل و پیشه اصلی‌اش ساخت میز و صندلی‌های چوبی است. او در کارگاه نجاری‌اش روزی حداکثر ۵ میز و ۷ صندلی می‌سازد. پدرم یک خودروی باری دارد که روزانه دست بالا می‌تواند ۸ میز و صندلی را حمل و نقل کند.

منفعتی که پدرم از ساختن میز و صندلی‌ها به دست می‌آورد، برای هر میز ۴۰ هزار تومان و هر صندلی ۲۰ هزار تومان است.

خلاصه با این شرایطی که پدرم دارد، دوست دارد بداند که روزی چند میز و صندلی بسازد که بیشترین فایده را ببرد. اگر مجله برهان دوره دوم متوسطه را پیوسته مطالعه می‌کنید، حتماً مقاله «مسئله کارگاه کیف و کفش آقای آشفته» یادتان هست که در شماره سوم، (آذرماه ۱۳۹۶) به چاپ رسید. در آنجا توضیح داده بودیم که ریاضیات شاخه‌ای دارد به نام «ریاضیات کاربردی» و یکی از زیرشاخه‌های ریاضیات، شاخه‌ای به نام «تحقیق در عملیات» و یا «پژوهش عملیاتی» است که کارش پیدا کردن نقطه بهینه در مسائل است.

از علم تحقیق در عملیات در پیدا کردن بیشترین سود، سرعت

و این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا بهترین نقطه را به دست آوریم. این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا مطمئن شویم در رأس‌های همسایه هیچ رأس بهتر دیگری پیدا نمی‌شود.



در این حالت آخرین رأس نقطهٔ بهینه است.

- با قرار دادن نقطهٔ (۰ و ۰) و Z، برابر ۰ می‌شود.
- با قرار دادن نقطهٔ مثلاً (۵ و ۱) و Z برابر می‌شود با

$$Z = (40 \times 1) + (20 \times 5) = 140$$

- با قرار دادن (۶ و ۲) در Z، برابر است با:

$$Z = (40 \times 2) + (20 \times 6) = 200$$

- با قرار دادن (۳ و ۴) در Z، برابر است با:

$$Z = (40 \times 4) + (20 \times 3) = 220$$

دید می‌شود که با حرکت Z در ناحیهٔ مناسب از مبدأ به طرف رأس‌های اضلاع ناحیهٔ مناسب، مقدار Z بیشتر و در نتیجه بهتر می‌شود. باید توجه داشت که همیشه بهترین جواب روی اضلاع و یا یال‌های ناحیهٔ مناسب قرار دارد. همچنین در این شرایط بهترین نقطه روی اضلاع یکی از رأس‌های ناحیهٔ مناسب یعنی نقطه‌های (۰ و ۵)، (۷ و ۰)، (۱ و ۷) و یا (۳ و ۵) است. با قرار دادن و امتحان کردن این نقطه‌ها در Z خواهیم داشت:

$$(5, 0) \xrightarrow{Z} Z = (40 \times 5) + (20 \times 0) = 200$$

$$(0, 7) \xrightarrow{Z} Z = (40 \times 0) + (20 \times 7) = 140$$

$$(1, 7) \xrightarrow{Z} Z = (40 \times 1) + (20 \times 7) = 180$$

$$(5, 3) \xrightarrow{Z} Z = (40 \times 5) + (20 \times 3) = 260$$

بنابراین بهترین و بیشترین منافع در تولید ۵ میز و ۳ صندلی با شرایطی است که در کارگاه پدرم وجود دارد. در نتیجهٔ تولید ۵ میز و ۳ صندلی روزانه ۲۶۰ هزار تومان سود عاید می‌شود که این نقطه یک نقطهٔ بهینه است.

حالا با توجه به شرایط مسئله، باید مقدار x_1 و x_2 را طوری پیدا کنیم که مقدار Z بیشترین سود را بدهد. با دقت در شرایط مسئله می‌توانیم بنویسیم:

ع شرط ۱. پدرم روزی حداکثر ۵ میز می‌تواند بسازد:

$$x_1 \leq 5$$

ع شرط ۲. و حداکثر ۷ صندلی:

$$x_2 \leq 7$$

ع شرط ۳. خودروی باری پدرم بیشتر از ۸ میز و صندلی را نمی‌تواند حمل و نقل کند:

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

ع شرط ۴. تعداد میزها و صندلی‌های تولیدی همیشه مثبت است.

$$x_1 \geq 0 \text{ و } x_2 \geq 0$$

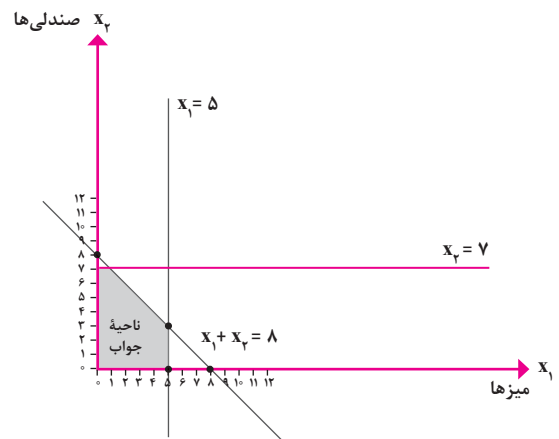
محدودهٔ این شرایط را رسم می‌کنیم:

ع شرط ۱. $x_1 = 5$ تعداد میزها

ع شرط ۲. $x_2 = 7$ تعداد صندلی‌ها

ع شرط ۳. حمل و نقل میز و صندلی با خودروی باری

$$x_1 + x_2 = 8$$



از برخورد سه خط $x_1 = 5$ ، $x_2 = 7$ و $x_1 + x_2 = 8$ ناحیه‌ای حاصل می‌شد که ناحیهٔ مناسب و یا ناحیهٔ جواب است و بهترین نقطه برای تولید در آن قرار دارد.

حالا لازم است که تابع $Z = 40x_1 + 20x_2$ را در این ناحیه طوری و در جهتی حرکت بدهیم که مقدار آن افزایش یابد و بهترین نقطه را در این ناحیه برای Z به دست آورد. نقطهٔ برخورد خط Z با یکی از رئوس ناحیهٔ مناسب، جواب بهینه است.

نکتهٔ مهم این است که در این حرکت و گذر Z از روی اضلاع چندضلعی ناحیهٔ مناسب، از یک رأس مناسب به دیگری گذر می‌کنیم

نطق خاک و نطق آب و نطق گل... (قسمت اول)

من دلیلم حق شما را مشتری
داد حق دلّالی ام هر دو سری

(مثنوی معنوی / دفتر دوم / ۵۷۵)

«دلیل» به معنی «هادی» و «راهنما»^۲ و استدلال به مفهوم طلب دلیل کردن است و «دلّال» به معنی آنکه بسیار در طلب دلیل است. پس در تفکر، که خود از استدلال استفاده می‌کند، زمانی که به استدلال روی می‌آوریم، به دنبال دلیل در حرکتیم. همچنین باید بدانیم که در استدلال منطقی از چه عواملی استفاده می‌کنیم. «منطق»^۳ به‌طور سنتی شاخه‌ای از فلسفه بوده است. «ارغنون»^۴ ارسطو منطق را بر حسب «قیاسات»^۴ - استدلال‌های سه‌خطی کوتاه - تدوین کرده است. یکی از این قیاس‌ها عبارت است از:
تمام انسان‌ها میرا هستند.
سقراط انسان است.
بنابراین، سقراط میراست.

بول دریافت که بسیاری از مشخصه‌های^۵ منطق، مشابه مشخصه‌های جبرند، و به این فکر افتاد که برای بیان استدلال منطقی، شاخه‌ای از جبر را بنا کند. به‌طور کلی در هر استدلال، از جمله استدلال ریاضی، از سه عامل «تمثیل»^۶، «استقرا»^۷ و «قیاس»^۸ استفاده می‌کنیم. طبق تعریف، تمثیل رسیدن از یک حکم جزئی به حکم جزئی دیگر از طریق یک یا چند شباهت است. مثلاً بگوییم: عدد ۳ فرد و اول است، عدد ۹ هم فرد است، پس این عدد هم مانند ۳ اول است. استقرا رسیدن از چند حکم جزئی به یک حکم کلی است. مثلاً پس از اینکه حکم کردیم عددهای زوج ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ بر ۲ بخش پذیرند، حکم کنیم تمام عددهای زوج بر ۲ بخش پذیر هستند.

پیداست که تمثیل و استقرا به کار اثبات ریاضی نمی‌آیند.^۹
 و اما قیاس رسیدن از یک حکم کلی به حکمی جزئی است.
 مثلاً این حکم کلی را داریم که می‌گویید: تمام عددهای زوج بر ۲
 بخش پذیرند و از آن این حکم را استنتاج می‌کنیم که در نتیجه عدد
 زوج ۳۲ نیز بر ۲ بخش پذیر است.
 گرچه در ریاضیات از تمثیل و استقرا استفاده می‌شود، اما برای
 اثبات یک حکم یا قضیه، تنها قیاس به کار می‌آید.
 منطق ریاضی، آن گونه که در «ویکی‌پدیا، دانش‌نامه آزاد» آمده،
 شاخه‌ای از ریاضیات است که به ارتباط ریاضی و منطق می‌پردازد و
 گاه به آن «منطق صوری» یا نمادین نیز می‌گویند. این نام را جوزپه
 پئانو، ریاضی‌دان ایتالیایی بر این رشته علمی گذاشت.

* پی‌نوشت‌ها

۱. نطق خاک و نطق آب و نطق گل
 فلسفی که منکر حنانه است
 هست محسوس حواس اهل دل
 از حواس انبیا بیگانه است
 (مثنوی معنوی/ دفتر اول / ۸۰-۳۲۷۹)
۲. دلیل است هادی تو گو رهنمای (نصاب‌الصیبان/ ابونصر فراهی).

3. logic
4. syllogisms
5. characteristics
6. analogy
7. induction
8. deduction

۹. در اینجا باید گفت که اولاً این استقرا با استقرای ریاضی، یعنی "mathematical induction" که شرحش را در ریاضی خوانده‌ایم، تفاوت دارد. ثانیاً در منطق قدیم به این نوع استقرا، «استقرای ناقص» گفته‌اند، در مقابل «استقرای تام» که به یک معنی همان استقرای ریاضی است که قدما راه اثبات آن را نمی‌دانستند، و صورت امروزی و دقیق آن در قرن نوزدهم توسط ریاضی‌دانان چندی، از جمله پئانو، تنظیم شد. البته بعضی بر آن‌اند که این روش اثبات، برای اولین بار، توسط ابوبکر کرچی، ریاضی‌دان ایرانی در کتاب «الفخری»، در حدود سال ۱۰۰۰ میلادی، برای اثبات قضیه دو جمله‌ای و مثلث پاسکال تنظیم شده است.
 این استقرا برای اثبات راستی یک گزاره، به ازای هر عدد طبیعی n ، به کار می‌رود، و به این صورت است:

ثابت می‌کنیم، گزاره P به ازای یک یا چند عدد طبیعی اولیه، یعنی $P(0)$ ، راست است. سپس با فرض راستی P به ازای عدد طبیعی k ، یعنی راستی $P(k)$ ، ثابت می‌کنیم P به ازای $k+1$ ، یعنی $P(k+1)$ ، نیز راست است، و نتیجه می‌گیریم که P به ازای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از آن عددهای طبیعی اولیه، یعنی $P(n)$ ، نیز راست است. این مطلب در نماد منطقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall p[(p(0) \wedge \forall k \in \mathbb{N} (P(k) \Rightarrow P(k+1))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} (P(n))]$$

* مراجع

- ارغنون، ارسطو
- گلستان سعدی
- نصاب الصیبان، ابونصر فراهی
- The little book of mathematical Principles, Dr Robert Solomon





ریاضی ۱

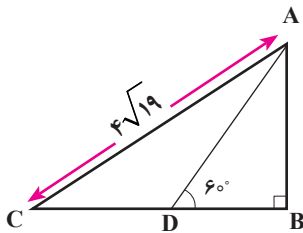
(پایه دهم رشته ریاضی و تجربی)

مجتبی رفیعی

۵. اگر دنباله با جمله عمومی $a_n = an(2-n) + 4n^2 - a$ ،
یک دنباله خطی و جمله دوم دنباله $t_n = \left(\frac{b}{4}\right)n + a^2$ برابر a باشد،
کدام است b ؟

۶. بین عددهای طبیعی a ، 3 ، 1 و $a-3$ تعداد $3a$ واسطه حسابی درج
کرده ایم. قدرنسبت آن کدام می تواند باشد؟

۷. اگر در مثلث ABC از شکل ۲، داشته باشیم: $AB = 4\sqrt{3}$ ،
مساحت مثلث ACD کدام است؟



شکل ۲

۸. اگر A و B به صورت زیر داده شده باشند، حاصل $A+B$ کدام
است؟

$$A = \frac{\sin 45}{\sin 90} \times \frac{\sin 46}{\sin 91} \times \dots \times \frac{\sin 89}{\sin 134} \times \frac{\sin 90}{\sin 135}$$

$$B = \frac{\cos 1}{\cos 135} \times \frac{\cos 2}{\cos 136} \times \dots \times \frac{\cos 44}{\cos 178} \times \frac{\cos 45}{\cos 179}$$

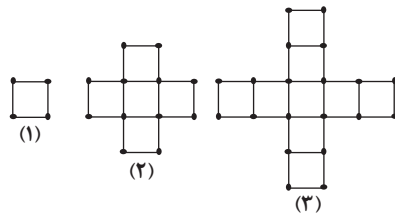
۹. اگر $A = \left(\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{256}} + \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{16}}\right)$ باشد، حاصل A^{60} کدام است؟

۱. در یک کلاس ۵۰ نفره، ۱۲ نفر به هیچ کدام از رشته‌های ورزشی
تنیس و فوتبال علاقه‌ای ندارند. اگر ۱۷ نفر فقط به رشته فوتبال و
۱۴ نفر فقط به رشته تنیس علاقه داشته باشند، چند نفر به هر دو
رشته ورزشی علاقه دارند؟

۲. متمم مجموعه $(A' \cup B') \cup [B - (B - A)]$ کدام است؟
(U مجموعه مرجع و A و B ناتهی هستند.)

۳. در یک انجمن تعداد افرادی که مهارت A را دارند، دو برابر افرادی
است که مهارت B را دارند. اگر $\frac{1}{5}$ افراد این انجمن هر دو مهارت
را داشته باشند و $\frac{3}{4}$ آن‌ها هیچ کدام از مهارت‌ها را نداشته باشند،
چند درصد افراد مهارت A را ندارند؟

۴. با توجه به الگوی شکل ۱ در کدام مرحله، تفاضل تعداد مربع‌ها از
تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۹۱ است؟



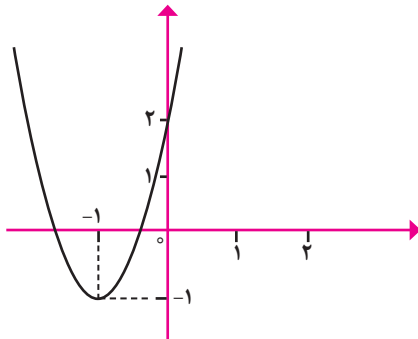
شکل ۱

حسابان ۱

(پایه یازدهم رشته ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

- مجموع همه عناصر یک جدول ضرب 10×10 را به دست آورید.
- حاصل ضرب و مجموع ده جمله اولیه دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = 2 \times 3^n$ را به دست آورید.
- نشان دهید، کمترین فاصله نقاط منحنی $y = \frac{3}{x}$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{6}$ است.
- نمودار تابع درجه دوم $y=f(x)$ در شکل ۱ داده شده است.
 - ضابطه تابع را مشخص کنید.
 - معادله $f^2(x) - 7f(x) = 8$ را حل کنید.



شکل ۱

- خط d نمودار تابع $y = |x|$ را در دو نقطه A و B قطع کرده است. اگر وسط پاره خط AB نقطه $M(1, 2)$ باشد، طول پاره خط AB چقدر است؟
- معادله $\frac{4}{x^2+4} = 2 - \frac{5}{x^2+5}$ را حل کنید.
- اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x$ بازه $[-1, 4]$ باشد، برد تابع را مشخص کنید.
- ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 1$ را رسم کنید و با توجه به آن نمودار تابع $g(x) = |x^2 - 2|x| - 1|$ را رسم کنید.
- اگر تابع f یک تابع چندجمله‌ای و فاقد جمله شامل x از درجه اول باشد و $(f \circ f)(x) = x^2(f(x) - 1)$ باشد، ضابطه $f(x)$ را به دست آورید.

۱۰. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{5+2}}{2} \times (\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5-2}}} \times (\sqrt{5}+2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5+2}}{2}} \times 3^{\sqrt{5-2}}$ کدام است؟

ریاضی ۲

(سال یازدهم رشته تجربی)

حمیدرضا دهقان

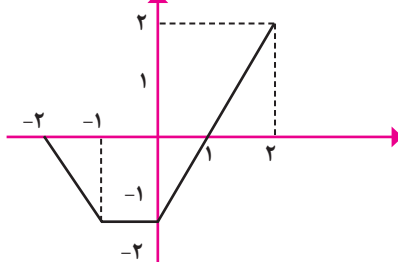
- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\beta^3 + 5\alpha - 4$ را تعیین کنید.
- اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند و داشته باشیم:

$$(\alpha^3 - \alpha^2 + 3k)(\beta^3 - \beta^2 + 3k) = -\frac{17}{27}$$
 مقدار k را بیابید.
- با معلومات $AM = m_a = 3\text{cm}$ و $\hat{C} = 30^\circ$ ، $BC = 4\text{cm}$ مثلث ABC را رسم کنید.
- سه نقطه $A(1, 0)$ ، $B(3, 1)$ و $C(0, 1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث را بیابید.
- دو خط $y = x + 5$ و $y = 3x - 1$ بر دایره $C(O, R)$ عمودند. از طرف دیگر، خط $y = \frac{3}{4}x$ بر دایره C مماس است. مساحت دایره را بیابید.
- معادله $(x^3 - x^2 - 4)^0 + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8} = 0$ چند جواب دارد؟
- معادله $(2x - 7)^3 + (\Delta x + 4)^3 + (3 - 7x)^3 = 0$ چند ریشه دارد؟
- اگر نمودار تابع با ضابطه $y = mx^2 - 2mx + 1$ فقط از ناحیه سوم مختصات عبور نکند، حدود m را تعیین کنید.
- به ازای چه مقادیری از k منحنی به معادله $y = kx^2 - (k+3)x$ از ناحیه دوم مختصات نمی‌گذرد؟
- اگر $D_f = [-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = f\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)$ را بیابید.

۱۰. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت شکل ۲ باشد، دامنه تابع

$$g(x) = \frac{3}{f^2(x) - 4}$$

را به دست آورید.



شکل ۲

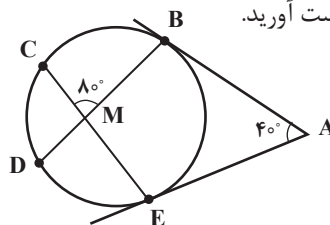
هندسه ۲

(سال یازدهم رشته ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. در شکل ۱، مماس‌های AB و AE از نقطه A بر دایره رسم شده‌اند.

اگر داشته باشیم: $\hat{A} = 40^\circ$ و $\hat{CMB} = 80^\circ$ ، اندازه کمان‌های BE و CD را به دست آورید.



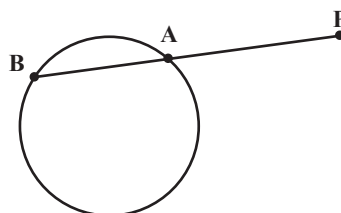
شکل ۱

۲. الف. از نقطه A دو مماس AT و AT' را بر دایره (O و R) رسم می‌کنیم. اگر زاویه بین دو مماس 120° باشد مساحت چهارضلعی ATOT' را به دست آورید (O مرکز دایره).

ب. اگر مورچه‌ای از نقطه A حرکت کند و روی مماس AT به دایره برسد و سپس از مسیری (روی شکل) غیر AT به نقطه A برگردد، بیشترین مسافتی که مورچه طی کرده و به نقطه آغاز برگشته کدام است؟

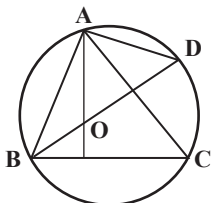
۳. اگر فاصله P تا دورترین نقاط دایره برابر ΔR باشد (شکل ۲) و

اندازه کمان \widehat{AB} (شکل ۲) 60° باشد، طول قطعه PA چند برابر شعاع دایره است؟



شکل ۲

۴. در شکل ۳ نقطه O، نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. ثابت کنید: $AO=AD$.



شکل ۳

۵. دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۲ مماس داخل‌اند ثابت کنید فقط سه وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایره بزرگ‌تر وجود دارد که بر دایره کوچک‌تر مماس است.

۶. طول مماس مشترک خارجی دو دایره $3\sqrt{33}$ است. اگر شعاع‌های دو دایره ۱۱ و ۳ باشند، مساحت کوچک‌ترین دایره‌ای را به دست آورید که بر هر دوی آن‌ها مماس است.

۷. دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۵ و ۹ داریم که طول یکی از ساق‌های آن ۴ است. امتداد ساق‌های این دوزنقه یکدیگر را در نقطه A قطع می‌کنند. طول مماسی از نقطه A، بر دایره‌ای که از رأس‌های دوزنقه می‌گذرد، را حساب کنید.

۸. نیم‌سازهای داخلی یک دوزنقه، متساوی‌الساقین را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

چهارضلعی حاصل، یک چهارضلعی محیطی و محاطی است.

۹. دوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. ثابت کنید:

الف. محیط دوزنقه متساوی‌الساقین چهار برابر طول ساق است.

ب. قطر دایره واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنقه است.

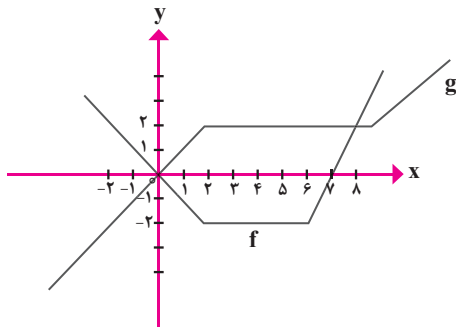
۱۰. در مثلث ABC، با اضلاع $2\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ و ۳، دایره محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی را رسم می‌کنیم. مجموع شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی چند برابر شعاع دایره محیطی مثلث است.

آمار و احتمال

(پایه یازدهم رشته ریاضی)

میرشهرام صدر

۱. دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نمای $3 = \sqrt{2x-1}$ را به دست آورید.



شکل ۱

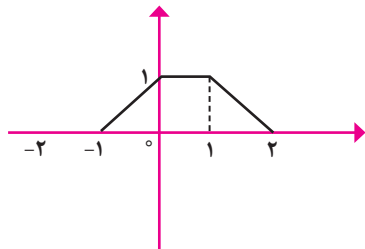
- الف) $(g \circ f)(3)$
- ب) $(f \circ g)(3)$
- پ) $(f \circ g)(-2)$
- ت) $(g \circ f)(-2)$

۲. اگر داشته باشیم: $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، حاصل عبارت $f \circ g(1 - \sqrt{2}) - g \circ f(1 - \sqrt{2})$ را بیابید.

۳. اگر $f(x)$ تابعی صعودی و همواره منفی باشد، یکنوایی تابع $y = |f(x)| + 1$ به چه صورت است؟

۴. اگر نمودار $y = f(x)$ به صورتی باشد، که در شکل ۲ می‌بینیم، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

- الف) $y = f(x - 1) + 2$
- ب) $y = -2f(x)$
- پ) $y = f(-2x)$



شکل ۲

۵. اگر تابع f با دامنه $[-2, 2]$ و برد $[1, 4]$ وارون پذیر باشد، نمودارهای $f \circ f^{-1}(x)$ و $f^{-1} \circ f(x)$ را رسم کنید.

نمونه سؤال فصل ۲

۱. دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

- الف) $y = \sin(\pi x)$
- ب) $y = \sin 2x \cdot \cos 2x$
- پ) $y = \cos^2 7x - \sin^2 7x$

۲. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید:

- الف) بعضی از انسان‌ها سفید هستند.
- ب) هر عدد صحیح، زوج یا فرد است.

۳. ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

- الف) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$
- ب) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$
- پ) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
- ت) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$

۴. نشان دهید که گزاره زیر، گزاره همیشه درست است:

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

۵. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

۶. با روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید:

- الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- ب) $A \subseteq B \Rightarrow A - C \subseteq B - C$

۷. مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. تمام افزایهایی از A را بنویسید که در آن فقط یک زیرمجموعه یک عضوی وجود دارد.

۸. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

- الف) $[A - (B \cup C)] \cup [A - (A \cap B)] = A - B$
- ب) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

۹. مجموعه A دارای $m - n$ عضو و مجموعه B دارای n عضو است. اگر حاصل ضرب دکارتی این دو مجموعه ۱۲ عضو داشته باشد و $2n + m = 12$ ، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A را به دست آورید.

۱۰. ثابت کنید:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

ریاضی ۳

(پایه دوازدهم رشته تجربی)

آناهیتا کیمیجانی

نمونه سؤال فصل ۱

۱. اگر نمودارهای f و g به صورتی باشند که در شکل ۱ می‌بینیم، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

۲. اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

ب) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

پ) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

ت) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2}$

۳. اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\tan^3 x + \cot^3 x}$ را به دست آورید.

۴. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2 \sin x - \tan x = 0$

ب) $\sin 2x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

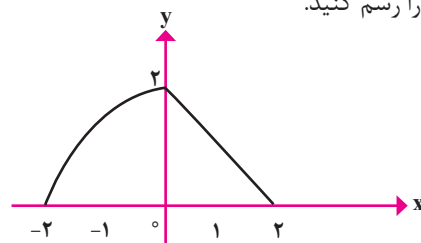
۵. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار عبارت $\sin^2 x + \cos^4 x$ را به دست آورید.

حسابان ۲

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل ۱ داده شده است. نمودار تابع $f(x+|x|)$ را رسم کنید.



شکل ۱

۲. ضابطه هر یک از توابع زیر را که توضیحات آن آمده است، بنویسید.

الف) نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده‌ایم. سپس آن را دو واحد در جهت راست و بعد ۳ واحد به سمت پایین انتقال داده‌ایم.

ب) نمودار $f(x) = x^2$ را با یک انقباض با ضریب ۳ و سپس با یک تغییر مکان به میزان دو واحد در جهت مثبت محور طول‌ها حرکت داده‌ایم.

۳. f و g توابعی از R به R هستند و دامنه f شامل برد g است. ثابت کنید اگر f و g اکیداً صعودی باشند، آن‌گاه $f \circ g$ تابعی اکیداً صعودی است.

۴. نمودار تابع $f(x) = |x-1| + |2-x|$ را رسم و تعیین کنید در چه بازه‌ای تابع اکیداً صعودی است.

۵. به ازای چه مقادیری از a و b چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + ax + b$ بر $(x+2)(x-1)$ بخش پذیر است؟

۶. در یک دوره تناوب تابع $y = 1 + \sin \frac{2\pi x}{3}$ را رسم کنید.

۷. معادلات زیر را در بازه داده شده حل کنید:

الف) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0, [0, 2\pi]$

ب) $\sin x + \cos 2x = 2, [0, \pi]$

۸. نمودار تابع $f(x) = \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ را طی دو مرحله زیر رسم کنید:

الف) نمودار $y = \tan \frac{x}{2}$ از روی نمودار $y = \tan x$

ب) انتقال نمودار $y = \tan \frac{x}{2}$ به اندازه $\frac{\pi}{3}$.

۹. حاصل هر یک از حدود زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1})$

۱۰. مقادیر m و n را طوری بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{4x^2 + mx + n} = +\infty$$

ریاضیات گسسته

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. اگر $b > 1$ ، m و n عددهای طبیعی باشند، و داشته باشیم: $m|n$ ثابت کنید: $(b^m - 1) | (b^n - 1)$.

۲. اگر a عددی اول باشد و دو عدد $(7m+3)$ و $(9m+3)$ را عا د کند، در این صورت مقدارهای ممکن برای a را بیابید.

۳. ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح و متوالی بر ۲ بخش پذیر است و سپس نشان دهید: $3 | n^3 - n$.

۴. اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از عددهای صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر 3 بخش پذیر است.
۵. در یک تقسیم مقسوم علیه 57 و باقی مانده 17 است. بزرگترین عددی را که می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند، بیابید.
۶. عدد 1399 به پیمانه 11 در چه دسته هم نهستی واقع می شود؟
۷. باقی مانده تقسیم عدد $88 + 49^{23!} = A$ را بر 16 بیابید.
۸. باقی مانده تقسیم عدد $29 + 32^{402} = A$ را بر 15 بیابید.
۹. عددهای سه رقمی چون $A = \overline{aba}$ را بیابید که بر 33 بخش پذیر باشند.
۱۰. اگر معادله $12x + my = 8$ در Z دارای جواب باشد و $m \in \mathbb{N}$ و $1 \leq m < 13$ ، در این صورت پارامتر m را مشخص کنید.
۱۱. جواب های عمومی معادله سیاله $19 = 11y + 17x$ را به دست آورید.
۱۲. به چند صورت می توان مبلغ 27 هزار تومان را توسط اسکناس های 5 و 2 هزار تومانی پرداخت کرد؟

هندسه ۳

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

حسین کریمی

۱. با فرض $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ ، حاصل A^2, A^3, \dots, A^n را به دست آورید. (ماتریس A را خود توان گوئیم، هرگاه: $A = A^2 = A^3 = \dots = A^n$ ، چه شرطی بین درایه های ماتریس با درایه های غیر صفر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد تا A خود توان باشد؟)
۲. ماتریس A را «پادمتقارن» گوئیم، هرگاه: $-A^{(t)} = A$. اکنون a, b, c, d, e, f را چنان بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ b & c & 5 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ پادمتقارن باشد.
۳. با فرض $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ، R_{π} را به دست آورده و با محاسبه $R_\theta^\vee = R_{\pi-\theta}$ ثابت کنید: $R_\theta^\vee = R_{\pi-\theta}$.
۱. ماتریس A^t ترانژاده ماتریس A است که با جابه جایی هر سطر A با ستون نظیرش به دست می آید.

۴. با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل A^{1397} را به دست آورید. راهنمایی: ابتدا A^4 را محاسبه کنید.

۵. اگر در ماتریس $A_{3 \times 3}$ ، درایه های سطر اول را در 5 ضرب کنیم، دترمینان ماتریس A چه تغییری می کند؟

۶. x و y را چنان بیابید تا ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & 10 \\ y & 3 \end{bmatrix}$ خاصیت جابه جایی داشته باشد.

۷. در ماتریس غیرهمانی $A_{2 \times 2}$ داریم: $A = A^{-1}$. چه رابطه ای بین درایه های $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار است؟

۸. دترمینان ماتریس های $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۹. دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ m^2x + 6y = 10 - 3m \end{cases}$ مفروض است. معین کنید:

(الف) به ازای چه مقادیری از m ، دستگاه جواب یکتا دارد؟

(ب) به ازای چه مقادیری از m ، دستگاه بی شمار جواب دارد؟

(ج) به ازای چه مقادیری از m ، دستگاه فاقد جواب است؟

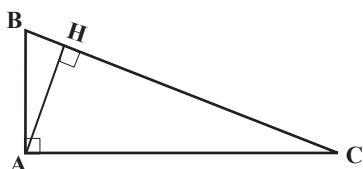
۱۰. به درایه a_{33} در ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 15 & 6 & \end{bmatrix}$ ، 7 واحد اضافه کرده ایم و مقدار دترمینان ماتریس جدید، با دترمینان ماتریس A برابر شده است. m را به دست آورید.

هندسه ۱

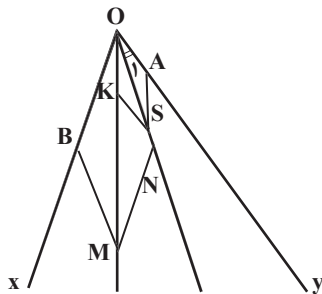
(پایه دهم رشته ریاضی)

حسین کریمی

۱. ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی است بین دو قطعه ای که ارتفاع روی وتر پدید می آورد: $AH^2 = BH \cdot HC$

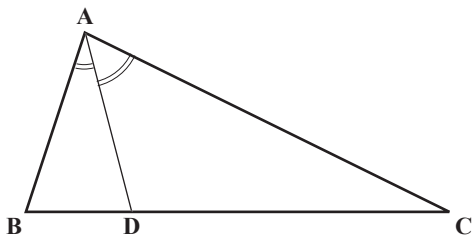


۶. روی دو ضلع OX و OY از زاویه xOy دو لوزی $OBMN$ و $OKSA$ را چنان ساخته‌ایم که قطر گذرا از O در هر یک از آنها، واقع بر ضلع لوزی دیگر است. ثابت کنید: $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{3}xOy$.



۷. ثابت کنید در هر مثلث، نیم‌ساز داخلی زاویه یک رأس، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع مجاور آن زاویه تقسیم می‌کند: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

راهنمایی: از رأس C به موازات AD رسم کنید تا امتداد BA را در K قطع کند و... با فرض $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 7$ ، اندازه‌های DB و DC را به دست آورید.

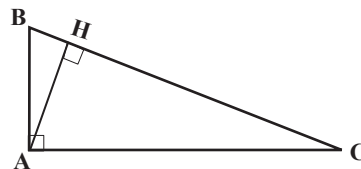


۸. ثابت کنید اگر در یک n ضلعی، نیم‌ساز $n-1$ زاویه رأس‌ها در یک نقطه به هم رسیده باشند، نیم‌ساز n امین زاویه نیز از آن نقطه خواهد گذشت.

۹. ثابت کنید اگر در یک n ضلعی، عمودمنصف‌های $n-1$ ضلع در یک نقطه به هم رسیده باشند، عمودمنصف n امین ضلع نیز از آن نقطه خواهد گذشت.

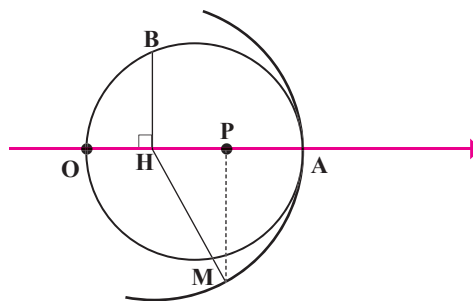
۱۰. با نامساوی واسطه هندسی و حسابی برای دو عدد مثبت a و b آشنا هستیم $(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b})$. برای سه عدد مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c}$.
 راهنمایی: ابتدا برای چهار عدد مثبت a, b, c, d ثابت کنید: $d = \frac{a+b+c}{3}$ سپس با فرض $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{a.b.c.d}$ ادامه دهید.

۲. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، مجذور هر ضلع زاویه قائمه، برابر است با حاصل ضرب اندازه تصویر آن ضلع روی وتر در اندازه وتر $AB^2 = BH.BC$ و $AC^2 = CH.BC$.



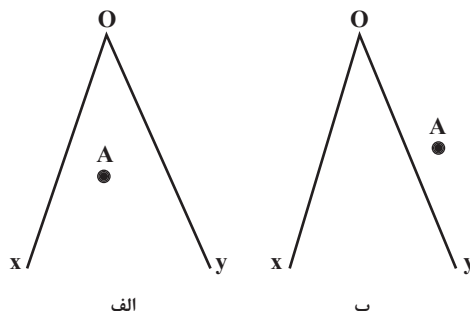
۳. ابتدا دایره‌ای به مرکز H و به شعاع HM رسم می‌کنیم تا محور را در A قطع کند. سپس دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. با فرض $PM = 2$ و $OH = HP = 1$ ، مطلوب است:

الف) تعیین اندازه HB (راهنمایی: از مسئله ۱ استفاده کنید).
 ب) تعیین اندازه OB (راهنمایی: از مسئله ۲ استفاده کنید).



۴. در مثلثی به اضلاع $10, 17$ و 21 ، اندازه سه ارتفاع را به دست آورید.
 (راهنمایی: ابتدا اندازه ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ را به دست آورید.)

۵. زاویه xOy و نقطه A غیرواقع بر اضلاع زاویه مفروض است. خط d گذرا از A را چنان رسم کنید که OX را در B و OY را در C قطع کند و: $AB = 2AC$.



این یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 4$ و $t_1 = 1$ است. جمله عمومی آن عبارت است از:
 $t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 1 + (n-1) \times 4$
 $\Rightarrow t_n = 4n - 3$

دنباله «تعداد چوب کبریت‌ها» عبارت است از:
 $\overset{+12}{4}, \overset{+12}{16}, \overset{+12}{28}, \dots$

این نیز یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d' = 12$ و $t'_1 = 4$ است و داریم:

$$t'_n = t'_1 + (n-1)d' \Rightarrow t'_n = 4 + (n-1) \times 12$$

$$\Rightarrow t'_n = 12n - 8$$

دنباله «تفاضل تعداد چوب کبریت‌ها و تعداد مربع‌ها» عبارت است از:

$$t'_n - t_n = (12n - 8) - (4n - 3) = 8n - 5$$

حال ببینیم در کدام مرحله، حاصل آن ۹۱ می‌شود:

$$8n - 5 = 91 \Rightarrow 8n = 96 \Rightarrow n = \frac{96}{8} = 12$$

۵. جمله عمومی در هر الگوی خطی به فرم $a_n = an + b$ (درجه ۱ بر حسب n) است:

$$a_n = 2an - an^2 - 4n^2 - a = (4-a)n^2 + 2an - a$$

برای آنکه این الگو خطی باشد، باید ضریب جمله n^2 صفر باشد (تا عبارت بر حسب n از درجه ۱ باشد):

$$\Rightarrow 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a_n = 8n - 4$$

$$\Rightarrow a_r = 24 - 4 = 20$$

از طرف دیگر:

$$t_n = \left(\frac{b}{r}\right)n + a^{\frac{a=r}{r}} = \left(\frac{b}{r}\right)n + 16$$

در این دنباله، جمله دوم باید برابر با a_r از دنباله قبل باشد:

$$t_r = 20 \Rightarrow \frac{b}{r} \times 2 + 16 = 20 \Rightarrow b + 16 = 20 \Rightarrow$$

$$b = 4$$

۶. می‌دانیم:

در هر دنباله حسابی که در آن جمله اول t_1 و قدرنسبت d باشد، جمله عمومی از رابطه $t_n = t_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & ((A \cup B') \cup [B - (B - A)])' \\ &= ((A \cup B') \cup [B - (B \cap A')])' \\ &= ((A \cup B') \cup [B \cap (B \cap A)'])' \\ &= ((A \cup B') \cup [B \cap (B' \cup A)])' \\ &= \left((A \cup B') \cup \overbrace{(B \cap B')}^{\emptyset} \cup (B \cap A) \right)' \\ &= ((A \cup B') \cup (B \cap A))' \\ &= (A \cup B)' \cap (B \cap A)' \\ &= (A \cap B) \cap (B' \cup A') \\ &= (A \cap B \cap B') \cup \overbrace{(A \cap B \cap A')}^{\emptyset} \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

۲. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A') &= n(U) - n(A) \end{aligned}$$

با استفاده از اطلاعات مسئله داریم:

$$n(A) = 2n(B)$$

$$n(A \cap B) = \frac{1}{5}n(U)$$

$$n(A \cap B') = \frac{3}{2}n(U)$$

$$\Rightarrow n(U) - n(A \cup B) = \frac{3}{2}n(U) \Rightarrow n(A \cup B)$$

$$= \frac{17}{2}n(U)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 2n(B) + n(B) - \frac{1}{5}n(U)$$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}n(U) = 3n(B) - \frac{1}{5}n(U)$$

$$\Rightarrow 3n(B) = \frac{21}{2}n(U)$$

$$\Rightarrow n(B) = \frac{7}{2}n(U) \xrightarrow{n(A)=2n(B)}$$

$$n(A) = \frac{7}{1}n(U)$$

$$n(A') = n(U) - n(A) = n(U) - \frac{7}{1}n(U)$$

$$= \frac{3}{1}n(U)$$

و این یعنی ۳۰ درصد از افراد، مهارت A را ندارند.

۴. دنباله «تعداد مربع‌ها» را تشکیل می‌دهیم:

$$\overset{+4}{1}, \overset{+4}{5}, \overset{+4}{9}, \dots$$

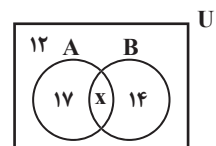


ریاضی ۱

۱. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A) &= n(U) - n(A') \\ n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

در صورتی که مجموعه افرادی را که به رشته فوتبال علاقه دارند، با A و مجموعه افرادی را که به رشته تنیس علاقه دارند، با B نمایش دهیم داریم (U مجموعه مرجع است):



$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)') = 50 - 12 = 38$$

$$n(A - B) = 17, n(B - A) = 14$$

همچنین می‌دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (2)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(3)-(2), (1)} n(A \cap B) = n(A \cup B)$$

$$-n(A - B) - n(B - A)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 38 - 17 - 14 = 7$$

۲. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B' \\ (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ (A')' &= A \\ A \cap A' &= \emptyset \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B)(A \cup C) \end{aligned}$$

دنباله حسابی حاصل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{a-3} & , & \text{به تعداد } 3a \text{ جمله} & , & \boxed{10-a} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله اول} & & \text{جمله } 3a & & \text{جمله } 3a+2 \text{ ام} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = a-3 \\ t_{3a+2} = t_1 + ((3a+2)-1) \times d = 10a \\ \Rightarrow t_1 + (3a+1) \times d = 10a \end{cases}$$

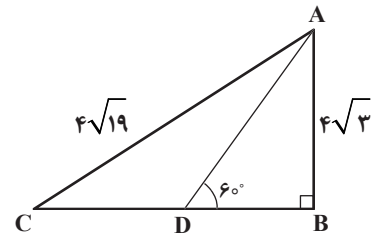
$$\Rightarrow 10a = (a-3) + (3a+1)d \Rightarrow 10a - a + 3 = (3a+1)d$$

$$\Rightarrow 9a + 3 = (3a+1)d \Rightarrow d = \frac{9a+3}{3a+1}$$

$$\frac{3(3a+1)}{3a+1} = 3$$

۷. شکل ۱ را ببینید.

برای محاسبه مساحت مثلث ACD باید ارتفاع AB و قاعده CD معلوم باشد. می‌دانیم که: $AB = 4\sqrt{3}$ ، می‌ماند CD که برای محاسبه آن چنین عمل می‌کنیم:



شکل ۱

$$\begin{aligned} \triangle ABC: AC^2 &= AB^2 + BC^2 \Rightarrow 4(\sqrt{19})^2 = (4\sqrt{3})^2 + BC^2 \\ &\Rightarrow 16 \times 19 = 16 \times 3 + BC^2 \\ &\Rightarrow BC^2 = 16 \times 19 - 16 \times 3 = 16(19-3) = 16 \times 16 \rightarrow BC = 16 \end{aligned}$$

$$\triangle ABD: \tan 60^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{BD} \Rightarrow$$

$$BD = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$$

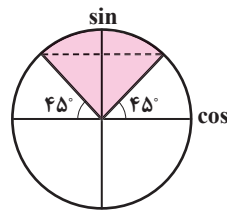
$$CD = BC - BD = 16 - 4 = 12$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

۸. با توجه به دایره مثلثاتی:

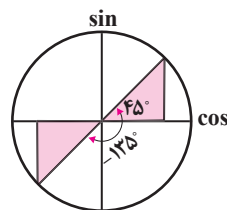
$$\begin{cases} \sin 45^\circ = \sin 135^\circ \\ \sin 46^\circ = \sin 134^\circ \\ \sin 89^\circ = \sin 91^\circ \\ \sin 90^\circ = \sin 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 135^\circ} \times \frac{\sin 46^\circ}{\sin 134^\circ} \times \dots \times \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} = 1$$



شکل ۲

$$\begin{cases} \cos 1^\circ = -\cos 179^\circ \\ \cos 2^\circ = -\cos 178^\circ \\ \cos 44^\circ = -\cos 136^\circ \\ \cos 45^\circ = -\cos 135^\circ \end{cases} \Rightarrow B = -1$$



شکل ۳

پس از بازنویسی به صورت $\frac{\cos 1^\circ}{\cos 179^\circ} \times \frac{\cos 2^\circ}{\cos 178^\circ} \times \dots$ با ۴۵ کسر که هر کدام برابر ۱- هستند، مواجه می‌شویم که حاصل ضرب تمام آن‌ها برابر با ۱- می‌شود. $\Rightarrow A+B = 1+(-1) = 1-1 = 0$

۹.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad a > 0 \quad \text{اگر } n \text{ زوج}$$

ابتدا صورت و مخرج هر کسر را ساده می‌کنیم و پس از گرفتن مخرج مشترک، جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3^2} &= \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2^5} &= \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{1^2} &= \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{2^0} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{1^2} &= \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{2^0} = 2\sqrt[3]{2} \\ \Rightarrow A &= \left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2+2}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}} \\ A^{60} &= \left(\frac{4}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}} \right)^{60} = \frac{(2^2)^{60}}{(\sqrt[3]{2^2})^{60} (\sqrt[3]{2^2})^{60}} = \\ &= \frac{2^{120}}{2^{40} \times 2^{40}} = 2^{40} \end{aligned}$$

۱۰. می‌دانیم:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, a^m \times b^m = (ab)^m \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\sqrt{15})^2 &= (\lambda^2 + 4\lambda\sqrt{15} + 2 \times 15) \\ &= (\lambda^2 + 4\lambda\sqrt{15} + 30) \\ (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \times \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \times \frac{1}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \times \frac{1}{5 - 3} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{5}-2} \times (\lambda + 2\sqrt{15})^2 \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{5}-2} &= \\ &= 2^{\sqrt{5}-2} \times (\lambda^2 + 4\lambda\sqrt{15} + 30) \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{5}-2} \\ &= 2^{\sqrt{5}-2} \times ((\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}))^{\sqrt{5}-2} \\ &= 2^{\sqrt{5}-2} \times (\lambda^2 + 4\lambda\sqrt{15} + 30) \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{5}-2} \\ &= 2^{\sqrt{5}-2} \times (\lambda^2 + 4\lambda\sqrt{15} + 30) \times 2^{\sqrt{5}-2} = 2^{\sqrt{5}} \times (\lambda^2 + 4\lambda\sqrt{15} + 30) \end{aligned}$$

ریاضی ۲

۱. چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند.

در نتیجه:

$$\beta^{\tau} - 2\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta^{\tau} = 2\beta + 1$$

حال عبارت $\beta^{\tau} + 5\alpha - 4$ را تجزیه می‌کنیم
و مقدار β^{τ} را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \beta^{\tau} + 5\alpha - 4 &= \beta(2\beta + 1) + 5\alpha - 4 \\ &= \beta(2\beta + 1) + 5\alpha - 4 = 2\beta^{\tau} + \beta + 5\alpha - 4 \\ &= 2(2\beta + 1) + \beta + 5\alpha - 4 = 4\beta + 2 + \beta + 5\alpha - 4 \\ &= 5\beta + \alpha - 2 = 5(\alpha + \beta) - 2 = 5(2) - 2 = 8 \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند.

در نتیجه:

$$\begin{aligned} 3\alpha^{\tau} - 3\alpha - 5 &= 0 \Rightarrow 3\alpha^{\tau} - 3\alpha = 5 \\ \Rightarrow 3(\alpha^{\tau} - \alpha) &= 5 \Rightarrow \alpha^{\tau} - \alpha = \frac{5}{3} \\ 3\beta^{\tau} - 2\beta - 5 &= 0 \Rightarrow 3\beta^{\tau} - 2\beta = 5 \\ \Rightarrow 3(\beta^{\tau} - \beta) &= 5 \Rightarrow \beta^{\tau} - \beta = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

اکنون مقادیر به دست آمده بالا را در عبارت داده شده جایگزین می‌کنیم.

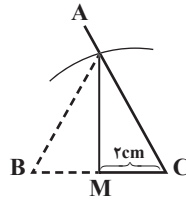
$$\begin{aligned} (\alpha^{\tau} - \alpha^{\tau} + 3k)(\beta^{\tau} - \beta^{\tau} + 3k) &= \frac{-17}{27} \\ \Rightarrow [\alpha(\frac{5}{3} - \alpha) + 3k][\beta(\frac{5}{3} - \beta) + 3k] &= \frac{-17}{27} \\ \Rightarrow [\alpha(\frac{5}{3}) + 3k][\beta(\frac{5}{3}) + 3k] & \\ &= \frac{25}{9}\alpha\beta + 5(\alpha + \beta)k + 9k^{\tau} \\ &= \frac{25}{9}(-\frac{5}{3}) + 5(1)k + 9k^{\tau} = \frac{-17}{27} \\ \Rightarrow \frac{-125}{27} + 5k + 9k^{\tau} &= \frac{-17}{27} \\ \Rightarrow 9k^{\tau} + 5k - 4 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = -1 \text{ یا } k = \frac{4}{9}$$

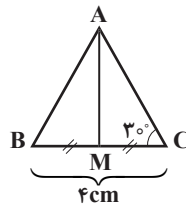
از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} S &= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{+2}{3} = 1 \\ P &= \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

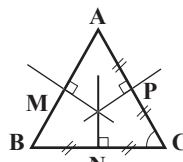
۲. ابتدا مسئله را حل شده فرض می‌کنیم:



CM را به اندازه نصف BC، یعنی ۲cm رسم می‌کنیم. از رأس C زاویه ۳۰ درجه را می‌سازیم. سپس به مرکز M و به شعاع AM=۳cm کمانی می‌زنیم تا امتداد ضلع زاویه C را در نقطه‌ای مانند A قطع کند. CM را به اندازه خودش از طرف M امتداد می‌دهیم تا به نقطه B برسیم. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث مورد نظر به وجود می‌آید.



۴. می‌دانیم در هر مثلث عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه هم‌رس‌اند. پس ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را و سپس شیب خط AB را می‌یابیم تا بتوانیم معادله عمودمنصف ضلع AB را بنویسیم:



M(۲, ۱/۲) وسط AB

$$\text{شیب } m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه شیب عمودمنصف طبق رابطه $mm^{\perp} = -1$ برابر با -۲ می‌شود.

$$y - \frac{1}{2} = -2(x - 2) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -2x + 4$$

معادله عمودمنصف $\Rightarrow y = -2x + \frac{9}{2}$ از طرف دیگر، مختصات نقطه N وسط BC و

شیب خط BC را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم معادله عمودمنصف ضلع BC را بنویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 1}{0 - 3} = 0$$

در نتیجه شیب عمودمنصف ضلع BC تعریف نشده است. پس معادله عمودمنصف ضلع BC برابر است با: $x = \frac{3}{2}$

معادله‌های عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC را یافتیم. تلاقی آن‌ها محل برخورد عمودمنصف‌ها را به دست می‌دهد:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

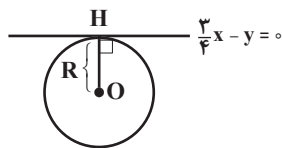
مختصات محل برخورد: $O(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

۵. هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد. پس محل تلاقی دو خط عمود بر دایره، همان مرکز دایره است. در نتیجه:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 5 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 = x + 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3, y = 8$$

پس مختصات مرکز دایره O(۳, ۸) است. چون خط $y = \frac{3}{4}x$ بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره تا خط مماس همان شعاع دایره است.

$$R = OH = \frac{|\frac{3}{4}(3) - 8 - 0|}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1}} = \frac{|\frac{9}{4} - 8|}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{23}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{23}{5}$$



در نتیجه مساحت دایره $(S = \pi R^2)$ برابر است با:

$$S = \pi(\frac{23}{5})^2 = \frac{529}{25}\pi$$

۶. چون در معادله داده شده، معادله درجه دوم و

معادله درجه سوم مطرح شده است، برای یافتن تعداد جواب‌های معادله اصلی، ریشه‌های معادله درجه دوم را پیدا می‌کنیم. اگر این ریشه‌ها در معادله درجه سوم سوم نیز صدق کنند، تعداد

جواب‌های معادله اصلی مشخص می‌شود: چرا؟

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = 4$$

بدیهی است که عدد ۲ در معادله درجه سوم $x^3 - x^2 - 4 = 0$ صدق می‌کند، ولی عدد ۴ صدق نمی‌کند. پس معادله موردنظر تنها یک جواب دارد.

۷. با توجه به «اتحاد اویلر»، اگر $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه: $a^3+b^3+c^3=3abc$ خواهد بود. معادله داده شده در قالب اتحاد اویلر قرار می‌گیرد، پس معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(2x-7)^3 + (\Delta x+4)^3 + (3-7x)^3 = 0$$

$$= 3(2x-7)(\Delta x+4)(3-7x) = 0$$

$$3 \neq 0 \quad 2x-7=0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\Delta x+4=0 \Rightarrow x = -\frac{4}{\Delta}$$

$$3-7x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$$

پس معادله سه ریشه دارد.

۸. برای آنکه نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ فقط از ناحیه سوم نگذرد، باید $a > 0$ باشد و در معادله سهمی باید داشته باشیم: $\Delta \geq 0$ و $S > 0$ و $P \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow m > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m)(1) \\ &= 4m^2 - 4m \geq 0 \Rightarrow m^2 - m \geq 0 \Rightarrow m > 1 \\ S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2m)}{m} = 2 > 0 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{1}{m} \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

۹. برای آنکه نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ فقط از ناحیه دوم نگذرد، باید $a < 0$ باشد و در معادله داشته باشیم: $\Delta \geq 0$ و $S > 0$ و $P \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} a < 0 &\Rightarrow k < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (k+2)^2 - 4k(0) \geq 0 \\ &\Rightarrow (k+2)^2 \geq 0 \\ \frac{k+2}{k} > 0 \xrightarrow{\times k < 0} k+2 \leq 0 \Rightarrow k \leq -2 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{0}{k} \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \leq -2$$

۱۰. چون دامنه تابع f به این صورت است: $[-1, 3]$ ، در نتیجه:

$$-1 \leq \frac{x-1}{2x-1} \leq 3 \Rightarrow -1-1 \leq \frac{x-1}{2x-1} -1 \leq 3-1$$

$$\rightarrow -2 \leq \frac{x-1-2x+1}{2x-1} \leq 2 \rightarrow -2 \leq \frac{-x}{2x-1} \leq 2$$

$$\xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}} \left| \frac{-x}{2x-1} \right| \leq 2 \rightarrow \frac{|x|}{|2x-1|} \leq 2 \rightarrow |x| \leq 2|2x-1|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 \leq 4(2x-1)^2 \rightarrow x^2 \leq 16x^2 - 16x + 4$$

$$\rightarrow 15x^2 - 16x + 4 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{2}{5} \quad \text{یا} \quad x \geq \frac{2}{3}$$

پس دامنه تابع $g(x)$ به این صورت است: $R - \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

حسابان ۱

۱. مجموع عددهای طبیعی ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

$$1 \times 1 + 1 \times 2 + \dots + 1 \times 10 = \frac{10 \times 11}{2}$$

در سطر دوم، این مجموع برابر $2 \times \frac{10 \times 11}{2}$

و در سطر سوم برابر $3 \times \frac{10 \times 11}{2}$ و در سطر دهم

برابر $10 \times \frac{10 \times 11}{2}$ می‌شود. بنابراین، جمع کل

عناصر جدول ضرب 10×10 برابر است با:

$$(1+2+\dots+10) \times \frac{10 \times 11}{2} = 55^2$$

$$a_n = 2 \times 3^n \Rightarrow 6, 18, 54, \dots$$

$$a_1 a_2 \dots a_{10} = a_1 (a_1 q) (a_1 q^2) \dots (a_1 q^9)$$

$$= a_1^{10} q^{1+2+\dots+9} = a_1^{10} \times q^{45} = 6^{10} \times 3^{45}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = a_1 \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$$

$$= 6 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 3(3^{10}-1) = 3^{11}-3$$

۲. فرض کنیم A نقطه‌ای دلخواه روی منحنی

$O(0,0)$ و $A\left(a, \frac{3}{a}\right)$ باشد. داریم: $y = \frac{3}{x}$ در نتیجه:

$$OA = \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}} = \sqrt{\left(a - \frac{3}{a}\right)^2 + 6}$$

$$\left(a - \frac{3}{a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(a - \frac{3}{a}\right)^2 + 6 \geq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(a - \frac{3}{a}\right)^2 + 6} \geq \sqrt{6} \Rightarrow OA \geq \sqrt{6}$$

۴. الف) فرض کنیم: $f(x) = ax^2 + bx + c$. با

توجه به معلومات داده شده، a ، b و c را

مشخص می‌کنیم:

$$(x=0 \Rightarrow y=2) \Rightarrow c=2$$

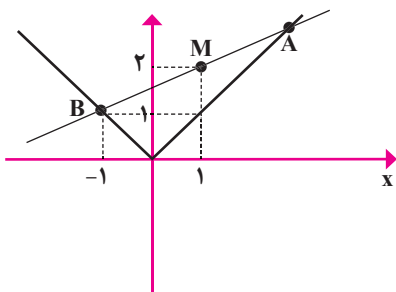
$$\left. \begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= \text{طول نقطهٔ مینی‌م} \\ \Rightarrow -1 = \frac{-b}{2a} &\Rightarrow b=2a \\ (x=-1, y=-1) &\Rightarrow -1 = a-b+c \end{aligned} \right\} \Rightarrow a=3, b=6$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 2$$

$$f'(x) - 2f(x) - 8 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 2 = -1 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 8 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 8 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

۵. همان‌طور که در شکل ۳ مشخص شده است، نقاط پاره‌خط AB روی نمودار $y=|x|$ ، یکی در ربع اول و دیگری در ربع دوم قرار دارد. فرض کنیم: $B=(-b,b)$ و $A=(a,a)$



شکل ۳

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a-b}{2} = 1 \Rightarrow a-b=2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{a+b}{2} = 2 \Rightarrow a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=3, b=1$$

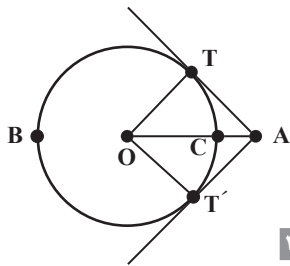
$$AB = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۶. فرض کنیم: $x^2+4=t$ ، داریم:

$$\frac{4}{t} = 2 - \frac{5}{t+1} \Rightarrow 4(t+1) = 2t(t+1) - 5t$$

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

$$t=4 \Rightarrow x^2+4=4 \Rightarrow x=0$$



شکل ۴

$$\widehat{OTA} \cong \widehat{OAT'} \Rightarrow A_1 = A_2 = 60^\circ$$

$$\tan A_1 = \frac{OT}{AT} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{R}{AT} \Rightarrow AT = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\widehat{ATOT'}} = 2S_{\widehat{OAT}} = 2\left(\frac{1}{2} \times AT \times OT\right)$$

$$= \frac{R\sqrt{3}}{3} \times R = \frac{R^2\sqrt{3}}{3}$$

ب. بیشترین مسافت مسیر $AT + \widehat{TBT'} + T'A$ است.

$$AT = AT' = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$\widehat{TBT'} = 2\pi - \widehat{TCT'} = 2\pi - R \times \frac{\pi}{3} \quad \text{اما:}$$

$$AT + \widehat{TBT'} + AT' = 2 \times \frac{R\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{6-R}{3}\right)\pi$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}R + 2\pi - \frac{R\pi}{3}$$

$$= 2\pi + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}\right)R$$

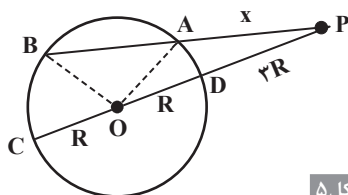
۳. از نقطه P به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند. از طرف دیگر داریم: $\widehat{AOB} = 60^\circ$. بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است: $AO = BO = AB = R$ و بنابر رابطه طولی دایره داریم:

$$PA \cdot PB = PD \cdot PC \Rightarrow x \cdot (x + R) = 2R(\Delta R)$$

$$x^2 + Rx - 1\Delta R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-R + \sqrt{61}R^2}{2} = \frac{-R + \sqrt{61}R}{2}$$

$$x = \left(\frac{\sqrt{61}-1}{2}\right)R \Rightarrow \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{61}-1}{2}$$



شکل ۵

۹. اگر تابع f چندجمله‌ای از درجه n باشد، تابع $f \circ f$ از درجه n^2 و عبارت $(f(x)-1)x^2$ از درجه $n+2$ است و داریم: $n^2 = n+2$. از آنجا: $n=2$. پس: $f(x) = ax^2 + bx + c$. چون f فاقد جمله شامل x است، پس: $f(x) = ax^2 + c$

$$a(ax^2 + c)^2 + c = x^2(ax^2 + c - 1)$$

$$a^2x^4 + 2a^2cx^2 + ac^2 + c = ax^4 + (c-1)x^2$$

با متحد ساختن ضرایب در طرفین تساوی داریم:

$$\begin{cases} a^2 = a \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \\ 2a^2c = c - 1 \\ ac^2 + c = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow 2c = c - 1 \Rightarrow c = -1$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

۱۰. باید مخرج تابع g مخالف صفر باشد. پس:

$$f^2(x) - 4 = 0 \Rightarrow f(x) = \pm 2$$

چون $D_f = [-2, 2]$ از این بازه، بازه $[-1, 0]$ و نقطه $x=2$ را برمی‌داریم:

$$D_g = [-2, -1) \cup (0, 2)$$

تذکر: معادله خط گذرنده از دو نقطه $(0, -2)$ و $(1, 0)$ به صورت $y = 2x - 2$ است که داریم: $f(2) = 2$. پس در $x=2$ نیز مخرج تابع g برابر صفر می‌شود.

هندسه ۲

$$\frac{\widehat{CD} + \widehat{BE}}{2} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{CD} + \widehat{BE} = 200^\circ \quad (1)$$

$$C\widehat{M}B = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{DE} = 160^\circ \quad (2)$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BCE} - \widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{CD} + 160^\circ - \widehat{BE}}{2} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow -\widehat{CD} + \widehat{BE} = 80^\circ \quad (3) \Rightarrow \widehat{CD} = 60^\circ, \widehat{BE} = 140^\circ$$

۲. الف. از A مماس‌های AT و AT' را رسم می‌کنیم. O را به T و T' وصل می‌کنیم: $\widehat{T} = \widehat{T'} = 90^\circ$.

$$f(x) = (x-1)^2 - 1$$

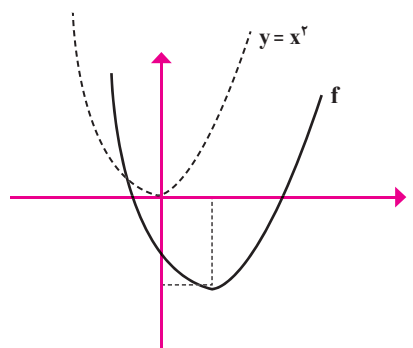
$$-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow -1 \leq (x-1)^2 - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 8$$

$$\Rightarrow f \text{ برد تابع } = [-1, 8]$$

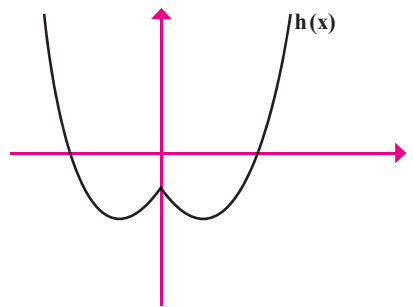
۸. ابتدا نمودار f را با استفاده از انتقال رسم می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$



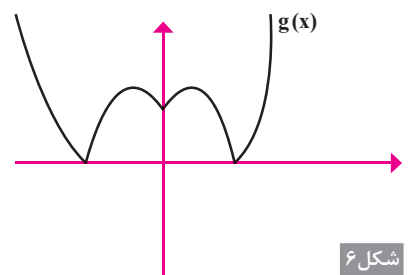
شکل ۴

حال با استفاده از این نمودار، نمودار $h(x) = f(|x|) = x^2 - 2|x| - 1$ را رسم می‌کنیم (شکل ۵).

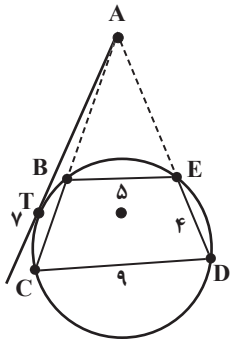


شکل ۵

۱. اکنون از روی نمودار $h(x)$ نمودار تابع $g(x) = |h(x)| = |x^2 - 2|x| - 1|$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶).



شکل ۶

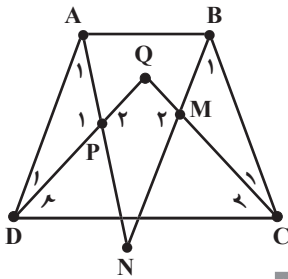


شکل ۱۰

۸. $AB \parallel DC, AD \setminus \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$
 $\Rightarrow 2\hat{A}_1 + 2\hat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$

در مثلث ADP نتیجه می‌شود: $\hat{P}_r = 90^\circ$ و همچنین: $\hat{P}_r = 90^\circ$.

به دلیل مشابه: $\hat{M}_r = 90^\circ$. بنابراین:
 $\hat{P}_r + \hat{M}_r = 180^\circ$.



شکل ۱۱

از طرف دیگر، مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی 360° است:

$$\hat{Q} + \hat{N} + \hat{M}_r + \hat{P}_r = 360^\circ \Rightarrow \hat{Q} + \hat{N} = 180^\circ$$

چون مجموع زاویه‌های روبه‌رو در چهارضلعی 180° است، پس چهارضلعی PQMN محاطی است. (چهارضلعی را وقتی محاطی می‌گوییم که زاویه‌های روبه‌رو در آن مکمل باشند).

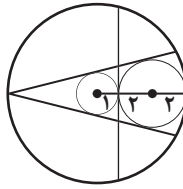
$$\triangle QDC : \hat{D}_r = \hat{C}_r \Rightarrow DQ = CQ \quad (1)$$

همچنین، دو مثلث ADP و BMC هم‌نهشت هستند:

$$\triangle ADP \cong \triangle BMC \begin{cases} \text{زضز} \\ A_1 = B_1 \\ AD = BC \Rightarrow DP = CM \quad (2) \\ D_1 = C_1 \end{cases}$$

طرفین رابطه ۱ را از طرفین رابطه ۲ کم می‌کنیم:

در دایره به شعاع ۵ و به مرکز آن، دایره‌ای به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. هر وترى که به این دایره مماس باشد، طول آن $4\sqrt{6}$ است. این وتر باید بر دایره به شعاع ۲ نیز مماس باشد. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۱ مماس خارج‌اند. بنابراین فقط سه مماس می‌توان بر آن‌ها رسم کرد.



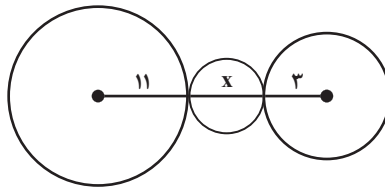
شکل ۸

۶. طول مماس مشترک خارجی برابر است با:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$3\sqrt{33} = \sqrt{d^2 - (11 - 3)^2} \Rightarrow d^2 = 361 \Rightarrow d = 19$$

$$19 > 11 + 3 \Rightarrow d > R + R'$$



شکل ۹

دو دایره متخارج‌اند. کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دوی آن‌ها مماس است، دایره‌ای است به قطر x پس:

$$x = d - (R + R') = 19 - (11 + 3) = 5$$

$$\frac{x}{2} = 2.5 \Rightarrow S_{\min} = \pi(2.5)^2 = 6.25\pi$$

۷. چهارضلعی CBED دوزنقه است: $BE \parallel CD$. بنابراین قضیه تالس در مثلث ACD داریم:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{AE}{AE + 4} = \frac{5}{9} \Rightarrow AE = 5$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه طولی در دایره،

برای مماس AT و قاطع AD داریم:

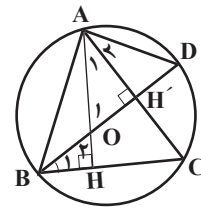
$$AT^2 = AE \times AD$$

$$\Rightarrow AT^2 = 5 \times 9 = 45 \Rightarrow AT = 3\sqrt{5}$$

۴. AH و BH' ارتفاع‌های مثلث هستند:
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \triangle AOH' : O_1 + \hat{H}' + \hat{A}_1 &= 180^\circ \\ \triangle BHO : O_2 + \hat{H} + \hat{B}_1 &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow O_1 + \hat{H}' + \hat{A}_1 = O_2 + \hat{H} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (1)$$



شکل ۶

زاویه B_1 زاویه محاطی است: $\hat{B}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2}$ (۲)

از طرف دیگر، \hat{A}_r زاویه محاطی است:

$$\hat{A}_r = \frac{\widehat{DC}}{2} \quad (3)$$

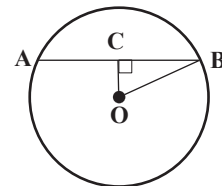
$$(1), (2) \Rightarrow \hat{A}_r = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_r$$

در مثلث AOD، ارتفاع AH' نیم‌ساز نیز هست. پس مثلث AOD متساوی‌الساقین است. $AO = AD$.

۵. ابتدا نگاه می‌کنیم، آیا در دایره به شعاع ۵، وترى به طول $4\sqrt{6}$ وجود دارد یا خیر. فرض کنیم چنین وترى باشد. آن را AB و وسط آن را C می‌نامیم. C را به مرکز دایره وصل می‌کنیم: $OC \perp AB$

فاصله C تا مرکز دایره را حساب می‌کنیم. بنابر رابطه فیثاغورس در مثلث OCB داریم:

$$OC^2 = OB^2 - BC^2 = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 1 \Rightarrow OC = 1$$



شکل ۷

به مرکز O و شعاع ۱ دایره‌ای رسم می‌کنیم. هر وترى از دایره بزرگ‌تر که بر این دایره کوچک‌تر مماس باشد طول آن $4\sqrt{6}$ است. حال به مسئله برمی‌گردیم.

$$\sim [\forall x \in Z: (x = 2k) \vee (x = 2k + 1)] \\ \equiv \exists x \in Z: \sim [(x = 2k) \vee (x = 2k + 1)] \\ \equiv \exists x \in Z: (x \neq 2k) \wedge (x \neq 2k + 1)$$

نقیض گزاره: بعضی از عددهای صحیح نه زوج و نه فردند.

۳. الف) درست است، زیرا: $S = \{-1, 1\} \neq \emptyset$

ب) نادرست است، زیرا معادله $x^2 + 1 = 0$ در عددهای حقیقی فاقد جواب است و $S = \emptyset$

پ) نادرست است، زیرا $x = 0$ مثال نقض برای این گزاره است و: $S = R - \{0\} \neq R$
ت) درست است، زیرا قابل اثبات است و $S = R$

$$\forall n \in N: n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq n$$

۴.

p	q	p \Rightarrow q	p \wedge (p \Rightarrow q)	[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۵.

p	q	\sim q	p \Leftrightarrow q	\sim (p \Leftrightarrow q)	p \Leftrightarrow \sim q
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

۶. الف) $\forall x; x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in C$
 $\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$ (چون $A \subseteq B$)
 $\Rightarrow x \in B \cap C$

بنابراین:

$$\forall x; [x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap C)] \\ \Leftrightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$

ب) $\forall x; x \in A - C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$
 $\Rightarrow x \in B \wedge x \notin C$ (چون $A \subseteq B$)
 $\Rightarrow x \in (B - C)$

بنابراین: $\forall x; [x \in (A - B) \Rightarrow x \in (B - C)]$
 $\Leftrightarrow A - B \subseteq B - C$

$$r = \frac{r \times \sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{r - \sqrt{3}}{2}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{\frac{r \sqrt{3}}{2}}{r \sqrt{3} + r - r \sqrt{3}} = \frac{r \sqrt{3}}{r - \sqrt{3}} = \frac{r \sqrt{3} + r}{2}$$

$$r_b = \frac{\frac{r \sqrt{3}}{2}}{\frac{r \sqrt{3} + r}{2} - \sqrt{3}} = \frac{r \sqrt{3}}{r - \sqrt{3}}$$

$$r_c = \frac{\frac{r \sqrt{3}}{2}}{\frac{r \sqrt{3} + r}{2} - r} = \frac{r + \sqrt{3}}{2}$$

$$r + r_a + r_b + r_c = \frac{r - \sqrt{3}}{2} + \frac{r \sqrt{3} + r}{2} + \frac{r \sqrt{3} - r}{2} + \frac{r + \sqrt{3}}{2} = \frac{6 + 6\sqrt{3}}{2} = 3(\sqrt{3} + 1)$$

$$R = \sqrt{3}$$

$$\frac{r + r_a + r_b + r_c}{R} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3}$$

آمار و احتمال

۱. این گزاره‌نما وقتی تعریف می‌شود که عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد. بنابراین:

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

برای یافتن مجموعه جواب، باید معادله را حل کنیم:

$$\sqrt{2x - 1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \\ \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\} \subseteq D$$

۲. الف) اگر انسان بودن را p و سفید بودن را q با نمایش دهیم، نقیض این گزاره با زبان منطق به صورت زیر است:

$$\sim [\exists p: p(x)] \equiv \forall p: \sim p(x)$$

نقیض گزاره: همه انسان‌ها سفید نیستند.

ب) ابتدا این گزاره را با زبان منطق بازنویسی می‌کنیم و سپس نقیض آن را می‌یابیم:

$$DQ - DP = CQ - CM \Rightarrow PQ = QM$$

به دلیل مشابه: PN=NM. حال:

$$PQ + NM = QM + PN$$

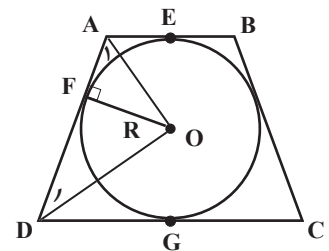
در نتیجه چهارضلعی PQMN محیطی است.

(چهارضلعی را وقتی محیطی می‌گوییم که مجموع اضلاع روبه‌روی آن برابر باشند).

۹. الف) چهارضلعی ABCD محیطی است.

$$AB + CD = AD + BC = 2AD$$

$$AB + CD = AD + BC + AD \\ = 2AD + 2AD = 4AD$$



شکل ۱۲

ب. داریم: $AE = AF$ و $DF = DG$ و هر چهار پاره‌خط مماس‌اند:

$$AB \parallel DC, \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow O = 90^\circ$$

مثلث AOD قائم‌الزاویه است. از O به نقطه تماس F وصل می‌کنیم: $OF \perp AD$

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه روی وتر است:

$$OF^2 = AF \times FD \Rightarrow R^2 = AE \times DG = \frac{AB}{2} \times \frac{DC}{2}$$

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow (2R)^2 = AB \times DC$$

۱۰. مثلث ABC قائم‌الزاویه است. شعاع دایره محیطی مثلث نصف وتر است:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلث را

با r نشان دهیم، داریم:

$$r = \frac{\text{مساحت}}{\text{نصف محیط}}$$

۷. یک نوع افراز به صورت $\{a\}, \{b,c,d,e\}$ است. تعداد این نوع افرازها برابر با ۵ است، زیرا مجموعه یک عضوی به ۵ صورت متفاوت است. این نوع افرازها عبارتند از:

- $\{a\}, \{b,c,d,e\}$
- $\{b\}, \{a,c,d,e\}$
- $\{c\}, \{a,b,d,e\}$
- $\{d\}, \{a,b,c,e\}$
- $\{e\}, \{a,b,c,d\}$

یک نوع افراز دیگر که در آن فقط یک زیرمجموعه یک عضوی داشته باشیم، به صورت زیر است:

- $\{a\}, \{b,c\}, \{d,e\}$
- $\{a\}, \{b,d\}, \{c,e\}$
- $\{a\}, \{b,e\}, \{c,d\}$

تعداد این نوع افرازها برابر با ۱۵ است.

۸. الف)

$$\begin{aligned} & [A - (B \cup C)] \cup [A - (A \cap B)] \\ &= [A \cap (B \cup C)'] \cup [A \cap (A \cap B)'] \\ &= A \cap [(B' \cap C') \cup (A' \cup B')] \\ &= A \cap [(B' \cap C') \cup B'] \cup A' \quad (\text{شرکت پذیری}) \\ &= A \cap [B' \cup A'] \quad (\text{جذب}) \\ &= (A \cap B') \cup (A \cap A') \\ &= A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' \\ &= (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\ &= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] \\ &= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')] \\ &= \emptyset \cup [A \cap (B - C)] \\ &= A \cap (B - C) \end{aligned}$$

۹.

$$n(A \times B) = 12 \Rightarrow (m - n) \times n = 12$$

$$\begin{cases} (m - n) \times n = 12 \\ 2n + m = 12 \Rightarrow m = 12 - 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow (12 - 2n - n) \times n = 12$$

$$\Rightarrow -3n^2 + 12n - 12 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0 \Rightarrow n = 2$$

$$m = 12 - 2 \times 2 = 8$$

$$A = 2^6 = 64 = 2^{m-n} = \text{تعداد زیرمجموعه های } A$$

۱۰. $\forall (x, y); (x, y) \in [(A \times B) \cap (C \times D)]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in A \times B \\ \wedge \\ (x, y) \in C \times D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge y \in B \\ \wedge \\ x \in C \wedge y \in D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \wedge (y \in B \cap D)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$$

ریاضی ۳

نمونه سؤال فصل ۱.....

۱. با توجه به نمودار f و g داریم:

الف) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-2) = -2$

ب) $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = -2$

پ) $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-2) = 2$

ت) $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(2) = 2$

۲.

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \circ g(x) = |(x+1)^2| = (x+1)^2 \\ g \circ f(x) = (|x|+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \circ g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 \\ \quad = 4 + 2 - 4\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2} \\ g \circ f(1-\sqrt{2}) = (|1-\sqrt{2}|+1)^2 = (\sqrt{2}-1+1)^2 \\ \quad = (\sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(1-\sqrt{2}) - g \circ f(1-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$$

۳. فرض می کنیم x_1 و x_2 اعضای دامنه تابع f

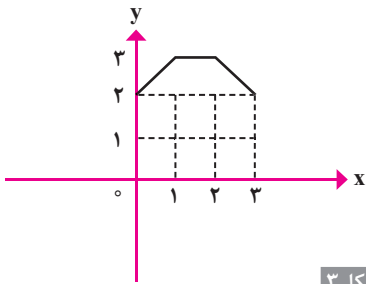
باشند و: $x_2 > x_1$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow |f(x_2)| < |f(x_1)| \\ &\Rightarrow |f(x_2)| + 1 < |f(x_1)| + 1 \end{aligned}$$

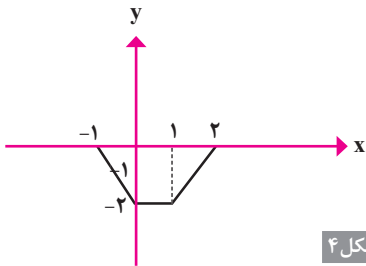
پس تابع $|f(x)| + 1$ نزولی است.

۴. الف) برای رسم تابع $y = f(x-1) + 2$ نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به طرف بالا می بریم (شکل ۳):



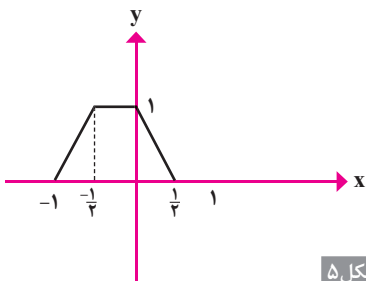
شکل ۳

ب) برای رسم تابع $y = -2f(x)$ عرض نقاط نمودار $y = f(x)$ را -2 برابر می کنیم (شکل ۴):



شکل ۴

پ) برای رسم نمودار تابع $y = f(-2x)$ طول نقاط نمودار $y = f(x)$ را بر -2 تقسیم می کنیم (شکل ۵):



شکل ۵

۵. می دانیم که:

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x; & x \in D_{f^{-1}} \\ f^{-1} \circ f(x) = x; & x \in D_f \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ f^{-1}(x) = x$ در محدوده $[1, 4]$ و نمودار تابع $f^{-1} \circ f(x) = x$ در محدوده $[-2, 2]$ رسم می شود:

می دانیم: $-1 \leq \cos 4x \leq 1$.

بنابراین $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \cos 4x \leq \frac{1}{4}$ و داریم:

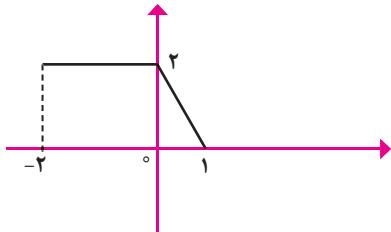
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq A \leq 1$$

پس:

$$\frac{1}{2} \leq \sin^2 x + \cos^2 x \leq 1$$

حسابان ۲

$$f(x+|x|) = \begin{cases} f(2x) & 0 \leq x \leq 2 \\ f(0) & -2 \leq x < 0 \end{cases} \quad ۱.$$



۲. الف)

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y_1 = \sqrt{-x} \Rightarrow y_2 = \sqrt{-(x-2)} \\ \Rightarrow y_2 = -3 + \sqrt{-x+2}$$

ب)

$$y = x^2 \Rightarrow y_1 = (3x)^2 \Rightarrow y_2 = 9(x-2)^2$$

۳. فرض کنیم g اکیداً صعودی باشد و داشته باشیم: $x_1 < x_2$. بنابراین:

$$g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \\ \Rightarrow (f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$$

۴.

X		۱	۲
X-1	-	۰	+
۲-X	+	+	۰

$$x > 2 \Rightarrow f(x) = x - 1 - 2 + x = 2x - 3$$

$$x < 1 \Rightarrow f(x) = -x + 1 + 2 - x = -2x + 3$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x - 1 + 2 - x = 1$$

$$\text{پ)} \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x$$

ت) می دانیم:

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 \\ = 1 - 2 \left(\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha\right) = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2}$$

۳.

$$\sin 2x = \frac{4}{\Delta} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{4}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\Delta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\Delta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\tan x + \cot x}$$

$$= \frac{(\tan x + \cot x)^2 - 2}{(\tan x + \cot x)^2 - 2(\tan x + \cot x)}$$

$$= \frac{\frac{25}{4} - 2}{\frac{125}{8} - \frac{15}{2}} = \frac{34}{65}$$

۴.

$$\text{الف)} 2 \sin x - \tan x = 0 \Rightarrow 2 \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{ب)} \sin 2x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (\sin x - 1) - \sqrt{3} (\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

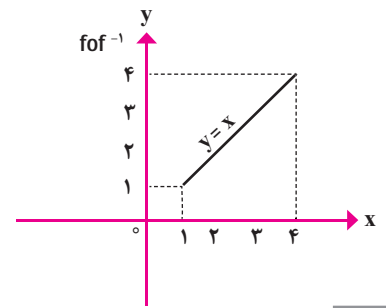
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۵.

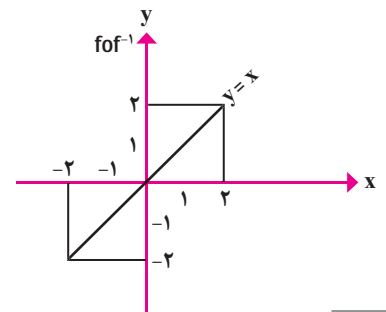
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = A$$



شکل ۶



شکل ۷

نمونه سؤال فصل ۲

۱. می دانیم دوره تناوب توابعی با ضابطه

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \quad y = \sin ax \quad \text{و} \quad y = \cos ax \quad \text{به صورت}$$

است. بنابراین:

$$\text{الف)} y = \sin(\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

$$\text{ب)} y = \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{پ)} y = \cos^2 \sqrt{x} - \sin^2 \sqrt{x}$$

$$= \cos 2(\sqrt{x}) = \cos 14x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|14|} = \frac{\pi}{7}$$

$$\text{الف)} \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$$

$$\text{ب)} \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

ریاضیات گسسته

۱. $m | n \Rightarrow n = mq \Rightarrow b^n - 1 = b^{mq} - 1$
 $= [(b^m)^q - 1] \Rightarrow b^n - 1$
 $= (b^m - 1) \left[\underbrace{(b^m)^{q-1} + (b^m)^{q-2} + \dots + 1}_{q'} \right]$
 $\Rightarrow (b^n - 1) = (b^m - 1) \times q' \Rightarrow b^m - 1 | b^n - 1$

۲. $a | 7m + 2 \Rightarrow a | 9 \times (7m + 2) \Rightarrow a | 63m + 18(1)$
 $a | 9m + 3 \Rightarrow a | 7 \times (9m + 3) \Rightarrow a | 63m + 21(2)$
 $\Rightarrow a | (63m + 18) - (63m + 21) \Rightarrow a | 6$
 $\Rightarrow a = 2$ یا $a = 3$
 اول a است

۳. اگر $n \times (n-1)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح و متوالی باشد، در این صورت داریم:

$n = 2k \Rightarrow 2 | n \Rightarrow 2 | n(n-1)$
 $n = 2k + 1 \Rightarrow n - 1 = 2k \Rightarrow 2 | n - 1 \Rightarrow 2 | n(n-1)$
 حال برای اثبات اینکه: $3 | n^2 - n$ برای n سه حالت در نظر می‌گیریم:

$n = 3k \Rightarrow 3 | n \Rightarrow 3 | n(n-1) \Rightarrow 3 | n^2 - n$
 $n = 3k + 1 \Rightarrow n - 1 = 3k \Rightarrow 3 | n - 1$
 $\Rightarrow 3 | (n-1) \times [n(n+1)] \Rightarrow 3 | n^2 - n$
 $n = 3k + 2 \Rightarrow (n+1) = 3k + 3 = 3k' \Rightarrow 3 | n + 1$
 $\Rightarrow 3 | (n+1)(n-1) \times n \Rightarrow 3 | n^2 - n$

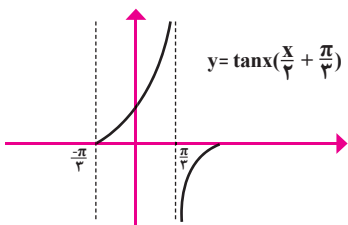
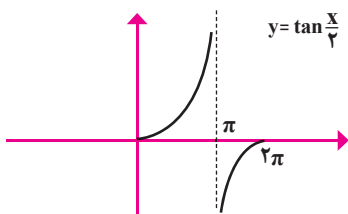
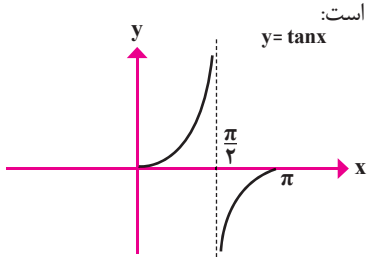
۴. اگر a عدد صحیح باشد، طبق قضیه تقسیم می‌توان a را به یکی از سه صورت $a = 3k$ یا $a = 3k + 1$ و یا $a = 3k + 2$ نوشت. بنابراین داریم:
 $a = 3k \Rightarrow 3 | a$
 $a = 3k + 1 \Rightarrow a + 2 = 3k + 3 = 3k' \Rightarrow 3 | a + 2$
 $a = 3k + 2 \Rightarrow a + 4 = 3k + 6 = 3k'' \Rightarrow 3 | a + 4$
 ۵. فرض کنیم عدد مورد نظر n باشد. در این صورت داریم:

$a = 53q + 17 \Rightarrow a + n = 53q + 17 + n$
 $\Rightarrow 17 + n < 53 \Rightarrow n < 53 - 17 = 36 \Rightarrow$
 $n_{\max} = 35$

تذکر: همواره در تقسیم a بر b ($a = bq + r$) حداکثر $n = b - r - 1$ واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند.

تهی است. در نتیجه معادله هیچ جوابی ندارد.

۸. تابع $y = \tan x$ در یک دوره تناوب رسم شده



۹. الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x-1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$

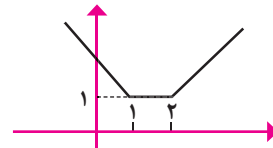
ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+x-1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

۱۰. مقدار حد صورت کسر برابر $\frac{5}{4}$ است که عددی مثبت است. برای آنکه حد عبارت کسر داده شده برابر $+\infty$ شود، باید حد مخرج از سمت راست به صفر نزدیک شود. برای این کار داریم:

$\frac{1}{2} + m \left(\frac{1}{2} \right) + n = 0 \Rightarrow 1 + \frac{m}{2} + n = 0$
 از طرف دیگر، مخرج کسر باید ریشه مضاعف داشته باشد و آن ریشه مضاعف $x = \frac{1}{2}$ باشد.

$\frac{1}{2} = \frac{-m}{2 \times 4} \Rightarrow m = -4$
 $1 + \frac{-4}{2} + n = 0 \Rightarrow n = 1$

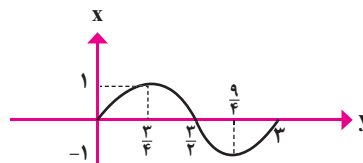
با توجه به رسم نمودار، تابع f در بازه $[2, +\infty)$ تابع صعودی است.



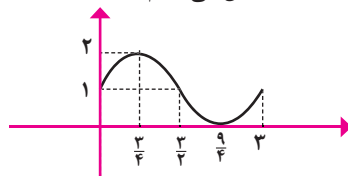
۵. باید داشته باشیم: $p(1) = 0$ و $p(-2) = 0$. در نتیجه:

$p(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$
 $\Rightarrow a + b = -1$
 $p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^2 - 2a + b = 0$
 $\Rightarrow -2a + b = -4$
 $\left. \begin{matrix} a + b = -1 \\ -2a + b = -4 \end{matrix} \right\} a = 1, b = -2$

۶. $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$



در واقع نقش 2π روی محور x در نمودار $y = \sin x$ را در اینجا عدد ۳ به عهده گرفته است. این روش رسم به جای فشردن نمودار $y = \sin x$ به کار رفته است، زیر ضریب فشردن عدد $\frac{3}{2\pi}$ روندی نیست. در پایان نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



۷. الف)

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

ب) باید داشته باشیم:

$\cos 2x = 1$ و $\sin x = 1$

(می‌دانیم حداکثر مقدار سینوس و کسینوس یک کمان برابر یک است).

در نتیجه:
 $\left\{ \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k'\pi \end{matrix} \right.$ و اشتراک مجموعه جواب‌ها



با قرار دادن (۲) در (۱) داریم: $a(1-d)+bc=a$

و به عبارت دیگر: $ad=bc$. بنابراین هرگاه در

ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دو شرط $a+d=1$ و

$ad=bc$ را داشته باشیم، A خود توان خواهد

بود؛ مانند $\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، و...

$$-A^t = A \Rightarrow \begin{bmatrix} -a & -b & -d \\ -1 & -c & -e \\ 2 & -5 & -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ b & c & 5 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 2 \\ e = -5 \\ f = 0 \end{cases}$$

$$R_{2\pi} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi & \sin 2\pi \\ -\sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$R_{\theta}^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R_{2\theta}$$

$$5000x + 2000y = 27000 \Rightarrow 5x + 2y = 27$$

$$\Rightarrow 5x = 27 - 2y \Rightarrow x = 2k + 1$$

$$5 \times (2k + 1) + 2y = 27 \Rightarrow 2y = -2 \times 5k - 5 + 27$$

$$\Rightarrow 2y = -2 \times 5k + 22 \Rightarrow y = -5k + 11$$

به ازای $k=1$ و $k=2$ جواب‌های صحیح

و نامنفی برای x و y به دست می‌آید. پس به سه طریق این عمل امکان پذیر است.

هندسه ۳

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-12 & -8+6 \\ 24-18 & -12+9 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = A$$

$$A^t = A^t \times A = A \times A = A^t = A$$

$$A^f = A^f \times A = A \times A = A^f = A$$

و به همین ترتیب $A^n = A$

$$A^t = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \quad (1) \\ ab + bd = b \\ ac + cd = c \\ bc + d^2 = d \end{cases} \Rightarrow a + d = 1 \quad (2)$$

۶. کافی است باقی‌مانده تقسیم 1399 را بر 11 به دست آوریم:

$$1399 = 127 \times 11 + 2 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow 1399 \in [2]_{11}$$

$$49 \equiv 1 \Rightarrow 49^{23!} \equiv 1^{23!} = 1, 88 \equiv 8 \quad .7 \\ 49^{23!} + 88 \equiv 1 + 8 = 9$$

$$32 \equiv 2, 2^4 \equiv 1 \Rightarrow (2^4)^{15} \times 2^2 \equiv 1^{15} \times 2^2 = 4, 29 \equiv -1 \quad .8 \\ \Rightarrow 32^{4^2} + 29 \equiv 2^{4^2} + 29 \equiv 4 + (-1) = 3$$

۹. اگر عدد $A = \overline{aba}$ بر 33 بخش پذیر باشد، می‌باید بر 3 و 11 نیز بخش پذیر باشد. بنابراین داریم:

$$A = \overline{aba} \equiv 0 \Rightarrow a + b + a = 2a + b \equiv 0 \quad (1)$$

$$A = \overline{aba} \equiv 0 \Rightarrow a - b + a = 2a - b \equiv 0 \quad (2)$$

با توجه به اینکه a و b رقم‌هایی بین صفر تا 9 هستند ($a \neq 0$)، فقط $a=8$ و $b=5$ در هر دو رابطه (۱) و (۲) صدق می‌کنند. پس: $A=858$.

۱۰. چون معادله $12x + my = 8$ در Z جواب دارد، پس می‌باید: $8 \mid (12, m)$. و چون: $m \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ لذا: $1 \leq m \leq 13$

۱۱. از روش تبدیل معادله سیاله به معادله هم‌نهشتی و حل معادله هم‌نهشتی استفاده می‌کنیم:

$$17x + 11y = 19 \Rightarrow 17x \equiv 19 \quad .1 \\ \Rightarrow 6x \equiv 8 \Rightarrow (17 \equiv 6, 19 \equiv 8) \\ \Rightarrow 6x \equiv 8 + 22 \Rightarrow 6x \equiv 6 \times 5 \\ \Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow x = 11k + 5 \\ \Rightarrow 17(11k + 5) + 11y = 19 \\ \Rightarrow 11y + 11 \times 17k + 17 \times 5 = 19 \\ \Rightarrow 11y = -11 \times 17y - 66 \Rightarrow y = -17y - 6 \\ \begin{cases} x = 11k + 5 \\ y = -17y - 6 \end{cases} \quad \text{جواب‌های عمومی}$$

۱۲. اگر تعداد اسکناس‌های 5 هزار تومانی و 2 هزار تومانی را به ترتیب x و y فرض کنیم، خواهیم داشت:

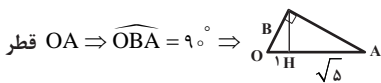
$$\hat{B} = \hat{B}, \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC$$

$$\hat{C} = \hat{C}, \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CH} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC$$

$$\triangle HPM : HP = 1, PM = 2 \Rightarrow HM = \sqrt{5} \Rightarrow HA = \sqrt{5}$$

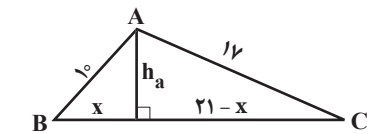


قطر OA $\Rightarrow \widehat{OBA} = 90^\circ \Rightarrow$

$$BH^2 = OH \times HA \Rightarrow BH^2 = \sqrt{5} \Rightarrow BH = \sqrt[3]{5}$$

مسئله ۱ الف \Rightarrow

$$OB^2 = OH \times OA \Rightarrow OB^2 = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow OB = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$$

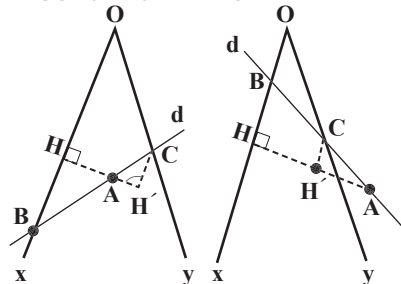


$$\left. \begin{aligned} h_a^2 &= 100 - x^2 \\ h_a^2 &= 289 - (21-x)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow h_a = 8 \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{8}{h_b} = \frac{17}{21} \Rightarrow h_b = \frac{168}{17}$$

$$\Rightarrow h_b = \frac{168}{17}, \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{8}{h_c} = \frac{17}{21} \Rightarrow h_c = \frac{168}{17}$$

۵. از A بر ox عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. AH' را به اندازه نصف AH رسم می‌کنیم و از H' به موازات ox خطی می‌کشیم تا oy را در C قطع کند. امتداد CA همان خط d خواهد بود؛ زیرا:



درایه‌های قطر اصلی.

$$|B| = (acf + (e)(e)d + (e)be) - ((e)cd + a(e)e + (e)bf) = a.c.f$$

نتیجه ۲. اگر در ماتریس مربعی A، برای $i < j$ داشته باشیم: $a_{ij} = 0$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی.

۹. شرط وجود جواب یکتا عبارت است از: $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m^2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 12 - 3m^2 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$$

شرط وجود بی‌شمار جواب:

$$\frac{2}{m^2} = \frac{3}{6} = \frac{8}{10 - 3m} \Rightarrow m = -2$$

شرط فاقد جواب:

$$\frac{2}{m^2} = \frac{3}{6} \neq \frac{8}{10 - 3m} \Rightarrow m = 2$$

بسط حول سطر دوم

$$|A| = 4(-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ m & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & m \end{vmatrix}$$

حال اگر با اضافه کردن ۷ واحد به درایه

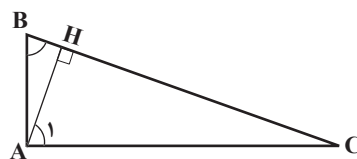
$(a_{22} = -3)$ تغییری در $|A|$ رخ ندهد، می‌باید

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 35$$

هندسه ۱

$$\left. \begin{aligned} \triangle ACH: \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{C} \\ \triangle ABC: \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}, \hat{H} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^{1397} = (A^4)^{349} \times A = (-4I)^{349} \times A$$

$$= -4^{349} \times I \times A = -4^{349} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$B = \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta b & \Delta c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = (\Delta aei + \Delta bfg + \Delta cdh) - (\Delta ceg + \Delta afh + \Delta bdi) \Rightarrow |B| = \Delta |A|$$

هرگاه سطری از ماتریس مربعی A را (و یا ستونش را) در عدد K ضرب کنیم، دترمینان نیز K برابر می‌شود.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 7x + 5y & 70 + 15 \\ -3x + 4y & -30 + 12 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 7x - 30 & 5x + 40 \\ 7y - 9 & 5y + 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x + 5y = 7x - 30 \\ 85 = 5x + 40 \\ -3x + 4y = 7y - 9 \\ -18 = 5y + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$A = A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ |A| = -1 \end{cases}$$

مانند ماتریس‌های $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

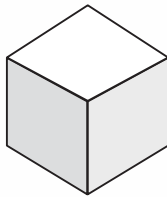
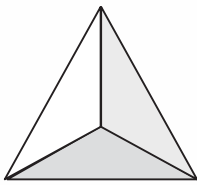
و... داریم: $A = A^{-1}$ و یا به عبارت دیگر: $A^T = I$

$$|A| = (adf + be(e) + c(e)(e)) - (cd(e) + ae(e) + b(e)f) = a.d.f$$

نتیجه ۱. اگر در ماتریس مربعی A، برای $i > j$ داشته باشیم: $a_{ij} = 0$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با حاصل ضرب

چندوجهی‌ها

هم‌ارز سه‌بُعدی یک «چندضلعی» (polygon)، یک چندوجهی (polyhedron)، یعنی حجمی است که مرز آن از وجه‌های دو‌بُعدی تخت ساخته شده است. درست مانند اینکه چندضلعی‌های منتظم ساده خاصی داریم که در موردشان قاعده‌های خاصی به کار می‌روند. خانواده‌ای از پنج، چندوجهی منتظم، معروف به اجسام افلاطونی، وجود دارد:

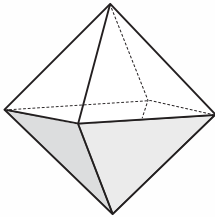


■ چهاروجهی (tetrahedron):

چهاروجه که هر یک از آن‌ها مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

■ مکعب (cube):

شش‌وجه که هر یک از آن‌ها یک مربع است.

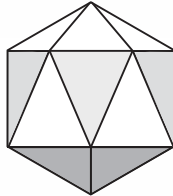
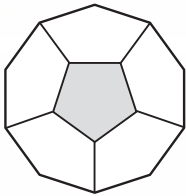


■ هشت‌وجهی (octahedron):

هشت‌وجه که هر یک از آن‌ها مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

■ دوازده‌وجهی (dodecahedron):

دوازده‌وجه که هر یک از آن‌ها یک پنج‌ضلعی منتظم است.



■ بیست‌وجهی (icosahedron):

بیست‌وجه که هر یک از آن‌ها مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

البته با آزادی بسیار بیشتری که در قرار دادن اضلاع نسبت به وجوه داریم، تعداد بس بیشتری از چندضلعی‌ها موجودند تا چندوجهی‌ها.

حمایت از کالای ایرانی

رشد کندار شود

نحوه اشتراک مجلات رشد به دو روش زیر:
الف. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی www.roshdmag.ir و ثبت نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی.
ب. واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۰۶۶۰۰۳۰۹ بانک تجارت، شعبه سمره آزما پیش کد ۳۰۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیل‌شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۰۲۳۳۰۰۸۸۴.

♦ عنوان مجلات درخواستی:

♦ نام و نام خانوادگی:

♦ تاریخ تولد: ♦ میزان تحصیلات:

♦ نشانی کامل پستی:

♦ استان: ♦ شهرستان:

♦ خیابان:

♦ پلاک: ♦ شماره فیش بانکی:

♦ مبلغ پرداختی:

♦ اگر قبلاً مشترک مجله بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

♦ نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۳۳۳۱-۱۵۸۷۵
♦ تلفن بازرگانی: ۰۲۱-۸۸۸۲۳۳۰۸
♦ Email: Eshterak@roshdmag.ir

♦ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۴۵۰/۰۰۰ ریال
♦ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۳۳۰/۰۰۰ ریال

مسابقه عکاسی ریاضی



سلام به دوستان خوبم، بچه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم. از این شماره و از اولین فصلنامه جدید برهان، می‌خوایم بخشی داشته باشیم به نام «مسابقه عکاسی ریاضی». یعنی چی دقیقاً؟ الان براتون توضیح می‌دم. یعنی یک مسابقه عکاسی با مضمون مفاهیم ریاضی! کافیه نگاهی دقیق‌تر به اطرافمون بندازیم... خیلی از مفاهیم ریاضی مثل جمع، ضرب، تقارن و خیلی چیزهای دیگه رو می‌تونیم در اطرافمون ببینیم و با گرفتن یک عکس، اون رو با دوست‌هامون هم به اشتراک بذاریم. اجازه بدید، با چند تا مثال بیشتر توضیح بدم که ما در این بخش چی می‌خوایم:

خیلی وقت پیش، جایی که یادم نمی‌یاد کجا، خوندم که بی‌نهایت، یعنی بالاتر از ابرها... شاید برای نشون دادن مفهوم بی‌نهایت، بچه‌های کویر و حاشیه کویر بتونن عکسی از ستاره‌های شب بگیرن و حس بی‌نهایت را در اون به همه ما نشون بدن...

گفتم بالاتر از ابرها... تا حالا دیدید بعضی وقت‌ها ابرهایی که به دنبال هم دارن حرکت می‌کنند، با نظم خاصی بزرگ یا کوچیک می‌شن؟ شاید بشه در همین ابرها خیلی چیزها رو دید... مثل فراکتال‌ها، یا دنباله‌های عددی و هندسی یا ... راستی، اگر نظمی داشته باشند، ممکنه بشه پیش‌گویی هم کرد که ابرهای بزرگ‌تری هم دنبالشون دارن می‌یان و فردا احتمالاً بارون می‌یاد یا نه!

خلاصه بچه‌ها، یک بار دیگه توی خونه‌تون، روی دیوارهای شهرتون، توی مسجد محله‌تون و... رو نگاه کنید و تصویرهایی رو که فکر می‌کنید می‌شه با یک مفهوم ریاضی مرتبط کرد، برای ما بفرستید.

ما از بین کسانی که عکس می‌فرستند، در هر شماره سه تا پنج نفر رو انتخاب و عکس‌هاشون را چاپ می‌کنیم. شاید دفعه بعدی که خواستی مجله برهان رو بخری، عکس روی جلد مجله برات خیلی آشنا باشه!

برای مسابقه «عکاسی ریاضی» یک تا سه عکس همراه با توضیحش که کدوم مفهوم ریاضی رو بیان می‌کنه، برای ما به نشانی پیام‌نگار (ایمیل) مجله یا به نشانی صندوق پستی مجله ارسال کنید.

لطفاً همراه با عکستون حتماً یک عکس سلفی هم با تصویری که می‌خواین عکسش رو بفرستید، بگیرید و برای ما بفرستید.

برای این نوبت مجله، چون تازه این بخش را معرفی کردیم، خودمون براتون یک نمونه گذاشتیم؛ عکس‌هایی از «برج طغرل» در شهر ری. وقتی داخل برج می‌شی، با توجه به اینکه برج از درون شبیه یک استوانه‌اس که سقف نداره، نور خورشید به درون برج می‌تابه. با توجه به زاویه تابش نور خورشید، شکل‌های هندسی جالبی روی دیواره برج درست می‌شه. اگه خونده باشید، در هندسه به این شکل‌ها می‌گن بیضی که نوعی از چهار نوع مخروطیه! اگه رفتی شهر ری و برج طغرل رو که خیلی قشنگه دیدی، توی برج سرت رو بالا کن و تابش نور خورشید را ببین. شاید چیزهای دیگه‌ای هم دیدی که ما ندیدیم!

بعد از این همه صحبت، نوبت خودته. بلند شو و شروع کن!

فهرستگان

روشد

فهرست توصیفی منابع آموزشی و تربیتی منتخب



نسخه‌های الکترونیکی و رایگان فهرستگان را در این نشانی ببینید:

<http://samanketab.roshdmag.ir/fa/fehrestegan>



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>