وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

برهان ریاضی

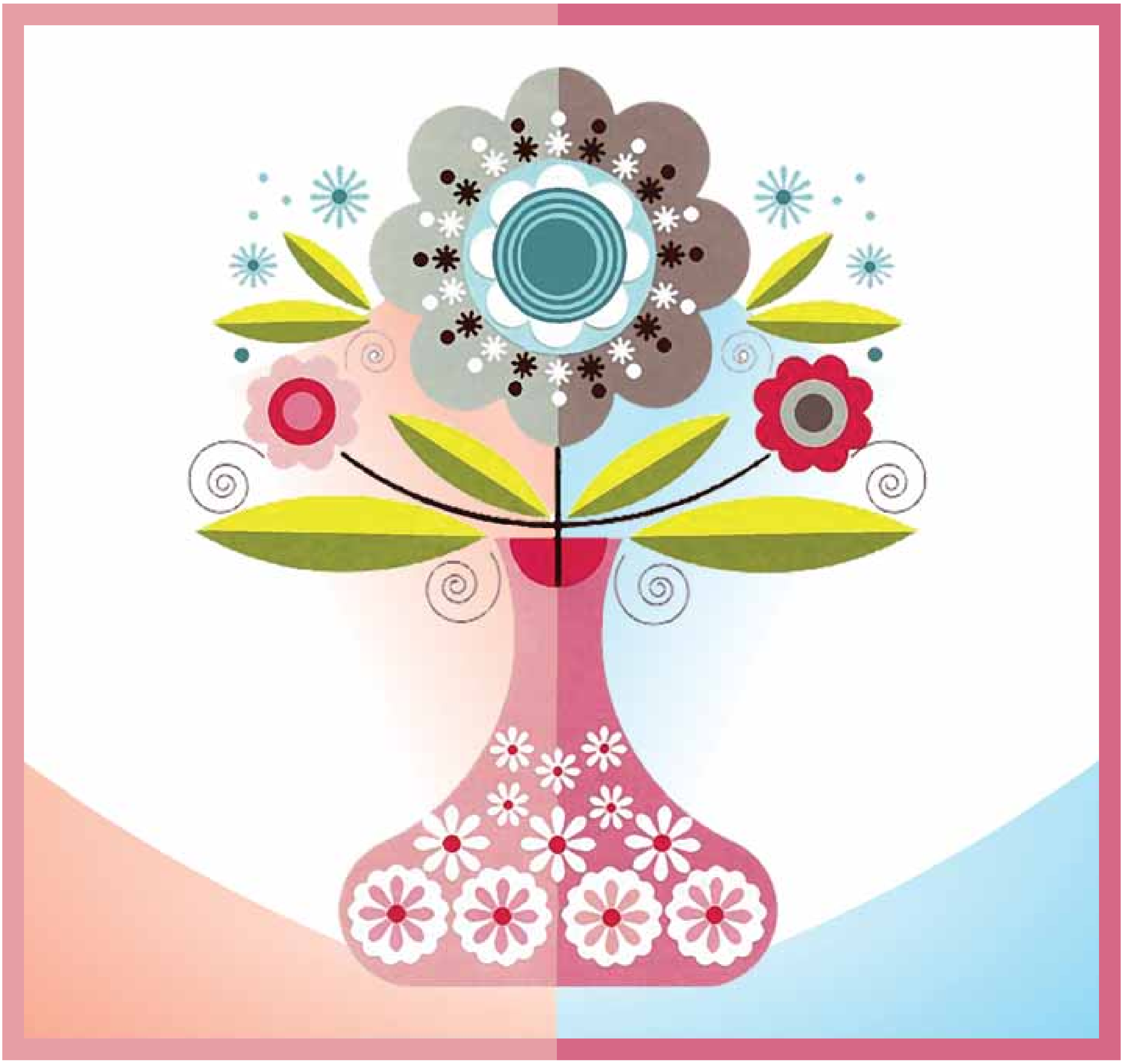
۶

دورهٔ بیست و هفتم
شمارهٔ ۱۰۸
اسفند ۱۳۹۶
۴۸ صفحه
۱۱۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



عمر خیام نیشابوری

احسان یارمحمدی

«آلبوم ریاضیات» ستونی در «مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطهٔ دورهٔ دوم» است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آشنا ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. البته در هر شماره برای آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان موردنظر به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ او می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

۲

۱

غیاث‌الدین ابوالفتح عُمَربن ابراهیم خیام نیشابوری که به «خیامی» و «خیام نیشابوری» شهرت دارد، از نامدارترین و برجسته‌ترین ریاضی‌دانان، اخترشناسان، فیلسوفان و رباعی‌سرایان ایران‌زمین است. خیام نیشابوری نخستین فردی بود که تحقیقات و دسته‌بندی‌های ارزشمندی را دربارهٔ معادله‌های درجهٔ اول، دوم و سوم انجام داد و موفق به حل معادلات درجهٔ سوم به‌صورت هندسی (البته به‌طور ناقص) شد.

۳

۴

۵

۱. تمبر خیام نیشابوری، منتشر شده در سال ۱۹۹۷ در کشور آلبانی
۲. تمبر خیام نیشابوری، منتشر شده در سال ۱۹۹۷ در کشور آلبانی
۳. مجسمهٔ خیام نیشابوری در بُخارست رومانی
۴. نقاشی دربارهٔ خیام نیشابوری، با عنوان «در آرامگاه عمر خیام» اثر جِی هَمبیج*
۵. مجسمهٔ خیام نیشابوری در محوطهٔ سازمان ملل متحد در وین اتریش

پی‌نوشت

* Jay Hambidge

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌وهفتم
- شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۸
- اسفند ۱۳۹۶
- شمارهٔ ۶
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی
آزادبه فرزان
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
نشانی امور مشترکین:
تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۷۵۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

تو می‌توانی!

چند عامل مهم وجود دارند که می‌توانند نقش بسیار مؤثر و مثبتی در یادگیری مفاهیم ریاضی برای شما دانش‌آموزان داشته باشند:

اول، تمرکز هنگام تدریس دبیر و داشتن دقت کافی و حواس جمع و فعال بودن در کلاس درس.

دوم، به خاطر آوردن، بازنگری و تکرار و تمرین مفاهیم تدریس شده.

سوم، نوشتن و دسته‌بندی دقیق و صحیح مطالب فراگرفته، آن هم به گونه‌ای که بتوان از آن به عنوان یک منبع مطالعه در آینده استفاده کرد.

روشی را در کلاس درسم به کار بردم که سه عامل فوق را به وجود می‌آورد! (شما این روش را به دقت مطالعه و به توصیه انتهای آن عمل کنید).

دانش‌آموزان به‌طور معمول عادت دارند که در کلاس درس جزوه بنویسند. این عمل معمولاً هیچ بار آموزشی ندارد و تنها نوعی رونویسی از روی تختهٔ کلاس است. چه بسا به هنگام نوشتنِ جزوه، حل یک مسئله یا اثبات یک قضیه از روی تخته، با هم‌کلاسی خود بحث و گفت‌وگو هم داشته باشند. یا اگر دبیر اشتباهی هم کرده باشد و عبارتی ناصحیح روی تخته نوشته باشد، عیناً همان را رونویسی خواهند کرد. البته وقت کلاس نیز به سبب این عمل، بیهوده سپری می‌شود.

برای جلوگیری از اتلاف وقت و انرژی دانش‌آموزان و البته به منظور رسیدن به سه عامل یا هدف فوق، از بچه‌ها در کلاس درسم و در همان جلسات اولیهٔ شروع سال تحصیلی خواستم تا به دقت و با حواس جمع به درسم و به راه‌حل نوشته شده برای حل یک مسئله یا اثبات یک قضیه، گوش دهند و فعالانه در اثبات یا نوشتن راه‌حل مسئله شرکت کنند. زیرا به دانش‌آموزان گفته بودم، پس از اینکه مطمئن شدم همهٔ آن‌ها راه‌حل یا اثبات را فهمیده‌اند و اشکال همگی روی آن مطلب رفع شد، تخته را پاک می‌کنم و دانش‌آموزان خودشان باید آنچه را که دقایقی پیش یاد گرفته‌اند و البته فعالانه در یادگیری آن مطلب مشارکت داشته‌اند، در دفترهایشان بنویسند!

اوایل که بچه‌ها به چنین جزوه‌نویسی عادت نداشتند، با کمی مشکل مواجه شدند. حتی بعضی‌ها موضوع را جدی نگرفتند، ولی مشاهده کردند که من با آن‌ها شوخی نمی‌کنم. واقعاً تخته را پاک کردم و آن‌ها مجبور شدند خودشان به کامل کردن جزوه بپردازند. پس از چند جلسه که به این منوال گذشت، من به هر سه هدفی که قبلاً ذکر کردم، رسیدم!

اول اینکه چون خودشان باید مطالب را می‌نوشتند، تمام سعی خود را به‌کار می‌بردند تا هنگام تدریس من همه‌چیز را خوب یاد بگیرند و فعالانه در رسیدن به آن مفهوم در کلاس شرکت می‌کردند. این یعنی اینکه تمرکز بیشتری به کار می‌بردند.

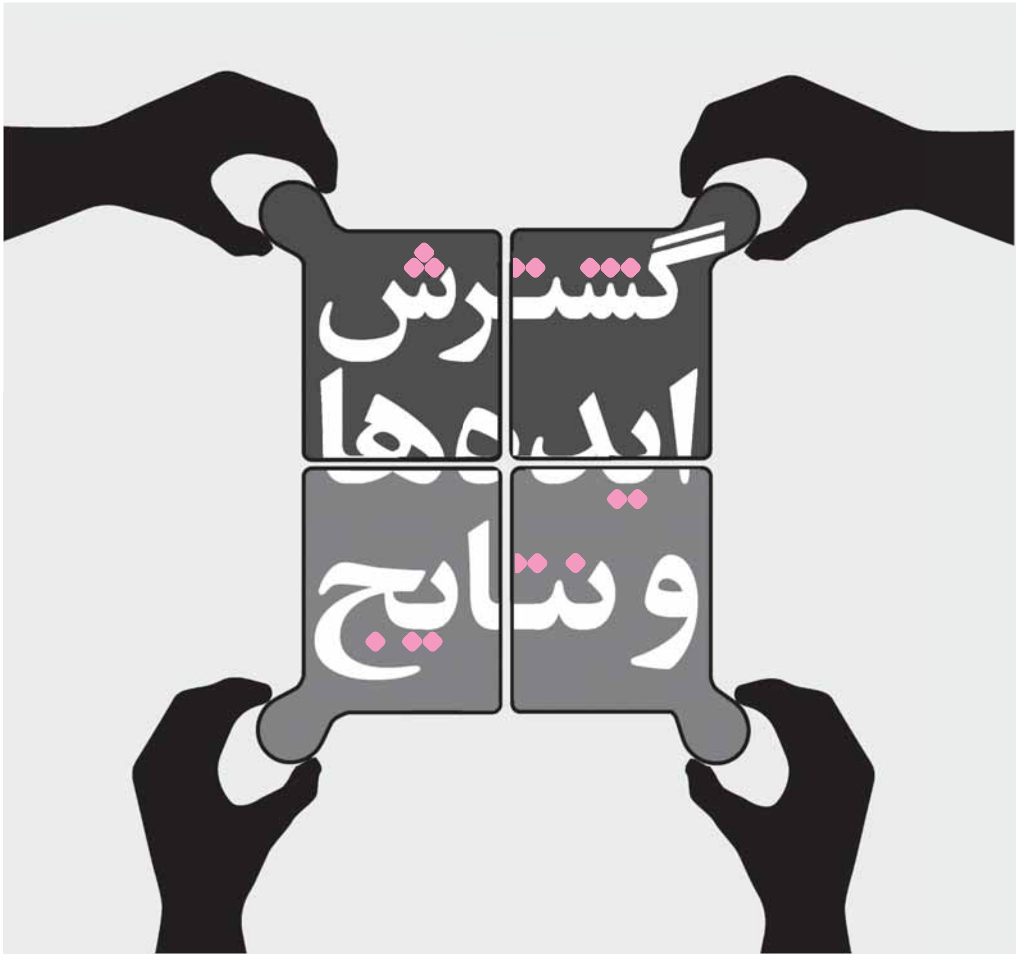
دوم اینکه وقتی شروع به نوشتن می‌کردند، باید مطالب را به‌خاطر می‌آوردند و لذا دیگر جای صحبت و گفت‌وگو با هم‌کلاسی نبود؛ مگر اینکه دربارهٔ همان مطلب درسی چیزی به هم یادآوری می‌کردند.

سوم اینکه خودشان و به زبان خودشان مطالب را می‌نوشتند و نوشتن در ریاضی عامل بسیار مهمی در یادگیری است؛ آن هم نوشتنی که جنبهٔ رونویسی نداشته باشد!

از همهٔ این‌ها قشنگ‌تر احساس خوبی بود که بچه‌ها در کلاس و پس از نوشتن از روی حافظهٔ خودشان نسبت به عملکرد خود داشتند؛ احساسی که به آن‌ها می‌گفت: «آفرین تو می‌توانی!»

توصیهٔ من به شما دانش‌آموزان فهیم این است که وقتی می‌خواهید مطلبی را از روی تخته یادداشت کنید سعی کنید بدون نگاه کردن به تخته و فقط با استفاده از ذهن خودتان آن را نوشته و در نهایت با مطالب نوشته شده روی تخته آن را تصحیح کنید.

حمیدرضا امیری، سردبیر



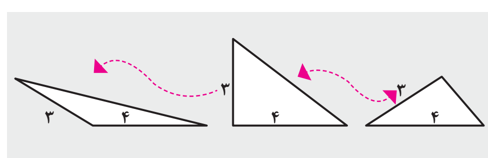
قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی ـ سمنان

مقدمه

فرمول‌های ریاضی چگونه به‌وجود می‌آیند؟ آیا فرمول‌ها و روابط ریاضی از ابتدا به شـــکل کامل به‌دست آمده‌اند یا اینکه سیر تکاملی داشته‌اند؟ دانستن این سیر تکاملی چه فایده‌ای دارد؟ آیا همیشه می‌توان فرمول‌ها را گسترش داد؟ بی‌شک دانستن این سیر تکاملی کمک بسیار زیادی به فراگیری ریاضی می‌کند که به چند مورد آن می‌پردازیم.

قضیهٔ فیثاغورس و قضیهٔ کسینوس‌ها

بی‌شـــک قضیهٔ فیثاغـــورس یکـــی از معروف‌ترین قضایای هندسه است و بیان می‌کند که اگر در یک مثلث زاویه‌ای ۹۰ درجه باشد، مربع ضلع رو به زاویهٔ ۹۰ درجه یا همان قائمـــه، برابر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر این زاویه است (شکل ۱).



شکل ۱

پرواضح اســـت که اگر دو ضلـــع زاویهٔ قائمه ثابت بماند و زاویه کوچک‌تر شـــود، ضلع ســـوم کوچک‌تر می‌شـــود و اگر زاویه از ۹۰ درجه بیشـــتر شود، ضلع سوم هم بزرگ‌تر می‌شود. سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر زاویه ۹۰ درجه نباشد، ضلع سوم چگونه محاسبه می‌شود و مقدار افزایش یا کاهش آن از حالت ۹۰ درجه چگونه حساب می‌شود؟

با یک اثبات هندسی ثابت می‌شود که تکامل این قضیه و رابطهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$

به‌خاطر سپردن قضیهٔ کسینوس‌ها با توجه به سیر

تکاملی آن بســـیار ساده‌تر و مفهومی‌تر است. وقتی که زاویه تند باشد، کسینوس آن مثبت و در نتیجه مقدار c از حالت قائمه کمتر می‌شـــود. وقتـــی هم زاویه باز باشد، cos(C) منفی و در نتیجه مقدار c از حالت ۹۰ درجه بیشتر می‌شود.

برای مثال، اگر داشـــته باشیم: b=۸ و a=۶، ضلع سوم را در سه مثلث با این دو ضلع ثابت ولی زاویه‌های متفاوت حساب می‌کنیم.

$$\hat{C}=60^\circ \Rightarrow c^2=6^2+8^2-2\times6\times8\times\cos(60^\circ)$$
$$=100-48\Rightarrow c=\sqrt{52}$$
$$\hat{C}=90^\circ \Rightarrow c^2=6^2+8^2-2\times6\times8\times\cos(90^\circ)$$
$$=100-0\Rightarrow c=\sqrt{100-0}=10$$
$$\hat{C}=120^\circ \Rightarrow c^2=6^2+8^2-2\times6\times8\times\cos(120^\circ)$$
$$=100+48\Rightarrow c=\sqrt{100+48}=\sqrt{148}$$

آیا رابطهٔ مساحت در قضیهٔ فیثاغورس به حجم گسترش می‌یابد؟

معمـــولاً این ســـؤال برای بســـیاری از افراد پیش می‌آید که آیا در قضیهٔ فیثاغـــورس رابطهٔ $c^3=a^3+b^3$ هم برقرار اســـت؟ یعنی می‌توان گفت که اگر با اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای ســـه مکعب بسازیم، حجم مکعب ســـاخته شـــده با وتر، برابر اســـت با مجموع حجم دو مکعب دیگر. در شـــکل کلی‌تر، آیا رابطهٔ فیثاغورس به شکل $c^n=a^n+b^n$ در یک مثلث قائم‌الزاویه برقرار است؟

با توجـــه به اینکه: $5^2=4^2+3^2$ و اینکه: $5^3\neq4^3+3^3$، بـــه این نتیجه می‌رســـیم کـــه این گســـترش قضیهٔ فیثاغورس درســـت نیست، چون ۳، ۴ و ۵ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

آخریـــن قضیهٔ فرما تعمیـــم دیگری از قضیهٔ فیثاغورس

اعـــداد طبیعـــی {۳،۴،۵} و {۵،۱۲،۱۳} اعـــداد فیثاغورسی نامیده می‌شوند. چون در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند: $13^2=5^2+12^2$ و $5^2=4^2+3^2$. این یعنی معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ در مجموعـــهٔ اعداد صحیح مثبت، جواب دارد. سؤالی که ذهن بســـیاری از ریاضی‌دانان را بـــه خود مشـــغول کرد، این بود که اگـــر در معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ به‌جـــای عـــدد ۲، اعـــداد ۳، ۴ و... قـــرار بگیرند، آیا باز هم معادلـــه در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب دارد؟

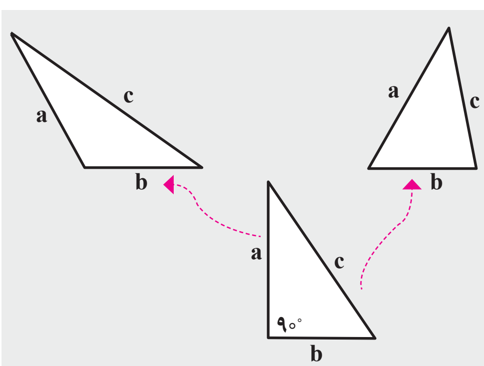
این ســـؤال آخرین قضیهٔ فرماست. قضیهٔ آخر فرما یکی از مشـــهورترین قضیه‌های تاریخ ریاضیات است. ایـــن قضیه می‌گوید: «معادلـــهٔ $x^n+y^n=z^n$ برای $n\geq3$ جواب صحیح و غیرصفر ندارد.»

یعنی اعداد صحیح و غیرصفر x، y و z را نمی‌توان یافت که جواب‌های معادلهٔ فوق باشند.

پی‌یر فرما، ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ ۱۷ میلادی، در حاشـــیهٔ کتابی نوشته بود که اثبات این قضیه را در ذهـــن دارد، ولی جای کافی برای نوشـــتن در اختیار ندارد. این قضیه تا ســـال ۱۹۹۴ حل نشده باقی مانده بود. تا اینکه **آندره وایلز**، اســـتاد دانشگاه پرینستون، در ســـال ۱۹۹۳ با اســـتفاده از نظریهٔ اعداد پیشرفته، اثباتی برای این قضیه ارائه کرد که دارای مشکلی بود. در سپتامبر ۱۹۹۴ اشکال این راه‌حل توسط خود وایلز و بـــا همکاری یکی از همکارانـــش به‌نام **تیلر** برطرف شد. پس با توجه به قضیهٔ فرما به این نتیجه می‌رسیم که قضیهٔ فیثاغورس، قضیهٔ ویژه‌ای است و از نظر فضا گسترش نمی‌یابد [۱].

قضیهٔ سینوس‌ها، تعمیم فرمول مساحت

همان‌طور که می‌دانیم مســـاحت مثلث قائم‌الزاویه برابر اســـت با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه. حال این ســـؤال پیش می‌آید که اگر زاویهٔ ۹۰ درجه نباشد، فرمول مساحت چگونه تغییر می‌کند؟



شکل ۲

اگـــر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای دو ضلع زاویهٔ قائم a و b باشد، مســـاحت آن عبارت است از: $S=\frac{1}{2}ab$. اگر زاویه از ۹۰ درجه بیشـــتر یا کمتر شـــود، بدون اینکه

a و b تغییر کند، مقدار مساحت هم تغییر می‌کند. قضیهٔ سینوس‌ها بیان می‌کند که این تغییر به‌صورت $S=\frac{۱}{۲}ab\sin(C)$ است که گسترش همان فرمول قبل محسوب می‌شود.

$$S=\frac{۱}{۲}ab \longrightarrow S=\frac{۱}{۲}ab\sin(C)$$

برای مثال، اگر داشته باشیم: a=۴ و b=۵، با این دو ضلع، مساحت مثلث‌های مختلفی را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$$\hat{C}=۳۰^{\circ} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}۴\times ۵\times \sin(۳۰^{\circ})=۵$$

$$\hat{C}=۹۰^{\circ} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}۴\times ۵\times \sin(۹۰^{\circ})=۱۰$$

$$\hat{C}=۱۵۰^{\circ} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}۴\times ۵\times \sin(۱۵۰^{\circ})=۵$$

گسترش معادلهٔ خط به معادلهٔ صفحه

همان‌طور که می‌دانیم، معادلهٔ کلی خط راست در صفحه به شکل ax+by+c=۰ است. گسترش یافتهٔ خط از صفحه به فضا، صفحه‌ای است که معادلهٔ آن چنین می‌شود: ax+by+cz+d=۰ که در آن، a، b، c و d اعداد ثابت هستند. جالب این است که معادلهٔ برخی صفحه‌ها به شکل معادلهٔ خط است. مثلاً معادلهٔ صفحه‌ای که موازی محور طول‌هاست، به شکل by+cz+d=۰ است. مثلاً معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ (۱,۲,۳) عبور کند و بر بردار V=j+۲k عمود باشد، به این صورت است: y+۲z-۸=۰.

گسترش معادلهٔ دایره به بیضی و کره

دایره مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی باشد. با توجه به این تعریف، معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ (α,β) و شعاع آن R باشد، به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است. اگر در تعریف دایره مجموعهٔ نقاطی از فضا را جایگزین مجموعه نقاطی از صفحه کنیم، کره به‌دست می‌آید. اگر مرکز کره نقطهٔ (α,β,γ) و شعاع آن R باشد، معادلهٔ آن چنین می‌شود: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲+(z-\gamma)^۲=R^۲$.

مثلاً معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن (۲,۱) و شعاع آن ۵ باشد، به این صورت: $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$ و معادلهٔ کره‌ای که مرکز آن (۲,۱,-۱) و شعاع آن ۵ باشد، به این صورت $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲+(z+۱)^۲=۲۵$ است.

آیا روش دلتا هم گسترش می‌یابد؟

روش دلتا یا همان روش کلی حل معادلهٔ درجه دوم روشی بسیار ساده و کاربردی است که دانش‌آموزان در دبیرستان آن را می‌آموزند. برخی از دانش‌آموزان بعد از یاد گرفتن روش دلتا می‌پرسند: «آیا برای معادله‌های با درجه بالاتر هم همین روش وجود دارد؟» به‌عبارت دیگر، آیا روش دلتا گسترش پیدا می‌کند؟ **گالوا**، ریاضی‌دان فرانسوی، در قرن ۱۹ ثابت کرد که متأسفانه برای معادله‌های درجهٔ پنج به بالا چنین چیزی امکان ندارد [۱] و آب پاکی را روی دست ریاضی‌دانان ریخت.

بنابراین بسیاری از روابط و فرمول‌های ریاضی با گسترش ایده‌ها به‌وجود آمده‌اند و این روش بسیار کارآمد و مفید است. از طرف دیگر، در برخی موارد راه‌ها بسته است و نمی‌توان روابط را گسترش داد.

پی‌نوشت‌ها

۱. ویکی‌پدیا، دانش‌نامهٔ آزاد.

مدل‌سازی
چیست و به چه کار می‌آید!

محمدتقی طاهری تنجانی
دبیر ریاضی و از مؤلفان کتاب درسی حسابان

اگر بـه بازی‌های کودکانه توجه کنیم، درمی‌یابیم که تمام آن‌ها به نوعی مدل‌های زندگی ما بزرگ‌سالان هستند. وقتی کودکی عروسکی را در آغوش می‌گیرد، همـان رفتار و حرکاتی را دارد کـه مادران هنگام در آغـوش گرفتن فرزندان از خود بـروز می‌دهند. وقتی کودکی اتومبیل اسـباب‌بازی را روی زمین می‌کشد، ساده‌ترین شکلی است که در دنیای کودکانه می‌توان اتومبیل را مدل‌سازی کرد.

زندگـی جمعیتی را در نظـر بگیرید. برای تأمین غذای این جمعیت چه چیزهایی لازم اسـت بدانیم؟! مثلاً باید بدانیم میزان رشـد و یا کاهش این جمعیت چقدر اسـت؟ میزان مصرف روزانهٔ آن چقدر است؟ یا دربارهٔ یک بیماری همه‌گیر باید بررسی شود، چند نفر و با چه میزان ایمنی، مبتلا یا در معرض خطر ابتلا به بیماری هسـتند. در فیزیک یا مهندسـی باید بدانیم، چگونه گرما از طریق پوشـش گرمایی یک ماشـین فضایی هـدر می‌رود؟ یا چگونه سـیارات گوناگون بر یکدیگر کشش‌های جاذبه‌ای اِعمال می‌کنند.

کپلر، ستاره‌شـناس بزرگ، در طول ۲۳ سال کار مداوم به بیان ریاضی علت و چگونگی حرکت سیارات در قالب سه قانون کپلر پرداخت. البته برای رسیدن به این سـه قانون مجبور شد فرض‌هایی را در نظر بگیرد. مثلاً سـیارات را به‌صورت نقطـه در نظر گرفت و در حرکت، تعیین مسیرها و اندازه‌گیری‌ها، از تقریب‌های مناسب استفاده کرد.

همهٔ ما زمین را به شکل یک کره در نظر می‌گیریم و حال آنکه واقعیت امر این نیسـت. کره ساده‌ترین و نزدیک‌ترین شیء ریاضی است که زمین به آن شباهت دارد. همین در نظر گرفتن شکل زمین به‌صورت کره، نوعی مدل‌سـازی ریاضی است. وقتی که کپلر قوانین حرکت سـیارات را در قالب سه قانون خود با استفاده از نمادهـا، اصطلاحات و قوانین ریاضی بیان داشـت، درواقع حرکت سیارات را مدل‌سازی ریاضی کرد.

هدف از مدل‌سـازی تبدیـل پدیده‌های فیزیکی، اجتماعـی، اقتصادی و... به فرمول‌های ریاضی اسـت. مثلاً در علم اقتصاد ممکن اسـت بخواهند پیش‌بینی کنند، ضربه به صنعت فولاد چه پیامدهایی برای دیگر بخش‌های اقتصادی، مثل اشـتغال (و نرخ بی‌کاری)، تولید ناخالص ملی و... دارد.

کسـب مهارت در مدل‌سازی به موفقیت در به‌کار بردن دانـش ریاضی و همچنیـن درک مفاهیم برای اثبات قضایا و حل معادلات نیاز دارد.

مدل‌سازی برای دستیابی به بهترین جواب ممکن یا کم‌هزینه‌ترین جواب صورت می‌گیرد. مدل‌سـازی علمی اسـت متکی بر ریاضی و آمـار و دو بعد دارد: یکی بعـد علمی و دیگر بعد هنـری. جنبهٔ علمی آن قابل فراگیری اسـت، اما جنبهٔ هنری آن به تمرین و ممارست، و نیز ذوق و فکر خلاق احتیاج دارد.

مدل‌سازی فرایندی است که در شبکهٔ عصبی مغز، با تفکر آغاز و با درک واقعیت‌ها فرمول‌بندی می‌شود و با پردازش تجربیات و نمایش مجدد اطلاعات جهان خارج ادامه می‌یابد. نتیجهٔ این فرایند مدل نامیده می‌شـود. مدل ریاضی مدل آفریده شـده توسط مفاهیم ریاضی است که معمولاً با توابع و معادلات بیان می‌شود.

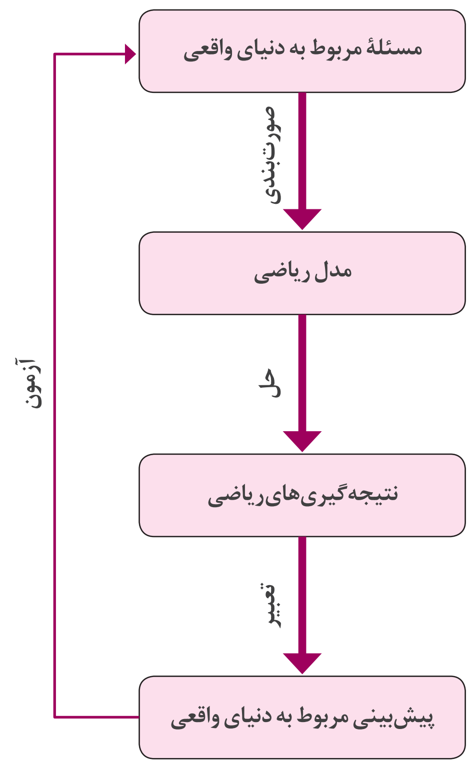
وقتـی مدل‌های ریاضی را به وجـود می‌آوریم، از دنیای واقعی به دنیای مجرد ریاضی وارد می‌شویم که سـاختمانی از مدل واقعی است. سـپس با استفاده از روش‌های ریاضی یا محاسـبات رایانه‌ای جواب مدل را می‌یابیم و در پایان دوباره از حل مدل ریاضی مسـئله به مـدل واقعی برمی‌گردیم. در این مرحله اسـت که تجزیه و تحلیل مدل مطرح می‌شـود. بدیهی است که شروع و پایان کار هر دو در دنیای واقعی است.

یکی از سودمندی‌های کاربرد مدل ریاضی این است که فرد می‌تواند تأثیرات تغییرات را در سیسـتم بدون

اینکه چیزی در دنیای واقعی عوض شود، بررسی کند.

نمودار ۱ روند مدل‌سازی ریاضی را نشان می‌دهد. اگر مسئله‌ای مربوط به دنیای واقعی (پیرامونی) داشته باشیم، قدم اول صورت‌بندی مدل ریاضی برای آن، مشخص کردن و نام‌گذاری متغیرهای مستقل و وابسته و پذیرش فرض‌هایی است که این پدیده را آن‌قدر ساده کنند که مسئلهٔ متناظر آن از نظر ریاضی قابل حل باشد. باید با استفاده از دانش فیزیکی و مهارت‌های ریاضی‌مان معادله‌هایی را به دست آوریم که متغیرها را به هم ربط دهند. در مواردی که هیچ قانون فیزیکی راهگشا نیست، لازم است از طریق جمع‌آوری اطلاعات از کتابخانه و اینترنت و یا آزمایش، اطلاعات را جمع‌آوری کنیم و جدول حاصل از این اطلاعات را در پی یافتن الگوهایی بررسی کنیم.

از این نمایش عددی تابع ممکن است بتوانیم نمایشی نموداری برای تابع پیدا کنیم.



نمودار ۱

قدم دیگر استفاده از ریاضیاتی است که به ما کمک می‌کند، نتیجه‌های ریاضی مدلی را که طراحی کرده‌ایم، به دست آوریم. در مرحلهٔ بعد، با توضیح و تفسیر این نتایج آن‌ها را به اطلاعاتی دربارهٔ مسئلهٔ اولیه تبدیل کنیم. و گام آخر اینکه درستی تفسیرهایمان را روی داده‌های واقعی می‌آزماییم. اگر این تفسیرها با واقعیات تطابق نداشتند، باید بخشی از مدل‌سازی را بازسازی کنیم، یا به طراحی جدیدی دست بزنیم و این چرخه را دوباره تکرار کنیم.

مدل‌های ریاضی هیچ‌گاه بیان کاملاً روشن وضعیت‌های فیزیکی نیستند. مدل خوب مدلی است که در آن واقعیات آن‌قدر ساده‌سازی می‌شوند که بتوان محاسبات ریاضی مربوط را با دقتی انجام داد که به نتیجه‌های به‌دردبخور بیانجامند. باید محدودیت‌های مدل را هم مد نظر داشت. دست آخر طبیعت حرف آخر را می‌زند!

انواع متفاوتی از توابع هستند که می‌توان از آن‌ها برای مدل‌سازی رابطه‌های موجود در طبیعت استفاده کرد. در ادامه به چند نمونه از مسائل در رابطه با مدل‌سازی اشاره می‌شود.

✦ **مثال۱.** وقتی هوای گرم بالا می‌رود، منبسط و سرد می‌شود. اگر دمای هوا در سطح زمین ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد و در ارتفاع یک کیلومتری بالای سطح زمین، ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، دمای T را برحسب تابعی از ارتفاع h (T برحسب C° و h برحسب کیلومتر) بنویسید و تعیین کنید، دما در ارتفاع ۲/۵ کیلومتری سطح زمین چقدر است.

✦ **راه‌حل:** چون فرض کرده‌ایم T تابعی خطی برحسب h است، می‌توان نوشت: $T=mh+b$

می‌دانیم اگر: $h=0$، آن‌وقت $T=20$ و در نتیجه:

$$20 = m\times 0 + b \Rightarrow b = 20$$

همچنین می‌دانیم اگر: $h=1$، پس: $T=10$. در نتیجه:

$$10 = m\times 1 + 20 \Rightarrow m = -10$$

و تابع خطی مورد نظر $T=-10h+20$ است.

در ارتفاع ۲/۵ کیلومتری دما برابر است با:

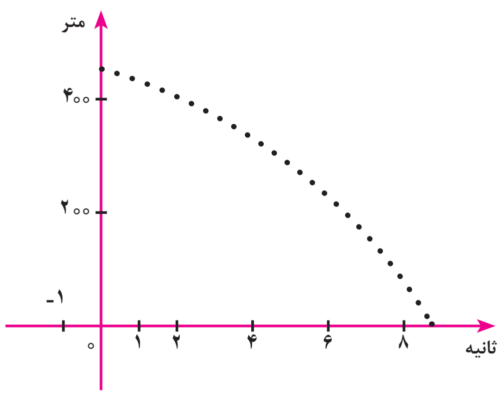
$$T = -10(2/5) + 20 = -5C^\circ$$

✦ **مثال۲.** توپی را از ارتفاع ۴۵۰ متری برج میلاد رها می‌کنیم. ارتفاع توپ از سطح زمین (h) در فاصلهٔ زمانی به طول ۱ ثانیه در جدول ۱ ثبت شده است. مدل مناسبی پیدا کنید که به این داده‌ها بخورد و با استفاده از این مدل زمان برخورد توپ با زمین را پیش‌بینی کنید.

ارتفاع (متر)	زمان (ثانیه)
۴۵۰	۰
۴۴۵	۱
۴۳۱	۲
۴۰۸	۳
۳۷۵	۴
۳۳۲	۵
۲۷۹	۶
۲۱۶	۷
۱۴۳	۸
۶۱	۹

جدول ۱

✦**راه‌حل:** نمودار پراکندگی داده‌ها را به‌صورت **نمودار ۲** رسم کرده‌ایم.



نمودار ۲

معلوم است که مدل خطی در اینجا مناسب نیست. اما به نظر می‌رسد نقطه‌های داده شده روی یک سهمی قرار دارند. لذا از مدل درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم. با استفاده از ماشین‌حساب مدل درجهٔ دوم زیر به دست می‌آید:

$$h = ۴۵۰ + t - ۴/۹t^{۲}$$

البته توجه داریم که این مدل تقریباً نقاط جدول را با یک خطای کم در برمی‌گیرد.

وقتی توپ به زمین می‌خورد که: $h=۰$. از حل معادلهٔ درجهٔ دوم $h=۰$ مقدار t تقریباً ۹/۶۷ خواهد شد.

همان‌طور که مشاهده شد، در مدل‌سازی از توابع متفاوتی می‌توان استنباط کرد. در صورتی که تابع خاصی موجود نباشد، در این صورت با استفاده از روش‌های آماری مدلی برای مسئلهٔ مورد بحث ساخته می‌شود که شرح آن از حوصلهٔ این مقاله خارج است.

تمرین ۱

زیست‌شناسان متوجه شده‌اند، جیرجیر کردن گونه‌ای از جیرجیرک‌ها به دمای هوا بستگی دارد و این بستگی تا حدود زیادی خطی است. هر جیرجیرک در دمای ۷۰ درجهٔ فارنهایت هر دقیقه ۱۱۳ بار و در دمای ۸۰ درجهٔ فارنهایت هر دقیقه ۱۷۳ بار جیرجیر می‌کند. مدل دما (T) را برحسب تعداد جیرجیرها در دقیقه (N) به دست آورید. شیب نمودار این معادله چقدر است و نشانه چیست؟

تمرین ۲

در جدول ۲ میانگین فاصلهٔ سیاره‌ها از خورشید d (واحد اندازه‌گیری را برحسب فاصلهٔ زمین تا خورشید در نظر گرفته‌ایم) و همین‌طور دوره گردش آن‌ها T (مدت یک دور گردش آن‌ها در یک سال) را آورده‌ایم.

سیاره	d	T
تیر	۰/۳۷۸	۰/۲۴۱
زهره	۰/۷۲۳	۰/۶۱۵
زمین	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
ماه	۱/۵۲۳	۱/۸۸۱
مشتری	۵/۲۰۳	۱۱/۸۶۱
زحل	۹/۵۴۱	۲۹/۴۵۷
اورانوس	۱۹/۱۹۰	۸۴/۰۰۸
نپتون	۳۰/۰۸۶	۱۶۴/۷۸۴

جدول ۲

الف. مدلی برای این داده‌ها پیدا کنید.

ب. بنابر قانون سوم کپلر برای حرکت سیارات، «مربع دورهٔ گردش سیاره با مکعب میانگین فاصله‌اش از خورشید متناسب است».

آیا مدل پیشنهادی شما قانون سوم کپلر را تأیید می‌کند؟

منابع

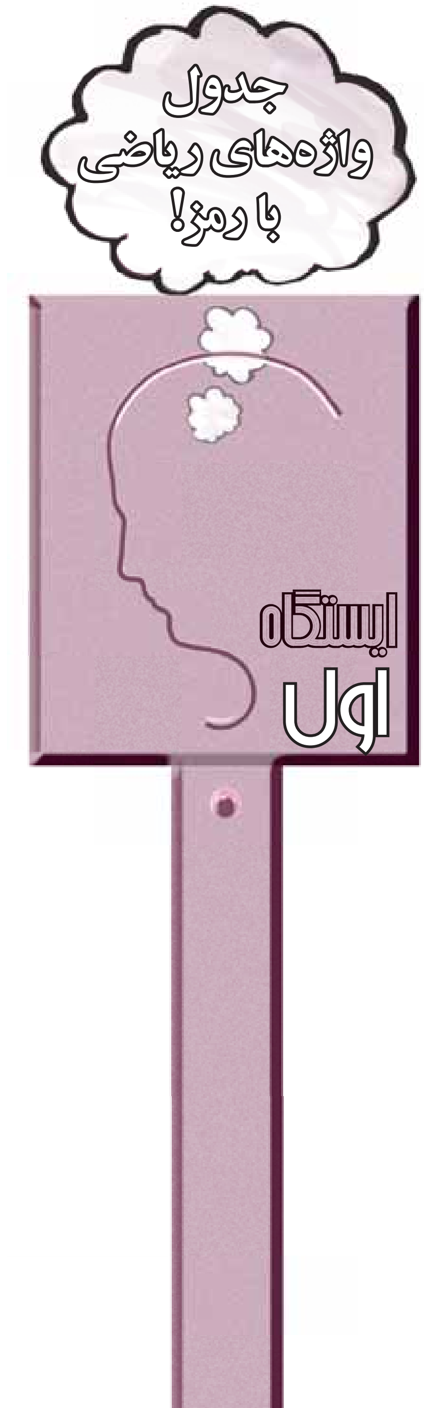
۱. ابراهیمی مطلق، محمد (۱۳۸۵). «مدل‌سازی». نشریهٔ شمارهٔ ۹. پیام دبیرخانهٔ ریاضی. پاییز.

۲. گروه ریاضی منطقه برخوار اصفهان (۱۳۸۶). **شاخه‌های علم ریاضی**. نشریهٔ شمارهٔ ۱۳۰. پیام دبیرخانهٔ ریاضی. زمستان.

۳. بخشعلی‌زاده، شهرناز و دیگران (۱۳۸۰). **کتاب معلم آمار و مدل‌سازی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش‌وپرورش.

۴. استوارت، جیمز (۱۳۸۸). **حساب دیفرانسیل و انتگرال** (ج ۱). ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات فاطمی.

هوشنگ شرقی



با جدول‌های واژه‌های ریاضی از شماره‌های قبل آشنایی دارید. واژه‌های موردنظر را در جدول زیر پیدا کنید (به‌صورت افقی، عمودی، مورب از دو طرف) و دور آن‌ها را خط بکشید. سپس حروف باقی‌مانده را در جایی بنویسید. از ترکیب این حروف نام یکی از ریاضی‌دانان ایرانی سده‌های پیشین به‌دست می‌آید. نام این شخص و زندگی‌نامهٔ مختصر وی را که رمز جدول است، برای ما بفرستید تا به قید قرعه جایزه‌ای نفیس تقدیمتان شود!

ا	و	ل	ا	گ	ک	د	ز	ا	ر	گ	ی
و	و	ب	و	ا	ن	ت	ا	ت	و	ا	ن
س	ل	ا	ت	و	گ	ل	ر	ت	ل	ا	ا
ش	ی	ا	ا	س	ر	ا	ف	ق	ط	ر	ش
ا	م	ن	ک	م	ا	ن	ا	ر	ا	ک	ا
ن	و	ت	و	ی	ن	د	ک	ا	ر	ت	ک
د	ن	ه	ی	س	د	ا	ت	ا	ش	ق	د
ا	م	ا	ر	ر	م	ا	و	ی	م	ا	ی
ز	ا	ر	ت	ی	ا	ک	ر	ج	ی	ر	ش
ه	ت	م	ی	ا	ن	گ	ی	ن	د	ن	م
م	م	ی	ز	ک	ا	م	ل	ن	س	ا	چ
ه	ب	ا	ش	ت	ر	ا	و	ت	س	ا	ی

فهرست واژه‌ها

فاکتوریل • میانگین • سینوس • تقارن • تراز • لگاریتم • تشابه • انتها • ماکزیمم • افراز • آمار • توان • متناوب • اندازه • کمان • رادیکال • راندمان • قطر • لاندا • تتا • گالوا • دکارت • سوا • گاوس • تالس • آبل • نیوتون • استوارت • ارشمیدس • دزارگ • شیتز • اسنل • کوارک • کرجی • جمشید کاشانی

ریاضی لذت‌بخش

در کلاس خانم جمشیدی

بخش ۱: مینی‌مم کردن از طریق بازتاب

آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی تهران

اشاره

کلاس‌هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می‌گویم، دبیر ریاضی‌مان.
تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشیدی با بقیهٔ کلاس‌هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.
اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش»! به همین خاطر تصمیم گرفتم کلاس‌های ریاضی‌مان و تمام صحبت‌های ردوبدل شده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.

جلسهٔ اول: شنبه ۲۲ مهرماه ۱۳۹۶

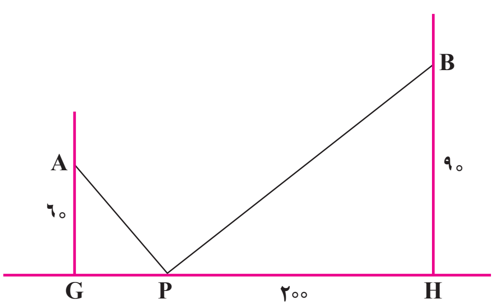
خانم جمشیدی وارد کلاس شد و با رویی گشاده و لبخندی بر لب گفت: «سلام بچه‌ها! صبحتون به‌خیر!».

همگی ایستادیم و سلام کردیم. خانم جمشیدی گفت: «بچه‌ها تا به حال فکر کردید، مرغ ماهی‌خوار چه مشکلاتی توی زندگی داره؟»

ما هم سری تکان دادیم که یعنی از مشکلات مرغ ماهی‌خوار خبر نداریم! واقعاً چه مشکلاتی دارد؟ این هم به ریاضی ارتباط پیدا می‌کند؟! خانم جمشیدی گفت: «مرغ ماهی‌خوار هم برای موفقیت به ریاضی احتیاج دارد!»

واقعاً حرف جالبی زد. یعنی حتی حیوانات هم به ریاضی نیاز دارند!

خانم جمشیدی شکل ۱ را پای تخته رسم کرد و ادامه داد: «در این شکل یک مرغ ماهی‌خوار داریم که در نقطهٔ A، ۶۰ متری بالای زمین روی یک درخت، کنار رودخانه‌ی پر از ماهی نشسته و می‌تواند به هر نقطه‌ای بین G و H پرواز کند و بعد به آشیانه‌اش که در نقطهٔ B، ۹۰ متری بالای زمین قرار داد، برگردد. طول GH ۲۰۰ متر است. سؤال من از شما این است که P چه نقطه‌ای از GH باشد تا مرغ ماهی‌خوار در نقطهٔ P ماهی بگیرد؛ به طوری که حاصل جمع AP و PB، یعنی مسیر پرواز او، کمترین مقدار ممکن شود؟»



شکل ۱

همگـــی به فکر فـــرو رفتیم. واقعـــاً P چه نقطه‌ای می‌تواند باشد؟ خانم جمشیدی راهنمایی‌مان کرد: «به شما پیشنهاد می‌کنم که اول برای GP عددهای متفاوت و دلخواه قرار بدهید و بـــه ازای آن مقدارها، مقدارهای AP را پیدا کنید و بعد مقدارهای PB را حســـاب کنید. در نهایـــت هم AP و PB را جمع کنید، ببینید کمترین مقدارش چند می‌شود؟»

ما سریع دست به‌کار شـــدیم و با کمک هم جدول کاملی از مقدارهای ممکن GP درست کردیم. بعد APها و PBها را حساب کردیم و در آخر AP+PB را به دست آوردیم. جدول زیر نتیجهٔ کار گروهی ما شد.

GP	AP	PB	AP+PB
۱۰	۶۰/۸۲۷۶۳	۲۱۰/۲۳۸	۲۷۱/۰۶۵۶
۲۰	۶۳/۲۴۵۵۵	۲۰۱/۲۴۶۱	۲۶۴/۴۹۱۷
۳۰	۶۷/۰۸۲۰۴	۱۹۲/۳۵۳۸	۲۵۹/۴۳۵۹
۴۰	۷۲/۱۱۱۰۳	۱۸۳/۵۷۵۶	۲۵۵/۶۸۶۶
۵۰	۷۸/۱۰۲۵	۱۷۴/۹۲۸۶	۲۵۳/۰۳۱۱
۶۰	۸۴/۸۵۲۸۱	۱۶۶/۴۳۳۲	۲۵۱/۲۸۶
۷۰	۹۲/۱۹۵۴۴	۱۵۸/۱۱۳۹	۲۵۰/۳۰۹۳
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۹۰	۱۰۸/۱۶۶۵	۱۴۲/۱۲۶۷	۲۵۰/۲۹۳۲
۱۰۰	۱۱۶/۶۱۹	۱۳۴/۵۳۶۲	۲۵۱/۱۵۵۳
۱۱۰	۱۲۵/۲۹۹۶	۱۲۷/۲۷۹۲	۲۵۲/۵۷۸۹
۱۲۰	۱۳۴/۱۶۴۱	۱۲۰/۴۱۵۹	۲۵۴/۵۸
۱۳۰	۱۴۳/۱۷۸۲	۱۱۴/۰۱۷۵	۲۵۷/۱۹۵۸
۱۴۰	۱۵۲/۳۱۵۵	۱۰۸/۱۶۶۵	۲۶۰/۴۸۲
۷۸	۹۸/۴۰۷۳۲	۱۵۱/۶۰۴۷	۲۵۰/۰۱۲۱
۷۹	۹۹/۲۰۱۸۱	۱۵۰/۸۰۱۲	۲۵۰/۰۰۳
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۸۱	۱۰۰/۸۰۱۸	۱۴۹/۲۰۱۲	۲۵۰/۰۰۳
۸۲	۱۰۱/۶۰۷۱	۱۴۸/۴۰۴۹	۲۵۰/۰۱۱۹
۷۹/۸	۹۹/۸۴۰۰۷	۱۵۰/۱۶	۲۵۰/۰۰۰۱
۷۹/۹	۹۹/۹۲۰۰۲	۱۵۰/۰۸	۲۵۰
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۸۰/۱	۱۰۰/۰۸	۱۴۹/۹۲	۲۵۰
۸۰/۲	۱۰۰/۱۶۰۱	۱۴۹/۸۴	۲۵۰/۰۰۰۱

من نگاهی به عددهای جـــدول کردم و گفتم: «به نظـــر می‌آید کمترین مقدار بـــرای AP+PB، ۲۵۰ متر است که در این حالت GP برابر ۸۰ متر می‌شود.

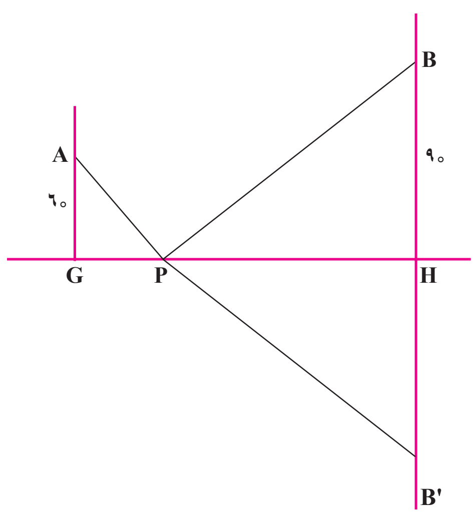
باران گفت: «بهار درست می‌گوید P در ۸۰ متری G است و همین‌طور در ۱۲۰ متری H».

مهتاب در تأیید صحبت‌هـــای باران گفت: «کاملاً درســـت است و در این حالت AP، ۱۰۰ متر و PB هم ۱۵۰ متر اســـت. جالب است که نســـبت ۸۰ به ۱۲۰ می‌شـــود. $\frac{۲}{۳}$ و نســـبت ۱۰۰ به ۱۵۰ هم همین مقدار می‌شود».

من گفتم: «و این نســـبت دقیقاً نسبت دو تا ارتفاع است! نسبت ۶۰ به ۹۰!».

همگی هیجان‌زده بودیم. مهتاب انگار چیزی کشف کرده بود، با صـــدای بلند گفت: «پس یعنی کوتاه‌ترین فاصله وقتی به دســـت می‌آید کـــه مثلث‌های AGP و BHP متشـــابه باشند. می‌شـــود گفت همیشه این‌جور است؟!»

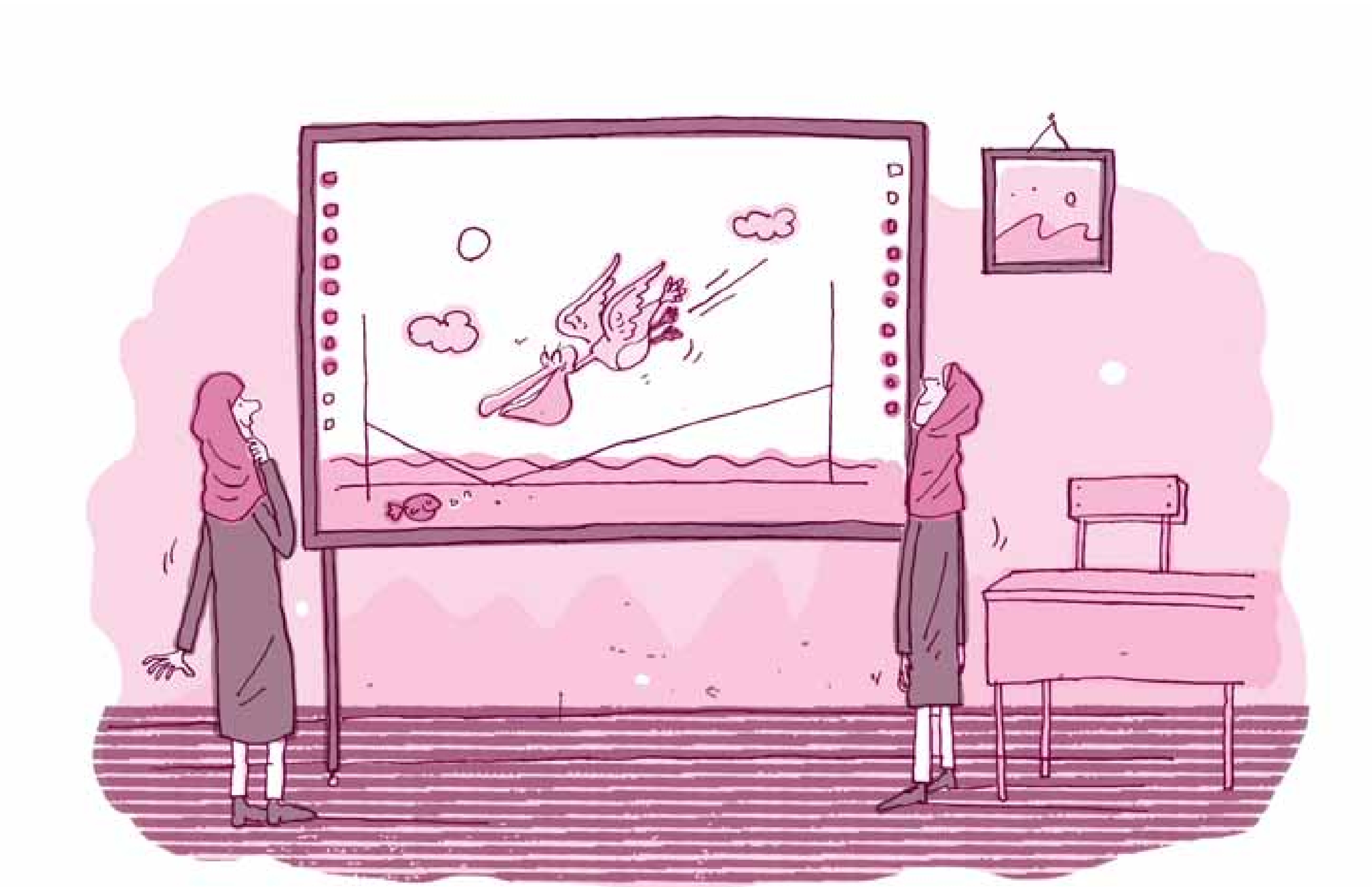
خانم جمشیدی شکل ۲ را برایمان رسم کرد و گفت: «بسیار خب! حالا به این شکل دقت کنید. همان‌طور که می‌بینید، ´HB قرینهٔ HB نسبت به رودخانه است».



شکل ۲

باران گفـــت: «و زاویه‌هـــای BPH و ´B´PH با هم برابرند. بنابراین مقدار AP+PB همان مقدار ´AP+PB می‌شود».

خانم جمشیدی با لحن مهربانی گفت: «بله، کاملاً صحیح است! ادامه بدهید!»



من سریع گفتم: «یعنی اگر AP+PB´ را مینی‌مم کنیم، انگار AP+PB را مینی‌مم کردیم!»

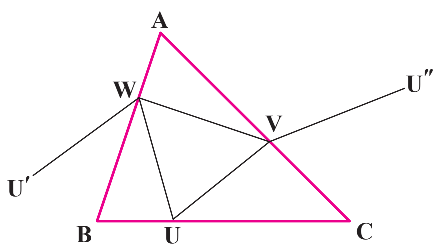
مهتاب بلافاصله ادامه داد: «پس فکر کنم P باید در نقطه‌ای قرار بگیرد که APB´ یک خط راست بشود و زاویه‌های APG و B´PH متقابل به رأس می‌شوند و بنابراین برابرند که دلیل تشابه مثلث‌های AGP و BHP است».

خانم جمشیدی گفت: «دقیقاً آفرین به شما! می‌شود این‌طور گفت که دو قسمت پر مرغ ماهی‌خوار با رودخانه زاویه‌های مساوی می‌سازد».

باران گفت: «دقیقاً شبیه مطالبی که توی فیزیک خواندیم، شبیه شعاع نور است که با همان زاویه‌ای منعکس می‌شود که تابیده است!»

خانم جمشیدی اضافه کرد: «بله و درواقع این قانون فیزیک به این واقعیت وابسته است که نور مسیری را انتخاب می‌کند که آن را در کوتاه‌ترین زمان طی کند. حالا من یک مسئلهٔ مینی‌مم سازی دیگر را مطرح می‌کنم، به شکل ۳ دقت کنید.

یک جزیره به شکل یک مثلث ABC است که تمام زاویه‌هایش حاده هستند.



شکل ۳

ایستگاه‌های U، V و W در ساحل‌های BC، CA و AB قرار دارند که با یک کابل با هم در ارتباط‌اند.

به این فکر کنید که ایستگاه‌ها در چه نقاطی باید قرار گیرند تا طول کل کابل مینی‌مم شود؟ اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که U´ و U˝ قرینهٔ U نسبت به AB و AC هستند».

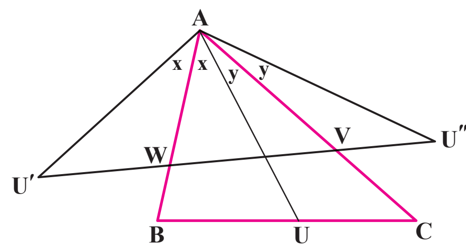
من گفتم: «طول کل کابل همان اندازهٔ U´W+WV+VU˝ است. به نظرتان می‌شود از این سه قسمت یک خط راست بسازیم؟»

مهتاب فکری به نظرش رسید: «خب نمی‌شود یک خط راست از U´ به U˝ رسم کنیم و W و V را نقاطی بگیریم که ساحل‌ها را قطع می‌کند؟»

خانم جمشیدی در جواب گفت: «بله، درست است.

ایـــن کار مینی‌مم مقدار را بـــرای کابل به ازای نقطهٔ U انتخابـــی می‌دهد. چون موقعیت‌هـــای ′U و ″U بنا به موقعیت U مشـــخص می‌شود. شـــکل‌ها این موضوع را نشان می‌دهد».

شـــکل جدید ما همین شکل ۴ بود. باران نگاهی به شکل انداخت و متفکرانه گفت: «پس اندازهٔ ″U′U کل طول کابل می‌شود، درست است؟»



شکل ۴

خانم جمشیدی تأیید کرد و گفت: «حالا فقط باید تصمیم بگیریم U را کجا قرار بدهیم؟ من از A به نقاط U و ′U و ″U وصل کردم».

مهتاب گفت: «ســه پاره‌خط رسم شده از A همگی مساوی‌اند، چون ′AU و ″AU قرینهٔ AU نسبت به AB و AC هستند. بنابراین مثلث ″U′AU متساوی‌الساقین است».

من گفتم: «زاویه‌هایی که با حرف x مشخص شده‌اند، به دلیل بازتاب با هم برابرند. همین‌طور زاویه‌های y هم با هم برابرند».

باران در ادامه صحبت من گفت: «و $B\hat{A}C = x + y$ که یعنی: $U'\hat{A}U'' = ۲B\hat{A}C$».

مهتاب گفت: «پس هر جایی که U را قرار بدهید، مثلث متساوی‌الســاقین ″U′AU همیشــه زاویه‌های مشابه در رأس A دارد و هر مثلثی که تشکیل بشود با مثلث ″U′AU متشابه است».

خانم جمشیدی لبخندی زد و گفت: «کاملاً درست می‌گویـــی مهتاب جان! و مـــا می‌خواهیم مثلثی را پیدا کنیم کـــه در آن ″U′U کمترین مقدار خود را داشـــته باشد».

مهتاب گفـــت: «پس باید AU را طوری بســـازیم که کمترین مقدار ممکن را داشـــته باشد». باران گفت: «یعنی AU باید بر BC عمود باشد. از این حالت دیگر کوتاه‌تر نمی‌شود».

من هم ادامـــه دادم: «پس احتمالاً BV هم باید بر CA عمود باشد و CW هم بر AB».

خانم جمشـــیدی صحبت‌هـــا را جمع‌بندی کرد و گفت: «دقیقاً همین‌طور است! بهترین مکان برای قرار دادن ایستگاه‌ها پای ارتفاع‌هاست. مثلثی که با کابل‌ها تشـــکیل می‌شـــود «مثلث پادکی» (Pedal triangle) برای مثلث ABC نامیده می‌شـــود و کمترین محیط را برای هر مثلث دارد با رئوسی که روی سه ساحل جزیره قرار داده می‌شوند».

تا جلسهٔ بعدی خداحافظ

- **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی
- **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی
- **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
- **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی
- **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری
- **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت
- **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
- **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

رئیس‌الاعمال (رئیس مهندسان)

احسان یارمحمدی

اشاره

بدیع‌الزمان ابوالعزبن اسماعیل‌بن رزاز جَزَری، **ریاضی‌دان، مهندس، مخترع، صنعتگر، پژوهشگر و هنرمند نام‌دار و برجستهٔ دورهٔ طلایی اسلامی است. بدیع‌الزمان جَزَری نخستین ربات قابل برنامه‌ریزی انسان‌نما را ساخت. این اختراع شامل یک قایق آبی بود که در آن چهار نوازندهٔ مصنوعی موسیقی، آهنگ می‌نواختند. به همین دلیل جَزَری را به‌عنوان پدر علم مهندسی رباتیک جهان می‌شناسند. در این مقاله با معرفی مستند *بدیع‌الزمان جزری*، از مجموعهٔ مستند «*سرزمین ستاره‌ها*»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «*مبانی نظری و عملی مهندسی مکانیک در تمدن اسلامی*»[1] به تصنیف *ابی‌العزبن اسماعیل جزری* می‌پردازیم که ترجمه و تحشیهٔ آن توسط *محمدجواد ناطق*، *حمیدرضا نفیسی* و *سعید رفعت‌جاه* انجام شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۰ توسط «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته است. در ادامه نیز به ارائهٔ مطالبی از این مستند خواهیم پرداخت.**

مقام جزری را می‌توانیم با مطالعهٔ کتاب او دریابیم. کتاب او جامع علم و عمل است. یعنی این کتاب هم نظری و هم عملی به شمار می‌آید. کتاب دربارهٔ ابزارهای مکانیکی است، بنابراین جزری مهندس مکانیک بود. او مقام «رئیس‌الاعمال» را داشت که درواقع به معنای «رئیس مهندسان» بود. وی به واسطهٔ تجربیات طولانی و وسیع و آگاهی عمیقش از علوم نظری و مهارت عملی‌اش به این مقام دست یافت. جزری مخترع بود و شرح اختراعات و ابتکارات خود را برای ما نوشته است. وی در نگارش مطالب مهندسی و هنر رسم فنی مهارت داشت. همچنین در تشریح مطالبی که در ذهن داشت و در توصیف ساده وآسان دقیق‌ترین و پیچیده‌ترین ابزارها استاد بود. جزری بر اهمیت تجربه و مشاهده تأکید می‌کند و علمی را که متکی بر تجربه نباشد، نمی‌پذیرد. برخی اختراعات وی به شرح زیرند:

- **دستگاه‌های نوع اول:** ساعت‌هایی که «فناکین» نامیده می‌شوند و گذشت ساعت‌های مستوی و زمانی را مشخص می‌کنند و شامل ۱۰ دستگاه می‌شوند.
- **دستگاه‌های نوع دوم:** ظرف‌ها و مجسمه‌های مناسب مجالس شربت‌خوری که ۱۰ دستگاه را در برمی‌گیرد.
- **دستگاه‌های نوع سوم:** آفتابه‌ها و تشت‌های خون‌گیری «فَصد» و وضو که شامل ۱۰ دستگاه می‌شوند.
- **دستگاه‌های نوع چهارم:** فواره‌های داخل استخر که تغییر شکل می‌دهند و وسایل نی زدن دائمی که شامل ۱۰ دستگاه می‌شوند.
- **دستگاه‌های نوع پنجم:** دستگاه‌هایی که آب را از آبگیر و چاه کم‌عمق و رود جاری بالا می‌آورند و شامل پنج دستگاه می‌شوند.

● **دســـتگاه‌های نوع ششم:** وسایل مختلف و غیرمتشابه دیگر که شامل پنج دستگاه می‌شوند.

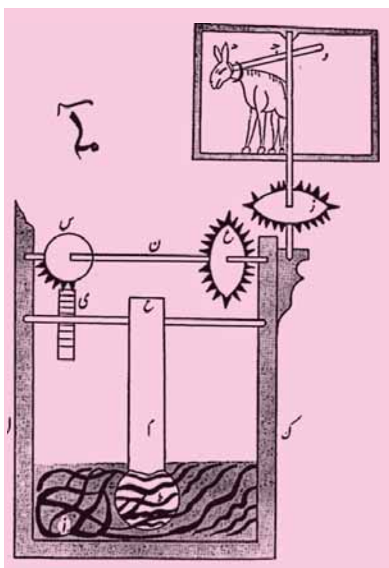
اکنون و در ادامه به معرفی دستگاه نوع پنجم توسط بدیع‌الزمان جزری می‌پردازیم.

نوع پنجم: ***دستگاه‌هایی که آب را از آبگیر، چاه کم‌عمق و رود جاری بالا می‌آورند.***

دستگاه اول از نوع پنجم: ***و آن دستگاهی است که با استفاده از چهارپایی که بازویی را می‌چرخانـــد، آب را از یـــک آبگیر به مکانی مرتفع می‌رساند.***

من شکل آن را می‌کشم (و طرز ساخت آن را بیان می‌کنم). آبگیری انتخاب می‌شود که در اینجا روی تصویر آن [حرف] «ا» [نوشته شده] است. دو پایهٔ محکم **«ک»** و **«ل»** بر آن نصب می‌شود. در قسمت بالای پایه‌ها محوری قرار دارد که دو انتهایش نصب شده است. فاصلهٔ بین هر دو میله حدود یک وجب کوچک است و بر آن **«ی»** [نوشته شده] است. همچنین روی این محور دنبالهٔ یک ملاقهٔ چوبی نصب شده که رویش **«م»** [نوشته شده] است. ظرفیت آن حدود سی رطل بغدادی از آب یا بیشتر از آن است. طول دنبالهٔ ملاقه از محور تا آبگیر است و به‌صورت راهگاهی است که وقتی ملاقه پر از آب از آبگیر بالا آید و کمی از سطح افقی بالاتر واقع شود، آب به درون دنبالهٔ ملاقه جاری می‌شود و از انتهای آن به درون یک مجرای آبیاری تخلیه می‌شود. روی ملاقه **«ط»** و بر انتهای دنبالهٔ آن **«ح»** [نوشته شده] است.

بالای این محور، محور دیگری با علامت **«ن»** قرار دارد که دو انتهایش در یاتاقان‌های مستقر بر امتداد بالایی پایه‌های «ک» و «ل» واقع است. روی این محور یک‌چهارم چرخ دندانه‌داری است که فاصلهٔ دندانه‌هایش برابر فاصلهٔ میله‌های چرخ **«ی»** است. بر این یک‌چهارم چرخ **«س»** [نوشته شده] است و در برابر چرخ **«ی»** قرار دارد. هر دندانه‌اش بین دو میله از چرخ **«ی»** واقع می‌شود. در انتهای محور **«ن»** چرخ دندانه‌دار **«ع»** قرار دارد که بین دندانه‌هایش دندانه‌های چرخی قرار گرفته که روی محوری عمودی نصب و رویش **«ز»** [نوشته شده] است. بالای محور نزدیک یک بازو، زایدهٔ **«و»** قرار دارد. روی بازو [حرف] **«ج»** و در انتهای بازو، بندی (رباط) است که به جلو چهارپایی که بر آن حرف **«هـ»** [نوشته شده] است، متصل است. این تصویر آن است.



کاملاً روشن است که وقتی حیوان بازو را می‌چرخاند، این بازو چرخ **«ز»** را می‌گرداند و در نتیجه چرخ **«ع»** و یک‌چهارم چرخ **«س»** به چرخش درمی‌آیند و چرخ میله‌دار **«ی»** [نیز] به دوران درمی‌آید؛ ملاقهٔ **«ط»** که در آب فرو رفته بود، پر از آب بالا می‌آید. با کامل شدن یک‌چهارم چرخش محور، کفهٔ ملاقه بالاتر از سطح افق قرار می‌گیرد و آب آن به درون دنباله‌اش جریان می‌یابد و از انتهای **«ح»** به درون یک مجرای آبیاری واقع در آن مکان تخلیه می‌شود. در این هنگام دندانه‌های یک‌چهارم چرخ **«س»** به انتها می‌رسد و ملاقه با نیروی زیاد به سوی آبگیر به پایین باز می‌گردد و در درون آب غوطه‌ور می‌شود و تا محور **«ن»** سه‌چهارم یک دور را طی کند، به حال خود باقی می‌ماند و در پی آن اولین دندانهٔ یک‌چهارم چرخ **«س»** بین دو میلهٔ چرخ **«ی»** قرار می‌گیرد که در نتیجه آن را می‌چرخاند و کفهٔ ملاقه پر از آب را بالا می‌آورد تا دوران محور **«ن»** به اندازهٔ یک‌چهارم دور به اتمام برسد. کفهٔ ملاقه بالاتر از سطح افق قرار می‌گیرد و محتوای آن از طریق دنباله‌اش به درون مجرای آب جریان می‌یابد. یک‌چهارم دور کامل شده است و دندانه‌های **«س»** از بین میله‌های چرخ **«ی»** رها شده است.. در نتیجه کفه سنگینی می‌کند و به درون آبگیر سقوط می‌کند. تا حیوان می‌چرخد چنین خواهد بود. این بود آنچه می‌خواستیم به روشنی شرح دهیم.

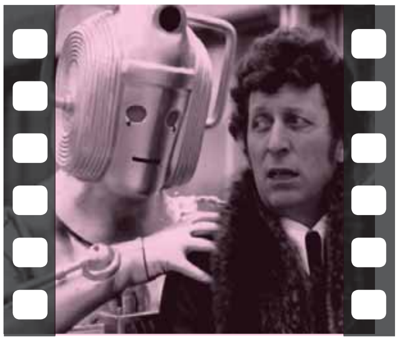
و در ادامهٔ کتاب، نویسنده به شرح دستگاه دوم نیز می‌پردازد.

من در کتاب‌های پیشینیان و کارهای متأخران، دربارهٔ دستگاه مکانیکی «اسباب‌الحیل» که دارای حرکاتی شبیه حرکات خودکار هستند، بررسی کردم و در استدلال‌های ارائه شده در مقالات تفکر نمودم، مدتی به این صنعت پرداختم و با کار کردن در آن، از مرحلهٔ شناخت خبری به مرحلهٔ مشاهده و

شناخت عملی رسیدم. دریافتم هر علم که با صناعت کار دارد، اگر در عمل مورد بررسی قرار نگیرد، در درستی یا نادرستی آن تردید وجود خواهد داشت. پس بخش‌هایی از کارهای آنان را گرد آوردم و متونی لطیف استنباط نمودم که به آسانی می‌توان به آن‌ها راه یافت. در حد توان نیرو صرف کردم و کتابی را برای ترمیم از هم‌گسیختگی‌ها تألیف کردم و اصولی که از آن‌ها فروعی را استنتاج نمودم و دستگاه‌هایی را اختراع کردم. به کرم اهل علم که بر این موضوع آگاهی می‌یابند امیدوار هستم (مقدمهٔ کتاب‌الجامع بین العلم و العمل).

در اوایل دورهٔ مدرن زندگی بشر، دانشمندانی مانند **گالیله**، **کپلر** و **نیوتن** پایه و اساس آنچه را که در حال حاضر به‌عنوان «مکانیک کلاسیک» شناخته شده است، بنا نهادند. علم مکانیک به‌عنوان شاخه‌ای از علم که به حرکت و نیروهای وارد بر اشیا می‌پردازد، تعریف می‌شود. برخی از کارشناسان این حوزه، مهندسی مکانیک را از نقطه نظر تنوع موضوعات تحت پوشش، جامع‌ترین مهندسی به شمار می‌آورند. چون مهندسی مکانیک در برگیرندهٔ تمامی علوم و فنونی است که با تولید، تبدیل و استفاده از انرژی، ایجاد و تبدیل حرکت و انجام کار، تولید و ساخت قطعات و ماشین‌آلات و به‌کارگیری مواد متفاوت در ساخت آن‌ها، و همچنین طراحی و کنترل سیستم‌های مکانیکی، حرارتی و سیالات مرتبط است. پس از مکانیک و مهندسی مکانیک شاخه‌ای جدید از این علم به نام «علم رباتیک» شکل گرفت.

کلمهٔ ربات مانند کلمهٔ ماشین کلمه‌ای کلی است و به چند مورد خاص خلاصه نمی‌شود. به‌عنوان نمونه، بازوهای ربات‌های صنعتی، ربات کنترل چاه‌های نفت، ربات‌های مخصوص با کاربردهای متنوعی مثل جابه‌جایی و حمل مواد،



ماشین‌کاری، جوش‌کاری، مونتاژ و انجام تعمیرات، دستگاه‌های کار کردن در جاهای پرخطر مثل نیروگاه‌های نفتی به جای انسان، ربات‌های جراحی و سایر خدمات پزشکی، پرستار مکانیکی، ربات‌های کار در میدان‌های جنگی به‌صورت سربازهای مصنوعی و ادوات دفاعی و تهاجمی، خدمتکار مصنوعی در رستوران‌ها و بسیاری از موارد از این دست، فقط نمونه‌هایی از انواع پرشمار ربات هستند که امروزه در زندگی بشر حضور پررنگ و ضروری پیدا کرده‌اند.

کتاب جزری از دیدگاه هنری نیز حائز اهمیت و در خور توجه است. مینیاتورهای زیبای آن از علل شهرت آن در غرب بوده است. **کوماراسوامی**[۲] پژوهشگر تاریخ هنر، رسالهٔ خود را دربارهٔ این کتاب از دید هنری نوشته و دربارهٔ مینیاتور[های] آن اطلاعات در خور توجهی داده است.

به نوشتهٔ هیل، کتاب جزری مهم‌ترین رسالهٔ مهندسی به عربی است و تا پیش از دورهٔ نوزایی یا رنسانس، هیچ سندی از هیچ قلمروی فرهنگی وجود ندارد که محتوایی چنین غنی دربارهٔ چگونگی طراحی، ساخت و سوار کردن اجزای دستگاه‌ها داشته باشد.

در حدود سال ۵۶۸ شمسی، یعنی حدود ۲۶ سال پس از درگذشت جزری، مغولان به منطقهٔ دیار بکر حمله کردند، اما کتاب جزری ماندگار شد. تعداد نسبتاً فراوان نسخه‌های به جا مانده از کتاب جزری، نشان از اهمیت این اثر دارد. در هر قرن، نسخه‌های متعددی از این کتاب نوشته شده‌اند که امروزه در کشورهای مختلف نگهداری می‌شوند. در قرن ششم هجری، جزری که مهندس مکانیک برجسته‌ای بود، در کتاب خود وسایل و ابزارهای مکانیکی ابتکاری، از جمله ماشین وضو یا ماشین شست‌وشوی دست و صورت را توضیح داده است. با بررسی این ماشین می‌توان دید که کارکرد آن چقدر دقیق و هنرمندانه است و در آن از شیر آب و حوضچهٔ دست‌شوی امروزی استفاده شده است. ماشین وضوی جزری متحرک بود و در مهمانی‌ها آن را به حضور مهمان می‌آوردند.

مسلمانان برای دسترسی به آب براساس دانش خویش و یافته‌های دیگر تمدن‌ها، فناوری‌های نوینی چون احداث مجرا و ذخیره و بالا آوردن آب را ابداع کرده‌اند و با ترکیب هوشمندانهٔ ابزارهای موجود و دانش خود و ملل دیگر، ابزارهای مفید تازه‌ای ساخته‌اند. جزری طرح ابزاری هوشمندانه را برای بالا کشیدن مقدار زیاد آب از دل زمین تهیه کرد و نخستین کسی بود که از میل‌لنگ برای برقراری ارتباط میله‌ها بهره گرفت. میل‌لنگ به‌عنوان بخشی از ماشین‌ها تا قرن نهم هجری در اروپا شناخته شده نبود و با اختراع آن، انقلابی در مهندسی آغاز شد.

پی‌نوشت‌ها

۱. نام اصلی این کتاب «الجامع بین‌العلم و العمل النافع فی صناعئ الحیل» است که معادل فارسی واژه به واژهٔ آن «دانستنی‌هایی در رابطه با سازوکارهای هوشمند» می‌شود و در ایران با عنوان «مبانی نظری و عملی مهندسی مکانیک در تمدن اسلامی» به فارسی برگردان شده است.

2. Coomaraswamy

بخش‌پذیری بر عدد ۷

محمد طبیعی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

اشاره

این مقاله ترجمهٔ مقالهٔ «بخش‌پذیری بر هفت» به قلم جرمی تاتوم (Jeremy Tatum) است. در این مقالهٔ کوتاه ابتدا یک شـــیوهٔ جدید برای بررسی بخش‌پذیری یک عدد بر ۷ ارائه شده و در انتها از خوانندگان خواسته شده است این شیوهٔ بررسی بخش‌پذیری را اثبات کنند.

اغلـــب ما آزمون‌هـــای بخش‌پذیری بر اعـــداد ۲، ۳ یا ۵ و حتی ۱۱ را می‌دانیـــم. اما از آنجا که آزمـــون بخش‌پذیری بر عدد ۷ کمی پیچیده و دشوار است، آن را به خاطر نمی‌سپاریم. در این مقاله سعی داریم شـــیوهٔ جدید و به نسبت ساده‌ای برای بررسی بخش‌پذیری بر ۷ شـــرح دهیم. کلید این آزمون عدد ۵۴۶۲۳۱ است که خودش بر ۷ بخش‌پذیر است. در حقیقت این عدد به‌صورت ۳۷×۳۷×۱۹×۷×۳ تجزیه می‌شود. حال به بیان این روش می‌پردازیم:

فرض کنید می‌خواهیم بخش‌پذیری عدد ۶۰۶۵۵۳۴۱۳۹ را بر ۷ بررسی کنیم. ابتدا زیر این عدد و از سمت راست ارقام عدد ۵۴۶۲۳۱ را به‌صورت متناوب می‌نویسیم:

۶ ۰ ۶ ۵ ۵ ۳ ۴ ۱ ۳ ۹
۶ ۲ ۳ ۱ ۵ ۴ ۶ ۲ ۳ ۱

ســـپس حاصل‌ضرب هر دو عددی را که در یک ســـتون واقع‌اند پیدا می‌کنیم:

۳۶ ۰ ۱۸ ۵ ۲۵ ۱۲ ۲۴ ۲ ۹ ۹

اکنون این عددها را با هم جمع می‌کنیم که برابر می‌شـــود با ۱۴۰. چنانچه این حاصل‌جمع (یعنی ۱۴۰) بر ۷ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه عدد اصلی هم بر ۷ بخش‌پذیر اســـت. اگر مطمئن نیستید که ۱۴۰ بر ۷ بخش‌پذیر اســـت، کافی است این فرایند را بار دیگر تکرار کنید:

۱ ۴ ۰
۲ ۳ ۱
۲ ۱۲ ۰

مجموع عددهای فوق ۱۴ است و اگر هنوز هم از بخش‌پذیری ۱۴ بر ۷ اطمینان ندارید، یک بار دیگر این کار را تکرار می‌کنیم:

۱ ۴
۳ ۱
۳ ۴

این مجموع برابر ۷ است. لذا عدد اصلی (مانند ۱۴۰ و ۱۴) بر ۷ بخش‌پذیر است.

برای تمرین این روش می‌توانید آن را روی عدد زیر امتحان کنید.

۶۹۸۶۶۴۸۰۸۸۴۹۵۵۷۶۶۱۹۷۲۹۳۴۴۳۷۲۳۰۷۵۷۹۹۱۱

در پایـــان از شـــما می‌خواهیم به ســـؤالات زیر پاســـخ دهید و جواب‌های خودتان را برای ما ارسال کنید.

۱. علت درستی این آزمون بخش‌پذیری را بیان کنید.

۲. آیـــا می‌توانید عدد دیگری (مشـــابه ۵۴۶۳۲۱) که دارای این خاصیت باشد، پیدا کنید؟

۳. آیـــا برای هر عدد اول مانند P می‌توان چنین عددی را یافت؟ در صورت وجود آیا این عدد یکتاست؟

۴. در صورت وجود چنین عددی برای عدد اول P (P>7)، نشان دهید این عدد حداکثر P-1 رقم دارد.

لنگه جوراب

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

همهٔ ما بارها به این مشکل برخورد کرده‌ایم که عجله داریم و سراغ کشوی جوراب‌ها می‌رویم و یک لنگه جوراب را برمی‌داریم. بعد برای لنگهٔ دوم مجبوریم کل جوراب‌ها را از کشو بیرون بیاوریم و تمام‌مدت هم از بدشانسی گله می‌کنیم. آیا بدشانس هستیم یا اینکه واقعیت همین است؟

برای بررسی موضوع چند حالت متفاوت را در نظر می‌گیریم:

یک حالت اینکه ۳ جفت جوراب سفید یک شکل و ۲ جفت جوراب سیاه یک شکل داشته باشیم. با توجه به اینکه لنگهٔ چپ و راست جوراب فرقی ندارد، بنابراین ۴ لنگه جوراب سیاه و ۶ لنگه جوراب سفید در کشو موجود است. این موضوع که دو لنگه جوراب را یکباره برداریم یا در دو مرحله فرقی ندارد. بنابراین فرض می‌کنیم دو لنگه جوراب را با هم برداریم.

در این صورت اگر x را تعداد لنگه جوراب‌های سفید در نظر بگیریم، جدول ۱ را برای توزیع احتمال آن خواهیم داشت.

جدول ۱. توزیع احتمال تعداد جوراب‌های سفید

x	۰	۱	۲
P(x)	$\frac{\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{6}{45}$	$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}$	$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}$

با مشاهدهٔ نتایج جدول به این نتیجه می‌رسیم که حالت جوراب‌های لنگه‌به‌لنگه ۲۴ مورد است که از مجموع حالت‌های مناسب که ۲۱ مورد است، بیشتر است. پس در این مورد لنگه‌به‌لنگه شدن جوراب‌ها امری طبیعی است و بدشانسی وجود ندارد.

به‌عنوان حالت دوم فرض می‌کنیم که در کشو ۳ جفت جوراب سفید، ۴ جفت جوراب قهوه‌ای و ۵ جفت جوراب مشکی وجود دارد. از این کشو دو لنگه جوراب برمی‌داریم. x را تعداد جوراب‌های سفید و y را تعداد جوراب‌های سیاه در نظر می‌گیریم. در جدول ۲ همهٔ حالت‌های ممکن بیان شده‌اند.

جدول ۲

	۰	۱	۲
۰	$\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{0}\binom{4}{1}}{\binom{20}{2}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{6}{0}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}}$
۱	$\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{20}{2}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}}$	$\otimes$
۲	$\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}}$	$\otimes$	$\otimes$

با محاسبهٔ مقادیر جدول ۲ به جدول ۳ می‌رسیم.

جدول ۳

	۰	۱	۲
۰	$\frac{6}{190}$	$\frac{40}{190}$	$\frac{45}{190}$
۱	$\frac{24}{190}$	$\frac{60}{190}$	$\otimes$
۲	$\frac{15}{190}$	$\otimes$	$\otimes$

با بررسی عددهای جدول ۳ حالت‌های لنگه‌بلنگه به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P(\text{لنگه‌بلنگه}) = P(0,1)+P(1,0)+P(1,1)$$

$$=\frac{24}{190}+\frac{40}{190}+\frac{60}{190}=\frac{124}{190}$$

بنابراین باز هم لنگه‌بلنگه بودن جوراب‌ها امری طبیعی است و بدشانسی در کار نیست. حالت‌های دیگری هم می‌توان در نظر گرفت. برای بررسی بیشتر فرض می‌کنیم m لنگهٔ سیاه و n لنگهٔ سفید جوراب داشته باشیم. در این صورت احتمال لنگه‌بلنگه شدن به صورت $\frac{mn}{\binom{m+n}{2}}$ خواهد بود که در جدول ۴ خلاصه شده است.

جدول ۴

	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
۲	۰/۶۶۶	۰/۵۳۳	۰/۴۲۸	۰/۳۵۵	۰/۳۰۳	۰/۲۶۳
۴	۰/۵۳۳	۰/۵۷۱	۰/۵۳۳	۰/۴۸۴	۰/۴۳۹	۰/۴
۶	۰/۴۲۸	۰/۵۳۳	۰/۵۴۵	۰/۵۲۷	۰/۵	۰/۴۷۰
۸	۰/۳۵۵	۰/۴۸۴	۰/۵۲۷	۰/۵۳۳	۰/۵۲۲	۰/۵۰۵
۱۰	۰/۳۰۳	۰/۴۳۹	۰/۵	۰/۵۲۲	۰/۵۲۶	۰/۵۱۹
۱۲	۰/۲۶۳	۰/۴	۰/۴۷۰	۰/۵۰۵	۰/۵۱۹	۰/۵۲۱

با توجه به جدول ۴ از ۳۶ حالت ۲۰ حالت احتمال لنگه‌بلنگه شدن بیشتر از نصف است. بنابراین با توجه به اینکه کسی نیست که مثلاً ۲۰ جفت جوراب داشته باشد یا اینکه چنین شخصی کمتر پیدا می‌شود، نتیجه می‌گیریم که در حالت طبیعی لنگه‌بلنگه بودن جوراب‌ها اتفاقی عادی است. حال با توجه به جدول می‌توانیم حالت‌های بهتر را انتخاب کنیم.

اما با توجه به جدول می‌بینیم که وقتی تعداد جوراب‌های دو رنگ مساوی است. احتمال لنگه‌بلنگه‌شدن بیشتر از نیم است. حال این موضوع را ثابت می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}}>\frac{1}{2}$$

فرض می‌کنیم رابطه درست باشد. به روش بازگشتی آن را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}}=\frac{2n^2}{2n(2n-1)}=\frac{n^2}{2n^2-n}>\frac{1}{2}$$

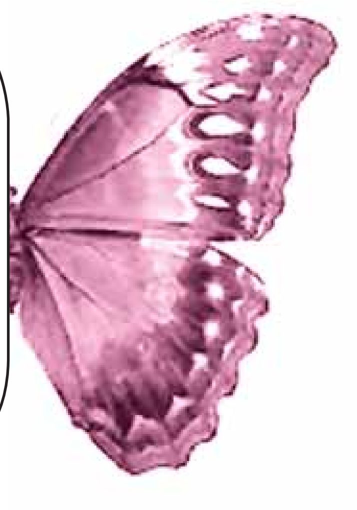
$$\Rightarrow 2n^2>2n^2-n\Rightarrow n>0$$

در صورت نیاز می‌توان مسئله را در حالت کلی بررسی کرد. به این منظور باید نامعادله

$$\frac{mn}{\binom{m+n}{2}}>\frac{1}{2}$$

را برحسب m یا n حل کرد.

تقارن در شکل‌های متناهی



اشاره

در این مقاله به بررسی مفهوم تقارن از دیدگاه ریاضی می‌پردازیم. روشی ارائه می‌شود که می‌توان آن را در تعیین گروه تقارن یک شکل هندسی متناهی با استفاده از تقارن‌های آن شکل به‌کار برد.

مقدمه

در این مقاله به دنبال ردپای ریاضی در پدیده‌های زیبا هستیم.[1] حس ما از زیبایی بر توازن و هارمونی استوار است. به نظر شما چه چیز باعث می‌شود منظرهٔ تصویر ۱ یا دانهٔ برف تصویر ۲ زیبا به نظر برسند؟

تصویر ۱

تصویر ۲.

پاسخ «تقارن» است. **افلاطون** معتقد است که: «قوانین ریاضی حاکم بر طبیعت منشأ تقارن در طبیعت هستند»

مقداد قاری

دانشگاه اصفهان

دانشکده ادبیات و علوم انسانی

گروه فلسفه

[weyl,1952]. به تازگی روان‌شناسان پی برده‌اند، یکی از قسمت‌های مهمی که باعث زیبایی انسان می‌شود، تقارن صورت است. مردم بیشتر صورت‌هایی را دوست دارند که نه زیاد لاغر باشد و نه زیاد چاق و نه زیاد... بلکه متعادل و متقارن باشند. نظرتان در مورد صورت تصویر ۳ چیست؟

تصویر ۳.

این صورت به وسیلهٔ **لنگلویس**[2] با استفاده از رایانه ساخته شده است. این صورت که میانگین ۳۲ صورت واقعی است، کاملاً متقارن است.[3] بنابراین شاید عشق به تقارن در اصل در طبیعت ما وجود دارد.

تقارن در ریاضی

واژهٔ «symmetry» از واژهٔ یونانی «Σύμμετρος» در اصل به معنای «proportionate» (متناسب) و «commensurable» (دارای اندازهٔ مشترک) گرفته شده است. در ادامه تعریف ریاضی تقارن را یادآوری می‌کنیم.

وقتی واژه تقارن را می‌شنویم، بیشتر تعادل دو جانبه (تعادل چپ و راست) به ذهن خطور می‌کند. چنین تقارنی را نه‌تنها در صورت بلکه در بدن انسان نیز می‌توان مشاهده کرد (شکل ۱). بدن ما نسبت به صفحه‌ای که از مرکز آن می‌گذرد، متقارن است.

شکل ۱

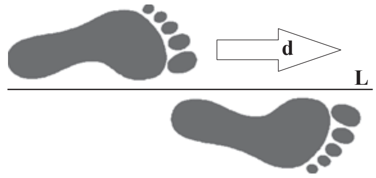
با چنین نگاهی به تقارن فوراً معادل ریاضی این مفهوم یعنی «انعکاس» مطرح می‌شود. آیا تنها شکل‌هایی که دارای تقارن انعکاسی (آینه‌ای) هستند، متقارن به نظر می‌آیند؟ با دیدن شکل ۲ باز هم احساسی از تقارن در ما به وجود می‌آید. در حالی‌که این شکل تقارن انعکاسی ندارد، ولی با یک دوران (به اندازهٔ ۷۲ درجه) دوباره روی خود قرار می‌گیرد.

شکل ۲

این‌ها نمونه‌های اولیهٔ تقارن هستند که با آن‌ها مواجه می‌شویم. بعداً می‌بینیم که انعکاس و دوران تنها تقارن‌های شکل‌های متناهی‌اند.

دیدیم که بعضی شکل‌ها به این دلیل متقارن هستند که با یک انعکاس یا دوران روی خود قرار می‌گیرند. مهم‌ترین وجه اشتراک انعکاس و دوران این است که فاصلهٔ دو نقطه از شکل پس از تبدیل ثابت باقی می‌ماند. به چنین تبدیل‌هایی «طولپا» یا «ایزومتری»[۴] گفته می‌شود. یک *تبدیل ایزومتری* (یا به‌طور خلاصه ایزومتری) نگاشتی است از صفحهٔ اقلیدسی به روی خودش، به طوری که حافظ طول باشد. برای مثال، انتقال یک ایزومتری است، در حالی‌که تجانس ایزومتری نیست.

ریاضی‌دانان از سال ۱۸۳۱ می‌دانستند که هر ایزومتری به یکی از این چهار نوع است: دوران حول یک نقطه، انتقال در یک جهت مفروض؛ انعکاس نسبت به یک خط مفروض (خط انعکاس)؛ و لغزه. دوران‌هایی به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{n}$ را دوران‌های n- تایی می‌نامند. مثلاً دوران به اندازهٔ ۹۰ درجه یک دوران ۴-تایی است. لغزه ترکیبی است از یک انعکاس نسبت به خط L و یک انتقال در جهت d موازی با L. شکل ۳ را ببینید.



شکل ۳

همان‌طور که می‌دانیم، یک *تقارن* از شکل T، تبدیل ایزومتری چون f است، به طوری که T را به خودش تبدیل کند؛ یعنی: $f(T)=T$. به عبارت ساده، تصور کنید که شکل T را روی کاغذی رسم کرده‌ایم. حال کاغذی شفافی روی آن قرار دهید و شکل T را روی آن کاغذ شفاف چاپ کنید. یک تقارن شکل T متناظر است با حرکت کاغذ شفاف به طوری که بعد از حرکت شکل T روی کاغذ شفاف دقیقاً روی شکل T قرار گیرد.

برای هر شکل T، مجموعهٔ همهٔ تقارن‌های T را با S(T) نمایش می‌دهیم و آن را گروه تقارن‌های T می‌نامیم. (مفهوم گروه در ادامه تعریف خواهد شد). برای مثال، «نگاشت همانی»، که هر نقطه از صفحه را به خودش تصویر می‌کند، یک تقارن است. نگاشت همانی یک تقارن برای هر شکل T است. اما شکلی را می‌توان متقارن نامید که دارای یک تقارن به غیر از نگاشت همانی باشد. مثلاً شکل ۴ را ببینید.

شکل ۴

شکل ۴ به وضوح متقارن نیست، ولی دارای یک تقارن (یعنی همان نگاشت همانی) است. حال به شکل ۵ دقت کنید. این شکل متقارن است، زیرا به غیر از نگاشت همانی دارای انعکاس (یا دوران به اندازهٔ ۱۸۰ درجه) نیز هست. پس شکلی را «متقارن»[۵] می‌نامیم که دارای یک تقارن به غیر از نگاشت همانی باشد.

شکل ۵

در انتها مفهوم «گروه»[۶] را به اختصار تعریف می‌کنیم.[۷]

یک گروه سه‌تایی به‌صورت (G,o,e) است که در آن G یک مجموعهٔ غیرتهی، o یک عملگر دوتایی و e (عضو خنثی) عضوی از G است، به طوری که در خواص زیر صدق کنند:

۱. $(\forall x, y, z \in G)(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

۲. $(\forall x \in G) x \circ e = e \circ x = x$

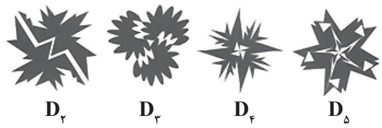
۳. $(\forall x \in G)(\exists y \in G) x \circ y = y \circ x = e$

برای مثال، عددهای صحیح به همراه عمل جمع و عدد صفر به‌عنوان عضو خنثی (Z,+,o)، اعداد حقیقی به همراه عمل ضرب و عدد یک به‌عنوان عضو خنثا (R,x,۱)، و مجموعهٔ همهٔ توابع به همراه عمل ترکیب توابع و تابع همانی به‌عنوان عضو خنثا (F,o,Id) تشکیل گروه می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ همهٔ تقارن‌های یک شکل T، یعنی S(T)، به همراه عمل ترکیب توابع و تابع همانی Id به‌عنوان عضو خنثا (S(T),o,Id) تشکیل گروهی می‌دهند که به آن «گروه تقارن»[۸] می‌گویند. در بخش‌های بعدی به رده‌بندی گروه‌های تقارن برای شکل‌های متفاوت می‌پردازیم (برای تعاریف دقیق‌تر و اثبات‌ها منابع شمارهٔ ۵ تا ۸ را ببینید).

شکل‌های متناهی

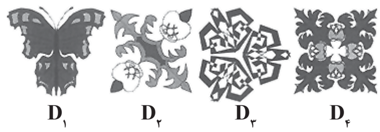
«شکل‌های متناهی»[۹] شکل‌هایی هستند که گروه تقارن آن‌ها شامل انتقال و لغزه نباشند. اگر گروه تقارن یک شکل متناهی دقیقاً شامل n دوران به اندازه‌های $\frac{۲\pi j}{n}$،

برای j=۰,۱,...,n-1 باشد، گروه تقارن آن را «گروه دوری»[10] از مرتبهٔ n نامیده و با C_n نشان می‌دهند. در شکل ۶ مثال‌هایی از شکل‌های متناهی با تقارن C_n نشان داده شده‌اند.



شکل ۶. شکل‌هایی با گروه تقارن دوری

اگر گروه تقارن یک شکل علاوه بر دوران‌های گروه C_n دارای n انعکاس نیز باشد، آن را «گروه دووجهی»[11] از مرتبهٔ ۲n می‌نامیم با D_n نشان می‌دهیم. در شکل ۷ مثال‌هایی از شکل‌های متناهی با تقارن D_n نشان داده شده است.



شکل ۷. شکل‌هایی با گروه تقارن دووجهی

ثابت می‌شود که تنها گروه‌های تقارن شکل‌های متناهی عبارت‌اند از: C_n و D_n. ادعا می‌شود که **لئوناردو داوینچی** اولین شخصی بوده که چنین رده‌بندی از گروه‌های تقارن شکل‌های متناهی را ارائه داده است. در زیر، فلوچارت۱ برای تشخیص گروه‌های تقارن یک شکل متناهی ارائه شده است.

شکل دارای دقیقاً n دوران به اندازه‌های j/n ۳۶۰ (برای j=۰ و ۱ و ... و n-1) است.	← Cn
شکل علاوه بر دوران‌های گروه Cn دارای n انعکاس است.	← Dn

فلوچارت ۱. تشخیص گروه‌های تقارن متناهی

گروه تقارن C_1 نشان‌دهندهٔ عدم تقارن شکل است، زیرا این گروه تنها شامل دوران صفر درجه (که همان نگاشت همانی است) است. گروه تقارن D_1 نشان‌دهندهٔ تقارن انعکاسی است، زیرا این گروه علاوه بر نگاشت همانی دارای یک انعکاس نیز هست. برای مثال تصویر ۴ را ببینید.

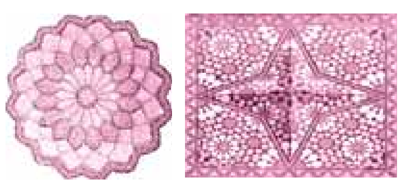
گلبرگ‌های گل شکل ۲ دارای گروه تقارن C_5 و بلور برف تصویر ۲ دارای گروه تقارن D_6 هستند.

تصویر ۴. شکل‌هایی با گروه تقارن D_1، به ترتیب از راست به چپ: آرم خانهٔ ریاضیات اصفهان، پروانه، سرستون تخت جمشید، (موزه لوور ـ پاریس)

گروه‌های C_n و D_n برای n بزرگ‌تر یا مساوی ۲ «گروه‌های رز»[12] نامیده می‌شوند (برای مثال تصویر ۵ را ببینید).

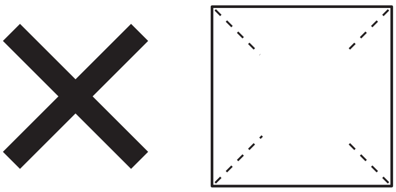
تصویر ۵. قسمتی از دیوار کاخ داریوش در شوش (موزه لوور ـ پاریس) با گروه تقارن رز D_{16}

n- ضلعی‌های منتظم و یا ستاره‌ای دارای گروه تقارن D_n هستند (تصویر ۶ را ببینید).

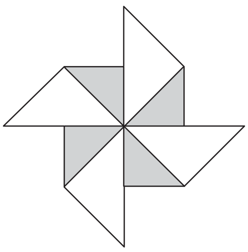


تصویر ۶. چهارضلعی ستاره‌ای با گروه تقارن D_4 (باغ ملی تهران)، بشقاب مینا با گروه تقارن D_{16}

در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است که چگونه می‌توان یک کاغذ مربع‌شکل یا یک علامت ضرب‌در با گروه تقارن D_4 را به شکل‌هایی با گروه تقارن C_4 تبدیل کرد.

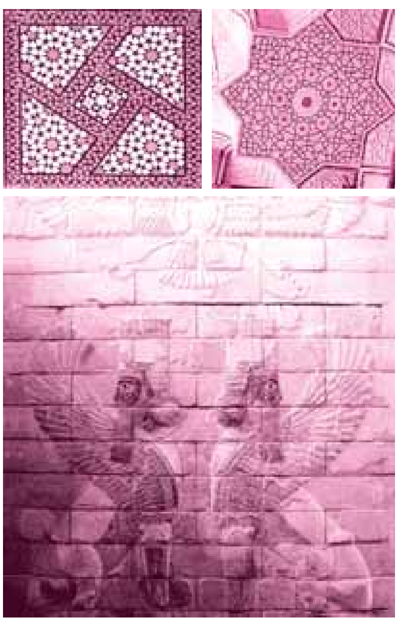


شکل ۸. کاغذ مربع شکل و علامت ضربدر با گروه تقارن D_4



شکل ۹. فرفره با گروه تقارن C_4

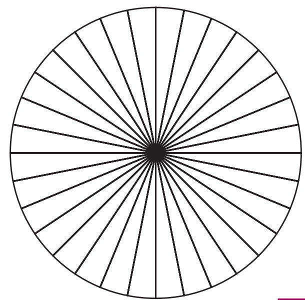
در تصویر ۷ الگوهایی در معماری به همراه گروه‌های تقارن آن‌ها نشان داده شده‌اند.



تصویر ۷. به ترتیب از راست به چپ: مقرنس مسجد جامع اصفهان با گروه تقارن D_8، بازار هنر اصفهان با گروه تقارن C_4، قسمتی از دیوار کاخ داریوش در شوش (موزه لوور ـ پاریس) با گروه تقارن D_1

به دلیل تقارن دورانی کاملی که در دایره و کره موجود است، فیثاغورثیان این شکل‌ها را کامل‌ترین شکل‌های هندسی می‌دانستند، و ارسطو شکل‌های کروی را به اجسام آسمانی نسبت می‌داد [weyl,1952:5].

گروه تقارن دایره که شامل بی‌نهایت دوران و انعکاس است با D_{∞} نشان داده می‌شود.



شکل ۱۰.

سخن آخر

در این مقاله به بررسی یکی از کاربردهای مبحث تقارن در آموزش ریاضی پرداختیم. محتوای این مقاله می‌تواند به‌صورت یک کارگاه برای دانش‌آموزانی که قبلاً با تبدیلات ایزومتری آشنایی دارند، اجرا شود (برای تمرین روی تبدیلات ایزومتری کارگاه توصیف شده در منابع شمارهٔ ۲ و ۳ نیز می‌تواند مفید باشد).

در هر نوبت یک شکل متناهی به دانش‌آموزان نشان داده می‌شود. دانش‌آموزانی که به گروه‌های متفاوت تقسیم شده‌اند، با استفاده از تقارن‌های مختلف شکل و فلوچارتی که در اختیارشان قرار گرفته است، باید نوع گروه تقارن شکل را بیابند. این کار می‌تواند بدون اینکه بحثی روی مفهوم و یا تعریف گروه صورت گیرد، انجام شود (در منبع شمارهٔ ۶ مفهوم گروه و گروه‌های تقارن به شیوه‌ای ساده برای دانش‌آموزان توضیح داده شده است).

همچنین می‌توان گروه تقارنی به دانش‌آموزان داد و از آن‌ها خواست تا شکلی با آن گروه تقارن رسم کنند. بعد از برگزاری این کارگاه، به‌عنوان یک فعالیت می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا گروه‌های تقارن متناهی الگوهای هندسی به‌کار رفته در محیط اطراف خود را پیدا کنند. این کارگاه از سال ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۱ بارها برای دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستان در خانهٔ ریاضیات اصفهان توسط نگارنده اجرا شده است. همچنین به‌عنوان یک فعالیت جذاب دانش‌آموزان می‌توانند از نرم‌افزارهای کار با گروه‌های تقارن استفاده کنند.

پی‌نوشت‌ها

۱. در اینجا می‌توان به نسبت طلایی، هندسه فرکتالی و غیره، و ارتباط آن‌ها با زیبایی اشاره کرد. ولی ما در این مقاله به این موضوع‌ها نمی‌پردازیم.

2. Judith Langlois
3. ر.ک: Buryland Starbird, 2010
4. Isometry
5. Symmetric
6. Group

۷. یان استیوارت در کتاب مفاهیم ریاضیات جدید می‌نویسد: هر جا که تقارنی وجود داشته باشد، نظریهٔ گروه‌ها نیز به میدان می‌آید. این نظریه ما را قادر می‌سازد که تقارن‌ها را بر حسب گروه زیر بنای آن‌ها تشریح کنیم.

8. Symmetry group
9. Finited figure
10. Cyclic group
11. Dihegral group
12. Rose group

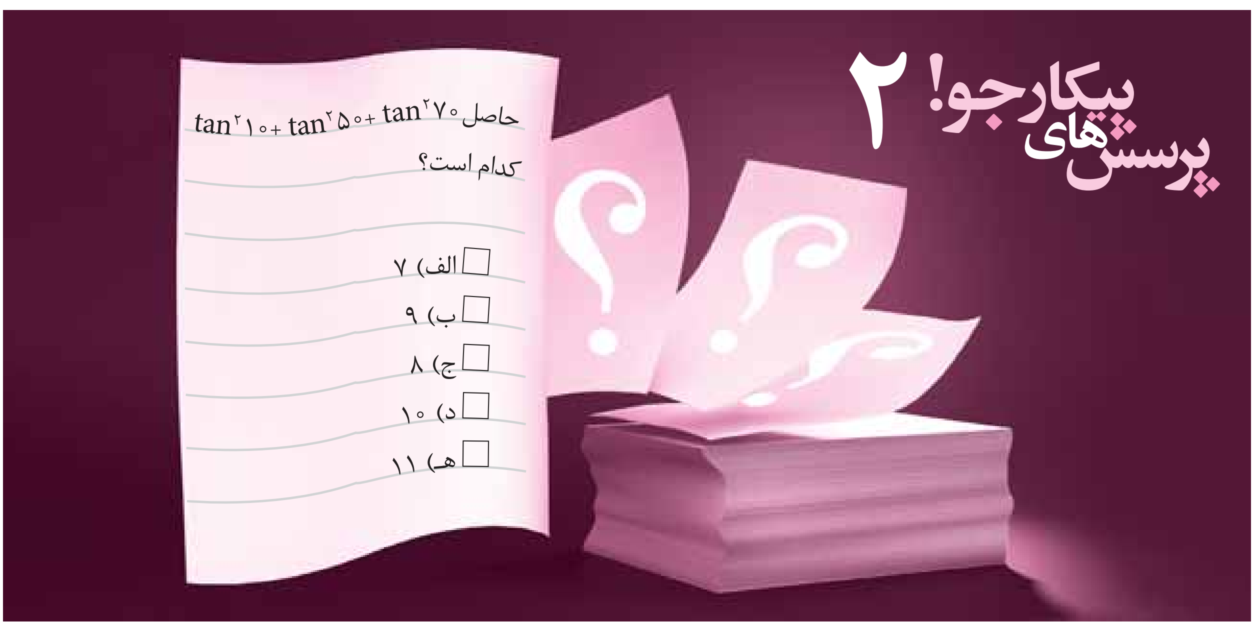
منابع

۱. استیوارت، یان (۱۳۶۳). **مفاهیم ریاضیات جدید**. ترجمهٔ جمشید پرویزی. انتشارات خوارزمی. تهران.

۲. قاری، مقداد (۱۳۹۳). «**کاشی‌کاری‌های اشر و تبدیلات هندسی (۱)**». مجلهٔ رشد برهان ریاضی (فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲). شمارهٔ ۸۳. پاییز.

۳. ـــــــ (۱۳۹۳). «**کاشی‌کاری‌های اشر و تبدیلات هندسی (۲)**». مجلهٔ رشد برهان ریاضی (فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲). دورهٔ ۲۴. شمارهٔ ۲. شمارهٔ پیاپی ۸۴. زمستان.

4. E. B, Burgerm M. Starbird, The Heart of Mathematics, An invitation to effective thinking, Third rdition, John Wiley & Sons, INC., 2010.
5. H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, (2nd edition) New York, Wiley 1969.
6. D. W. Farmer, Groups and Symmetry: A Guide To Discovering Mathematics, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
7. J. A. Gallian, Contemporary Abstract Algebra, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.
8. B. Grunbaum, G. C. Shephard, Tilings and Patterns, W. H. Freeman and company, 1987.
9. H. Weyl, Symmetry, Princton University Press, 1952.



حمیدرضا امیری

توابع کَف و سقف

فرض کنیم x عددی حقیقی باشد. در این صورت x بین دو عدد صحیح قرار می‌گیرد که کَف و سقفِ x نامیده می‌شوند.

به‌ویژه: $\lfloor x \rfloor$ کفِ x نامیده می‌شود و بزرگ‌ترین عدد صحیحی را که از x بزرگ‌تر نباشد، نشان می‌دهد. (اولین عدد صحیح کوچک‌تر از x را نشان می‌دهد.)

$\lceil x \rceil$ سقفِ x نامیده می‌شود و کوچک‌ترین عدد صحیحی را که از x کوچک‌تر نباشد، نشان می‌دهد. (اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از x را نشان می‌دهد.)

اگر x خودش یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه: $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$. در غیر این صورت داریم: $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + ۱$.

برای مثال:

$$\lfloor ۳/۱۴ \rfloor = ۳, \lfloor \sqrt{۵} \rfloor = ۲, \lfloor -۸/۵ \rfloor = -۹, \lfloor ۷ \rfloor = ۷, \lfloor -۴ \rfloor = -۴$$

$$\lceil ۳/۱۴ \rceil = ۴, \lceil \sqrt{۵} \rceil = ۳, \lceil -۸/۵ \rceil = -۸, \lceil ۷ \rceil = ۷, \lceil -۴ \rceil = -۴$$

توابعِ صحیح و قدرمطلق

فرض کنیم x عددی حقیقی باشد. مقدار صحیح x چنین نوشته می‌شود: INT(x). برای تبدیل x به عدد صحیح بخش کسری آن را حذف می‌کنیم. بنابراین:

$$INT(۳/۱۴) = ۳, INT(\sqrt{۵}) = ۲, INT(-۸/۵) = -۸, INT(۷) = ۷$$

ملاحظه‌می‌کنید‌که: $INT(x) = \lfloor x \rfloor$ یا $INT(x) = \lceil x \rceil$؛ برحسب اینکه x مثبت یا منفی باشد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Floor .... کف
2 . Ceiling .... سقف
3.Specifically .... به‌ویژه
4. Between .... بین
5. Greatest .... بزرگ‌ترین
6. Least .... کوچک‌ترین
7.Integer .... صحیح
8.Absolute Value .... قدرمطلق
9. Convert .... تبدیل
10. Fractional .... کسری

Floor and Ceiling Functions

Let *x* be any real number. Then *x* lies between two integers called the floor and the ceiling of *x*. Specifically,

$\lfloor x \rfloor$ called the floor of *x*, denotes the greatest integer that does not exceed *x*.

$\lceil x \rceil$ called the ceiling of *x*, denotes the least integer that is not less than *x*.

If *x* is itself an integer, then $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$; otherwise $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$. For example,

$$\lfloor 3/14 \rfloor = 3, \lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2, \lfloor -8/5 \rfloor = -9, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lfloor -4 \rfloor = -4$$
$$\lceil 3/14 \rceil = 4, \lceil \sqrt{5} \rceil = 3, \lceil -8/5 \rceil = -8, \lceil 7 \rceil = 7, \lceil -4 \rceil = -4$$

Integer and Absolute Value Functions

Let *x* be any real number. Then integer value of *x*, written INT(*x*), converts *x* into an integer by deleting (truncating) the fractional part of number. Thus

$$\mathrm{INT}(3/14) = 3, \mathrm{INT}(\sqrt{5}) = 2, \mathrm{INT}(-8/5) = -8, \mathrm{INT}(7) = 7$$

Observe that $\mathrm{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$ or $\mathrm{INT}(x) = \lceil x \rceil$ according to whether x is positive or negative.

ترجمه برای دانش‌آموزان

The absolute value of the real number *x*, written ABS(*x*) or |*x*|, is defined as the greater of *x* or -*x*. Hence ABS(0)=0, and, for $x \neq 0$, ABS(*x*)=*x* or ABS(*x*)=-*x*, depending on whether *x* is positive or negative. Thus

$$|-15| = 15, \ |7| = 7, \ |-3.33| = 3.33,$$
$$|4.44| = 4.44, \ |-0.075| = 0.075$$

We note that |*x*|=|-*x*| and, for $x \neq 0$, |*x*| is positive.

آموزشی

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۴۱. کوچک‌ترین عدد دو رقمی را پیدا کنید که برابر مجموع مکعب یک رقم خود و مربع رقم دیگر باشد.

۳۴۲. A، B و C معرف سه رقم متفاوت هستند و داریم: $\overline{BACC}+\overline{AABB}=\overline{CCBA}$. ارقام را مشخص کنید.

۳۴۳. در بازهٔ ۱۰۰ تا ۴۰۰ چند توان کامل (مربع، مکعب و...) وجود دارد؟

۳۴۴. ۱۳۹۶-امین رقم بعد از اعشار عدد $\frac{1}{14}$ چقدر است؟

۳۴۵. ثابت کنید، رقم یکان $3^n \times 7^{n+1}$ برای هر عدد طبیعی n، مقدار ثابتی است.

۳۴۶. n عددی چهار رقمی است با ارقام متمایز، به‌طوری که ۹n نیز چهاررقمی است و ارقام آن همان ارقام n هستند با ترتیب عکس، n را بیابید.

۳۴۷. همهٔ عددهای صحیح x را پیدا کنید، به‌طوری که x^2+3 بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۳۴۸. کوچک‌ترین عدد طبیعی $n\neq 1$ را پیدا کنید، به‌طوری‌که $1+2+...+n$ مربع کامل باشد.

۳۴۹. **علی** می‌گوید 2^{x^2} برابر نیست با $(2^x)^2$. **رضا** می‌گوید ممکن است برابر باشند. کدام‌یک درست می‌گویند؟ به ازای چه مقادیری از x، این دو عدد برابر هستند؟

۳۵۰. a و b دو عدد طبیعی هستند، به‌طوری که: $a^2+24=b^2$. بیشترین مقدار a+b را بیابید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۳۱۱. عدد گویای r را بیابید، به‌طوری که:

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\pi r$$

با فرض $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\alpha$

داریم:

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\alpha-\tan^{-1}\frac{2}{9}.$$

از دو طرف تانژانت می‌گیریم:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=\frac{\tan\alpha-\frac{2}{9}}{1+\frac{2}{9}\tan\alpha}$$

با ساده کردن تساوی مقدار tanα به‌دست می‌آید که برابر است با ۱. بنابراین: $\alpha=\frac{\pi}{4}$ و $r=\frac{1}{4}$.

۳۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2}+\ldots+\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}<\frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}=\tan^{-1}\frac{(n+1)-n}{1-n(n+1)}$$
$$=\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}(n)$$

در نتیجه:

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\ldots+\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}$$
$$=(\tan^{-1}2-\tan^{-1}1)+(\tan^{-1}3-\tan^{-1}2)$$
$$+\ldots+(\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}(n))=\tan^{-1}(n+1)-\frac{\pi}{4}$$

چون: $\tan^{-1}(n+1)<\frac{\pi}{2}$، پس حاصل عبارت از $\frac{\pi}{4}$ کمتر است.

۳۱۳. مقادیر a، b و c را بیابید، به‌طوری که برای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ داشته باشیم:

$$f(0)=f(1)=f(2)=1396$$

با جای‌گذاری مقدارهای ۰، ۱ و ۲ در ضابطهٔ تابع به دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر می‌رسیم:

$$c=1396,\ a+b+c=1396,\ 4a+2b+c=1396$$

با حل این دستگاه به جواب‌های $c=1396$ و $b=0$ و $a=0$ می‌رسیم.

بنابراین: $f(x)=1396$.

۳۱۴. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases}x^2=y-\frac{1}{4}\\ y^2=x-\frac{1}{4}\end{cases}$$

با جمع دو رابطه خواهیم داشت:

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}=0$$

در نتیجه: $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=0$.

بنابراین: $x=y=\frac{1}{2}$.

۳۱۵. چند تابع f از A={۱،۲،۳،۴} به A می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که:

الف) f(۲)>f(۳)

ب) f(۱) ≠ f(۲)

ج) برد تابع مجموعه‌ای دوعضوی باشد.

ابتدا مسئله را در سه حالت جداگانه حل کنید. سپس در حالتی مسئله را حل کنید که سه شرط را با هم در نظر می‌گیرید.

۱) ابتدا دو مقدار برای f(۲) و f(۳) انتخاب می‌کنیم ($\binom{4}{2}$ انتخاب) که مقدار بزرگ‌تر f(۲) و مقدار کوچک‌تر f(۳) است. برای f(۱) و f(۴) نیز چهار انتخاب داریم. در نتیجه $N_1=6\times4^2=96$ انتخاب وجود دارد.

۲) بـرای $f(۱)$، چهار انتخاب و برای $f(۲)$، سه انتخاب و برای $f(۳)$ و $f(۴)$ هر کدام چهار انتخاب داریم. در نتیجه در کل $N_۱=۴^۳×۳$ تابع وجود دارد.

۳. ابتدا ۲ عضو انتخاب می‌کنیم ($\binom{۴}{۲}$ انتخاب). سپس برای هر عضو A، ۲ انتخاب داریم. در نتیجه $N_۱=۶×۴^۲$ انتخاب وجود دارد. اما از $۲^۴$ انتخاب برای مقدار تابع دو حالت قابل قبول نیست. در نتیجه تعداد توابع برابر است با: $N=۶×(۲^۴-۲)$ یعنی: $N=۸۴$.

اگر بخواهیم سه شرط را با هم در نظر بگیریم، باید $f(۱)=f(۳)<f(۲)$ و $f(۴)$ باید با $f(۲)$ یا $f(۱)$ برابر باشد. در نتیجه ابتدا دو مقدار از A برای برد تابع انتخاب می‌کنیم ($\binom{۴}{۲}$ انتخاب). سپس برای $f(۴)$ دو انتخاب داریم. در نتیجه در کل $۲×۶=۱۲$ انتخاب داریم.

۳۱۶. این گزاره را ثابت یا رد کنید: «زیرمجموعهٔ S از اعداد صحیح نامنفی به‌گونه‌ای وجود دارد که هر عدد صحیح نامنفی را به‌صورت یکتایی به فرم x+2y می‌توان نوشت؛ به قسمی که: $x,y\in S$.

می‌توان ثابت کرد، مجموعهٔ S شامل تمام عددهای نامنفی که در مبنای ۴، فقط رقم‌های ۱ یا ۰ در آن‌ها به‌کار رفته است، در شرایط مسئله صدق می‌کند.

با یک مثال که قابل تعمیم است، این موضوع را نشان می‌دهیم. هر عدد دلخواه N در مبنای ۴ شامل رقم‌های ۰ تا ۳ خواهد بود (برای مثال $N=(۱۲۰۳۱)$). عدد $N_۱$ را از روی N به این صورت تعریف کنید که به جای هر رقم ۳ و ۲ به ترتیب رقم ۱ یا ۰ را بگذارید (در این مثال $N_۱=(۱۰۰۱۱)_۴$). در نتیجه $N-N_۱$ شامل رقم‌های صفر یا ۲ خواهد بود ($N-N_۱=(۰۲۰۲۰)_۴$) و $N-N_۱$ دو برابر عضوی از S خواهد شد.

پس: $N = N_۱ + ۲(\frac{N-N_۱}{۲})$ که در آن $N_۱$ و $\frac{N-N_۱}{۲}$ عضوهایی از S هستند.

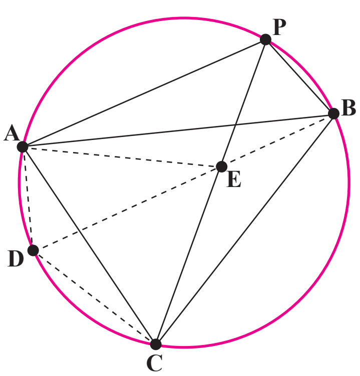
۳۱۷. نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به سه رأس مثلث وصل کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع طول دو پاره‌خط کوچک‌تر در میان PA، PB و PC با طول پاره‌خط بزرگ‌تر برابر است.

از نقطهٔ B به موازات AP خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند (شکل ۱). داریم: $\widehat{AD}=\widehat{PB}$. اما چون دو مثلث APB و ADC همنهشت هستند، در نتیجه: DC=AP و AD با PC موازی است. از توازی AP و BD و توازی AD و PC نتیجه می‌شود:

AD=PE=PB

همچنین، از دو توازی فوق نتیجه می‌شود: AP=DC=AE.

اما چون زاویهٔ BDC برابر ۶۰° است، پس مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است و: AP=CE. به‌طور مشابه ثابت می‌شود، مثلث PEB هم متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه: EP=PB و حکم نتیجه می‌شود.

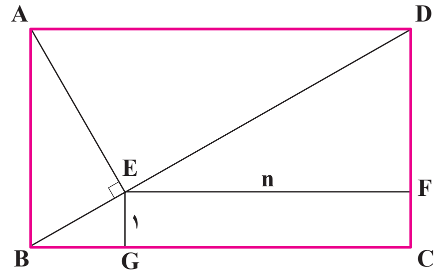


شکل ۱

توضیح: اگر با قضیهٔ بطلمیوس آشنایی داشته باشید، به سادگی می‌توانید با استفاده از آن در چهارضلعی APBC حکم را اثبات کنید.

۳۱۸. در مستطیل ABCD با طول قطر d، عمود AE را بر قطر BD رسم کرده‌ایم. اگر طول اضلاع مستطیل EFCG برابر ۱ و n باشد، ثابت کنید: $\sqrt[3]{d^{۲}} = \sqrt[3]{n^{۲}} + ۱$. نقطهٔ F روی DC و نقطهٔ G روی B است.

اگر طول BG را x فرض کنیم (شکل ۲)، از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $AB=۱+x^{۲}$ و $AE = x\sqrt{۱+x^{۲}}$ و $BE = \sqrt{۱+x^{۲}}$ (از تشابه دو مثلث ABE و BEG استفاده کنید).



شکل ۲

بنابراین: $PF=x^{۲}$ و $EF=n=x^{۳}$. چون مثلث ADF با دو مثلث قبلی متشابه است. حال از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$ED = x^{۲}\sqrt{۱+x^{۲}} \Rightarrow d = BE + ED = (۱+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow d^{\frac{۲}{۳}} = ۱+x^{۲} = ۱+n^{\frac{۲}{۳}}$$

۳۱۹. حاصل جمع ده جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی برابر ۱۸ و حاصل جمع معکوس آن‌ها برابر ۶ است. حاصل‌ضرب این ده جمله را به‌دست آورید.

می‌دانیم:

$$\sum_{k=۱}^{۱۰} ar^{k} = ar\frac{r^{۱۰}-۱}{r-۱} \quad \text{و} \quad \sum_{k=۱}^{۱۰} \frac{۱}{ar^{k}} = \frac{۱}{ar} = \frac{r^{-۱۰}-۱}{r^{-۱}-۱}$$

از تقسیم این دو برهم داریم:

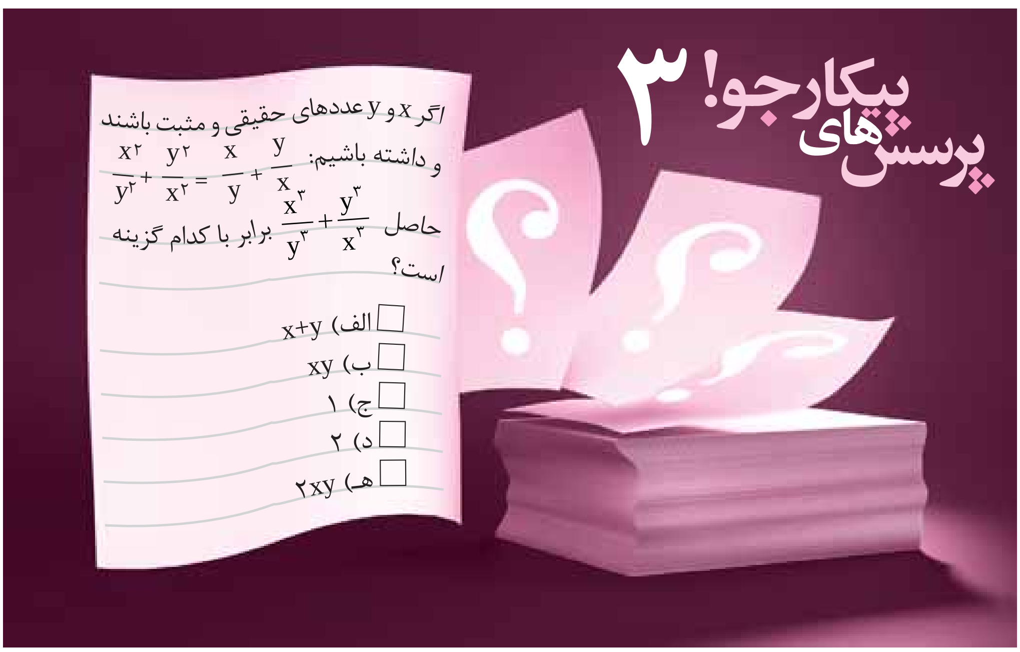
$$۳ = \frac{۱۸}{۶} = \frac{ar\dfrac{r^{۱۰}-۱}{r-۱}}{\dfrac{۱}{ar}\cdot\dfrac{r^{-۱۰}-۱}{r^{-۱}-۱}} = a^{۲}r^{۱۱}$$

اکنون حاصل‌ضرب ده جمله برابر است با:

$$ar.ar^{۲}.....ar^{۱۰} = a^{۱۰}r^{۵۵} = (a^{۲}r^{۱۱})^{۵} = ۳^{۵} = ۲۴۳$$

۳۲۰. حاصل‌ضرب دو عدد سه رقمی $\overline{۲A۵}$ و $\overline{۱۳B}$ مضرب ۳۶ است، همهٔ مقادیر ممکن برای دو رقم A و B را بیابید.

چون ۴×۹=۳۶ و $\overline{۲A۵}$ فرد است، پس $\overline{۱۳B}$ مضرب ۴ است و B=۲ یا B=۶. اگر B=۲، آن‌گاه ۱۳۲ مضرب ۳ است و بنابراین $\overline{۲A۵}$ باید مضرب ۳ باشد. پس: ۸ یا ۵ یا A=۲. و اگر B=۶، آن‌گاه $\overline{۲A۵}$ باید مضرب ۹ باشد و در نتیجه: A=۲. بنابراین برای (A , B) چهار جواب ، (۸,۲) (۲,۲)، (۵,۲) و (۲,۶) به‌دست می‌آید.



احسان یارمحمدی، دبیر ریاضی اراک

روش دور زدن دِلتا: رقیبی برای رابطهٔ دِلتا در حل معادلهٔ درجهٔ دوم

اشاره

می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن $b,c\in R$ و $a\in R-\{0\}$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم. در سده‌های متوالی برای ارائهٔ راه‌حل یا روش‌های حل این نوع معادله توسط ریاضی‌دانان متعددی پیشنهادها و روش‌هایی بیان شده‌اند که نتیجهٔ آن‌ها در قالب روش تجزیه، روش مربع کامل، روش هندسی و روش رابطهٔ دِلتا (Δ) در اختیار ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات قرار گرفته است. در این مقاله قصد داریم که با بهره‌گیری از مفهوم حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش دِلتا به ارائهٔ رابطه‌ای جدید و به دنبال آن روشی نوین برای حل معادله‌های درجهٔ دوم بپردازیم. امیدواریم که ریاضی‌آموزان با استفاده از این روش پویایی ذهن خود را محک بزنند و به یاد داشته باشند که استفاده از مقداری خلاقیت می‌تواند به ایجاد یک رابطهٔ نوین در ریاضیات یا خلق روش جدیدی در موضوع‌های ریاضی منجر شود.

می‌دانیم که برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$ با استفاده از روش دِلتا به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱. از رابطهٔ $\Delta=b^2-4ac$ مقدار دلتا را به‌دست می‌آوریم.

۲. با توجه به مقدار به دست آمده برای دلتا داریم:

الف) اگر $\Delta>0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو جواب متمایز در مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

ب) اگر $\Delta=0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای یک جواب (مضاعف) در مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

پ) اگر $\Delta<0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم در مجموعهٔ اعداد حقیقی جوابی ندارد.

۳. برای به دست آوردن جواب یا جواب‌های معادلهٔ درجه دوم در حالت‌هایی که دارای جواب است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو جواب متمایز در مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، این جواب‌ها از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ب) اگر معادلهٔ درجه دوم دارای یک جواب (مضاعف) در مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، این جواب از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

حال با توجه به مطالبی که در بالا ارائه شد، معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$ را در نظر می‌گیریم و چون می‌دانیم که ضریب x^2، یعنی a، همواره عددی مخالف صفر است، پس طرفین معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور را بر a تقسیم می‌کنیم. سپس با ساده کردن، کار را ادامه می‌دهیم تا صورت جدیدی از معادلهٔ درجه دوم پدیدار شود:

$$ax^2+bx+c=0 \xRightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر a}} \frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

اکنون با فرض $p=\frac{b}{a}$ و $q=\frac{c}{a}$ در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم و رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x^2+px+q=0 \qquad (2)$$

با به دست آوردن رابطهٔ (۲) که موضوع اصلی یا به بیان بهتر معادلهٔ مورد بحث در این مقاله است، روند مطلوبمان را به شرح زیر پی می‌گیریم:

بدیهی است که در معادلهٔ $x^2+px+q=0$ همواره ضریب x^2 برابر با یک است و داریم: $p,q\in R$. اکنون برای این معادله با توجه به رابطهٔ $\Delta=b^2-4ac$ مقدار دِلتا را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \Delta = p^2-4(1)(q) \Rightarrow \Delta = p^2-4q$$

روشن است، برای اینکه در مورد تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ بحث کنیم، می‌باید به تعیین مقدار دلتا متناظر با آن به شرح زیر بپردازیم:

الف) اگر $\Delta=p^2-4q>0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+px+q=0$ دارای دو جواب متمایز حقیقی است.

ب) اگر $\Delta=p^2-4q=0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+px+q=0$ دارای یک جواب (مضاعف) حقیقی است.

پ) اگر $\Delta=p^2-4q<0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+px+q=0$ جواب حقیقی ندارد.

اکنون برای مشخص شدن جواب یا جواب‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ در حالت‌هایی که دارای جواب است، به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای دو جواب متمایز حقیقی باشد، این جواب‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_1,x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1,x_2 = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x_1,x_2 = -\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} \Rightarrow x_1,x_2 = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}$$

$$\Rightarrow x_1,x_2 = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$$

ب) اگر معادلهٔ درجهٔ دوم مذکور دارای یک جواب (مضاعف) حقیقی باشد، این جواب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2} \quad (4)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۳) و (۴) می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ و $p,q\in R$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند.

$$x_1,x_2 = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$$

روشن است که اگر در رابطهٔ بالا مقدار زیر رادیکال، یعنی عبارت $(\frac{p}{2})^2-q$، کوچک‌تر از صفر باشد، آن‌گاه معادلهٔ مذکور در مجموعهٔ عددهای حقیقی دارای جواب نیست.

در پایان، از آنجا که در این مقاله به رابطهٔ جدیدی برای حل معادله‌های درجه دوم دست یافتیم، به‌گونه‌ای که این رابطه ریاضی‌آموزان را سریع‌تر و

آســان‌تر به تعیین تعداد جواب‌های معادلهٔ درجه دوم می‌رساند، بهتر است که نامی برای این روش ارائه دهیم. چون برای ارائــهٔ این رابطهٔ جدید از رابطــهٔ دِلتا بهره برده‌ایم و اســتفاده از آن نسبت به روش دلتا از سرعت بیشــتری برخوردار اســت، آن را روش **دور زدنِ دلتا** می‌نامیم.

مثال ۱. معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱۵=۰$ را با استفاده از روش دور زدن دِلتا حل کنید.

$$x^{۲}+۲x-۱۵=۰ \Rightarrow p=۲, q=-۱۵$$

$$x_۱, x_۲=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{(\frac{p}{۲})^{۲}-q}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=-\frac{۲}{۲}\pm\sqrt{(\frac{۲}{۲})^{۲}-(-۱۵)}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=-۱\pm\sqrt{۱۶}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۱+۴\\x_۲=-۱-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۳\\x_۲=-۵\end{cases}$$

مثال ۲. معادلهٔ $۶x^{۲}-۱۴x+۴=۰$ را با اســتفاده از روش دور زدن دِلتا حل کنید.

$$۶x^{۲}-۱۴x+۴=۰ \xRightarrow{\text{طرفین را بر شش تقسیم می‌کنیم}} x^{۲}-\frac{۷}{۳}x+\frac{۲}{۳}=۰$$

$$\Rightarrow p=-\frac{۷}{۳}, q=\frac{۲}{۳}$$

$$x_۱, x_۲=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{(\frac{p}{۲})^{۲}-q}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\sqrt{(-\frac{۷}{۶})^{۲}-(\frac{۲}{۳})}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\sqrt{\frac{۴۹}{۳۶}-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\frac{۵}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۷}{۶}+\frac{۵}{۶}\\x_۲=\frac{۷}{۶}-\frac{۵}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۲\\x_۲=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

تمرین:

معادله‌های زیر را به روش دور زدن دِلتا حل کنید.

۱. $۲x^{۲}+\sqrt{۱۱}x-۱۱=۰$

۲. $۳۶x^{۲}-۶۰x-۲۴=۰$

۳. $-۵x^{۲}-۱۰x+۴۰=۰$

۴. $۲۴x^{۲}-۳۶x+۱۲=۰$

دو داستان و دو معما!

داستان اول

دهقان پیر مزرعه‌ای مستطیل شکل به ابعاد ۸۰ متر در ۱۲۰ متر برای هشت پسر خود به ارث گذاشته بود. در این مزرعه هشت درخت سیب در جاهایی که در شکل مشخص شده‌اند، کاشــته شده بود. مزرعه را بین این هشت پسر طوری تقسیم کنید که سهم آن‌ها با هم برابر باشد و به هر کدام نیز یک درخت سیب برسد!

داستان دوم

دهقان دیگــر، مزرعه‌ای به شکل روبه‌رو دارد! خیلی عجیب اســت، نه؟! ولی در داســتان ما همه‌چیز ممکن است! یعنی این مزرعه از ۲۸ قطعهٔ شش‌گوشه، به‌صورت مقابل تشــکیل شده است. اما این دهقان هفت پسر دارد. معمای ما روشــن اســت، دهقان می‌خواهد قبل از مرگش مزرعــه را بین هفت پســرش به تســاوی تقســیم کند. او را راهنمایــی کنید که چگونه این کار را انجام دهد.

تدوین و تنظیم: **محمدرضا امیری**

گفت‌وگوی مجله ریاضی رشد برهان با
حسین بصیر
دارندهٔ رتبهٔ ۳ کنکور سراسری رشتهٔ ریاضی (منطقهٔ ۳)

ریاضی را ٪۸۸/۵ زدم

اشاره

حسین بصیر از یکی از مناطق محروم کشور برخاسته و با کمترین امکانات موفق به کسب رتبه‌ای برتر در کنکور سراسری رشته ریاضی شده است.
زندگی روستایی، خانوادهٔ شلوغ و خانه‌ای کوچک، نبود امکانات اولیهٔ آموزشی و خانواده‌ای که به قول خودش، عرف آن تحصیل تا پایهٔ سوم راهنمایی و پس از آن کشاورزی بوده و حتی فقدان پدر در سال‌های آخر تحصیل، هیچ‌یک نتوانسته کمترین خللی در ارادهٔ حسین برای رسیدن به بهترین‌ها ایجاد کند.
فرصتی به‌دست آمد تا گفت‌وگویی کوتاه با ایشان داشته باشیم که گزارش آن در پی می‌آید.

■ **این مجله را بچه‌های متوسطهٔ دوم می‌خوانند؛ یعنی دهم و یازدهم و بچه‌های پیش‌دانشگاهی. حرف‌های شما خیلی به نحوهٔ درس خواندن، به‌خصوص در درس ریاضی، کمک‌شان می‌کند. حالا من یک مجموعه سؤال دارم. هر جور که دوست داشتید، به آن‌ها پاسخ دهید. اول اینکه خودتان را معرفی کنید و رتبه‌تان را هم بگویید.**

● من حسین بصیر هستم، رتبهٔ ۳ ریاضی منطقهٔ ۳.

■ **از کجا یعنی کدام شهر؟**

● «بستان‌آباد، روستای تُرکمپور» از توابع شهرستان بستان‌آباد. حدود ۲۰ کیلومتری تبریز.

■ **خب اول بگویید ریاضی‌تان را چند درصد زدید؟**

● ۸۸/۵.

■ **در درس‌های اختصاصی به چه درسی بیشتر علاقه دارید؟**

● فیزیک.

■ **فیزیک را چند درصد زدید؟**

● ۹۵ درصد.

■ **۱۰۰ هم داشتید؟**

● نه.

■ **چه عواملی در موفقیت شما نقش داشته‌اند، لطفاً بگویید به ترتیب چه عواملی بودند؟**

● تلاش خودم، کمک خانواده‌ام و برنامه‌ریزی.

■ **مثلاً یکی از عوامل کمک خانواده را برای ما توضیح بدهید.**

● ایجاد محیط امن و آرام برای مطالعه.

■ **کتاب درسی برای شما چه جایگاهی داشت؟**

● خب اول همیشه کتاب را می‌خواندم. حتی در درس‌های ریاضی هم اول تمرین‌های کتاب را حل می‌کردم. اتفاقاً سؤالات کنکور هم خیلی شبیه تمرین‌های کتاب درسی‌اند.

■ **برای مطالعهٔ ریاضی چه روشی داشتید؟ مثلاً بعضی‌ها ریاضی را می‌خوانند و بعضی‌ها می‌نویسند و مسئله حل می‌کنند. شما چطور بودید؟**

● نه من خیلی مسئله حل می‌کردم. خیلی هم از خواندن خوشم نمی‌آید.

■ **از نظر استدلالی یا فرمولی چطور؟**

● اول فرمول‌ها و مفاهیم را اثبات می‌کردم و بعد از فرمول‌ها در حل مسئله استفاده می‌کردم.

■ بیـــن معلم‌هایی که داشـــتید، به‌خصوص معلمان ریاضی، شخص خاصی تأثیری در نتیجه تحصیلی شما داشته است؟

● بهترین معلــم من آقای **اصغری**، معلــم ریاضیاتم بودند. ســخت‌گیری ایشان باعث می‌شد همه تلاش کنند و یاد بگیرند.

■ از دوران ابتدایی ریاضی را دوست داشتید؟

● من از قبل، از دوران بچگی ریاضی را دوست داشتم.

■ چه رشته‌ای در دانشگاه قصد دارید بخوانید؟

● مکانیک، دانشگاه شریف.

■ در المپیاد هم شرکت کردید؟

● بله، مرحلهٔ اول را قبول شدم، ولی مرحلهٔ دوم، نه.

■ به مسائل چالشی در ریاضی، معماها و... علاقه‌مند داشتید؟

● بله از همان ابتدا.

■ برای بچه‌هایی کــه این مصاحبه را می‌خوانند، چه توصیه‌ای دارید؟

● خیلی مسئله حل کنند و تا جایی که می‌توانند روش‌های حل را هم یاد بگیرند. این خیلی سر جلسه کمکشان می‌کند. بعد از مدتی هم در حل مســائل خیلی سریع می‌شوند.

■ به نظرتان ریاضـــی تأثیری در زندگی آدم خواهد گذاشت؟

● بله، خیلی ذهن را باز و خلاق می‌کند.

■ بسیار خب ممنون و امیدوارم همیشه شما را موفق ببینم.

● خواهش می‌کنم. ممنون از شما.

عباس روح‌الامینی
عضو خانه ریاضیات سیرجان

گاهی خاصیت‌های جالبـــی در عددها و عمل‌های ریاضی دیده می‌شوند؛ نظیر اینکه مثلاً ۱۵۳ با مجموع مکعبات ارقامش برابر است. یعنی: $1^3+5^3+3^3=153$.

البتــه این خاصیت قابل تعمیم نیســت. ولی به‌هر حال عددهای دیگــری نیز با چنین خاصیت‌هایی پیدا می‌شوند. مثلاً:

$371=3^3+7^3+1^3$ یا $370=3^3+7^3+0^3$.

ولی برخی از خاصیت‌ها یا الگوهای عددی هستند که قابل تعمیم هســـتند و بنابراین از نظر ریاضی خیلی ارزش دارنــد. به عنوان نمونه بــه این رابطه‌های جالب نگاه کنید:

$3^2+4^2=5^2$ و $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

من حـــدس می‌زنم برایتان ایجــاد علاقه و انگیزه می‌کنــد اگر بدانید که می‌توانیم الگــوی عددی بالا را تعمیم دهیم.

یعنی $2n+1$ عدد طبیعی متوالی که مجموع مربعات $n+1$تای اولی با مجموع مربعات nتای بعدی برابر باشد.

در سمت چپ علامت تساوی بزرگ‌ترین عدد را x می‌نامیم بنابراین به این شکل معادله‌سازی می‌کنیم:

$$(x-n)^2+\dots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2$$
$$=(x+1)^2+(x+2)^2+\dots+(x+n)^2$$

حال معادله را به‌صورت زیر تنظیم می‌کنیم تا اتحاد مزدوج درست شود:

$$x^2=[(x+1)^2-(x-1)^2]+[(x+2)^2-(x-2)^2]$$
$$+\dots+[(x+n)^2-(x-n)^2]$$

امــا با توجه به اتحادِ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ داریم:

$$x^2=4(1x)+4(2x)+4(3x)+\dots+4(nx)$$
$$\Rightarrow x^2=4x(1+2+3+\dots+n)$$
$$\Rightarrow x^2=4x\frac{n(n+1)}{2}=2xn(n+1)$$
$$\Rightarrow x=2n(n+1)$$

و در نتیجه جملهٔ اول در عبارت سمت چپ تساوی چنین می‌شود:

$$x-n=2n(n+1)-n=n(2n+2-1)=n(2n+1)$$

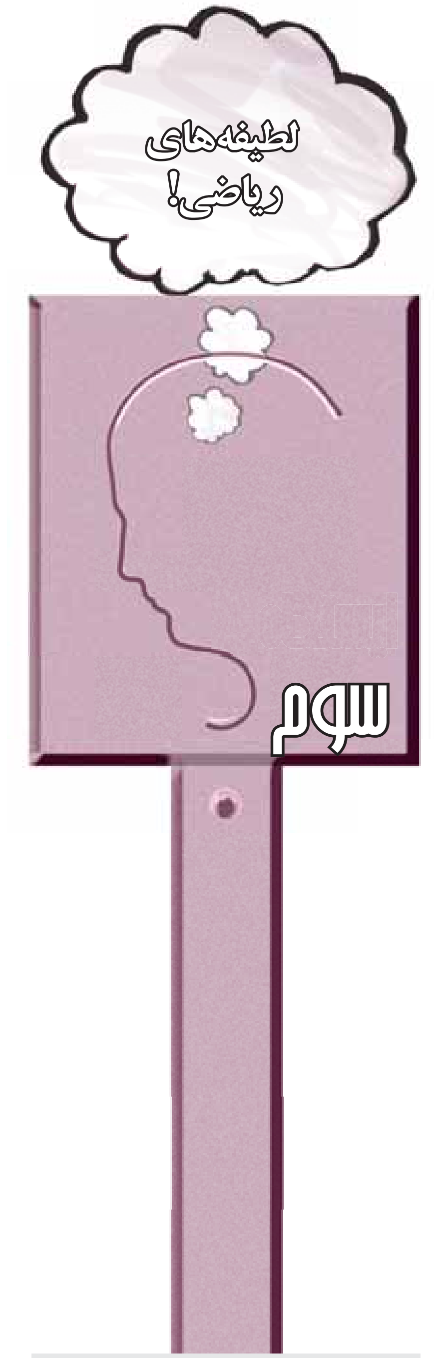
که به ازای $n=3$ به‌دست می‌آید:

$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$

و بــه همین ترتیب با دادن مقدارهای متفاوت به n می‌توان رشته‌های عددی مشابهی را به دست آورد. مثلاً به ازای $n=4$ داریم:

$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$

و به همین ترتیب.



لطیفهٔ اول

اولی: قیمت یک کیلو برنج هزار تومان است و یک عدد آناناس دو هزار تومان می‌ارزد. فاصلهٔ تهران تا همدان ۱۵۰ کیلومتر است و عمق متوسط دریای‌خزر یک متر است. حالا بگو من چند سال دارم؟

دومی: پنجاه سال!

اولی: درست حدس زدی، ولی چطور توانستی از آن مقدمات این نتیجه را بگیری؟

دومی: عموی من ۲۵ سال دارد و دکترها می‌گویند نیمه دیوانه است!

لطیفهٔ دوم

اولی: قیمت گریپ فروت چند است؟

دومی: دوتای آن هزار و صدتومان است.

اولی: یکی از آن چند است؟

دومی: ششصدتومان.

اولی: پس من آن یکی را می‌خواهم!

لطیفهٔ سوم

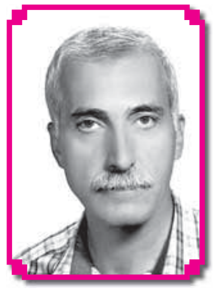
معلم: چرا حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را مساوی ۱ در نظر گرفتی؟

شاگرد: خُب a و b را از صورت و مخرج حذف کردم!

معلم: در این صورت علامت (+) را چطور بر علامت (−) تقسیم کردی؟!

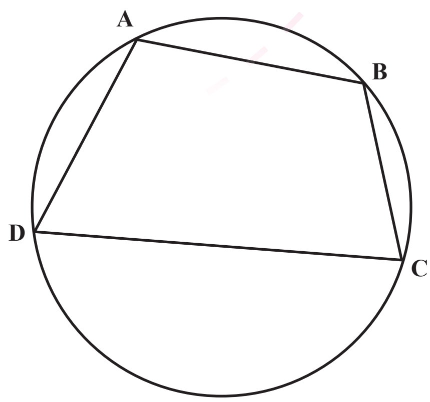
شاگرد: یک علامت (−) را از علامت (+) حذف کردم، عدد ۱ باقی ماند!

بحثی درباب چهارضلعی‌های محاطی



حسین کریمی

می‌دانیم که اگر چهــار رأس یک چهارضلعی روی دایره‌ای واقع باشــند، آن چهارضلعی را محاطی و دایره را، دایرهٔ محیطی آن چهارضلعی می‌نامند.



شکل ۱.

و نیز می‌دانیم، شرط آنکه یک چهارضلعی محاطی باشد آن است که زاویه‌های روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشــند. حال می‌خواهیــم در مــورد چهارضلعی‌های محاطی، سه قضیه معروف تاریخی را بیان و اثبات کنیم:

۱. قضیهٔ بطلمیوس (۱۶۸-۹۰ م)

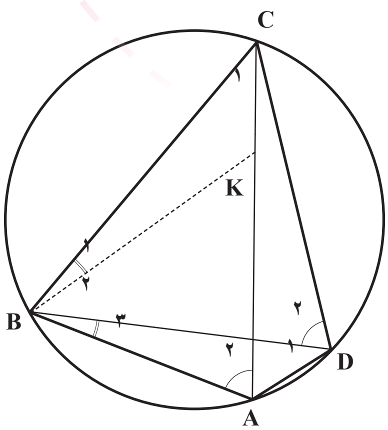
۲. قضیهٔ پاپوس (۳۵۰-۲۹۰ م)

۳. قضیهٔ نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۳ م)

۱. قضیهٔ بطلمیوس

در هر چهارضلعــی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر اســت با مجمــوع حاصل‌ضرب‌هــای دوبه‌دوی ضلع‌های روبه‌رو.

اثبات: در چهارضلعی محاطی ABCD (شــکل ۲) نقطــهٔ K را روی AC چنــان اختیــار می‌کنیــم تا $\hat{B}_1=\hat{B}_3$ باشد.



شکل ۲.

$$\begin{cases}\hat{B}_1=\hat{B}_3\\ \hat{C}_1=\hat{D}_1=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{KBC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{CK}{BC}\Rightarrow BC\times AD=CK\times BD\quad (1)$$

$$\begin{cases}\hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{B}_3+\hat{B}_4\\ \hat{A}_2=\hat{D}_2=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABK}\sim\overset{\Delta}{BCD}$$

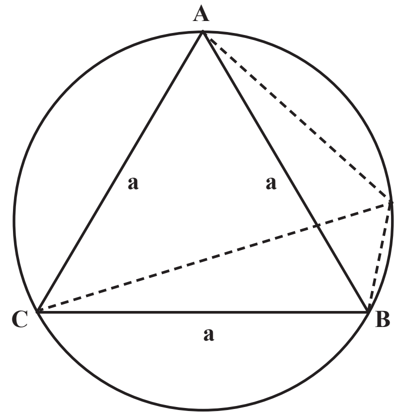
$$\Rightarrow \frac{AB}{AK}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow AB\times CD=AK\times BD\quad (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow AB\times CD+BC\times AD=(AK+CK)\times BD$$

$$\Rightarrow AB\times CD+BC\times AD=AC\times BD$$

مسئله: ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع از دو رأس مجاور، برابر است با فاصلهٔ همان نقطه از رأس روبه‌رو.

حکم: $KA+KB=KC$ نقطهٔ دلخواه K را روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



شکل ۳.

حال قضیهٔ بطلمیوس را در مورد چهارضلعی محاطی AKBC به‌کار می‌گیریم:

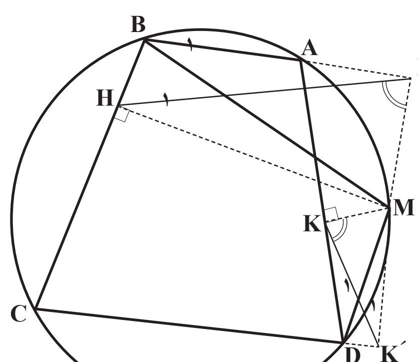
$$KA\times BC+KB\times AC=KC\times AB$$

$$\Rightarrow KA\times a+KB\times a=KC\times a\Rightarrow KA+KB=KC$$

۲. قضیهٔ پاپوس

حاصل‌ضرب فاصله‌های هر نقطهٔ دایرهٔ محیطی، از دو ضلع مقابل چهارضلعی محاطی، مساوی حاصل‌ضرب فاصله‌های این نقطه است از دو ضلع مقابل دیگر.

حکم: $MH\times MK=MH'\times MK'$



شکل ۴.

اثبات: هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AM}$

محاطی است

$ABCD\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{B}_۱$ (۱)

هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{MK}$

محاطی است

$\hat{K}+\hat{K}'=۱۸۰^\circ\Rightarrow MKDK\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{K}'_۱$ (۲)

هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{MH'}$

محاطی است

$\hat{H}+\hat{H}'=۱۸۰^\circ\Rightarrow BHMH\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{H}_۱$ (۳)

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که: $\hat{H}_۱=\hat{K}'_۱$ (۴)

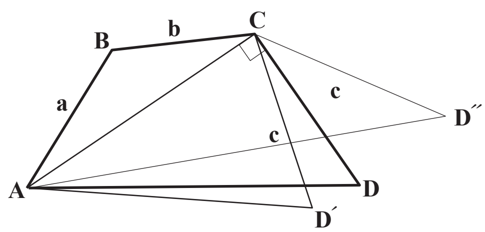
به‌همین ترتیب ثابت می‌شود: $\widehat{MKK'}=\widehat{HH'M}$ (۵)

$$\overset{(۵),(۴)}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{MKK'}\sim \overset{\Delta}{MHH'}\Rightarrow \frac{MH}{MK'}=\frac{MH'}{MK}$$

$$\Rightarrow MH\times MK=MH'\times MK'$$

۳. قضیهٔ نیوتن

اگر با سه طول معین a، b و c یک چهارضلعی به سطح ماکزی‌مم بنا کنیم، ضلع چهارم قطر دایره‌ای است که چهارضلعی در آن محاط است.



شکل ۵.

اگر از هر سه چهارضلعی ABCD، ´ABCD و ´´ABCD، مثلث ABC را کنار بگذاریم و مساحت سه مثلث ACD، ´ACD و ´´ACD را با یکدیگر مقایسه کنیم، درمی‌یابیم که ماکزی‌مم مساحت مربوط به مثلث ACD است که در آن CD بر AC عمود است. چرا که مساحت هر سه مثلث از رابطهٔ $\frac{۱}{۲}\times c\times AC\times \sin\hat{C}$ به‌دست می‌آید. بنابراین حداکثر مساحت در صورتی رخ می‌دهد که $\hat{C}=۹۰^\circ$ باشد.

پس الزاماً در چهارضلعی ABCD به مساحت ماکزی‌مم که روی سه ضلع معلوم به اندازه‌های a، b و c بنا شده است، باید CD بر AC عمود باشد و به‌همین ترتیب الزاماً باید BD بر AB عمود باشد. به‌عبارت دیگر، باید از رأس‌های B و C، ضلع AD را به زاویهٔ قائمه رؤیت کنیم. در نتیجه AD قطر دایرهٔ محیطی آن چهارضلعی خواهد بود.

هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

ریاضی دهم (رشته ریاضی ـ تجربی)

۱. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰ می‌توان نوشت که رقم تکراری نداشته باشد و بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۲. ده نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به‌طوری که دو نفر از آن‌ها هرگز کنار هم نباشند؟

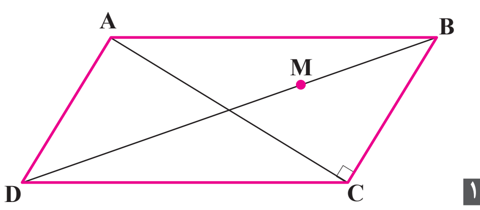
۳. درون جعبه‌ای ۴ مهرهٔ آبی متمایز و ۶ مهرهٔ قرمز متمایز وجود دارد. به چند روش می‌توانیم از این جعبه ۴ مهره انتخاب کنیم، به‌طوری که مهره‌های انتخاب شده هم‌رنگ باشند؟

۴. در یک آپارتمان ۵ زن و شوهر زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان ۵ نفر را از بین این ۱۰ نفر انتخاب کرد، به‌طوری که فقط یک زن و شوهر بین آن‌ها وجود داشته باشد؟

هندسهٔ ۱

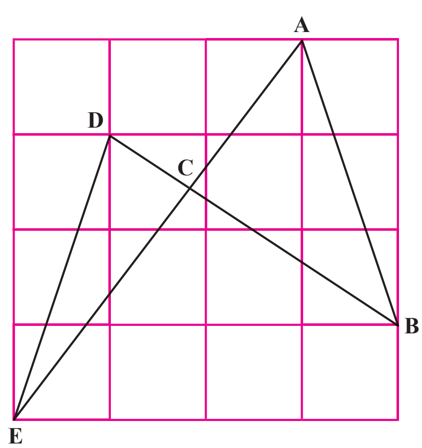
۱. در یک ذوزنقه، طول‌های ساق‌ها و قاعدهٔ کوچک، هر سه با هم برابر است و یک زاویهٔ داخلی مساوی ۶۰° است. اگر ارتفاع ذوزنقه مساوی $\frac{۲}{۳}$ باشد، مساحت و محیط ذوزنقه را بیابید.

۲. در شکل ۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر AC بر ضلع BC عمود است و M نقطه‌ای روی قطر BD است که آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. فاصلهٔ M از رأس C چه کسری از CD است؟



شکل ۱

۳. در شکل ۲ مربع‌های کوچک همگی به ضلع واحد هستند. مساحت مثلث ABC چقدر از مساحت مثلث CDE بیشتر است؟



شکل ۲

هندسهٔ ۲

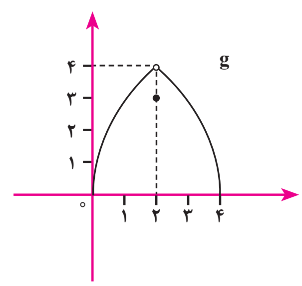
۱. علـــی و **رضا** در فاصله‌هــای ۱۶ و ۲۵ متری از یــک دیوار افقی ایســتاده‌اند و خودشان از هم ۳۰ متر فاصله دارند. علی می‌خواهد روی یک خط مســتقیم حرکت کند، به دیوار برســد و دستش را به دیوار بزند و از آنجا مســتقیماً به سمت رضا برود تا به او برسد. حداقل مسافتی که او باید طی کند چند متر است؟

۲. در مثلــث ABC، روی ضلع BC، مربع BCDE را در خارج مثلث بنــا کرده‌ایم. AD و AE، BC را در نقــاط M و N قطع کرده‌اند و عمودهایی که در M و N بر BC رســم کرده‌ایم، AB و AC را در نقاط P و Q قطع کرده‌اند. نشــان دهید MNPQ مجانس مربع BCDE است.

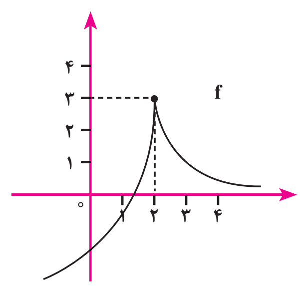
۳. ثابت کنیــد هر دو دایره همواره مجانس یکدیگرند. مرکز تجانس کجا است؟

ریاضی ۳ (رشته تجربی)

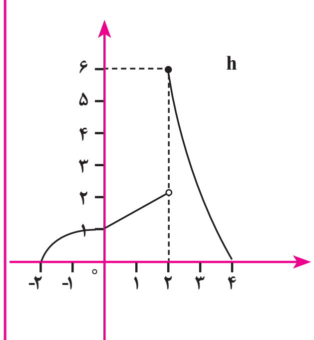
۱. با اســتفاده از نمودارها، حدهای خواسته شده را در صورت وجود بیابید.



ب) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$



الف) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



پ) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

۲. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ f(x)=\begin{cases}\sin x & ;x\le 0\\ x^2 & ;x>0\end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} g(x),\ g(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\le 2\\ 2x-1 & ;x>2\end{cases}$

پ) $\lim\limits_{x\to -1} h(x),\ h(x)=\begin{cases}x-1 & ;x<-1\\ -2 & ;x=-1\\ 3x & ;x>-1\end{cases}$

۳. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $A=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x+4}$

ب) $B=\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)^{\frac{5}{2}}$

پ) $C=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2-2}$

ت) $D=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

ث) $E=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$

۴. الف) تابعی رســم کنید که حد آن در نقطهٔ ۳- برابر ۴ باشد، ولی تابع در ۳- پیوسته نباشد.

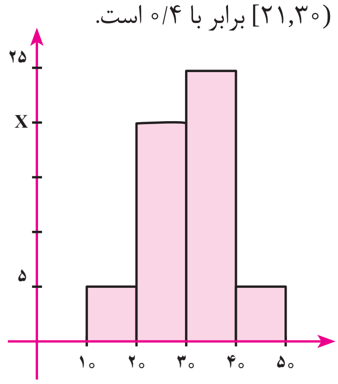
ب) تابعی رســم کنید که حد آن در نقطهٔ ۲ برابر ۱- باشد و تابع در نقطهٔ ۲ پیوسته باشد.

آمار و احتمال

۱. قد دانش‌آمــوزان یک کلاس را اندازه‌گیــری کرده‌ایم. با توجه به جــدول زیر، چند درصــد این دانش‌آموزان قدی بیشــتر از ۱۵۸ سانتی‌متر دارند؟

قد (سانتی‌متر)	۱۴۵	۱۵۰	۱۵۵	۱۶۰	۱۶۵
فراوانی	۷	۱۱	۱۰	۴	۳

۲. در نمودار بافت نگاشــت زیر که فراوانی داده‌ها را نشــان می‌دهد، فراوانی نسبی داده‌ها در بازهٔ [۲۱,۳۰) برابر با ۰/۴ است.



الف) فراوانی داده‌ها در این بازه چقدر است؟

ب) چند درصد از داده‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۴۰ هستند؟

۳. میانگین ۱۰ دادهٔ آماری ۳۲/۵ است. اگر دو دادهٔ ۳۵ و ۴۰ را از داده‌ها حذف کنیم، میانگین داده‌های باقی‌مانده را به‌دست آورید.

۴. جدول مقابل درصد فراوانی نسبی داده‌ها را نشان می‌دهد:

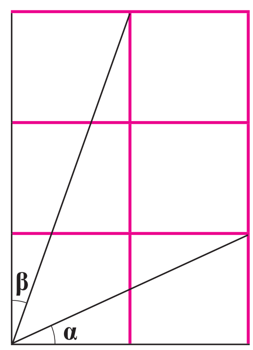
داده	۱	۲	۳	۴	۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۳	۲۲	x	۱۸

الف) زاویهٔ مرکزی مربوط به داده ۴ را تعیین کنید.
ب) میانگین این داده‌ها را به‌دست آورید.

۵. میانهٔ یک مجموعه از داده‌های مرتب شده، برابر با میانگین چهارمین و پنجمین داده و مجموع کل داده‌ها مساوی ۳۶۰ است. میانگین کل داده‌ها را به‌دست آورید.

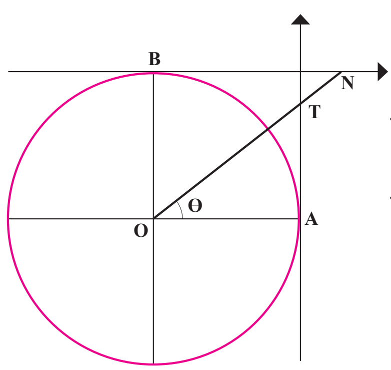
حسابان ۱

۱. شبکهٔ ۳×۲ مستطیل شکل ۱ را در نظر بگیرید، و به کمک شکل ثابت کنید، اگر α و β زاویه‌های حاده باشند و داشته باشیم: $\tan\alpha = \frac{۱}{۲}$ و $\tan\beta = \frac{۱}{۳}$، آن‌گاه: $\alpha + \beta = ۴۵^\circ$.



شکل ۱

۲. در دایرهٔ مثلثاتی شکل۲، $\frac{۱}{\sin\theta}$ و $\frac{۱}{\cos\theta}$ را نشان دهید. سپس ثابت کنید:

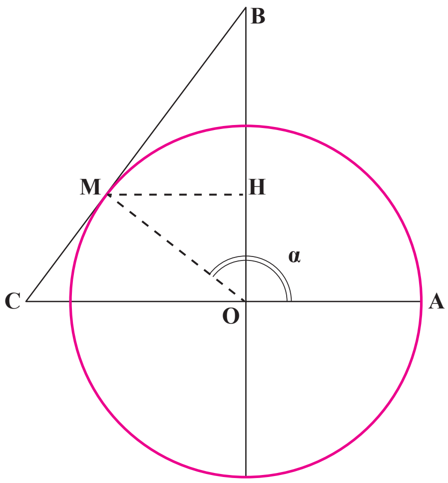


$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

شکل ۲

۳. در شکل۳، BC بر دایره مماس است و داریم: OA=۱ و $A\hat{O}M = \alpha$. نشان دهید: $BH = \frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha}$.



شکل ۳

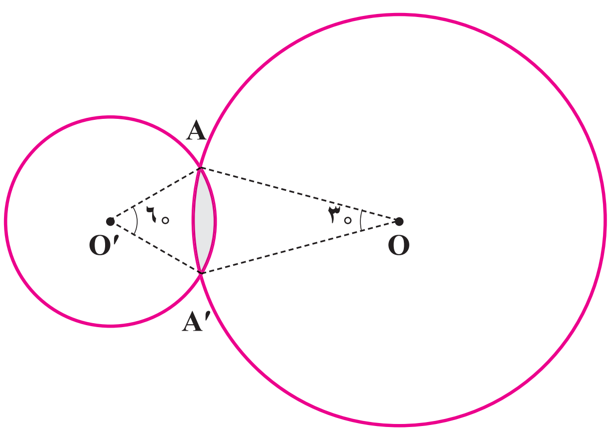
۴. ثابت کنید:

الف) $\sin ۱۸^\circ \times \cos ۳۶^\circ = \frac{۱}{۴}$

ب) $\frac{\cos ۲۰^\circ + \sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ} = ۲$

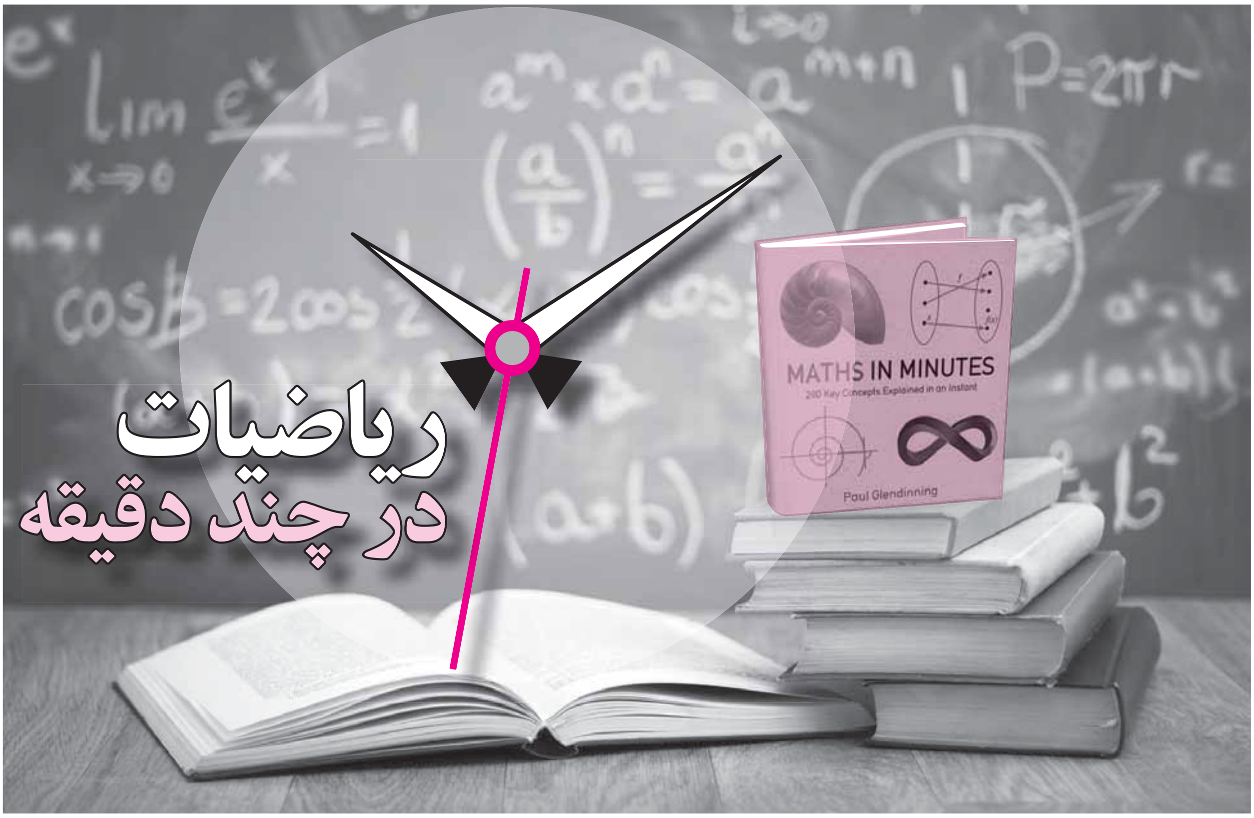
۵. در شکل۴ دو دایرهٔ C´(o´,r) و C(O,R) داده شده است. اگر اندازهٔ محیط چهارضلعی OAO´A´ برابر ۳۰ واحد و اندازهٔ محیط ناحیهٔ سایه خورده برابر ۳π باشد، طول شعاع هر یک از دایره‌ها چقدر است؟

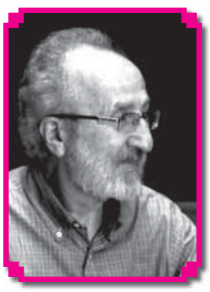
$(\hat{O} = ۳۰^\circ, \hat{O}' = ۶۰^\circ)$



شکل ۴

پال گِلِندینینگ

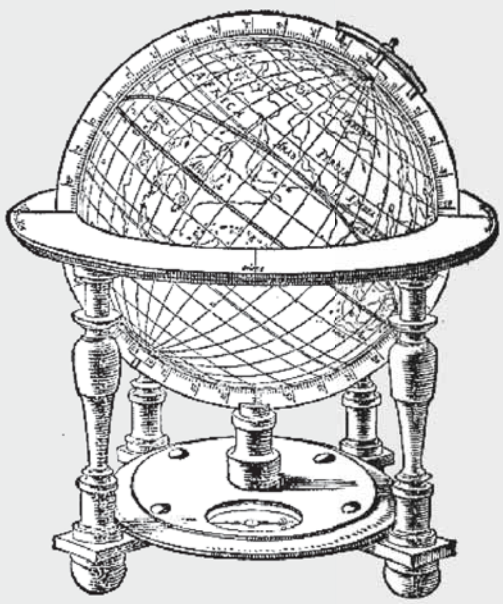




ترجمۀ **غلامرضا یاسی‌پور**

کره

کرۀ ســه‌بعدیِ هم‌ارز دایره، شــیء هندسی کاملاً گردی اســت. اگر کره قالب ارجاع ثابتی ـ برای مثال محور قطبی زمین ـ داشــته باشد، در این صورت هر مکان واقع بر رویۀ آن می‌تواند توسط دو زاویه توصیف شود. در حالت زمین، این زاویه‌ها را به‌صورت طول و عرض جغرافیایی نمایش می‌دهیم. «عرض جغرافیایی» (latitude) زاویــۀ بین خط وصل‌کنندۀ مکان مــورد نظر به مرکــز کره، معروف به شــعاع و محــور اصلی اســت. «طــول جغرافیایی» (longitude) زاویــۀدور محــور زمیــن، بین شــعاع عرض جغرافیایی و خطی از یک نقطۀ ارجاع تعریف شده، از قبیل «نصف‌النهار اول» (prime meridian) زمین است.



شعاع‌های رسم شده از مرز هر ناحیۀ واقع بــر رویۀ کره، مخروطی تعمیم یافته در مرکز کره تشــکیل می‌دهند. گسترش این مخروط موسوم به زاویۀ فضایی آن، اندازه‌ای از تناسب ناحیۀ تقاطع ایــن مخروط با کل ناحیۀ رویۀ کره‌ای به شعاع ۱ است. از آنجا که سطح رویۀ کره توســط فرمول $۴\pi r^۲$ به دســت می‌آید، سطح رویۀ کرۀ مزبور ۴π است.

ریاضی دهم (رشته ریاضی ـ تجربی)

۱. رقم یکان عددی که بر ۵ بخش‌پذیر است، صفر یا ۵ است. به‌خاطر وجود صفر در رقم یکان مسئله را به دو حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

	صدگان	دهگان	یکان
رقم یکان = ۰ ⇐ (حالت اول)	۴	۴	۱
رقم یکان = ۵ ⇐ (حالت دوم)	۳	۴	۱

بنابرایـــن تعداد کل چنیـــن عددهایی عبارت است از:

$(۴×۴×۱)+(۳×۴×۱)=۱۶+۱۲=۲۸$

۲. ابتدا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که دو نفر خاص کنار هم هستند. برای این کار می‌توانیم این دو نفـــر را یک نفر به حســـاب آوریم و به همـــراه ۸ نفر دیگر بـــه !۹ آرایش دهیم. تعداد جایگشـــت‌های این دو نفر را نیز در آن ضرب می‌کنیم و به عدد !۲×!۹ می‌رسیم.
پس تعداد حالت‌هایی که این دو نفر کنار هم نیستند، عبارت است از: !۲×!۹-!۱۰

۳. هم‌رنگ بودن ۴ مهره به معنی این اســـت که ۴ مهره انتخاب شده، آبی یا قرمز هستند. پس تعداد چنین انتخاب‌هایی عبارت است از:

$$\binom{۴}{۴}+\binom{۶}{۴}=۱+۱۵=۱۶$$

۴. ابتدا یکی از زوج‌هـــا را به $\binom{۵}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم.
اکنون برای انتخاب ۳ نفـــر باقی‌مانده از ۸ نفر باقی‌مانده که هیچ زوجی بین آن‌ها نباشد، ابتدا ۳ زوج را به $\binom{۴}{۳}$ روش انتخاب می‌کنیم. حالا برای هر زوج انتخاب شـــده دو انتخاب داریم: یا زن و یا مرد. پس تعداد کل عبارت است از:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۳}×۲×۲×۲=۵×۴×۸=۱۶۰$$

هندسهٔ ۱

۱.

$$AD = BC \Rightarrow \hat{D}=\hat{C}=۶۰^\circ$$

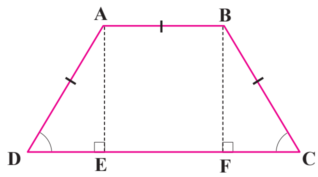
$$\frac{BF}{BC}=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow BC=\frac{۲BF}{\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

$$\frac{CF}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow CF=\frac{\sqrt{۳}}{۲},\ \Delta ADE\cong\Delta BFC\Rightarrow DE=\frac{\sqrt{۳}}{۲},$$

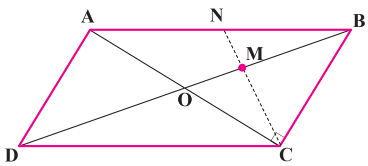
$$EF=AB=BC=\sqrt{۳}\Rightarrow DC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$\text{محیط}=AB+BC+AD+CD=۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت}=\frac{AB+CD}{۲}\times BF=\frac{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$



۲. بدیهی اســـت که در مثلث CAB، BO میانه است. همچنین با توجه به فرض و ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع می‌نویسیم:



$$MD=۲BM\Rightarrow MO+OD=۲(OB-OM)$$
$$=۲OB-۲OM,\ OB=OD\Rightarrow OB=۳OM$$
$$\Rightarrow MB=۲OM$$

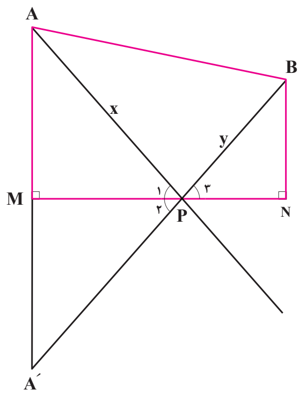
یعنی M نقطه‌ای روی میانهٔ OB است که آن را به نســـبت ۱ به ۲ تقســـیم کرده است. پس M نقطهٔ هم‌رسی میانه‌هاست و در نتیجه، CN میانهٔ نظیر رأس C اســـت و داریم: $CM=\frac{۲}{۳}CN$. در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $CM=\frac{۲}{۳}\times\frac{CD}{۲}=\frac{CD}{۳}$ و $CN=\frac{AB}{۲}=\frac{CD}{۲}$

۳. اگر B را به E وصل کنیم، مساحت مثلث‌های ABE و DBE را می‌توانیـــم بـــه کمک قضیهٔ پیک محاسبه کنیم. همچنین روشن است که داریم:

$$S_{ABE}-S_{DBE}=(S_{ABC}+S_{CBE})-(S_{DCE}+S_{CBE})$$
$$=S_{ABC}-S_{DCE}\Rightarrow S_{ABC}-S_{DCE}=S_{ABE}-S_{DBE}$$
$$=(\frac{۳}{۲}+۶-۱)-(\frac{۳}{۲}+۵-۱)=۱$$

هندسهٔ ۲

۱. موضع علی نقطهٔ B و موضع رضا نقطهٔ A است و طبق فـــرض داریـــم: AM=۲۵، BN=۱۶ و AB=۳۰. طبق آنچه از درس می‌دانیم، نقطه‌ای مانند P که AP+PB حداقل مقدار ممکن باشد، از برخورد A´B و d به دست می‌آید. (A´ بازتاب A نسبت به d ـ یا همان دیوار ـ است.) بنابراین مثلث PAA´ متساوی‌الســـاقین و PM ارتفاع و نیمســـاز زاویهٔ P در این مثلث اســـت و داریم: $\hat{P}_۱=\hat{P}_۲=\hat{P}_۳=\alpha$. بنابرایـــن در مثلث‌هـــای قائم‌الزاویهٔ APM و BPN داریم:



$$\sin\alpha=\frac{AM}{x}=\frac{۲۵}{x},\cos\alpha=\frac{PM}{x}$$
$$\sin\alpha=\frac{BN}{y}=\frac{۱۶}{y},\cos\alpha=\frac{PN}{y}$$

از این روابط به دست می‌آید:

$$\begin{cases}x\sin\alpha=۲۵\\y\sin\alpha=۱۶\end{cases}\begin{cases}x\cos\alpha=PM\\y\cos\alpha=PN\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)\sin\alpha=۴۱\\(x+y)\cos\alpha=MN\end{cases}$$

اما طول MN را به سادگی می‌توان در ذوزنقهٔ ABMN به دســـت آورد. اگـــر از B عمود BH را بر AM رســـم کنیم (برای پرهیز از شلوغی شکل رسم نشده است)، در مثلث ABH به کمک قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$AH^۲+BH^۲=AB^۲, AH=AM-BN=۲۵-۱۶=۹$$
$$\Rightarrow (MN=BH)$$
$$۹^۲+MN^۲=۳۰^۲\Rightarrow MN^۲=۹۰۰-۸۱=۸۱۹$$
$$\Rightarrow MN=\sqrt{۸۱۹}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(x+y)\sin\alpha=۴۱\\(x+y)\cos\alpha=\sqrt{۸۱۹}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)^۲\sin^۲\alpha=۱۶۸۱\\(x+y)^۲\cos^۲\alpha=۸۱۹\end{cases}$$

و از جمع کـــردن دو رابطهٔ اخیر و با توجه به اینکه $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ نتیجه می‌شود:

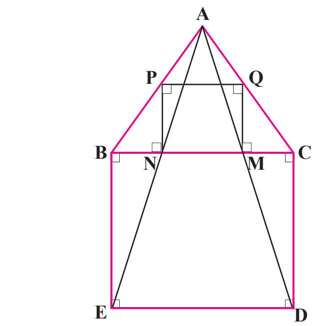
$$(x+y)^۲=۲۵۰۰\Rightarrow x+y=۵۰$$ (حداقل مسافت ۵۰ متر است)

۲. با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث‌ها داریم:

$$\frac{QM}{CD}=\frac{AQ}{AC}=k,\ \frac{AQ}{AC}=\frac{AP}{AB}=k$$

$$\Delta ABE:\ \frac{AP}{AB}=\frac{PN}{BE}=k$$

$$\Delta ABC:\ \frac{PQ}{CD}=\frac{AP}{AB}=k$$

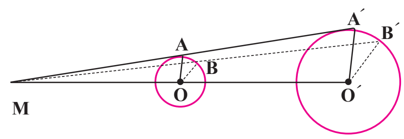


و با توجه به اینکه BCDE مربع است، یعنی BC=CD=BE، نتیجه می‌شود: PQ=QM=PN. با توجه به زاویه‌های قائمه نیز نتیجه می‌شود که PQMN مربع و مجانس مربع BCDE نسبت به مرکز تجانس A و ضریب k است:

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AE}=\frac{AQ}{AC}=\frac{AP}{AB}=k$$

۳. دایره‌های دلخواه C(O,r) و C´(O´,r´) را در صفحه در نظر می‌گیریم. شعاع دلخواه O´A´ را می‌کشیم و شعاع OA را موازی آن رسم می‌کنیم و A´A و O´O را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. با توجه به قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$$\frac{MA'}{MA}=\frac{MO'}{MO}=\frac{O'A'}{OA}=\frac{r'}{r}=k \quad (۱)$$



حال اگر از M به هر نقطهٔ دلخواه B روی دایرهٔ C وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایرهٔ C´ را در B´ قطع کند، با توجه به (۱) نتیجه می‌شود:

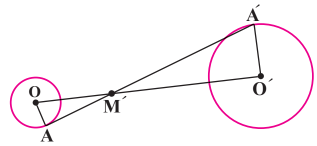
$$\frac{MO'}{MO}=k,\ \frac{O'B'}{OB}=\frac{r'}{r}=k$$

$\Rightarrow \frac{MO'}{MO}=\frac{O'B'}{OB}\Rightarrow$ (عکس قضیه تالس)

$$O'B' \parallel OB \Rightarrow \frac{MB'}{MB}=\frac{MO'}{MO}=\frac{r'}{r}=k$$

پس می‌توان گفت هر نقطه روی C´ مجانس نقطه‌ای روی C با ضریب تجانس $k=\frac{r'}{r}$ و مرکز تجانس M است. (برای یافتن M به ترتیبی که گفته شد عمل می‌کنیم.) همچنین می‌توان به طریق زیر، یک مرکز تجانس ثابت دیگر با ضریب k<۰ به دست آورد:

$$\frac{M'A'}{M'A}=\frac{O'A'}{OA}=k<۰$$



بنابراین می‌توان گفت هر دو دایرهٔ دلخواه همواره مجانس یکدیگر، نسبت به دو مرکز تجانس ثابت، یکی بین O و O´ و دیگری خارج از آن‌ها هستند. در حالت‌های خاص مانند r=r´ و یا اینکه دو دایره متقاطع یا مماس خارج باشند، موضوع قدری متفاوت می‌شود که بررسی آن‌ها به خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌شود.

ریاضی ۳ (رشته تجربی)

۱.

الف) $\lim_{x\to ۲} f(x)=۳$

ب) $\lim_{x\to ۲} g(x)=۴$

پ) $\lim_{x\to ۲} h(x)=$ وجود ندارد

۲.

الف) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} x^۲=(۰)^۲=۰,$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\sin x=\sin ۰=۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=۰$$

ب) $\lim_{x\to ۲^+} g(x)=\lim_{x\to ۲^+} ۲x-۱=۲(۲)-۱=۳,$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x)=\lim_{x\to ۲^-} x^۲=۲^۲=۴$$

$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x\to(-۱)^+} h(x)=\lim_{x\to -۱} ۳x=۳(-۱)=-۳$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} h(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(x-۱)=-۱-۱=-۲$$

$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}(x)=$ وجود ندارد

۳.

الف) $A=\sqrt{۵(۱)+۴}=\sqrt{۹}=۳$

ب) $B=(۳\times ۲-۱)^{\frac{۵}{۲}}=\sqrt{۴^۵}=۳۲$

پ) $C=\frac{(-۱)^۲+(-۱)}{(-۱)^۲-۲}=\frac{۰}{-۱}=۰$

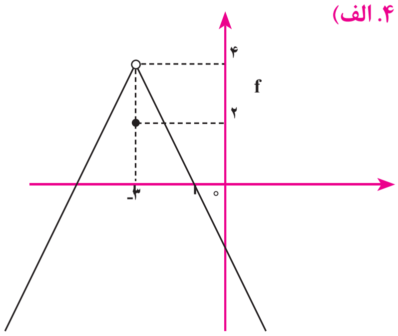
ت) $D=\frac{۰}{۰}\Rightarrow D=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{x-۲}$

$$=\lim_{x\to ۲}(x^۲+۲x+۴)=۲^۲+۴+۴=۱۲$$

ث) $E=\frac{۰}{۰}\Rightarrow E=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x+۱)}{(x+۱)(x-۱)}$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{-۱+۱}{-۱-۱}=\frac{۰}{-۲}=۰$$

۴. الف)

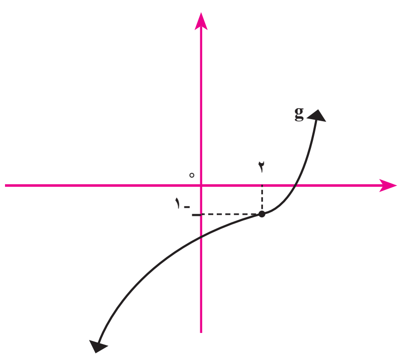


$$\lim_{x\to(-۳)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۳)^+} f(x)=\lim_{x\to -۳} f(x)=۴$$

ولی $f(-۳)=۲$

بنابراین f در ۳- پیوسته نیست.

ب)



$$\lim_{x\to ۲^-} g(x)=\lim_{x\to ۲^+} g(x)=f(۲)=-۱$$

بنابراین g در ۲ پیوسته است.

آمار و احتمال

۱. n=۷+۱۱+۱۰+۴+۳=۳۵ و تعداد دانش‌آموزانی که قد بیش از ۱۵۸ سانتی‌متر دارند عبارت است از: ۷=۳+۴ و چون: $\frac{۷}{۳۵}=۰/۲۰$، پس ۲۰٪ آن‌ها این ویژگی را دارند.

۲. الف)

$$\frac{x}{۵+x+۲۵+۵}=۰/۴\Rightarrow\frac{x}{۳۵+x}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=۲۳/۳$$

ب)

$$\frac{۵+۲۳/۳+۲۵}{۵+۲۳/۳+۲۵+۵}=\frac{۵۳/۳}{۵۸/۳}\approx ۰/۹۱$$

۳.

$$\frac{x_۱+...+x_۸+۳۵+۴۰}{۱۰}=۳۲/۵$$
$$\Rightarrow x_۱+...+x_۸=۳۲۵-۷۵=۲۵۰$$
$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{۲۵۰}{۸}=۳۱/۲۵$$

۴. الف)

$$f'_x=۱۰۰-(۱۷+۲۳+۲۲+۱۸)=۲۰$$
$$\Rightarrow \alpha=۰/۲۰\times۳۶۰=۷۲^\circ$$

ب)

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{\sum x_i \frac{f_i}{n}}{\sum \frac{f_i}{n}}$$
$$=\frac{۱\times۱۷+۲\times۲۳+۳\times۲۲+۴\times۲۰+۵\times۱۸}{۱۰۰}$$
$$=\frac{۲۹۹}{۱۰۰}=۲/۹۹$$

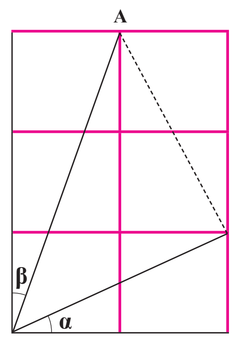
۵. در این مسئله ۸ داده وجود دارد، بنابراین:

$$\bar{x}=\frac{x_۱+...+x_۸}{۸}=\frac{۳۶۰}{۸}=۴۵$$

حسابان ۱

۱. مثلث OAB (شکل ۵) را در نظر می‌گیریم:

$$OB=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$$
$$OA=\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$$
$$AB=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$$



شکل ۵

چون: OB=AB، پس مثلث AOB متساوی‌الساقین است و چون: $OA^۲ = OB^۲+AB^۲$

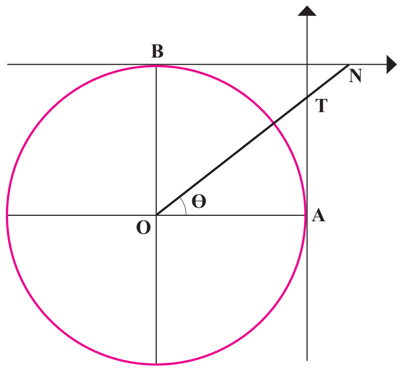
پس مثلث قائم‌الزاویه است. در نتیجه:

$$\hat{B}=۹۰^\circ, O\hat{A}B=A\hat{O}B=۴۵^\circ$$

از طرف دیگر داریم:

$$\hat{\beta}+A\hat{O}B+\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow\beta+۴۵^\circ+\alpha=۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow\alpha+\beta=۴۵^\circ$$

۲. در مثلث قائم‌الزاویه OAT (شکل ۶) داریم:



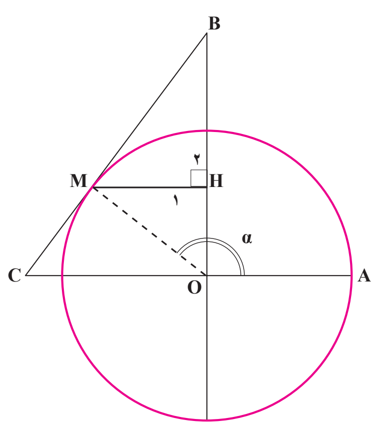
شکل ۶

$$\cos\theta=\frac{OA}{OT}=\frac{۱}{OT}\Rightarrow OT=\frac{۱}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta=\frac{AT}{OA}=\frac{AT}{۱}\Rightarrow AT=\tan\theta$$
$$OT^۲=OA^۲+AT^۲$$
$$(\frac{۱}{\cos\theta})^۲=۱+(\tan\theta)^۲\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta$$

تساوی دیگر به روش مشابه در مثلث OBN اثبات می‌شود. توجه کنید که: $O\hat{N}B=\theta$

۳.

$$MH=\cos\alpha$$
$$OH=\sin\alpha$$
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{HOM}=\widehat{BMH}\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OHM}\sim\overset{\Delta}{BOH}$$
$$\Rightarrow\frac{MH}{BH}=\frac{OH}{MH}\Rightarrow BH=\frac{MH^۲}{OH}=\frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}$$



۴. الف)

$$\sin۱۸^\circ\cos۳۶^\circ=\frac{\sin۱۸^\circ\cos۱۸^\circ\times\cos۳۶^\circ}{\cos۱۸^\circ}$$
$$=\frac{\frac{۱}{۲}\sin۳۶^\circ\times\cos۳۶^\circ}{\cos۱۸^\circ}$$
$$=\frac{\frac{۱}{۴}\sin۷۲^\circ}{\cos۱۸^\circ}$$
$$=\frac{\frac{۱}{۴}\cos۱۸^\circ}{\cos۱۸^\circ}$$
$$=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$$\frac{\cos۲۰^\circ+\sqrt{۳}\sin۲۰^\circ}{\cos۴۰^\circ}=\frac{۲(\frac{۱}{۲}\cos۲۰^\circ+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin۲۰^\circ)}{\cos۴۰^\circ}$$
$$=\frac{۲(\cos۶۰^\circ\cos۲۰^\circ+\sin۶۰^\circ\sin۲۰^\circ)}{\cos۴۰^\circ}$$
$$=\frac{۲\cos(۶۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos۴۰^\circ}=\frac{۲\cos۴۰^\circ}{\cos۴۰^\circ}=۲$$

۵. با توجه به اینکه: رادیان $\frac{\pi}{۶}=۳۰^\circ$ و رادیان $\frac{\pi}{۳}=۶۰^\circ$، اندازه محیط قسمت سایه‌خورده برابر است با:

$$R\times\frac{\pi}{۶}+r\times\frac{\pi}{۳}=۳\pi\Rightarrow R+۲r=۱۸$$

از طرف دیگر، محیط چهارضلعی OAO´B´ برابر است: ۲R+۲r=۳۰.

اگر طرفین دو رابطه اخیر را از هم کم کنیم، داریم: R=۱۲ و r=۳.

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱

بدیهی است که کوچک‌ترین این عددها از ده کمتر است، زیرا در غیر این صورت حاصل‌ضرب آن‌ها از 10^4 بزرگ‌تر می‌شود. با امتحان روشن می‌شود که هیچ‌یک از آن‌ها هم نمی‌توانند دورقمی باشند و ضمناً شامل ۵ هم نیستند. زیرا در غیر این صورت رقم یکان حاصل‌ضرب آن‌ها صفر می‌شود. پس این عددها باید ۶، ۷، ۸ و ۹ باشند (با ضرب آن‌ها درستی موضوع روشن می‌شود) و مجموع آن‌ها مساوی ۳۰ است (گزینهٔ د).

۲

می‌دانیم $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$ و اگر در این تساوی $x = 10^\circ$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ = \frac{3\tan 10 - \tan^3 10}{1 - 3\tan^2 10}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$9\tan 10 - 3\tan^3 10 = \sqrt{3} - 3\sqrt{3}\tan^2 10$$

و یا:

$$3\tan^3 10 - 3\sqrt{3}\tan^2 10 - 9\tan 10 + \sqrt{3} = 0$$

بنابراین $\tan 10^\circ$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $3x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 9x + \sqrt{3} = 0$ است و به سادگی می‌توان ثابت کرد $\tan 70$ و $-\tan 50$ هم‌ریشه‌های این معادله‌اند؛ زیرا:

$$\tan(3\times 70) = \tan 210 = \tan(180+30) = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 3(-50) = \tan(-150) = -\tan(180-30) = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ فوق $x_1 = \tan 10$ ، $x_2 = \tan 70$ و $x_3 = -\tan 50$ هستند و در نتیجه به کمک «قضیهٔ ویت» (روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ها) داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$= (\sqrt{3})^2 - 2(-3) = 9 \quad \text{(گزینهٔ ب)}$$

۳

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x^4+y^4}{x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$\Rightarrow x^4 + y^4 = xy(x^2+y^2) = x^3y + xy^3$$
$$\Rightarrow x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 = 0$$
$$\Rightarrow x^3(x-y) - y^3(x-y) = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)(x^3-y^3) = 0 \Rightarrow x = y \text{ یا } x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 1 + 1 = 2 \quad \text{(گزینهٔ د)}$$

۴

به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos C,$$
$$AB^2 = AC^2 + AC.BC$$
$$\Rightarrow AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos C = AC^2 + AC.BC$$
$$\Rightarrow BC^2 = 2AC.BC.\cos C + AC.BC$$
$$\Rightarrow BC = AC(2\cos C + 1)$$

و با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها می‌دانیم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

بنابراین:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2\cos C + 1 \Rightarrow 2\sin B.\cos C + \sin B = \sin A$$
$$\Rightarrow \sin(B+C) + \sin(B-C) + \sin B = \sin A$$

و چون A و B+C مکمل هم هستند، پس: $\sin(B+C) = \sin A$ و از آنجا داریم:

$$\sin(B-C) + \sin B = 0 \Rightarrow \sin B = \sin(C-B)$$
$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 2\hat{B}$$

از رابطهٔ دوم نیز با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها نتیجه می‌شود:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$
$$= AB^2 + AC^2.AB.AC$$
$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^\circ, C = 2B$$
$$\Rightarrow \hat{B} = 40^\circ, \hat{C} = 80^\circ$$

بنابراین اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث 80° است (گزینهٔ ب).

۵

اگر کسر فوق مربع یک کسر گویا باشد، حاصل‌ضرب صورت و مخرج آن هم مربع کامل است؛ یعنی:

$$(a+3)(a+13) = k^2 \Rightarrow a^2 + 16a + 39 = k^2$$
$$\Rightarrow (a+8)^2 - k^2 = 25 \Rightarrow (a+8+k)(a+8-k) = 25$$

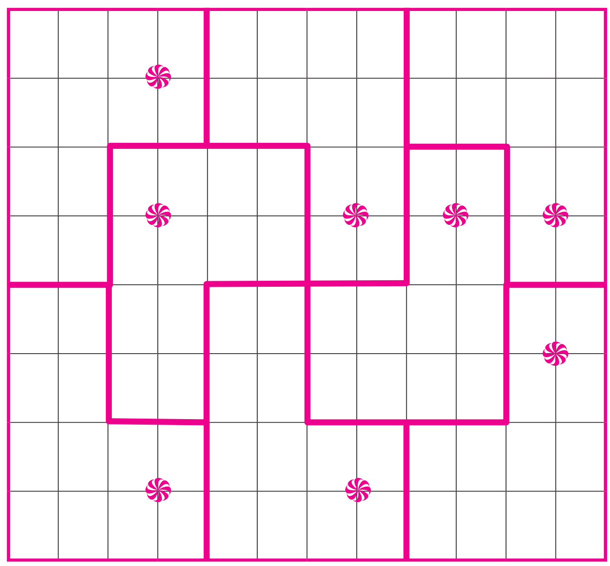
بنابراین:

$$\begin{cases} a+8+k = 25 \\ a+8-k = 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a+8+k = 5 \\ a+8-k = 5 \end{cases}$$

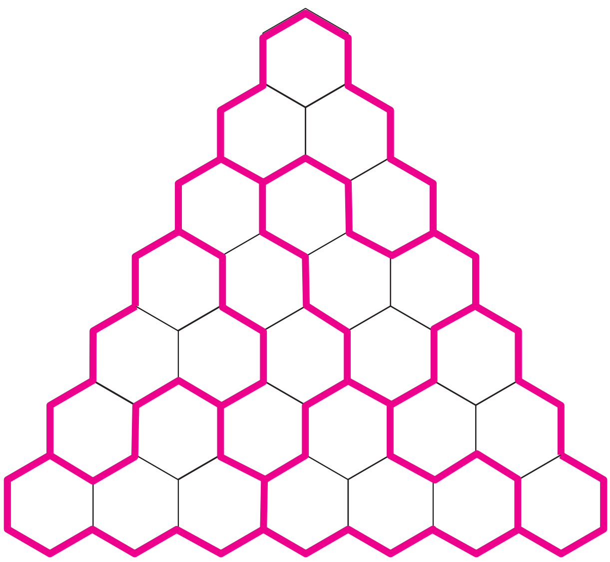
از دستگاه دوم نتیجه می‌شود: $a=-5$ و از دستگاه اول جوابی قابل قبولی به دست نمی‌آید. پس تنها جواب به ازای $a=-5$ حاصل می‌شود که کسر $\frac{8}{18}$ یا $\frac{4}{9}$ است (گزینهٔ ب).

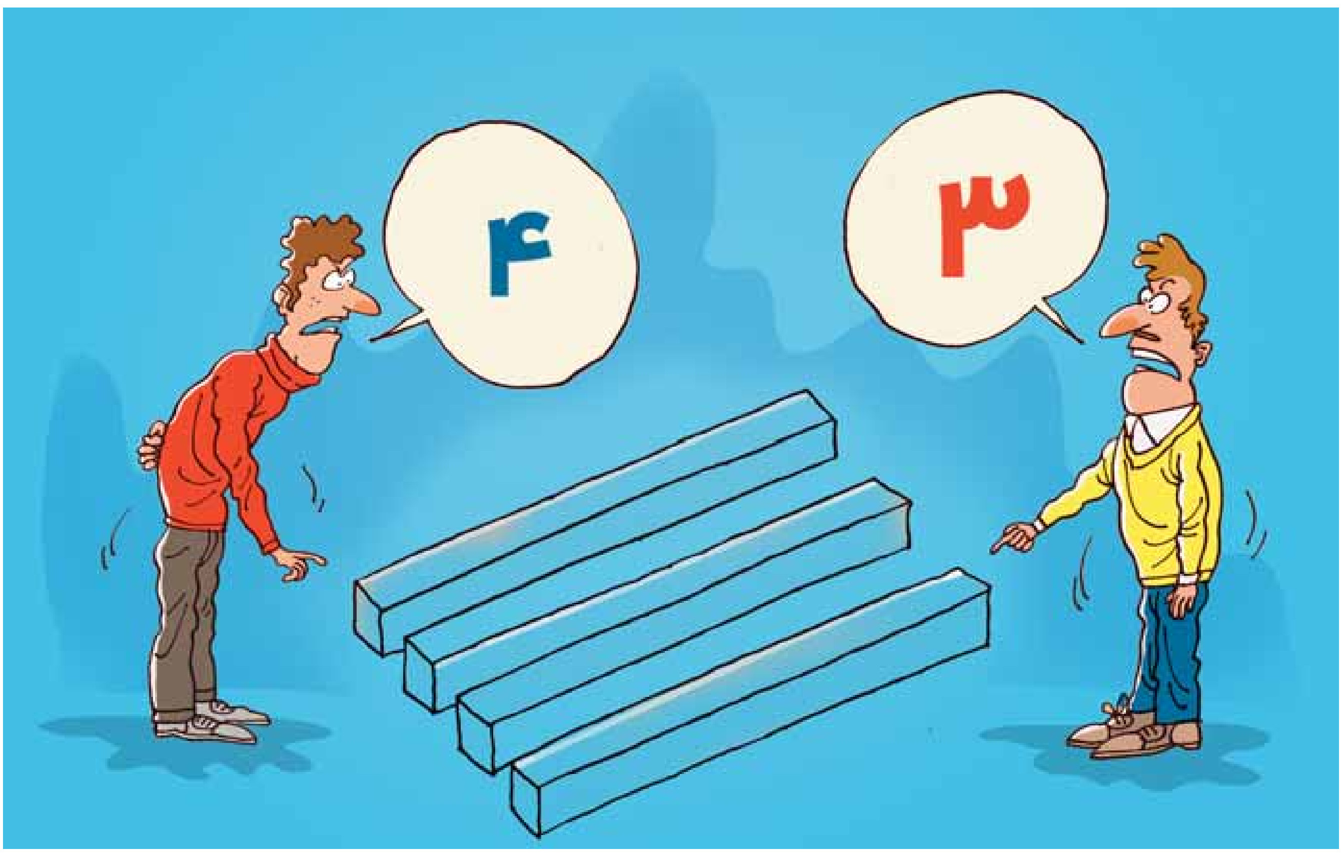
ایستگاه دوم

داستان اول:



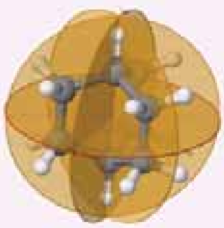
داستان دوم:




۴
۳

گروه‌های متقارن[1] لقته

«نظریهٔ گروه‌ها» از اواخر قرن هجدهم میلادی وارد ریاضیات شد. پیشگامان طرح این بحث کسانی همچون **اویلر** (ریاضی‌دان سوئیسی ۱۷۸۳-۱۷۰۷) **گاوس** (ریاضی‌دان آلمانی ۱۸۵۵-۱۷۷۷)، **لاگرانژ** (ریاضی‌دان ایتالیایی ۱۸۱۳-۱۷۳۶)، **گالوا** (ریاضی‌دان فرانسوی ۱۸۳۲-۱۸۱۱) و **آبل** (ریاضی‌دان نروژی ۱۸۲۹-۱۸۰۲) بودند. شروع بحث تعریف یک گروه است. مجموعهٔ G همراه با عمل دوتایی $*$[2] یک گروه نامیده می‌شود، هرگاه این چهار خاصیت را داشته باشد:



۱. برای هر $a,b\in G$، $a*b\in G$ (یعنی G نسبت به عمل $*$ بسته باشد).

۲. برای هر $a,b,c\in G$ $a*(b*c)=(a*b)*c$ (خاصیت شرکت‌پذیری).

۳. لااقل یک عضو e در G داشته باشیم که برای هر $a\in G$، $a*e=e*a=a$ (وجود عضو خنثی).

۴. برای هر عضو $a\in G$، عضو یکتای a' وجود داشته باشد، به‌طوری که: $a'*a=a*a'=e$ (وجود عضو وارون برای هر عضو) و اگر G با عمل $*$ خاصیت جابه‌جایی هم داشته باشد، یعنی برای هر $a,b\in G$، $a*b=b*a$، G را یک گروه جابه‌جایی (آبلی) می‌نامیم.

اکنون به سادگی می‌توانید دریابید که مثلاً مجموعهٔ Z با عمل + (جمع) یک گروه جابه‌جایی است. یکی از مهم‌ترین بحث‌ها در نظریهٔ گروه‌ها، بحث گروه‌های متقارن است که کاربردهای زیادی در فیزیک کوآنتم، شیمی، طراحی و معماری، و... دارد. گروه‌های متقارن ارتباط نزدیکی با تبدیل‌های هندسی دارند. تبدیل‌های هندسی که شکل‌های هندسی را به روی خود آن‌ها تصویر می‌کنند، «تبدیل‌های متقارن» نامیده می‌شوند. این تبدیل‌ها کاربردهای زیادی در مباحثی که با شکل‌های متقارن سروکار دارند، می‌توانند داشته باشند؛ مباحثی چون بلورشناسی، زیست‌شناسی، طراحی و معماری و حتی بافندگی و صنایع پوشاک!

این موضوع بسیار جالبی است، از آن نظر که بحث «جبر مجرد یا انتزاعی» از مباحث محض ریاضی بوده است و هرگز در آغاز طرح آن، تصویر اینکه این‌طور جنبهٔ کاربردی آن مطرح شود، وجود نداشت. ولی زیبایی و سیال بودن مباحث ریاضی چنان است که از درون این بحث خشک و انتزاعی، کاربردهایی به این زیبایی بیرون می‌آید!

پی‌نوشت‌ها

۱. برای اطلاع بیشتر از این بحث، مقالهٔ تقارن در شکل‌های متناهی را در همین شماره مطالعه نمایید.

۲. یک عمل دوتایی روی یک مجموعه، تابعی است که به هر دو عضو مجموعه یک عضو یکتای آن را نسبت می‌دهد. مثلاً عمل دوتایی ضرب روی مجموعه عددهای طبیعی، به زوج (۲,۳) عدد ۶ را نسبت می‌دهد: ۶=۳×۲.