

ریاضی

ISSN: 1735-4951



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهشی و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



دوره بیست و هفتم

شماره ۱۰۵

آذر ۱۳۹۶

۴۸ صفحه



۱۱۰۰ ریال

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



نسبت طلایی در ۱۶ اثر باستانی جهان ➤ مسئله کارگاه کیف و کفش و آقای آشفته

تکامل نقش های هندسی در فرش ایرانی ➤ مدل مثلث خیام در بازی پین بال ➤ چقدر زمین می خواهی!؟

بوعلی سینا

آلبوم ریاضیات

احسان یارمحمدی

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجله ریاضی رشد برهان دوره دوم متوسطه است که به معرفی و ارائه تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد و هدف آن آشنا ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانه انسان‌هاست. به این منظور در هر شماره، ابتدا سطرهایی درباره ریاضی‌دان موردنظر ارائه می‌کنیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم. ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا، مشهور به «بوعلی سینا»، «ابن سینا»، و «پورسینا» زاده ۳۵۹ هـ. ش در بخارا و در گذشتۀ ۲ تیر ۴۱۶ در همدان، یکی از نام‌دارترین دانشمندان ایران‌زمین و جهان است که در ریاضیات، ستاره‌شناسی، فلسفه و پزشکی شهره آفاق بود و با دو کتاب گران‌سنگ خود به نام‌های «القانون فی الطب» و «شفا»، خدمت بی‌شماری را به جامعه بشری عرضه داشته است. موضوع این شماره آلبوم ریاضیات ابوعلی سینا است. امیدواریم ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با بررسی محتوای این مقاله به جایگاه برجسته بوعلی سینا در فرهنگ ملل دیگر پی ببرند.



۱. تمبر منتشر شده در الجزایر در سال ۱۹۸۰
۲. تمبر منتشر شده در جمهوری دموکراتیک آلمان (آلمان شرقی) در سال ۱۹۵۲
۳. تمبر منتشر شده در فرانسه در سال ۲۰۰۵
۴. تمبر منتشر شده در جمهوری مالی در سال ۱۹۸۰
۵. تمبر منتشر شده در جمهوری تونس در سال ۱۹۸۰
۶. تمبر منتشر شده در کویت در سال ۱۹۶۹
۷. تمبر منتشر شده در لیبی در سال ۱۹۸۰



ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی در پی ۱۰۵
- آذر ۱۳۹۶
- شماره ۳
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال



حرف اول

در کلاس درس ریاضی / سردبیر ۲

آموزشی

- چقدر زمین می خواهی؟! / حسین کریمی ۳
- مدل مثلث خیام در بازی پین بال / مریم شاه محمدی ۶
- ریاضی کاربردی در فیزیک (۲) - هنر نابغه! / هوشنگ شرقی ۱۴
- روش تقریب جذر عددها به کمک نامساوی حسابی - هندسی / حسین قاسم دامغانی ۱۶
- تکامل نقش های هندسی در فرش ایرانی / قاسم حسین قنبری ۲۰
- مسئله کارگاه کیف و کفش و آقای آشفته / حسین نامی ساعی ۲۴
- پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳۰
- نسبت طلایی در ۱۶ اثر باستانی جهان / عباس قلعه پور اقدم ۳۴
- مسائل برای حل ۴۰

ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین ستاره ها: ابوعلی سینا - ۲۷۹ اثر به یادگار / احسان یارمحمدی ۱۰

آموزش ترجمه متون ریاضی

افرازاها / حمیدرضا امیری ۲۸

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: جدول عددی با رمز و جایزه! / هوشنگ شرقی ۹
- ایستگاه دوم: یک داستان و یک معما! ۱۹
- ایستگاه سوم: یک حکایت جالب، داستان یک نامه! ۲۷

پرسش های پیکارچو! ۹-۱۵-۳۳-۳۹-۴۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه ها، ایمیل ها و ... ۴۷

پاسخ ها

- راهنمای حل مسائل ۴۲
- پاسخ پرسش های پیکارچو! ۴۶
- پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیامنگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیر مسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرده غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محرم نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:

www.roshdmag.ir

پیامنگار:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:

http://weblog.roshdmag.ir/borhanmotevasete2

پیامگیر نشریات رشد:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک:

۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

roshdmag

نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله:

۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

تلفن امور مشترکین:

۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵

شمارگان:

۹۰۰۰ نسخه

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۷۵-۱۵۸۷۵

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

در کلاس درس ریاضی

در ساختمان‌سازی و معماری اولین و شاید مهم‌ترین پارامتری که مدنظر مهندسان قرار می‌گیرد، مقاومت زمین و به تبع آن استفاده از بهترین مصالح و ستون‌ها برای ایوار پایه‌ای قوی و مقاوم برای ساختمان است. اگر پایه و اساس درست و مکتوم باشد، می‌توان به بقیه موضوع‌ها و ضروریات دیگر با خیال راحت و آسوده پرداخت. در امر یادگیری و علم آموزی نیز چنین است، یعنی اگر بخواهیم با خیال راحت به امر یاددهی - یادگیری پردازیم، باید از پایه و اساس قوی و مطمئن برخوردار باشیم و در این حالت است که می‌توان روی پایه‌ها و ستون‌های مکتوم بقیه علم را بنا کرد.

مثلاً در آموزش علم ریاضی، اگر شما در مفهوم اتاها مشکل داشته باشید و از پایه‌ای قوی در اتاها برخوردار نباشید، چگونه می‌توانید کاربردهای آن‌ها را در تئریه و در حل معادلات، یاد بگیرید؟

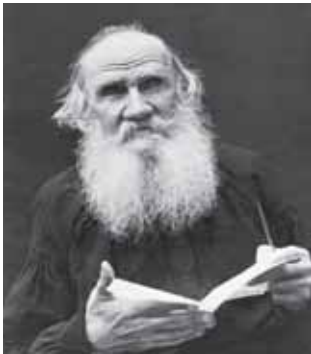
همهٔ معلمان و دبیران ریاضی برای شروع تدریس یک موضوع یا مبحث ریاضی به‌طور عتم به مبانی و پیش‌نیازهای آن موضوع می‌پردازند و اینجا همان جایی است که شما باید دقت و تمرکز مضاعف به‌کار ببرید تا این پایه‌ها و مبانی را خوب یاد بگیرید و بتوانید بقیهٔ موارد مربوط به آن مبحث را با خیال راحت و اطمینان فرا بگیرید.

یکی از توصیه‌های من به شما در کلاس درس ریاضی این است که تمرکز داشته باشید و با هوشیاری کامل، به مضم اینک پیش‌نیازها و مبانی یک موضوع درسی از طرف دبیر ریاضی تان مطرح می‌شود، به دقت آن مبانی را یاد بگیرید و روی آن‌ها تمرین کنید.

همیدر فنا امیری
سر دبیر

حقدار زمین می خواهی؟!!

اشاره



اگر اهل مطالعه و علاقه‌مند به داستان و رمان باشید، احتمالاً با نام *لئون تولستوی*، نویسنده بزرگ روسی (۱۹۱۰-۱۸۲۸)، آشنا هستید و رمان‌های معروف او، «جنگ و صلح» و «آنا کارنینا» را می‌شناسید و شاید هم خوانده باشید. اما تولستوی علاوه بر ادبیات، در تمام عمر به ریاضیات عملی و سرگرمی‌های ریاضی علاقه خاصی داشت و گاه مسائلی هم طرح می‌کرد. به‌خصوص در دوره‌ای که برای کمک به مردم روستاهای کشورش دست به کار تأسیس مدارس روستایی زد و کتاب الفبا را برای آموزش آن‌ها نوشت و در آن مسئله‌هایی به عنوان تفریح و اندیشیدن مطرح کرد. یکی از مسائل این کتاب چنین است: «از بین سه شکل مربع، شش ضلعی و دایره با محیط ثابت، کدام یک دارای مساحت بیشتری است؟»

داشته باشد؟! مربع، شش ضلعی، یا دایره؟» به زبان ریاضی: از بین سه شکل مربع، شش ضلعی و دایره با محیط‌های برابر، کدام یک مساحت بیشتری دارد؟ پاسخ به این سؤال چندان دشوار نیست. اگر محیط هر سه شکل مساوی مقدار معین L باشد، در این صورت با فرض اینکه طول ضلع مربع a باشد، $4a=L$ و در نتیجه $a = \frac{L}{4}$ و مساحت مربع نیز برابر است با:

$$S = a^2 = \frac{L^2}{16}$$

در مورد شش ضلعی داریم:

$$6a = L \Rightarrow a = \frac{L}{6}, S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}L^2}{24}$$

و در مورد دایره:

$$2\pi r = L \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}, S = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

از مقایسه این سه مقدار به سادگی متوجه می‌شویم که مساحت دایره از شش ضلعی بیشتر و مساحت شش ضلعی هم از مربع بیشتر است. به‌طور شهودی احساس می‌شود، اگر شکل بسته به‌صورت چندضلعی منظم با تعداد ضلع‌های بیشتری باشد، مساحت آن بیشتر می‌شود. لذا هرچه به دایره نزدیک‌تر شود، مساحت بیشتری خواهد داشت.

اگرچه در داستان تولستوی طمع پاهوم او را گرفتار کرد و در نهایت چند دقیقه قبل از غروب آفتاب، در پایان راه‌پیمایی

پیش از پرداختن به مسئله فوق، بد نیست به یکی از داستان‌های کوتاه تولستوی به نام «یک آدم حقدار زمین می‌خواهد؟» اشاره کنیم. این داستان کوتاه و بسیار زیبا با ترجمه وحید نیکخواه آزاد، نخستین بار در سال ۱۳۵۹، توسط مجله «کیهان بچه‌ها» منتشر شد و مطالعه آن را (که نسخه الکترونیکی آن را در اینترنت می‌توانید



حسین کریمی

بیابید) به شما توصیه می‌کنیم. در این داستان دهقانی فقیر به نام پاهوم با تلاش زیاد صاحب زمین می‌شود و هر چند وقت یک‌بار زمینش را گسترش می‌دهد. رفته‌رفته طمع داشتن زمین بزرگ‌تر او را به مهاجرت به شهرهای دورتر می‌کشاند تا در نهایت به جایی می‌رود که در آنجا زمین رایگان است و او می‌تواند با حرکت کردن از یک نقطه و بازگشت به همان‌جا، محیطی را طی کند و تمام زمین‌های محصور در آن محیط به خودش تعلق گیرد! فقط مدت زمان حرکت محدود است به زمان طلوع تا غروب خورشید. شهود ریاضی در نگاه تولستوی روشن است و احتمالاً آن مسئله را هم با نگاه به همین داستان طرح کرده است.

چون زمان حرکت محدود است، پس محیط زمینی که پاهوم می‌تواند محصور کند هم محدود و ثابت است. اکنون سؤال این است: «پاهوم روی چه مسیری حرکت کند تا زمینش حداکثر مساحت را

از بین همه شکل‌های
بسته هندسی
با محیط ثابت،
دایره دارای بیشترین
مساحت است

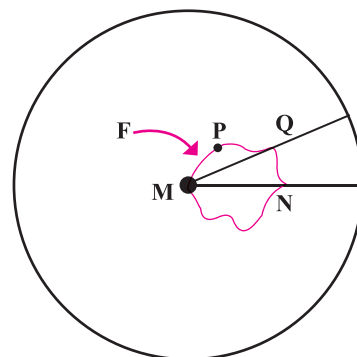


طولانی‌اش (که برای زیاد کردن زمینش مرتباً آن را بیشتر می‌کرد!) جان به جان آفرین تسلیم کرد، اما واقعیت این است که او برای آنکه مساحت زمینش را حداکثر کند، باید مسیری دایره شکل را می‌پیمود! و این یک قضیه معروف ریاضی موسوم به «قضیه هم پیرامونی» است که می‌گوید:

از بین همه شکل‌های بسته هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشترین مساحت است.

در اینجا می‌کوشیم با زبانی ساده اثباتی مقدماتی از این قضیه ارائه دهیم. ابتدا باید به پاسخ این سؤال بپردازیم که: چرا منحنی‌های بسته با محیط معلوم L ، دارای مساحت محدود هستند؟

نقطه M را روی منحنی بسته F که طول محیط آن L است در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{L}{4}$ رسم می‌کنیم (شکل ۱).



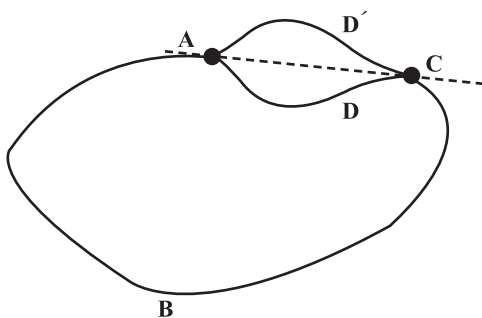
شکل ۱

نقطه N را روی منحنی بسته چنان اختیار می‌کنیم که طول کمان MN برابر با نصف محیط F ، یعنی برابر $\frac{L}{4}$ باشد. وتر MN از شکل F کوچک‌تر از کمان MN است؛ یعنی: $MN < \frac{L}{4}$. بنابراین N درون دایره قرار می‌گیرد.

نقطه دلخواه Q را روی شکل F در نظر می‌گیریم. چون وتر MQ کوچک‌تر از کمان MPQ است و کمان MPQ نیز کوچک‌تر از نصف محیط است، بنابراین: $MQ < \frac{L}{4}$. یعنی Q نیز درون دایره $(M, \frac{L}{4})$ واقع است. پس کل شکل F با محیط L در درون دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{4}$ واقع می‌باشد و مساحت آن همواره از $\pi(\frac{L}{4})^2$ کوچک‌تر است. اکنون قبل از اثبات درستی نظریه حدس زده شده، به یک تعریف و اثبات چند لم می‌پردازیم.

تعریف: یک شکل را هنگامی «شکل ماکزی‌مم» گوئیم که بین شکل‌های هم محیط با خود دارای بیشترین سطح باشد.

لم ۱. هر شکل ماکزی‌مم که محیط آن داده شده، محدب است. نشان می‌دهیم که اگر شکل ماکزی‌مم مقعر باشد، به تناقض برمی‌خوریم. منحنی بسته و مقعر $ABCD$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم این شکل ماکزی‌مم است (شکل ۲).

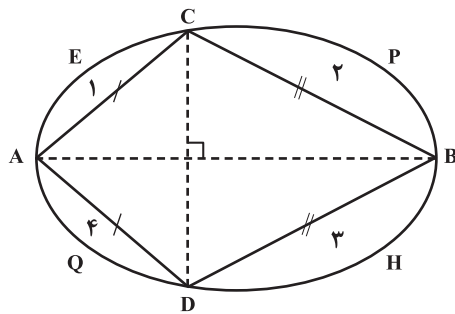


شکل ۲

قرینه کمان ADC را نسبت به خط AC ، کمان $CD'A$ می‌نامیم. محیط هر دو منحنی بسته برابرند، اما مساحت منحنی $ABCD'A$ بیشتر از مساحت منحنی $ABCD$ است که این مغایر با ماکزی‌مم بودن منحنی بسته و مقعر $ABCD$ است. بنابراین فرض مقعر بودن «شکل ماکزی‌مم» باطل است.

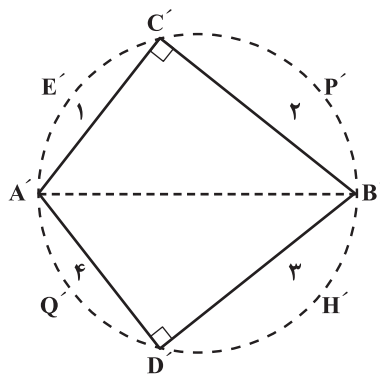
لم ۲. اگر منحنی F ، یک شکل ماکزی‌مم باشد، هر تری که محیط F را نصف کند، مساحت داخل این منحنی را نیز نصف می‌کند.

منحنی بسته F را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این منحنی ماکزی‌مم است (یعنی F شکلی است که مساحتش از مساحت تمام منحنی‌های بسته‌ای که محیطشان برابر محیط منحنی F است، بیشتر است). روی منحنی F نقطه دلخواه A را در نظر می‌گیریم. روی این منحنی نقطه یکتای B وجود دارد، به طوری که وتر AB محیط منحنی را نصف می‌کند (شکل ۳). یعنی



شکل ۴

برای اثبات این حکم ثابت می‌کنیم که اگر خلاف آن را بپذیریم، به تناقض می‌رسیم. اگر هر دو زاویه ACB و ADB قائمه نباشند، آن‌گاه چهارضلعی $A'C'B'D'$ را طوری می‌سازیم که زاویه‌های C' و D' قائمه و اضلاع $A'C'$ و $B'D'$ ، $C'B'$ و $A'E'$ ، $C'P'$ ، $B'H'$ ، $D'Q'$ و $A'Q'$ را به ترتیب مساوی (قابل انطباق) با کمان‌های AEC ، CPB ، BHD ، CPB ، AEC و DQA رسم می‌کنیم و منحنی جدید را F' می‌نامیم.

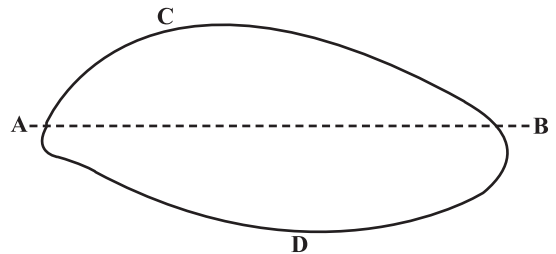


شکل ۵

منحنی F' شامل ۵ قطعه است:

۱. قطعه $A'E'C'$ که قابل انطباق با قطعه AEC از F است.
 ۲. قطعه $C'P'B'$ که قابل انطباق با قطعه CPB از F است.
 ۳. قطعه $C'E'D'$ که قابل انطباق با قطعه CED از F است.
 ۴. قطعه $D'Q'A'$ که قابل انطباق با قطعه DQA از F است.
 ۵. چهارضلعی $A'C'B'D'$ که دارای مساحتی بزرگ‌تر از مساحت چهارضلعی $ACBD$ از F است ($S_{B'A'D'} > S_{BDA}$ ، $S_{A'C'B'} > S_{ACB}$).
- پس مساحت F' بزرگ‌تر از مساحت F است که خلاف ماکزی‌م بودن شکل F است. در نتیجه فرض غیرقائم بودن زاویه‌های C' و D' باطل است. بنابراین هر وتری که محیط منحنی ماکزی‌م F را به دو کمان هم طول بخش کند، از تمامی نقاط منحنی F به زاویه قائمه دیده می‌شود. پس منحنی F که شکلی ماکزی‌م است، در واقع دایره است.

طول کمان ACB برابر طول کمان ADB است. حکم این است که مساحت قطعه ADB برابر مساحت قطعه ACB است. برای اثبات این حکم، ثابت می‌کنیم که اگر خلاف آن را بپذیریم به تناقض می‌رسیم.



شکل ۳

به این منظور فرض می‌کنیم که مساحت قطعه ADB بزرگ‌تر از مساحت قطعه ACB است. قرینه قطعه ADB را نسبت به خط AB می‌سازیم و آن را $AD'B$ می‌نامیم. محیط منحنی $ADBD'A$ حاصل از اجتماع دو کمان ADB و $AD'B$ با محیط منحنی F مساوی است، اما مساحت آن که دو برابر مساحت قطعه ADB است، بیش از مساحت F است که نشان می‌دهد، منحنی F ماکزی‌م نیست. اگر بپذیریم که مساحت قطعه ADB کوچک‌تر از مساحت قطعه ACB است، با به کارگیری همان شیوه استدلال قید شده در بالا به تناقض می‌رسیم.

از لم ۲ علاوه بر نتیجه «هر وتری که محیط یک شکل ماکزی‌م را نصف کند، مساحت آن را نیز نصف می‌کند» می‌توان نتیجه دیگری نیز گرفت؛ اینکه: «شکل ماکزی‌م دارای محور تقارن است.» چرا که اگر قرینه نصف شکل ماکزی‌م F را نسبت به آن وتر رسم کنیم، به شکل F' می‌رسیم که دارای محور تقارن و هم‌محیط و هم‌مساحت با F است. پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر F یک منحنی بسته ماکزی‌م باشد، قطعاً محور تقارن خواهد داشت.

لم ۳. مساحت مثلث ABC با فرض ثابت بودن اندازه‌های AC و BC در صورتی به حداکثر می‌رسد که مثلث در رأس C ، قائمه باشد.

اثبات: با توجه به فرمول محاسبه مساحت مثلث، یعنی $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin \hat{C}$ ، اگر AC و BC ثابت باشند، حداکثر S در صورتی رخ می‌دهد که $\sin \hat{C}$ به حداکثر برسد؛ یعنی $\hat{C} = 90^\circ$.

قضیه: بین تمام شکل‌های سطح که دارای محیط برابرند، دایره بزرگ‌ترین مساحت را دارد. فرض می‌کنیم منحنی بسته شکل ۴ همان شکل ماکزی‌م F با محور تقارن AB است. نقطه دلخواه C را اختیار می‌کنیم و قرینه آن را نسبت به AB ، D می‌نامیم. ادعا می‌کنیم چهارضلعی $ACBD$ در رأس‌های C و D قائمه‌اند.

مدل مثلث خیام در بازی پین بال



اشاره



مریم شاه محمدی
مدرس ریاضی شهر تهران

امروزه، مدل‌های ریاضی و فرایند مدل‌سازی ریاضی، به‌عنوان یک نوآوری و روش خلاق در امر یاددهی و یادگیری مطرح است. از دیدگاه آموزشی، ارائه‌های فعال و مدل‌های پویا، چالشی بزرگ محسوب می‌شوند. بنابراین موضوع مطالعات متعددی هستند که تأثیر مثبت در یادگیری مفاهیم ریاضی را تأیید و به‌طور خاص، ارتباط مفاهیم ریاضی با زندگی واقعی را تثبیت می‌کنند. در عصر حاضر که شاهد رشد لحظه به لحظه فناوری‌های الکترونیکی هستیم و بازی‌های رایانه‌ای به مصداق یکی از جذاب‌ترین محصولات این عصر، مدت زمان طولانی از اوقات فراغت افراد را به خود مشغول ساخته است، رسالت آموزش‌های غیررسمی در جهت واکاوی اصول ریاضی حاکم بر این‌گونه بازی‌ها و ضمنی‌سازی یادگیری در قالب تفریح و سرگرمی بیش از پیش آشکار شده است. هدف از نگارش مقاله حاضر بیان یک نمونه ساده از مدل‌سازی قوانین ریاضی در آموزش‌های مدرسه‌ای است. لذا روند یک بازی رایانه‌ای (بازی پین‌بال) با یک مدل پایه، بیان شده، و چگونگی ارتباط آن با قانونمندی‌های ریاضی، نظیر الگوها و مثلث خیام، مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: مدل، الگوهای ریاضی، مثلث خیام، بازی رایانه‌ای، پین‌بال

مقدمه

بی‌شک طرفداران بازی‌های اندرویدی یا حتی رایانه‌ای به این موضوع واقفاند که بازی پین‌بال -- یکی از پرطرفدارترین بازی‌های روز دنیا به‌شمار می‌رود. پین‌بال بازی سرگرم‌کننده و جذابی برای رایانه و تبلت است و با مراحل مهیج خود می‌تواند ساعت‌ها اوقات فراغت کاربران را پر کند. در این بازی، کاربر باید مراقب توپ خود باشد و آن را به قسمت‌های متفاوت به گونه‌ای پرتاب کند که از سطح بازی خارج نشود. همچنین باید تلاش خود را به‌کار گیرد تا توپ از دور خارج نشود و بتواند امتیاز بیشتری کسب کند (شکل ۱).

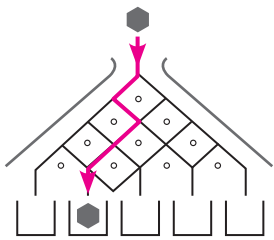


شکل ۱. نمایش بازی رایانه‌ای پین‌بال

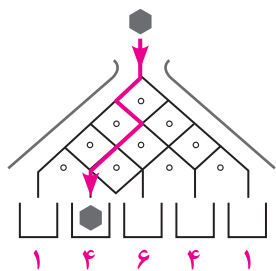
یک مدل پایه

مدلی که در شکل ۲ نشان داده شده، نمونه ساده‌ای از ماشین پین‌بال است که به سادگی و با داشتن یک تخته چوبی، یک مهره یا تیله شیشه‌ای، ۱۰ عدد گل‌میخ و ۵ عدد جام، می‌توان آن را تشکیل داد. گل‌میخ‌ها به ترتیب یک الگوی مثلثی در تخته قرار داده شده‌اند. یک گل‌میخ در بالاترین سطر، دو گل‌میخ در سطر دوم و سه تا در سطر سوم و به همین ترتیب ... و فضای کافی برای اینکه تیله بتواند بین آن‌ها حرکت کند.

برای شروع، تخته را به اندازه زاویه کوچکی به حالت شیب‌دار نگه می‌داریم و تیله را رها می‌کنیم، به طوری که به بالای اولین گل‌میخ اصابت کند و وسط بایستد.

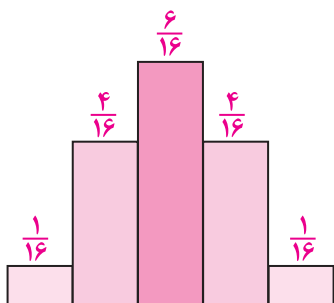


شکل ۲. مدل‌سازی پایه برای پین‌بال



شکل ۳. تعداد مسیرهای منتهی به هر جام

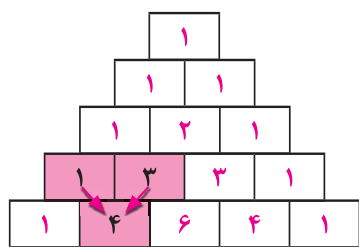
بدین ترتیب می‌توان در هر حالت، احتمال هدایت شدن تیله به هر یک از جام‌ها را نیز محاسبه کرد که در مدل مذکور، نمودار توزیع احتمال نرمال است (شکل ۴).



شکل ۴. نمایش توزیع احتمال در مدل

مثلث خیام

مثلث خیام مثلثی عددی است که مانند بسیاری از جدول‌های عددی دیگر پیشینه کهنی دارد (شکل ۵). قبل از هر چیز باید در نظر داشت که مثلث خیام به‌طور پیوسته ادامه می‌یابد و در مدل پایه‌ای مذکور، فقط پنج سطر اول آن نشان داده شده است.



شکل ۵. نمایش مثلث خیام

تیله برای انحراف به چپ یا راست گل میخ اول، شانس‌های برابر خواهد داشت و بازی با انحراف تیله به سمت راست یا چپ در سطر دوم و سطرهای بعدی ادامه می‌یابد، تا اینکه نهایتاً به یکی از جام‌های انتهایی هدایت شود. برای اینکه شانس حرکت مهره به سمت چپ و راست در مراحل بازی یکسان باشد، گاهی لازم خواهد شد که تخته را کمی منحرّف کنیم. بدین ترتیب با حرکت کردن تیله بین یک پین در هر یک از چهار ردیف پین‌ها، یک مسیر تصادفی طی خواهد شد. تمامی مسیرهای متفاوت و ممکن با خط‌های خاکستری و یک مسیر جزئی و خاص به وسیله خط قرمز نشان داده شده است (شکل ۲).

در مدل حاضر، مسیر مشخص شده را با علامت «LRL» توصیف می‌کنیم. به این معنی که تیله از سمت چپ اولین پین منحرّف شده و در جهت راست، حول پین سطر دوم حرکت کرده و سمت چپ پین‌های سطر سوم و چهارم مسیر خود را ادامه داده است.

مسئله ۱. چه تعداد مسیر متفاوت به‌وسیله این ماشین پین‌بال قابل نمایش و طی کردن است؟

پاسخ: اگر تمام حالت‌های ممکن با روش فوق علامت‌گذاری شود، پاسخ سؤال که ۱۶ مسیر مختلف است، مشخص خواهد شد: «LLL» و «LLLR» و «LLRL» و «LRL» و «RLLL» و «LRLR» و «LLRR» و «LRRR» و «RRLL» و «RLLR» و «RRRL» و «RRRR».

مسئله ۲. تعداد مسیرهایی که در انتها به یک جام منتهی می‌شوند، کدام است؟

پاسخ: برای پاسخ‌گویی به این سؤال کافی است فهرست مرتب شده زیر، براساس اینکه هر مسیر شامل چه تعداد تغییر جهت به سمت راست است، در نظر گرفته شود:

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۰

(تیله به چپ‌ترین جام هدایت خواهد شد و تنها یک مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۱

(تیله به دومین جام هدایت خواهد شد و چهار مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۲

(تیله به سومین جام هدایت خواهد شد شش مسیر وجود خواهد داشت.)

تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۳

(تیله به چهارمین جام هدایت خواهد شد و چهار مسیر وجود خواهد داشت.)

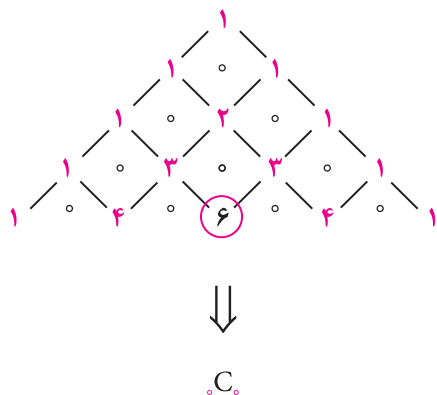
تعداد تغییر جهت به سمت راست = ۴

(تیله به راست‌ترین جام هدایت خواهد شد و یک مسیر وجود خواهد داشت.)

این نتایج در شکل ۳ نشان داده شده است.

در مدل مطرح شده از بازی پین‌بال، هر یک از مقادیر ممکن تابع ترکیب نیز قابل نمایش است. به عنوان نمونه، تعداد مسیرهای ممکن برای هدایت تپله در بازی پین‌بال به طوری که از چهار سطر بگذرد و دو تغییر جهت به سمت راست داشته باشد، برابر ۶ است.

$${}^4C_2 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad (2)$$



	1C_0	1C_1			
	2C_0	2C_1	2C_2		
	3C_0	3C_1	3C_2	3C_3	
	4C_0	4C_1	4C_2	4C_3	4C_4

شکل ۸. ارتباط عددهای مثلث خیام تابع ترکیب و مدل پین‌بال

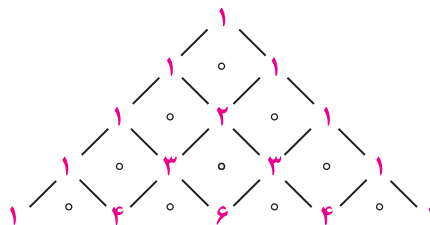
جمع بندی و نتیجه گیری

مدل ارائه شده یک مدل ساده از نمایش اعداد مثلث خیام است که به راحتی قابل تعمیم دادن از یک مرحله به مرحله بعدی است. الگوی مثلثی چیدمان پین (گره)ها و ساختار شبکه‌ای مدل به گونه‌ای است که هم در آموزش مدرسه‌ای می‌توان از آن استفاده کرد و هم در برنامه‌نویسی‌های پیشرفته رایانه‌ای قابل تنظیم و طراحی است. بی‌شک، نمایش و آنالیز مدل‌های ریاضی از این دست، در تفهیم مفاهیم اولیه و پایه نقش بسزایی خواهد داشت و آموزش ریاضی را از حالت انتزاعی به سمت پویایی سوق خواهد داد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مثلث خیام، در هر سطر، عدد ابتدا و انتها برابر یک است و اعداد میانی از مجموع دو عدد راست و چپ آن در سطر قبل به دست می‌آیند.

ارتباط مدل پین‌بال و مثلث خیام

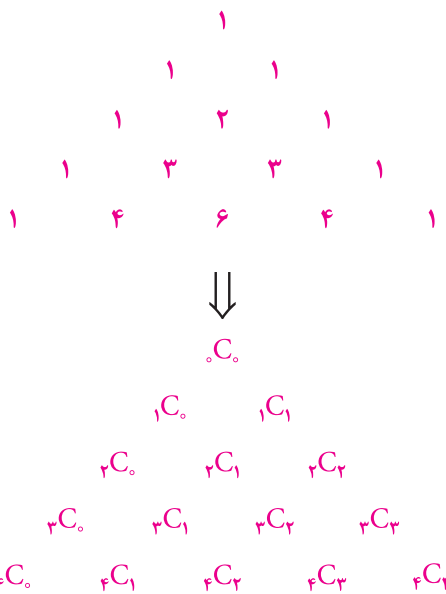
اگر مثلث خیام و ماشین پین‌بال (مدل) با یکدیگر مورد بررسی قرار گیرند، ارتباط بین آن‌ها به سادگی مشخص می‌شود. در واقع هر عدد در مثلث خیام نشان‌دهنده تعداد مسیرهای متمایزی است که می‌توان تپله را به همان نقطه در ماشین پین‌بال هدایت کرد (شکل ۶). باید توجه داشت که مسیر تپله در بازی، همواره رو به پایین در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶. ارتباط اعداد مثلث خیام پاسکال و مدل پین‌بال

از طرف دیگر، عددهای مثلث خیام (شکل ۷) را با استفاده از تابع ترکیب و آنالیز ترکیبی نیز می‌توان به دست آورد که فرمول این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود و تعداد انتخاب‌های m شیء از n شیء متمایز است:

$${}^nC_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1)$$



شکل ۷. نمایش اعداد مثلث خیام پاسکال با استفاده از ترکیب

*منابع:

1. Hopkins, J., Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea, New Ed edition, 2002.
2. Colledge, T., Pascal's Triangle: A Teacher's Guide with Blackline Masters, Tarquin Publications UK, 1997., pp. 40.
3. D. Seymour, visual patterns in pascal's triangle, Dale Seymour publications, Palo Alto, CA, 1986.
4. www.math centre.ac.uk, Pascal's triangle and the binomial theorem, mc-ty-pascal-2009.

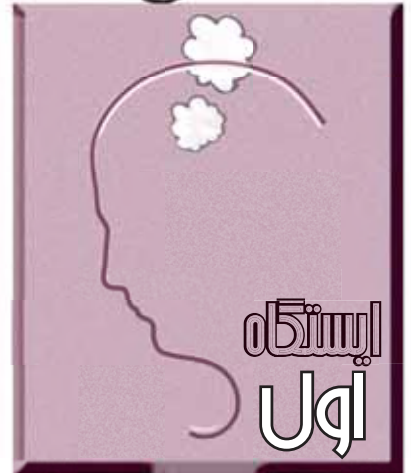




جدول زیر جدول عددی کوچک (4×4) است که هیچ خانهٔ سیاه ندارد. تمام عناصر جدول عددهای چهاررقمی هستند که از چپ به راست (افقی) یا از بالا به پایین مطابق شرح باید نوشته شوند. پس از حل کامل جدول، عددهای روی دو قطر جدول (از بالا به پایین) دو عدد چهار رقمی را می‌دهند که به ترتیب سال‌های تولد و وفات یک ریاضی‌دان بنام ایرانی براساس تقویم میلادی است. نام این ریاضی‌دان و شرح مختصری از زندگی او را برای ما ارسال کنید تا به قید قرعه جایزه‌ای نفیس تقدیمتان شود!

افقی:

۱. مربع یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از سی و کوچک‌تر از چهل.
۲. عدد طبیعی که تنها دو عامل اول دارد که یکی از آن‌ها بین چهل و پنجاه است.
۳. حاصل ضرب دو عدد اول، که یکی از آن‌ها یک رقمی و دیگری اندکی بیش از مساحت مربعی است که محیط آن ۸۴ واحد است.
۴. صد برابر یک عدد اول.



	۱	۲	۳	۴
۱				
۲				
۳				
۴				

- عمودی:
۱. در این سال **بلز پاسکال**، ریاضی‌دان بنام و فیزیک‌دان فرانسوی، دیده به جهان گشود.
 ۲. چهارمین عدد اول بزرگ‌تر از ۵۰۰۰.
 ۳. عدد مساحت مستطیلی که محیط آن ۲۵۴ واحد و طول آن ۸۷ واحد بیشتر از عرض آن است.
 ۴. در این سال **رنه دکارت**، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، درگذشت.

پرسش‌های بیکار جو!

در مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 108° ، طول بزرگ‌ترین نیم‌ساز داخلی چند برابر طول کوچک‌ترین نیم‌ساز داخلی است؟

الف) $\sqrt{2}$
 ب) $\sqrt{3}$
 ج) ۲
 د) ۲٫۲۵
 ه) $\sqrt{5}$



- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان ● تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی ● تصویربردار: علی محمد قاسمی ● تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی ● پژوهشگر: محبوبه کلاتری ● طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت ● انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان ● گوینده و راوی: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

اشاره



احسان یارمحمدی

ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا، مشهور به ابوعلی سینا، ابن سینا و پورسینا، زاده در بخارا و در گذشته در همدان، یکی از برجسته‌ترین دانشمندان، پزشکان، فیلسوفان و ریاضی‌دانان ایران زمین است. در این مقاله با معرفی مستند *ابوعلی سینا* از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائه سطرهایی از کتاب «ریاضی‌دانان ایرانی: از خوارزمی تا ابن سینا»، به قلم زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی (۱۲۹۰-۱۳۸۰) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۵۰ در «انتشارات مدرسه عالی دختران ایران» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و سپس مطالبی از مستند مزبور را ارائه خواهیم کرد.

عمر استاد را با وی گذراند، نوشته است.

اینک خلاصه سرگذشت ۳۰ سال اول عمر ابن سینا را که نوشته خود اوست، از کتاب «تاریخ الحكماء» استخراج و زینت بخش صفحات این مقاله می‌کنیم و سپس به ذکر بقیه شرح احوال او می‌پردازیم: «آورده‌اند که جماعتی از تلامذه شیخ وی را از مبادی حال او سؤال کردند. پس شیخ برای ایشان احوال خود را بر این صورت املا کرد که: پدرم مردی بود از اهل بلخ و از آنجا به بخارا منتقل شد، ایام نوح بن منصور. و متولی بعض اعمال دیوانی می‌بود در قریه‌ای که آن را خریشان خواندند. از اعمال بخارا و نزدیک آن قریه، قریه‌ای دیگر بود، نام آن «افشنه». پدرم، دختری از اهل این قریه بخواست و آنجا را وطن اختیار نمود. من و برادرم آنجا متولد

ابوعلی حسین بن عبدالله بن سینا، ملقب به «شرف‌الملک»، «حجه‌الحق» و «شیخ‌الرئیس» که غالباً وی را ابوعلی سینا یا ابوعلی بن سینا و یا ابن سینا می‌نامند و نزد اروپاییان به اویسن معروف است، در سال ۳۷۰ هـ.ق / ۹۸۰ م در قریه «افشنه» نزدیک بخارا چشم به جهان گشود و در سال ۴۲۸ هـ.ق / ۱۰۳۷ م در همدان وفات یافت. ابن سینا دانشمند فیلسوف، طبیب، ریاضی‌دان و منجم ایرانی و معروف‌ترین دانشمندان اسلام و یکی از بزرگ‌ترین دانشمندانی است که تاکنون پا به عرصه وجود گذاشته‌اند. سرگذشت نخستین ۳۰ سال عمرش را خود به رشته تحریر درآورده و بقیه شرح احوال او را شاگرد و مریدش، عبدالواحد ابوعبید جوزجانی که در سال ۴۰۳ هـ.ق / ۱۰۱۲ م به ابن سینا ملحق شد و تا پایان

شدیم. پس از آنجا به بخارا انتقال کردیم و پدرم مرا به معلم قرآن و معلم ادب سپرد. چون دهساله شدم، قرآن مجید و بسیاری از علم ادب فرا گرفته بودم، چنان که مردم را از من عجب می آمد.

پدرم از جمله مردمی بود که داعی مصریین را اجابت نموده، از جمله اسماعیلیه شمرده می شد. و شنیده بود از ایشان ذکر نفس و عقل، بر وجهی که ایشان می گویند و نزد ایشان معروف است. برادرم نیز بر آن طریقه بود و بسیار واقع می شد که پدر و برادرم ذکر آن سخنان می کردند. و من می شنیدم و می فهمیدم. لاجرم، شروع کردند و مرا نیز به آن دعوت می کردند. ذکر فلسفه و هندسه و حساب هند بر زبان می رانند. و فرستاد پدرم مرا نزد مردی که سبزی ها فروختی و مع ذلک، حساب هندی می دانست، تا از وی تعلم نمایم.

پس از این، **ابوعبدالله الناتلی** وارد بخارا گردید و دعوی دانش فلسفه می کرد.

پدرم او را در خانه ما فرود آورد. بر امید آنکه من از وی فلسفه بیاموزم... پس شروع کردم نزد ناتلی به قرائت **ایساغوجی** ... و چنان بودم که هر مسئله که بر من القا کردی، بهتر از وی تصور آن می نمودم، تا آنکه ظواهر منطق را خواندم. اما دقایق آن، خود نزد معلم نیز چیزی از آن نبود... بعد از این شروع کردم و کتابها را خود مطالعه می کردم. و شروع آنها را نیز مطالعه می نمودم، تا علم منطق را نیک محکم ساختم. و همچنین کتاب **اقلیدس** را پنج یا شش شکل از اولش بخواندم و **بواقی** را به مطالعه حل کردم. و از آنجا انتقال نمودم به **مجسطی** و چون از مقدماتش فارغ گشتم، و به اشکال هندسه رسیدم، **ناتلی** گفت: خود متوجه حل آنها شو! بعد از آن بر من عرض می کن! تا صواب و خطای آن را بیان کنم! و حال آن بود که مرد از عهده آن کتاب بر نمی آمد.

پس شروع کردم در حل **مجسطی** و بسا از مشکلات آن کتاب که او ندانسته بود، مگر بعد از آنکه من بر وی عرض کردم... در این حال ناتلی از ما مفارقت کرد... و من همت بر تحصیل کتب گماشتم... و علم طب، خود از علوم صعبه نبود. لاجرم در اندک فرصتی در آن فن فایق و مبرز گشتم، تا حدی که فضلی اطبا شروع کردند و علم طب نزد من می خواندند. این وقت در مقام تعهد بیماران شدم و منفتح (= گشاده) می شد بر من ابواب معالجات، چندان که وصف آن نتوانم. و بسا وجود اینها، برای تحصیل فقه تردد می کردم و در آن مناظره

می نمودم و در این وقت ۱۶ ساله بودم... اتفاقاً سلطان بخارا که در آن وقت که نوح بن منصور بود، مرضی عارض گشت که اطبا در آن وامانددند. خود در آن اوقات نام من شهرتی یافته بود. و در خدمت سلطان مرا مذکور ساختند و به احضار من فرمان رسید. چون حاضر گشتم، با سایر اطبا مشارکت کردم، تا عاقبت عافیت یافتیم و به این وسیله، به خدمت او موسوم گشتم. روزی التماس کردم که مرا رخصت دخول دارالکتب و نظاره رخصت آن فرماید. پس چون داخل گشتم، چندین خانه

دیدم، در هر خانه چندین صندوق بالای یکدیگر چیده. یک خانه، کتب عربیت و شعر، دیگری فقه، دیگری کتب حدیث. و همچنین هر علمی را خانه ای جداگانه بود. پس فهرست کتب قدما را به نظر در آوردم. و آنچه از آنها می خواستم، برداشتم و بسیار کتاب یافتیم که اکثر مردم نام آنها هم نشنیده بودند و من قبل از آن ندیده بودم و بعد از آن هم نزد کسی ندیدم. پس مجموع آن کتب را خواندم و بر فواید آنها ظفر یافتیم و مرتبه هر مرد و هر علم مرا معلوم گردید. و چون به سن ۱۸ سالگی رسیدم، از همه این علوم فارغ گردیده بودم و آن روز حفظ من علوم را بیشتر بود و امروز پخته تر است. و اگر نه، علم یکی است و چیزی تازه بر علم نیفزوده... پس از این، پدرم فوت شد و احوال دگرگون گشت و متقلد (= عهده دار) چیزی از اعمال سلطانی گشتم و ضرورت، اقتضای آن کرد که از بخارا به **گرگانج** رفتم و **ابوالحسن سهلی** وزیر آنجا، رغبت بسیار بر این علوم می داشت. و امیر آنجا، **علی بن مأمون** بود و من در زری فقهها می بودم و برای من مشاھره (= شهریه) کافی مقرر داشتند.

اکنون بقیه زندگی نامه ابن سینا را از «**دایرة المعارف فارسی**» نقل می کنیم: «**ابوعلی سینا** در ۴۰۴ به ری و بعد از ۴۰۵ به قزوین و سپس به همدان نزد **شمس الدوله دیلمی** رفت و وزارت یافت. پس از مرگ او (۴۱۲ هـ.ق)، جانشینش **سماء الدوله**، چهار ماه شیخ را زندانی کرد. کمی پس از آزادی، به اصفهان نزد **علاء الدوله کاکویه** رفت، و در آنجا حرمت بسیار داشت، و به تدریس و تألیف پرداخت. سرانجام در سفری که با **علاء الدوله** به همدان رفت، وفات یافت.»



مهم‌ترین آثار ریاضی و نجومی ابن‌سینا همان است که در «کتاب الشفا» (جزء سوم شامل: الارثما طیقی، علم‌الموسیقی، علم‌الهیئه) آورده است. قسمت‌هایی از این کتاب به زبان آلمانی ترجمه شده است. علاوه بر این، رسالات زیر از تألیفات ریاضی و نجومی وی در دست است:

۱. رساله فی تحقیق الزاویه
۲. رساله فی تحقیق مبادی الهندسه
۳. رساله فی الرؤیه الكواکب باللیل لابلنهار
۴. قانون لفضل الشمس والقمر و اوقات اللیل والنهار
۵. مقاله فی الطریق الذی اثره علی سائر الطرق فی الاتخاذ
الالات الرصدیه
۶. فی بیان عله قیام الارض وسط السماء
۷. مختصر فی علم الهیئه
۸. مختصر المجسطی

پزشکی علمی است که درباره وضعیت بدن انسان در حالات تندرستی و بیماری به ما آگاهی می‌دهد تا بتوانیم سلامت را به هنگامی که هست به خوبی حفظ کنیم و آن‌گاه که نیست آن را بیابیم.

ابوعلی‌سینا

ابن‌سینا از برجسته‌ترین چهره‌های تاریخ پزشکی در همه دوره‌هاست. او را به بزرگی **جالینوس**، پزشک یونانی می‌دانند و به نام جالینوس جهان اسلام می‌شناسند. به عقیده برخی از پزشکان اروپایی، علم پزشکی وجود نداشت تا زمانی که **بقراط** آن را تحقق بخشید، مرده بود تا زمانی که جالینوس آن را احیا کرد، پراکنده بود تا زمانی که **رازی** آن را جمع‌آوری کرد، و ناقص بود تا زمانی که ابن‌سینا آن را کامل کرد.

ابن‌سینا نوآوری‌های بسیار در پزشکی و درمان بیماری‌ها داشت.

توجه ابن‌سینا به ریاضیات بیشتر از جنبه فلسفی بود و نه از جنبه فنی. وی «طرح نهنه اعداد» و مورد استعمال آن را در صحت اعمال استخراج جذر و کعب بیان داشت، «اصول اقلیدس» را به عربی ترجمه کرد و در اواخر عمر (ظاهراً در همدان) به رصد پرداخت و آلتی شبیه وزنیه کنونی را برای به‌دست آوردن نتایج دقیق‌تر از آلات رصد اختراع کرد. مفاهیم عمده فیزیکی (حرکات، اصطکاک، نیرو، خلأ، نور، حرارت و غیره) را به دقت بررسی و اظهار نظر کرد که اگر درک نور ناشی از پراکندن نوعی از ذرات توسط منبع نورانی باشد، باید سرعت نور را محدود دانست. ابن‌سینا اعتقادی به «احکام نجوم» نداشت و در این‌باره رساله‌های تألیف کرده موسوم به «فی ابطال احکام النجوم» که از آن چند نسخه خطی موجود است.

ابوعبید جوزجانی، شاگرد ابوعلی‌سینا، در شرح حال وی نوشته است: «و تتمه کتاب شفا را در اصفهان تصنیف نمود و از منطق و **مجسطی** فارغ گردید، و قبل از این اختصار نموده بود کتاب اقلیدس و **ارثماتیقی** و موسیقی را و ایراد نموده بود در هر کتاب از ریاضیات زیادت‌ها که محتاج الیه می‌دانست. اما در **مجسطی** ده شکل در اختلاف منظر ایراد کرد و همچنین در آخر **مجسطی**، در علم هیئت، چیزها آورد که سابق بروی کسی اتیان به آن‌ها ننموده بود. و در اقلیدس شبهه‌ای چند ایراد کرد، و در **ارثماتیقی** خواص حسنه استنباط نمود و در موسیقی مسئله‌ها افزود که قدما از آن غافل مانده بودند.»

سپس نوشته است: «پس شیعی در مجلس **علاءالدوله** ذکر خللی که در تقاویم معموله به حسب ارساد قدیمه واقع است، در میان آمد. **علاءالدوله** از شیخ درخواست که رصدی نو کند کواکب را و رخصت صرف اموال، چندان که محتاج الیه باشد داد و شروع کرد شیخ در آن امر و مرا متولی اتخاذ آلات آن و استخدام صنایع نمود، تا صحت بسیار از مسائل ظاهر شد، لیکن به سبب اسفار که بسیار در اثناء کار عارض شدی، امر رصد معوق ماندی. و شیخ در اوقات اشتغال به رصد، آلتی چند وضع نمود که سابق بر وی کسی نکرده بود، و در بیان کیفیت عمل به آن‌ها رساله‌ای نیز تصنیف نمود.»

دانته، دانشمند و نویسنده بزرگ ایتالیایی، در کتاب خود به نام «**کمدی الهی**»، ابن سینا را در کنار بقراط و جالینوس همراه با ارواح پرهیزگاری که مسیحی نبوده‌اند، می‌گذارد. مورخان به نقش مهم ابن سینا در حوزه زمین‌شناسی اذعان دارند و می‌گویند: او در قرن پنجم هجری فرضیه‌ای درباره منشأ سلسله کوه‌ها مطرح کرده است که در جهان مسیحیت در حدود ۸۰ سال بعد آن را نظریه‌ای اساسی می‌دانستند. نوشته‌های ابن سینا در زمینه‌های متفاوت علوم به محض انتشار در اسپانیا بر دانش غرب تأثیر گذاشت. یکی از این رساله‌ها مقدمه‌ای بر دانش معدن‌شناسی و زمین‌شناسی است. ابن سینا می‌گوید پیدایش کوه‌ها ممکن است از دو طریق انجام گیرد: تغییر شکل ناگهانی زمین بر اثر زمین‌لرزه و نظایر آن، یا تغییر تدریجی و زیر تأثیر آب و باد که زمینه را برای تشکیل تخته سنگ‌ها از راه رسوب املاح متفاوت در طول زمان‌های بسیار دراز فراهم می‌آورد.

بوعلی سینا در «**دانش نامه علائی**» درباره جزر و مد دریاها و اثر ماه بر آن، حاصل نظارت خود را بیان می‌کند. پدیده جزر و مد اساساً زائیده نیروی جاذبه کره ماه است. اثر جاذبه خورشید در مد نسبت به ماه در رده دوم اهمیت قرار دارد. انرژی اقیانوسی، انرژی حاصل از به‌کارگیری موج جزر و مد و جریان‌های آب است.

بنابر تفکر آن روز علما، موسیقی در ردیف علوم ریاضی و تعلیمی قرار گرفته است. در کتاب **شفاء**، بخشی که ابن سینا به موسیقی می‌پردازد، از جهت روش‌شناسی بسیار مهم و راهنمایی است برای پژوهش علمی موسیقی. ابن سینا محاسبات دقیقی در اثر ارزشمند خود به کار برد و جنبه نظری و علمی موسیقی را به عنوان دانش دقیق مورد توجه قرار داد. آنچه درباره ابعاد و نسبت‌های موسیقی آورده، یا دقتی که در توضیح تعاریف بنیادی موسیقی به کار برده، در نوع خود بی‌نظیر است. می‌توان گفت بحث او درباره پیوند موسیقی و شعر، و مقایسه این دو هنر با هم شاید از نخستین پژوهش‌های مربوط به موسیقی باشد. موسیقی‌دانان و موسیقی‌شناسان بعد از ابن سینا مستقیم یا غیرمستقیم از آثار او استفاده کرده‌اند.

ابن سینا در بخارا، زادگاه مادرش، چشم به جهان گشود و از تعلیم و تربیتی عالی، مخصوصاً پس از آنکه خانواده‌اش به بخارا نقل مکان کردند، بهره‌مند شد. ابن سینا ۲۷۹ اثر از خود به یادگار گذاشته است. بیشتر نوشته‌های او به زبان عربی هستند، اما وی چند اثر نیز به زبان مادری خود، یعنی زبان فارسی دارد. متأسفانه بسیاری از نوشته‌های این دانشمند برجسته از بین رفته‌اند و فقط ۶۸ کتاب یا رساله از او در کتابخانه‌های شرق و غرب جهان به‌جا مانده است. پرآوازه‌ترین کتاب او به نام قانون پزشکی در پنج جلد نوشته شده است. این کتاب در سده دوازدهم میلادی پس از ترجمه به زبان لاتین در کشورهای اروپایی شناخته شد و تا سده هفدهم میلادی در مدارس پزشکی، و برپایه گزارش «**یونسکو**»، تا سال ۱۲۸۷ شمسی، یعنی آغاز دوران پزشکی نوین، در دانشگاه بروکسل تدریس می‌شد. شیخ‌الرئیس ابوعلی سینا در شهر همدان به مرض قلنج در سال ۳۸۶ شمسی درگذشت.



بسیاری از بیماری‌ها از جمله سرطان را بسیار دقیق‌تر از پیشینیان شرح داد. به عقیده او، سرطان نوعی غده است که در ابتدا ملتهب و دردناک نمی‌شود. بعضی از انواع آن وقتی که پیشرفت می‌کنند، دردناک و غالباً غیرقابل درمان می‌شوند. او می‌گوید اکسید مس و سرب، اگرچه نمی‌توانند این بیماری را درمان کنند، اما از انتشار آن در بدن جلوگیری می‌کنند. ابن سینا از واگیر بودن بیماری سل سخن گفت، موی اسب را برای بخیه زدن به کار برد، موش‌ها را عامل گسترش بیماری طاعون دانست، به درمان بیماری‌های روانی پرداخت، ورزش مناسب برای هر گروه سنی، هر وضعیت بدنی و هر یک از اندام‌های بدن را معرفی کرد و رساله‌های ویژه‌ای درباره داروهای قلب نوشت. عمده آثار بوعلی سینا در زمینه فلسفه و پزشکی است. بنابراین برخی از تاریخ‌دانان اخیر او را بیشتر فیلسوف می‌دانند تا پزشک. در حالی که به عقیده برخی دیگر او شاهرزاده پزشکی در قرون وسطاست.

ابن سینا ۴۳ اثر در زمینه پزشکی، ۲۳ اثر در زمینه فلسفه، ۲۶ اثر در زمینه فیزیک، ۳۱ اثر در زمینه الهیات، ۲۳ اثر در زمینه روان‌شناسی، ۱۵ اثر در زمینه ریاضیات، ۲۲ اثر در زمینه منطق و ۵ اثر در زمینه تفسیر قرآن نوشته است. او نوشته‌هایی درباره زهد، دوستی و موسیقی دارد و چند داستان نیز نوشته است. مهم‌ترین اثر او در پزشکی کتاب «**قانون**» است که بخش اول آن را در ۳۵ سالگی تألیف کرده است. این کتاب طی چند سده در اروپا و سرزمین‌های اسلامی، همه کتاب‌های پزشکی دیگر را در سایه خود قرار داده بود. برخی از محققان کتاب قانون ابن سینا را کتابی می‌دانند که وسعت پزشکی آن زمان را نشان می‌داد. انسجام مطالب، جامعیت و روش توضیح بیماری‌ها در کتاب قانون، شبیه مواردی مشابه در کتاب‌های درسی امروزی است. این کتاب پرکاربردترین کتاب پزشکی در جهان اسلام و نیز در کشورهای اروپایی بوده است و به مدت شش قرن برتری خود را در جهان حفظ کرد. در این کتاب بیش از ۷۶۰ دارو معرفی شده است.

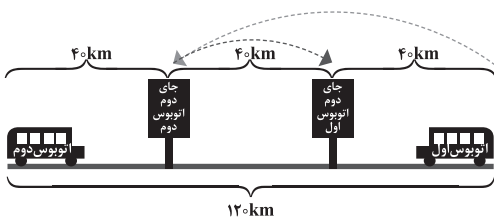


هنر نابغه!

مقدمه

در قسمت قبل قول دادیم که در این شماره به مسائل فیزیکی درباره «سرعت شتاب‌دار» بپردازیم. اما قبل از آن یک مسئله زیبای دیگر در حرکت با سرعت ثابت داریم که حیف است آن را مطرح نکنیم! این مسئله یک پیشینه تاریخی هم دارد که بعداً به آن اشاره می‌کنیم.

اتوبوس اول هم ۴۰ کیلومتر حرکت کرده است. نمودار زیر وضع پرنده و اتوبوس‌ها را نشان می‌دهد:



در مرحله بعد، پرنده از روی اتوبوس دوم به سمت اتوبوس اول برمی‌گردد و اتوبوس هم به سمت او می‌آید و طول مسیر هم ۴۰ کیلومتر است. پس زمان رسیدن آن‌ها به هم برابر است با:

$$\frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{40}{40 + 80} = \frac{1}{3}$$

یعنی $\frac{1}{3}$ ساعت بعد اتوبوس اول و پرنده دوم به هم می‌رسند. در این مدت اتوبوس اول $\frac{40}{3}$ کیلومتر جلوتر آمده، پرنده $\frac{80}{3}$ کیلومتر حرکت کرده، و اتوبوس دوم هم همین مقدار حرکت کرده است. حال پرنده از اتوبوس اول به سمت اتوبوس دوم برمی‌گردد و طول مسیر $\frac{40}{3} - \frac{40}{3} - \frac{40}{3} = \frac{40}{3}$ کیلومتر است. حالا زمان لازم برای رسیدن پرنده و اتوبوس دوم به هم برابر است با:

$$\frac{\frac{40}{3}}{40 + 80} = \frac{1}{9}$$

و مسافتی که پرنده طی می‌کند، $\frac{80}{9}$ کیلومتر است

مسئله: دو اتوبوس از دو سر یک جاده به طول ۱۲۰ کیلومتر با سرعت ثابت ۴۰ کیلومتر در ساعت به طرف هم حرکت می‌کنند. هم‌زمان با شروع حرکت اتوبوس اول، پرنده‌ای از روی یکی از اتوبوس‌ها با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت پرواز می‌کند تا به اتوبوس دوم برسد. وقتی به اتوبوس دوم رسید، از آن‌جا به سمت اتوبوس اول پرواز می‌کند تا به آن برسد و به همین ترتیب بین دو اتوبوس در پرواز است تا اتوبوس‌ها به هم برسند. در این مدت پرنده چند کیلومتر پرواز کرده است؟

حل: مسئله یک راه‌حل طولانی و یک راه‌حل کوتاه دارد. هر دو روش آموزنده‌اند و لذا هر دو را بیان می‌کنیم. **روش اول:** بیاییم مستقیماً تمام مسافت‌هایی را که پرنده طی کرده است با هم جمع کنیم و مسافت کلی او را بیابیم. ابتدا پرنده با سرعت $80 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ و اتوبوس دوم با سرعت $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به هم نزدیک می‌شوند. بنابراین طبق دستور $t = \frac{d}{v_1 + v_2}$ ، طول جاده و v_1 و v_2 سرعت‌های دو متحرک است) تعیین می‌کنیم که پس از چه مدت به هم می‌رسند:

$$t = \frac{120}{80 + 40} = 1$$

یعنی ۱ ساعت بعد، پرنده ۸۰ کیلومتر و اتوبوس ۴۰ کیلومتر طی کرده‌اند و به هم می‌رسند. در این مدت



دانشکدهٔ ریاضی «دانشگاه پرینستون» به جان فون نویمان ریاضی‌دان و دانشمند نابغهٔ مجاری‌الاصل، برخورد کرد و از او پاسخ همین سؤال را خواست. نویمان کمی فکر کرد و پاسخ صحیح را داد. دانشجو ضمن تشکر گفت: «می‌خواستم از درستی پاسخ

خودم مطمئن شوم. آخر دو راه‌حل برای این مسئله وجود دارد.» بعد همین دو راه‌حل را که شرح آن آمد، برای او توضیح داد و گفت: «استاد شما احتمالاً از راه دوم پاسخ را یافتید؟»

نویمان گفت: «نه اتفاقاً من از همان راه اول جواب را یافتم!»

دربارهٔ هوش و استعداد فوق‌العادهٔ جان فون نویمان (۱۹۵۷-۱۹۰۳) روایت‌های بسیاری وجود دارد. گفته شده است که در شش سالگی می‌توانست حاصل تقسیم دو عدد هشت رقمی را برهم به‌صورت ذهنی به‌دست بیاورد! در هشت سالگی با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شد، و در نوزده سالگی اولین نظریه‌های ریاضی‌اش را ارائه داد. او یکی از طراحان نخستین رایانه موسوم به «انیاک» (ENIAC)، اقتصاددان و فیزیک‌دان نیز بود، مدرک مهندسی شیمی داشت و استاد دانشگاه پرینستون آمریکا بود. اما این نابغهٔ بزرگ فقط ۵۴ سال عمر کرد.

و به‌همین ترتیب. پس مجموع مسافت‌های طی شده برابر است با:

$$80 + \frac{80}{3} + \frac{80}{9} + \dots$$

$$\text{و یا: } 80 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right)$$

عبارت داخل پرانتز مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی بی‌پایان با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $\frac{1}{3}$ است. برای محاسبه این مجموع چنین عمل می‌کنیم:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \Rightarrow 3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\Rightarrow 3S = 3 + S \Rightarrow S = \frac{3}{2}$$

بنابراین مجموع مسافتی که پرنده طی کرده برابر است با: $80 \times \frac{3}{2} = 120$ کیلومتر.

روش دوم: نیازی به این همه محاسبه نیست!

چقدر طول می‌کشد تا دو اتوبوس به‌هم برسند؟ $t = \frac{120}{40+40} = \frac{3}{2}$ مگر نه این است که پرنده در تمام این مدت در حال پرواز است؟ پس مقدار مسافتی که می‌پیماید از ضرب سرعت پرنده در این زمان به‌دست می‌آید: $80 \times \frac{3}{2} = 120$ به‌همین سادگی!

در خصوص این مسئله معروف روایت جالبی وجود دارد. می‌گویند روزی دانشجوی جوانی در راهروی

پیکار جو! ۲ پرسش‌های

چند n تایی از عددهای متمایز طبیعی وجود دارد که مجموع همهٔ این عددها مساوی حاصل ضرب دو عدد بزرگ‌تر / این دسته باشد؟ ($n \geq 3$)

الف) ۰

ب) ۱

ج) ۲

د) ۳

ه) بی‌شمار

روش تقریب جذر عددها

به کمک نامساوی حسابی - هندسی



حسین قاسم دامغانی
دانش آموز فارغ التحصیل
پیش دانشگاهی

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \stackrel{b=k^2}{\Rightarrow} \frac{a+k^2}{2} \geq \sqrt{ak^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+k^2}{2} \geq k\sqrt{a} \Rightarrow \frac{a+k^2}{2k} \geq \sqrt{a}$$

بنابراین مقدار تخمینی ما $\frac{a+k^2}{2k}$ خواهد بود.

حال برای دقیق شدن این تخمین باید بهترین عدد ممکن را برای k پیدا کنیم. از آنجا که شرط برقراری تساوی در نامساوی یاد شده در ابتدای مطلب، برابری a و b است (اثبات آن به راحتی امکان پذیر است)، پس برای نزدیک شدن به تساوی باید به یکی از عددهای مربع کامل قبل و یا بعد a رسید. علت این موضوع را چنین می توان بیان کرد که فرض کنید، نامساوی زیر برقرار باشد (z عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ است):

$$(z-2)^2 < (z-1)^2 < a < z^2 < (z+1)^2$$

اگر در انتخاب k مناسب به جای z از $z+1$ استفاده شود، آن گاه تخمین نادقیق تر می شود، زیرا:

$$\frac{a+(z+1)^2}{2(z+1)} \geq \frac{a+z^2}{2z}$$

و چون حاصل تخمین ما به علت نامساوی از مقدار واقعی بزرگتر است، پس باید کوچک ترین تخمین را محاسبه کرد. برای اثبات به راحتی دو کسر را از هم کم می کنیم و با بهره گیری از فرض $a < z^2$ و $z > 0$ ، صحت نامساوی مشخص می شود. پس به راحتی با استقرا ثابت می شود که از $z+1$ ، $z+2$ و ... نباید استفاده کرد.

همچنین، اگر در انتخاب k مناسب، به جای $z-1$ از $z-2$ استفاده شود، آن گاه تخمین نادقیق تر می شود (اثبات آن هم مانند اثبات قبلی است) و به راحتی با استقرا ثابت می شود که از $z-2$ ، $z-3$ و ... نباید استفاده کرد. پس باید بین z و $z-1$ یکی را انتخاب کنیم و برای این کار بررسی می کنیم در چه شرایطی کدام بهتر است. فرض کنید در یک موقعیت، انتخاب z از $z-1$ بهتر است. بنابراین حاصل تخمین با $z-1$ بزرگتر از حاصل آن با z است و داریم:

$$\frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)} \geq \frac{a+z^2}{2z}$$

جذر یک عدد، از آشناترین و پرکاربردترین مفهومیهای ریاضی است و در محاسبه و ترس مثلث قائم الزاویه، حل معادله درجه دو و مسائل بسیار دیگر کاربرد دارد. جذر برای هر عدد نامنفی N به این صورت تعریف می شود: جذر N ، عددی نامنفی مانند M است، اگر و تنها اگر: $N=M \times M$.

برای مثال، ۵ جذر عدد ۲۵ است، زیرا: $25=5 \times 5$. یا ۱۳ جذر عدد ۱۶۹ است و همچنین ۱ جذر عدد ۱ است. اما در اکثر موارد، جذر یک عدد، عددی طبیعی و یا گویا نیست، بلکه عددی گنگ است؛ مانند جذر عدد ۳ که در حدود $1/732050$ می شود. برای نمایش دقیق جذر ۳ از $\sqrt{3}$ استفاده می کنند.

گاه محاسبه جذر یک عدد آن هم بدون ماشین حساب، طولانی و خسته کننده می شود. اما با استفاده از نامساوی معروف $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ می توان به نحوی مقدار جذر یک عدد را با دقت بالایی تخمین زد. ابتدا خود نامساوی را اثبات می کنیم (a و b هر دو نامنفی اند).

می دانیم که مجذور هر عدد، عددی نامنفی است پس با مجذور کردن عدد $a-b$ داریم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

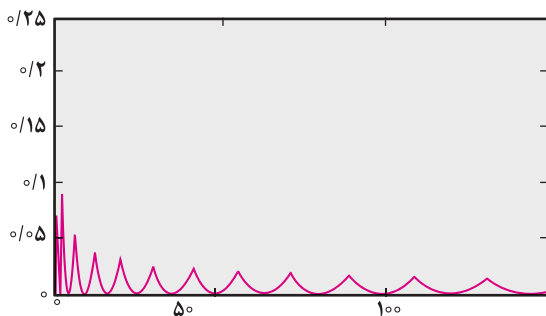
$$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

حال فرض کنید که می خواهیم جذر عددی مانند a را حساب کنیم که مربع کامل نیست و b یک مربع کامل غیر صفر و برابر k^2 است (k عددی طبیعی است). با جای گذاری k^2 به جای b در نامساوی و استفاده از قوانین جذر و نامساوی داریم:

برای مثال دیگر، جذر ۱۳۷ را محاسبه می‌کنیم. چون داریم: $144 < 137 < 121$ پس تخمین برابر است با: $\frac{137+144}{2 \times 12} = \frac{281}{24} = 11 \frac{7}{24} = 11.291666...$ که با مقدار واقعی در حدود 0.036% تفاوت دارد.

حال نگاهی به شکل تابع میزان خطای تخمین می‌اندازیم. (خطا = تابع تخمین - مقدار واقعی)

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با بزرگ شدن X ، روند کلی خطا رو به صفر می‌رود و همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، هر چه از مربع کامل دور می‌شویم، تخمین نادقیق‌تر می‌شود و نقطه تلاقی دو مقدار تخمین، در میانگین هندسی دو مربع کامل بعد و قبل از عدد رخ می‌دهد. همچنین در این نقاط با بیشترین خطا مواجه می‌شویم. برای کاهش خطا به عبارت $Z(Z-1)$ نگاهی دوباره می‌اندازیم:



$$Z(Z-1) = \left(\left(Z - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right) \left(\left(Z - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \right) = \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2$$

$$4(Z(Z-1)) = 4 \left(\left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) = 4(Z-1)^2 - 1$$

بنابراین اگر آن عبارت را ۴ برابر کنیم (که ۴ مربع کامل است)، فقط ۱ واحد تا مربع کامل بعدی فاصله داریم. از این قضیه برای تخمین دقیق‌تر این‌گونه عددها می‌توان استفاده کرد. پس اگر جذر عددی مانند $30 = 6 \times 5$ را بخواهیم تخمین بزنیم، از روش قبلی استفاده نمی‌کنیم و به جای آن از قوانین جذر استفاده می‌کنیم تا تخمین بهتری به دست آوریم:

$$\sqrt{30} = \frac{\sqrt{4 \times 30}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{120}}{2} \approx \frac{2 \times 11}{2} = \frac{241}{44} = 5.477272...$$

که اختلاف آن با مقدار واقعی در حدود 0.00005% است. در صورتی که اگر با روش قبلی محاسبه می‌کردیم، این عبارت حاصل می‌شد: $\frac{30+36}{2 \times 6} = \frac{66}{12} = \frac{30+25}{2 \times 5} = \frac{55}{10} = \frac{11}{2} = 5.5$ که در حدود 0.23% خطا داشت (اما همان تخمین اولیه هم تا حد قابل قبولی مناسب است و واجب نیست مرحله دوم را نیز حتماً انجام دهیم). مثال هم نشان داده شد، اگر عدد ما میانگین هندسی دو مربع کامل قبل و بعد از خود بود، حاصل استفاده از Z یا $Z-1$ برابر می‌شود.

$$\Leftrightarrow \frac{az + z^z - 2z^z + z}{2(z-1)(z)} \geq \frac{az - a + z^z - z^z}{2(z-1)(z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{az + z^z - 2z^z + z - (az - a + z^z - z^z)}{2(z-1)(z)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-z^z + z + a}{2(z-1)(z)} \geq 0 \Leftrightarrow -z^z + z + a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq z^z - z \Leftrightarrow a \geq z(z-1) \Leftrightarrow z^z \geq a \geq z(z-1)$$

چون تمام مراحل بازگشت‌پذیر است، پس هنگامی که داریم: $Z^Z \geq a \geq Z(Z-1)$ باید از Z استفاده کرد و به سادگی می‌توان نشان داد، زمانی که داریم: $Z^Z \geq a \geq (Z-1)^2$ ، باید از $Z-1$ استفاده کرد. البته اگر داشته باشیم: $a = Z(Z-1)$ ، فرقی بین استفاده از Z و $Z-1$ وجود ندارد (حاصل تخمین ما در هر دو حالت برابر می‌شود). پس در جمع‌بندی برای تخمین جذر عددی مانند a ، تابع زیر را می‌توان معرفی کرد: Z همان کوچک‌ترین مربع کامل بزرگ‌تر مساوی a است و برای سادگی تابع از $\lceil \sqrt{a} \rceil^2$ استفاده نشده است. $\lceil \cdot \rceil$ علامت سقف است و برای هر عدد، کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر مساوی آن است. مثلاً سقف $5/7$ ، عدد 6 و سقف $-8/2$ عدد -8 است.)

$$\sqrt{a} \approx \begin{cases} \frac{a+z^z}{2z}, & z(z-1) \leq a \leq z^z \\ \frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)}, & (z-1)^2 \leq a \leq z(z-1) \end{cases}$$

یا

$$\sqrt{a} \approx \min \left(\frac{a+z^z}{2z}, \frac{a+(z-1)^2}{2(z-1)} \right)$$

حال برای شفاف‌سازی بیشتر مطلب به ارائه مثال می‌پردازیم: فرض کنید می‌خواهید جذر عدد ۵۱ را حساب کنید. می‌دانیم که: $81 < 64 < 51 < 49 < 36$. اگر تخمین جذر ۵۱ را با هر کدام از مربع کامل‌ها امتحان کنیم، نتایج زیر به دست می‌آید:

جذر ۵۱	k=9	k=8	k=7	k=6	محاسبه
$\sqrt{51}$	$\frac{51+9^2}{2 \times 9}$	$\frac{51+8^2}{2 \times 8}$	$\frac{51+7^2}{2 \times 7}$	$\frac{51+6^2}{2 \times 6}$	
	۷/۱۴۱۴۲۸...	۷/۱۸۷۵	۷/۱۴۲۸۵۷...	۷/۲۵	حاصل

پس طبق تابع، چون داریم $8 \times 7 < 51 < 49$ ، باید از $k=7$ استفاده می‌شد که بهترین تخمین را ارائه می‌دهد و با مقدار واقعی در حدود 0.014% اختلاف دارد.

حال ممکن است جذر عددهای بزرگ‌تری مانند ۷۳۷۳ را بخواهیم حساب کنیم که حدس مربع کامل قبل و بعد از آن کمی دشوار خواهد شد. برای تخمین جذر عددهای بزرگ، با قوانین جذر، مقدار تخمین زنی جذر را کاهش می‌دهیم (مثلاً با تقسیم بر مربعات توان‌های ۱۰) و سپس تخمین می‌زنیم. برای مثال، برای تخمین جذر ۷۹۷۳ داریم (خطا: $۰/۰۰۲۷$):

$$\begin{aligned}\sqrt{7973} &= \sqrt{100} \times \sqrt{\frac{7973}{100}} \\ &= 10 \times \sqrt{79.73} \approx 10 \times \sqrt{79.73} \\ &= 89.29444\dots\end{aligned}$$

اگر بخواهیم از این دقیق‌تر هم جذر عددهای بزرگ را تخمین بزنیم، کافی است به جزء صحیح تخمین قبلی خود نگاهی بیندازیم و از آن برای «عدد مربع کامل قبلی» استفاده کنیم. در همین مثال، جذر تقریبی اولیه ما $۸۹/۲۹۴۴۴\dots$ است. پس عدد مربع کامل قبل از ۷۹۸۳ ، عدد $۸۹^۲ = ۷۹۲۱$ خواهد بود (در اعداد بزرگ‌تر، به علت خطای تخمین، ممکن است جزء صحیح تخمین اولیه دقیقاً مربع کامل قبل از عدد موردنظر نباشد، بلکه کمی اختلاف داشته باشد). داریم:

$$۸۰۱۰ = ۹۰ \times ۸۹$$

$$\text{پس: } ۸۹^۲ < ۷۹۸۳ < ۹۰ \times ۸۹ < ۹۰^۲$$

حال برای تخمین هرچه قدر دقیق‌تر جذر ۷۹۸۳ از $k=۸۹$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{7983} \approx \frac{7983 + (89)^2}{2 \times 89} = 89.292134\dots$$

که تفاوت آن با مقدار واقعی در حدود $۰/۰۰۰۴$ است. اما تخمین اولیه مقدار بزرگ‌تری را نشان می‌دهد که خود نشانگر دقیق‌تر بودن تخمین دوم است. (اما همان تخمین اولیه هم تا حد قابل قبولی مناسب است و واجب نیست مرحله دوم را نیز حتماً انجام دهیم). برای تمرین، جذر عددهای ۵۳۹۱ ، ۶۰۱ و ۲ را با روش تقریبی محاسبه و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

برای علاقه‌مندان: قدمی فراتر

این قسمت از سرعت تخمین می‌کاهد، اما در عوض آن را دقیق‌تر می‌کند.

به نامساوی‌های اولیه باز گردیم:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+k^2}{2} \geq \sqrt{ak^2} \\ \Rightarrow \frac{a+k^2}{2} \geq k\sqrt{a} \Rightarrow \frac{a+k^2}{2k} \geq \sqrt{a}\end{aligned}$$

اگر این بار فرض کنیم k فقط محدود به عددهای طبیعی نیست و آن را به عددهای گویای مثبت گسترش دهیم، می‌توانیم از نامساوی تخمین $\left(\frac{a+k^2}{2k}\right)$ بارها و بارها استفاده کنیم تا به دقیق‌ترین جواب برسیم:

به فرض شما می‌خواهید جذر ۳ را حساب کنید. چون: $۱ < ۲ < ۳ < ۴$ ، پس تخمین اولیه چنین خواهد بود (خطا: $۰/۰۱۸$)
اگر $\frac{3+4}{2 \times 2} = \frac{7}{4}$ را دوباره به عنوان k برگزینیم، تخمین دوم ما چنین می‌شود:

$$\frac{3 + \left(\frac{7}{4}\right)^2}{2 \times \frac{7}{4}} = \frac{3 \times 16 + 49}{16} = \frac{48 + 49}{16} = \frac{97}{16} = \frac{6.0625}{1}$$

که خطای $۰/۰۰۰۰۰۹$ دارد. اگر باز از تخمین قبلی به عنوان k استفاده کنیم، میزان خطا به $۱۰^{-۱۵}$ کاهش می‌یابد و در استفاده‌های بعدی، خطا به کمتر از $۱۰^{-۱۵}$ می‌رسد!
و یا به فرض می‌خواهید جذر $\frac{13}{8}$ را حساب کنیم، به سادگی متوجه می‌شویم که:

$$\frac{13}{8} = \frac{26}{16} = \frac{25}{16} + \frac{1}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}$$

پس بدون اینکه سراغ عددهای طبیعی برای k برویم، یا صورت و مخرج را جدا جدا تخمین جذری بزنیم، از $\frac{5}{4}$ استفاده می‌کنیم و تخمین ما چنین خواهد بود (خطا: $۰/۰۰۰۰۲$):

$$\frac{\frac{13}{8} + \left(\frac{5}{4}\right)^2}{2 \times \frac{5}{4}} = \frac{\frac{26}{16} + \frac{25}{16}}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{51}{16}}{\frac{5}{2}} = \frac{51}{40}$$

در صورت استفاده از عدد طبیعی داریم (خطا: $۰/۰۳۷$):

$$1 < \frac{13}{8} < 1 \times 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{8}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}} = \frac{21}{16} = 1/3125$$

در صورت استفاده از تقریب صورت و مخرج به‌طور جدا خواهیم داشت (خطا: $۰/۰۰۴۶$):

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{13}{8}} &= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{26}}{4} \\ &= \frac{17}{40} = 1/279411\end{aligned}$$

به‌عنوان تمرین این قسمت، جذر عدد ۲ را (با یکبار تکرار) و یکبار با توجه به اینکه $۲ = \frac{49}{25} + \frac{1}{25}$ محاسبه کنید و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

یک داستان
و یک معما!

باز هم می‌خواهیم از **فرهاد** کوچولو و ماجراهایش بگوییم! در شهریور ماهی که گذشت، جشن تولدی برایش برگزار کردند. فرهاد برای جشن تولدش تعدادی از دوستانش را به مهمانی دعوت کرد و با تعجب متوجه شد که تعدادی از دوستانی که به جشن دعوت شده و آمده‌اند، دقیقاً هم‌سن او هستند و همان تعداد نیز کسانی هستند که یک سال از او کوچک‌ترند و باز به همان تعداد کسانی هستند که از او یک سال بزرگ‌ترند و مهمان دیگری نیز وجود ندارد. نکته جالب توجه دیگر نیز آن است که تعداد مهمانان درست مساوی سن فرهاد بود! همچنین مجموع سن همه مهمانها ۹ برابر سن خواهر فرهاد بود که از او ۱۰ سال بزرگ‌تر است. حالا بگویید چند نفر مهمان جشن تولد فرهاد بودند؟

معمای چندان دشواری نیست و فقط باید مدل ریاضی مناسبی برای آن بیابید و با حل معادله‌های مناسب، پاسخ را به دست آورید. پس از آن که به اندازه کافی با آن چالش کردید، برای اطمینان از درستی پاسختان به بخش پاسخ‌ها مراجعه کنید.

ایستگاه
فهم



تکامل نقش‌های هندسی در فرش ایرانی



قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

فرش را می‌توان از جنبه‌های متفاوت بررسی کرد؛ از جمله جنس تار و پود، طرح، بافت و... طرح فرش را نیز که موضوع کار ماست، می‌توان از نظر تاریخ، رنگ، منحنی‌ها و... بررسی کرد که ما در اینجا فقط به بررسی منحنی‌های آن از جنبه ریاضی می‌پردازیم. به عبارت دیگر، طرح یک فرش را به عنوان یک مجموعه از منحنی‌های ریاضی در نظر می‌گیریم و قصد داریم تکامل این نقش‌ها را تا حد ممکن نشان دهیم.

مقدمه

در طرح فرش‌های ایرانی نقوش مختلفی وجود دارد. بسیاری از این نقوش، هندسی می‌باشند. لوزی، مربع، مستطیل، ترنج و... از جمله این نقوش هستند که برخی با پاره‌خط و برخی با منحنی طراحی شده‌اند. سؤالاتی که مطرح می‌گردد این است که آیا با گذر زمان پاره‌خط‌ها به منحنی تبدیل شده‌اند و یا اینکه در نقوش روستایی از پاره‌خط و در نقوش شهری از منحنی استفاده شده است؟ آیا اصلاً چنین تکاملی وجود داشته است؟ پاسخ به این سؤالات جنبه تاریخی دارد. ولی ما در این مقاله به وجود چنین مسئله‌ای می‌پردازیم. یعنی اینکه در نقوش فرش ایرانی هندسه‌ای بسیار زیبا از منحنی وجود دارد که به زبان ریاضی امروز قابل بیان است. البته در وجود هندسه‌ای با خطوط شکسته و پاره‌خط مسائل حل شده است.

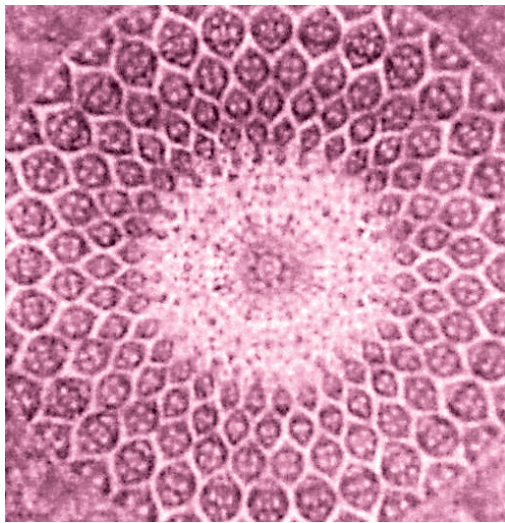
خطوط شکسته

در بسیاری از فرش‌ها طرح‌های ساده‌ای وجود دارند که فقط با خط شکسته به‌وجود آمده‌اند. این طرح‌ها در عین زیبایی به سادگی قابل ترسیم هستند.



شکل ۱. نقش‌های خط شکسته

و نیز کامل تر آن‌ها ترنج مسجد شیخ لطف‌الله یا فرش شیخ لطف‌الله.



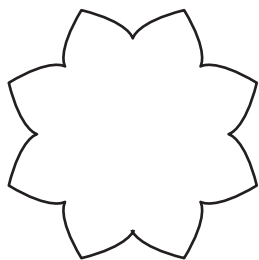
شکل ۳. فرش شیخ لطف‌الله

در زبان ریاضی می‌توان ترنج را نمودار یک تابع در نظر گرفت که در دستگاه قطبی^۱ رسم شده است. اما سؤال این است که: ضابطه یا فرمول این تابع چیست؟

نگارنده در مقاله «مدل ریاضی ترنج و طرح سقف مسجد شیخ لطف‌الله» فرمول تابعی را ارائه کرد که نمودار ترنج‌های متفاوت را رسم می‌کند و به صورت زیر است:

$$T(x) = R + \text{Arc sin} \left(\left(\frac{k}{\pi} x - 2 \left[\frac{\left(\frac{k}{\pi} x + 1 \right)}{2} \right] - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (1)$$

با این تابع که به آن «تابع طلایی» می‌گوییم، ترنج‌های متفاوتی را می‌توانیم رسم کنیم.



شکل ۴. نمایش ترنج رسم شده با تابع T

دلیل انتخاب نام تابع طلایی آن است که این تابع در کنار سایر تابع‌ها مجموعه‌ای بسیار زیبا و کامل از ترنج‌ها را رسم می‌کند. همچنین برخی از این ترنج‌ها با تغییر K و R به وجود می‌آیند.

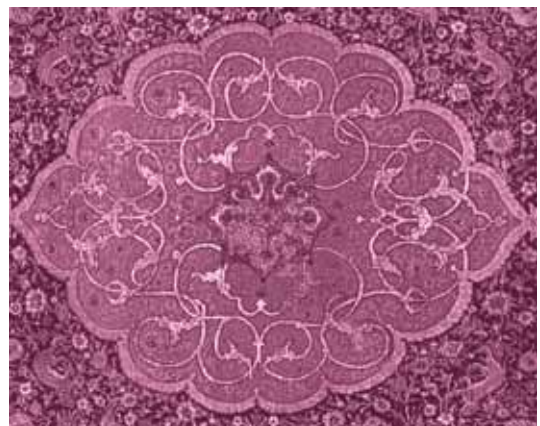
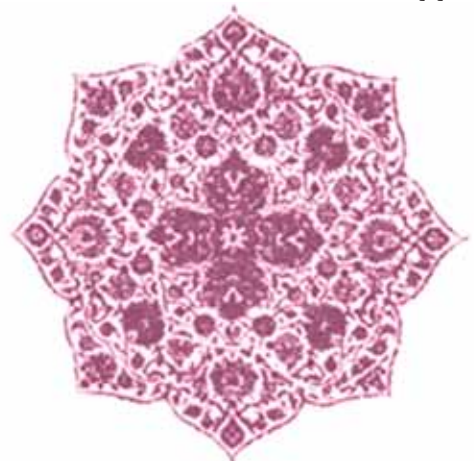
این نقش‌ها می‌توانند نقش‌های ساده هندسی باشند و یا اینکه طرح‌هایی انتزاعی باشند که از روی حیوانات به دست آمده‌اند. این گونه نقش‌ها که برخی متقارن و برخی نامتقارن‌اند، در عین سادگی زیبا هستند و شاید بتوان گفت بیشتر در فرش‌های روستایی وجود دارند.

منحنی‌ها

اما در بسیاری از فرش‌های دیگر، از جمله فرش شیخ لطف‌الله و فرش شیخ صفی‌الدین اردبیلی، طرح‌ها بیشتر با منحنی به وجود آمده‌اند. در این طرح‌ها اندازه‌ها و نسبت‌ها بسیار حساب شده و دقیق‌اند و به عبارت دیگر، از هندسه پیشرفته‌تری برخوردارند. این فرش‌ها به فرش‌های شهری یا درباری شهرت دارند. اما منحنی‌ها را نیز می‌توان به دو گروه بسته و باز تقسیم کرد.

۱. منحنی‌های بسته یا ترنج

منحنی بسته به آن منحنی گفته می‌شود که صفحه را به سه قسمت جدا از هم تقسیم کند. به آن ترنج نیز می‌توان گفت. مانند نمونه‌های زیر:



شکل ۵. چند نوع ترنج

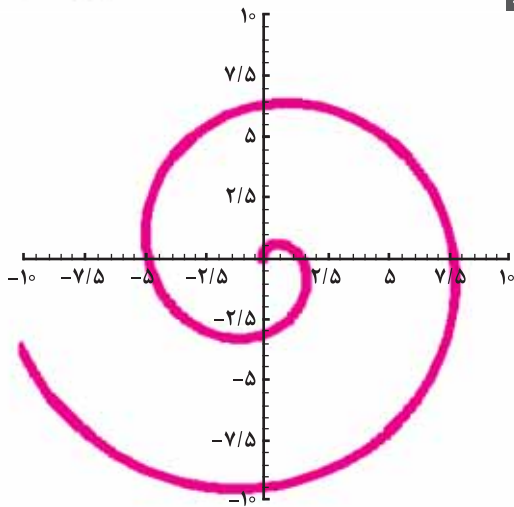


شکل ۸.

در صورتی که فقط منحنی‌های باز یک چهارم فرس را در نظر بگیریم، شکل ۹ را خواهیم داشت که از ترکیب چند افشانه درست شده است.



شکل ۹.



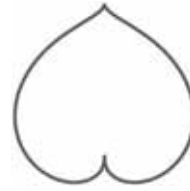
شکل ۱۰.

شکل اصلی این افشانه همان پیچ ارشمیدس است که در شکل ۱۰ وجود دارد. رابطه ریاضی این منحنی به صورت پارامتری در صفحه به این صورت است:

$$H(x) = (x \sin(x), x \cos(x)) \quad (2)$$

اگر این دو نوع منحنی را با هم به کار بگیریم، تقریباً می‌توانیم

۱. نمودار با $R=2$ و $K=1$ (شکل ۵)



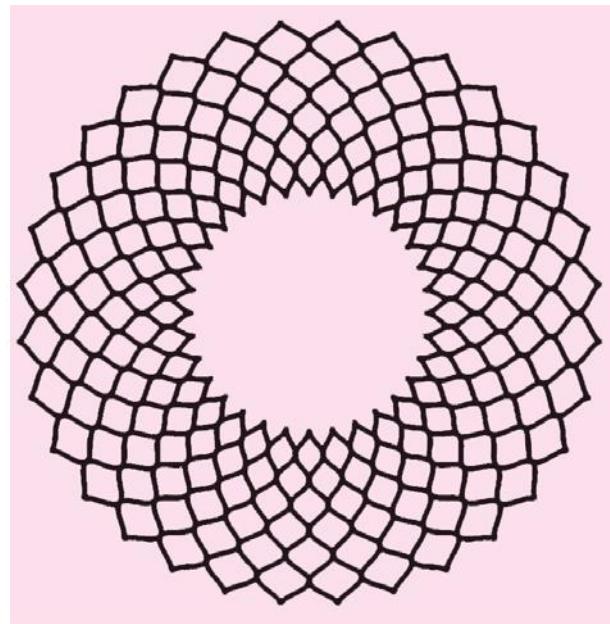
شکل ۵. نمایش ترنج رسم شده با تابع T

۲. نمودار در ترکیب با سایر توابع (شکل ۶)



شکل ۶. نمایش ترنج رسم شده با تابع T

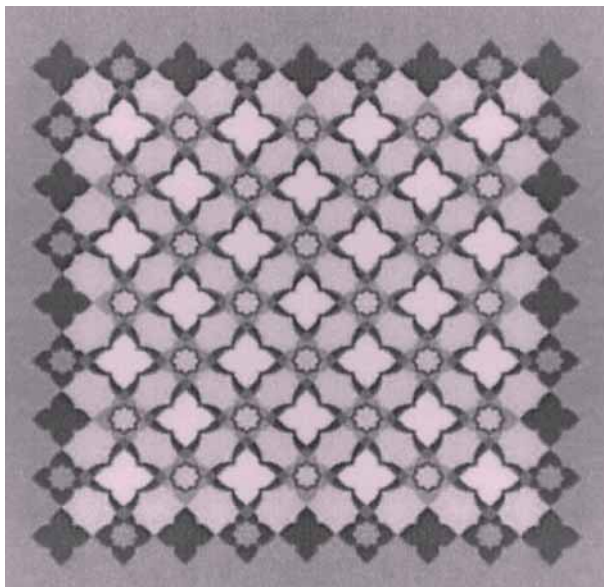
در ضمن به کمک این تابع ترنج‌های متداخل، از جمله ترنج شیخ لطف‌الله را نیز رسم می‌کنیم.



شکل ۷. ترنج شیخ لطف‌الله بازسازی شده با تابع T

۲. منحنی‌های باز

این نوع از منحنی‌ها صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کنند. در نقش‌های ایرانی به آن‌ها معمولاً «افشانه» یا «اسلیمی» می‌گویند و بین ریاضی‌دان‌ها به «پیچ ارشمیدس» معروف است.

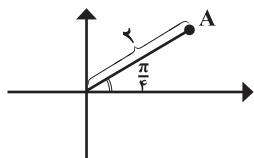


شکل ۱۳.

نتیجه گیری

هر چند هدف ما طراحی مجدد نقش‌های ایرانی نیست، ولی با این روش می‌توان طرح‌های بسیاری زیبا و مدرنی طراحی کرد. از سوی دیگر می‌توان با این روش پلی بین دنیای ریاضی و دنیای نقش‌های ایرانی ایجاد کرد تا هر دو طرف بتوانند از یکدیگر استفاده کنند و به غنای یکدیگر یاری رسانند.

* بی‌نوشت
 ۱. دستگاه مختصات قطبی دستگاهی هندسی است که در آن هر نقطه دارای دو مؤلفه است و مؤلفه اول (R) فاصله آن نقطه تا مبدأ مختصات و مؤلفه دوم زاویه‌ای است که پاره‌خط واصل بین آن نقطه و مبدأ مختصات با محور Xها در جهت مثبت مثلثاتی می‌سازد (θ). مثلاً در شکل مقابل، نقطه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ رسم شده است:

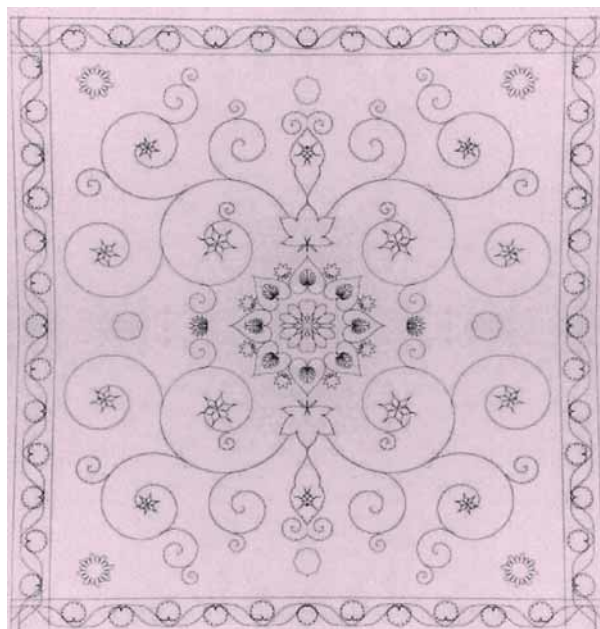


۲. منظور از تابع $\text{Arcsin}x$ ، وارون تابع $\sin x$ است. تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است و وارون آن را با نماد $\text{Arcsin}(x)$ یا $\sin^{-1}(x)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

* منابع
 ۱. قنبری قاسم، حسین (۱۳۸۳). «مدل ریاضی طرح تریج و طرح سقف مسجد شیخ لطف‌الله». کنفرانس ریاضی اهواز.
 ۲. حسین قنبری قاسم، حسین و دانشگر، پری (۱۳۸۸). «توابع زیبا در فرش‌های زیبا». رشد آموزش ریاضی. شماره ۹۶. تابستان.

منحنی‌های یک فرش را کامل کنیم. این توضیح ضروری است که هدف ما طراحی فرش نیست، بلکه نشان دادن عظمت و بزرگی نقش‌های فرش ایرانی است که واقعاً جای شگفتی دارد.



شکل ۱۱.

بعد از طراحی منحنی‌ها بحث رنگ‌آمیزی مطرح می‌شود که شکل ۱۲ نمونه‌ای از این کار را نشان می‌دهد [قنبری قاسم و دانشگر، ۱۳۸۸].



شکل ۱۲. فرش ساده طراحی شده با توابع طلایی و پیچ ارشمیدس

شکل ۱۳ نمونه‌ای دیگر از این کار است که با الهام از نقش‌های مسجد جامع عتیق اصفهان رسم شده است.

مسئله کارگاه کیف و کفش و آقای آشفته



حسین نامی ساعی

چند وقتی است که فکر پدرم حسابی مشغول است. او از تولیدکنندگان قدیمی و با سابقه کیف و کفش مدرسه است. پدرم می گوید به تازگی در تولید کیف و کفش به مشکلی برخورد کرده است. مشکلش این است که در چند سال اخیر، تولید کفش با توجه به قیمت های بازار برایش ضرر دارد و تولید کیف هم تقریباً برایش سودآور است.

اما مسئله این است که هیچ کدام از خریداران عمده کیف و کفش حاضر نیستند، کیف را به تنهایی بخرند و همه آنها کیف و کفش را با هم و با قیمتی که پیشنهاد می دهند، می خواهند! بله دردسر از همین جا شروع شده.

پدرم می گوید: برای تولید هر جفت کفش حداقل ۲ هزار تومان ضرر می دهد و برای تولید هر کیف ۴ هزار تومان سود می برد. با این حال برای اینکه تولیدی اش تعطیل نشود، قراردادی با یکی از خریداران بسته است؛ به این صورت که: او باید به طور میانگین حداقل روزی ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف تولید کند. اما به دلیل مشکلاتی که در کارگاه تولیدی اش دارد، مثل تعداد کم دستگاه و نیروی کار، میانگین ظرفیت تولید او بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف، در روزهای کاری اش نمی تواند باشد. از طرف دیگر طبق قراردادش با بخش باربری، باید حداقل روزی ۱۲۰ کیف و کفش بارگیری کند.

بله! حالا مسئله این است که پدرم با این شرایط و با توجه به ضرر تولید کفش و سود تولید کیف، روزانه چقدر تولید کند تا درآمدش را بالا ببرد. این مشکلی است که با ریاضیات حل می شود. از من خواست تا کمکش کنم. من که خودم قادر به حل این مشکل نبودم، تصمیم گرفتم موضوع را با معلم ریاضی مان، آقای آشفته مطرح کنم.

فردای آن روز موضوع را عیناً برای آقای آشفته توضیح دادم. او با خوش حالی گفت که به پدرت بگو نگران نباشد. مشکل به آسانی قابل حل است. بعد از ظهر آن روز همراه آقای آشفته به کارگاه پدرم رفتم که نزدیک مدرسه بود. پدرم با آقای آشفته آشنا شد و بار دیگر مشکل را بیان کرد. بعد از شنیدن صحبت های پدرم، آقا رو به من کرد و با لبخندی گفت: «خوش حال باش پسر، مسئله پدرت را به آسانی حل می کنیم.» بعد اشاره کرد، بیا با هم این مسئله را حل کنیم و به این

صورت شروع به حل مسئله کردیم. در اولین مرحله برای حل مسئله، آقای آشفته تعداد کفش ها را x و تعداد کیف ها را y فرض کرد. بعد مشکل تولید را به شکل و زبان ریاضی به صورت زیر نوشتیم:

(الف) تولید حداقل ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف در روز:

$$y \geq 48, x \geq 60$$

(ب) در روز بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف نمی توان تولید کرد:

$$y \leq 102, x \leq 120$$

(ج) روزانه باید حداقل ۱۲۰ کفش و کیف بارگیری کرد:

$$x + y \geq 120$$

(د) تولید هر جفت کفش ۲ هزار تومان ضرر و تولید هر کیف ۴

هزار تومان سود دارد.

$$R = -2x + 4y \text{ (درآمد)}$$

در گام بعدی، یکی یکی شرایط تولید را روی محور مختصات

رسم کردیم.

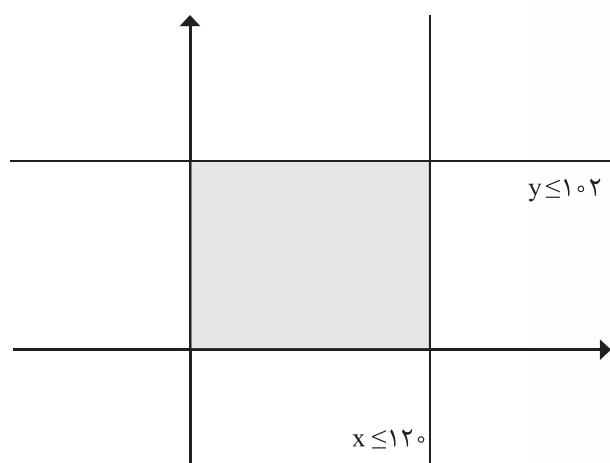
رسم شرایط الف

تولید حداقل ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف در روز:

قسمت هاشورخورده ترکیب یا اشتراک $x \geq 60$ و $y \geq 48$ است.

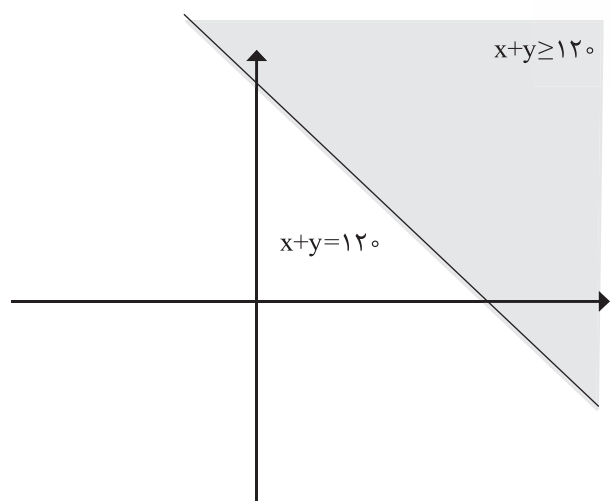
این اشتراک ناحیه ای است که شرایط $x \geq 60$ و $y \geq 48$ را دارد.

می‌دهد. همچنین این ناحیه‌ای است که مجموعه نقاط در این ناحیه برای $x \leq 120$ و $y \leq 102$ موجه و قابل قبول و جواب مشترک هر دو است.



رسم شرایط ج

روزانه باید حداقل ۱۲۰ کفش و کیف بارگیری کرد. قسمت هاشورخورده $x+y \geq 120$ است.

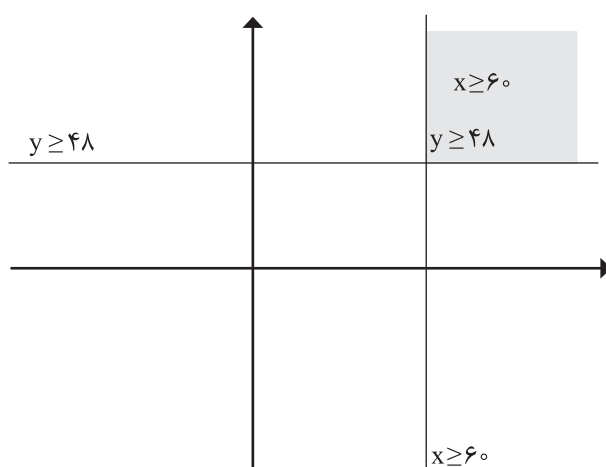


و جمع همه شرایط، قسمت هاشورخورده اشتراک یا ترکیب مجموع شرایط الف، ب، ج است. این ناحیه ناحیه جواب است و بهترین جواب یکی از رأس‌های این ناحیه نقاط A, B, C, یا D و E است که با امتحان این نقاط در R به دست می‌آید. از آقای آشفته پرسیدم که: چرا نقاط رأسی بهترین نقاط است؟ آقا گفت: «برای اینکه بیشترین و کمترین نقاط در گوشه‌ها هستند.»

البته این پاسخ مربوط به شاخه‌ای از ریاضیات به نام «تحقیق در عملیات»^۲ است. که تحقیق در عملیات به صورت قضیه‌ای ثابت



در این ناحیه نقاط آن هم برای $x \geq 60$ و هم برای $y \geq 48$ موجه و درست است. در واقع جواب مشترک $x \geq 60$ و $y \geq 48$ است.



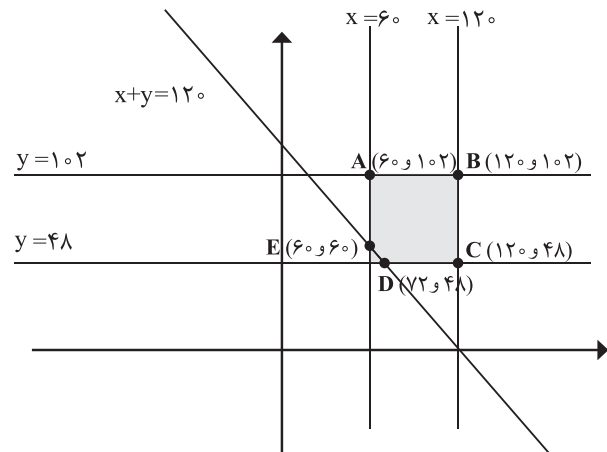
رسم شرایط ب

در روز بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف نمی‌توان تولید کرد: قسمت هاشورخورده اشتراک یا ترکیب $x \leq 120$ و $y \leq 102$ را نشان

می‌کند که چرا یکی از نقاط رأس بهترین جواب است.

ناحیهٔ جواب ناحیه‌ای است که تمام شرایط مسئله در آن ناحیه وجود دارد. در واقع اشتراکی از تمام شرایط است و تمام نقاط موجود در این ناحیه در شرایط $x \geq 60, y \geq 48, x \leq 120, y \leq 102$ و $x+y \geq 120$ موجه و صادق است.

یکی از رأس‌های A, B, C, D و E بهترین نقطه برای R و تولید است که با قرار دادن مشخصات آن در R پیدا می‌شود.



می‌دانیم که تولید هر جفت کفش دو هزار تومان ضرر و تولید هر کیف چهار هزار تومان سود دارد؛ یعنی $R = -2x + 4y$. اکنون با قرار دادن نقاط A, B, C, D و E در

$R = -2x + 4y$ مقدار R به ازای هر پنج نقطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(1) A(60, 102) \Rightarrow R = (-2 \times 60) + (4 \times 102) = 288$$

$$(2) B(120, 102) \Rightarrow R = (-2 \times 120) + (4 \times 102) = 168$$

$$(3) C(120, 48) \Rightarrow R = (-2 \times 120) + (4 \times 48) = -48$$

$$(4) D(72, 48) \Rightarrow R = (-2 \times 72) + (4 \times 48) = 48$$

$$(5) E(60, 60) \Rightarrow R = (-2 \times 60) + (4 \times 60) = 120$$

از مقایسهٔ این پنج مقدار محاسبه شده برای R، بهترین نقطه برای تولید به دست می‌آید که نقطهٔ A(60, 102) است؛ چرا که بیشترین سود را دارد. بنابراین مشکل پدرم حل شد و بهترین تولیدش، تولید روزی 60 جفت کفش و 102 کیف مدرسه است.

***پی‌نوشت**
تحقیق در عملیات: یا پژوهش عملیاتی یکی از زیرشاخه‌های ریاضیات کاربردی است که برای پیدا کردن نقطهٔ بهینه (بهترین نقطه) در مسائل بهینه‌سازی کاربرد دارد. پیدا کردن نقطهٔ بهینه براساس نوع مسئله مفاهیم متفاوتی دارد و در تصمیم‌سازی از آن استفاده می‌شود.

از تحقیق در عملیات در بهینه‌سازی سود، سرعت خط تولید و... و کمینه‌سازی هزینه، ریسک و... استفاده می‌شود. روش اصلی تحقیق در عملیات پیدا کردن بهترین پاسخ برای مسائل پیچیده‌ای است که به زبان ریاضی مدل‌سازی شده‌اند و سبب بهبود یک فرایند می‌شوند.

تاریخچهٔ تحقیق در عملیات

اولین استفاده از تحقیق در عملیات در جنگ جهانی دوم به سال 1941 در انگلستان صورت گرفت. مدیریت نظامی انگلستان در آن زمان، گروهی از دانشمندان را که با مسائل تاکتیکی دفاع هوایی و زمینی سروکار داشتند، مأمور تحقیقاتی در این زمینه کرد. دلیل اصلی انجام این تحقیق محدودیت بودجهٔ نظامی بود. برای همین لازم بود که چگونگی استفادهٔ مناسب و حداکثر از منابع نظامی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. همان‌طور که از نام تحقیق در عملیات مشخص است، علت به کارگیری آن، ماهیت مطالعات تیمی بود که روی عملیات (نظامی) تحقیق می‌کرد.

دانشمندان انگلیسی رادار را اختراع کردند، اما ارتش با استفادهٔ بهینه از این وسیله آشنا نبود. برای همین با گروه‌هایی جمعی از دانشمندان و با به کارگیری تکنیک‌های مؤثر ریاضی و داده‌های اطلاعاتی، توان دفاعی انگلستان تا حد 10 برابر افزایش یافت. موفقیت این گروه انگیزهٔ استفاده از گروه‌های مشابه را در بررسی مسائل متفاوت نظامی بیشتر کرد. نتایج ارزشمند حاصل از تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیت‌هایی در این زمینه علاقه‌مند کرد. نوآوری‌های موفقیت‌آمیز توسط تیم‌های آمریکایی، شامل توسعهٔ الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا و بهره‌گیری مؤثر از تجهیزات الکترونیکی می‌شد.

در این زمینه، گروه‌های تحقیق در عملیات مشابهی در دیگر کشورها از جمله کانادا و فرانسه مشغول فعالیت شدند. این گروه‌ها که معمولاً برای اجرای عملیات تعیین می‌شدند، در انگلستان به نام تحقیق در عملیات شناخته شدند و نیز گاهی در آمریکا با نام‌های دیگر، نظیر تحلیل عملیات، ارزیابی عملیات، تحقیق در عملیات، تحلیل سیستم‌ها، ارزیابی سیستم‌ها و تحقیق در سیستم‌ها به کار برده می‌شدند.

بررسی مسئلهٔ حملهٔ هواپیما به زیردریایی‌های آلمانی از موارد دیگری بود که دانشمندان ریاضی به آن پرداختند. در اوایل جنگ جهانی دوم، نیروی هوایی انگلستان از بمب‌های معمولی علیه زیردریایی‌های آلمانی استفاده می‌کرد. این نحوه حمله تنها در صورتی مؤثر بود که زیردریایی‌ها مستقیماً مورد اصابت بمب قرار می‌گرفتند. زیرا انفجار در سطح آب بود و نمی‌توانست به بدنهٔ زیردریایی‌ها آسیب بزند؛ مگر اینکه بمب به عرشه اصابت می‌کرد. برای تخریب بیشتر زیردریایی‌هایی که به زیر آب فرو رفته بودند، انفجار در عمق مورد استفادهٔ هواپیما قرار می‌گرفت، ولی برای تعیین عمق مناسب انفجار، اختلاف‌نظر وجود داشت. بعضی جنگنده‌ها بمب‌های خود را برای انفجار در عمق 150 فوت تنظیم می‌کردند، چون فکر می‌کردند این مقدار، حداکثر عمقی است که زیردریایی مورد حمله ممکن است فرو برود. اما جنگنده‌های دیگر 50 فوت را برای تنظیم انتخاب کردند، چون زیردریایی‌ها در عمق 150 فوت دیگر دیده نمی‌شوند و در نتیجه مورد حمله قرار نمی‌گیرند. لذا بین گروه طرفداران تنظیم عمق و سطح انفجار اختلاف‌نظر وجود داشت و... .



مقالهٔ آبل مقدمه‌ای بر کشف شاخه‌ای جدید از آنالیز ریاضی است. آبل این نامه را در سال ۱۸۲۶ (سه سال قبل از فوتش) به آکادمی علوم پاریس عرضه کرد. لژاندر، وکوشی که هر دو از نام‌آوران ریاضی هستند، مأمور رسیدگی به آن شدند.

کوشی مقاله را به خانه‌اش برد و آن را گم کرد! لژاندر هم در سال ۱۸۲۹، در یکی از آخرین روزهای عمر آبل، در نامه‌ای به ژاکوبی، مقالهٔ آبل را «غیرقابل خواندن» نامید! یک سال بعد در سال ۱۸۳۰، کوشی مقاله را پیدا کرد! ولی آن را منتشر نکرد و سرانجام در سال ۱۸۴۱ موفق به گرفتن نامه از او شدند و تصمیم به چاپ آن گرفتند، ولی در حین چاپ، مقاله بار دیگر گم شد! اما این پایان ماجرا نبود. در سال ۱۹۵۲ (حدود صد سال

بعد) مقاله در شهر فلورانس ایتالیا کشف شد!

و امروزه در موزهٔ آثار این ریاضی‌دان بنام نگهداری می‌شود. گفته‌اند آبل علاوه بر نبوغ و استعداد فراوانی که در ریاضیات داشت، به لحاظ پاک‌ی، صفای باطن و اخلاق نیز نمونه بوده است.

* پی‌نوشت

1. nils henrik abel

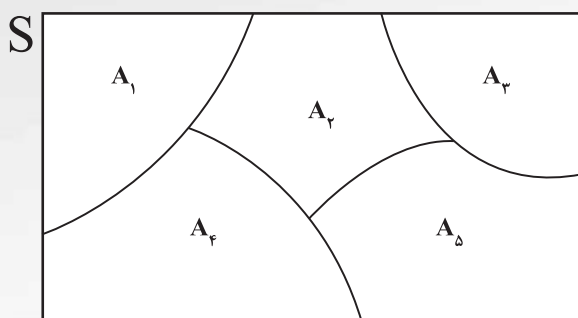
۲. در ریاضیات عالی (جبر پیشرفته) ثابت می‌کنند که هیچ راه‌حل کلی (الگوریتم) برای حل معادلات جبری درجهٔ پنجم و بالاتر از آن وجود ندارد.

در اینجا می‌خواهیم برایتان اندکی از تاریخ بگوییم و ماجرای جالب و خواندنی یک نامه. نیلس هنریک آبل^۱، ریاضی‌دان بنام نروژی، در سال ۱۸۰۲ متولد و به سال ۱۸۲۹ در حالی که تنها ۲۷ بهار از عمرش گذشته بود، به مرض سل درگذشت. آبل در سراسر عمر کوتاهش که همراه با مشقت و فقر و تنگدستی بسیار بود، دمی از تحقیق و مطالعه دست برنداشت و کارهای بسیار بزرگی نیز در همین مدت کوتاه انجام داد. از جملهٔ این کارها اثبات لاینحل بودن معادلات درجهٔ پنجم و ششم بود.^۲ هنگامی که آبل موفق به این کشف شد، از آنجا که امکان انتشار آن را نداشت، تصمیم گرفت به خرج خودش آن را در شش صفحه (و به صورت خلاصه شده به زبان فرانسوی) منتشر کند. (قابل توجه آن‌هایی که امروزه به کمک اینترنت در مدت زمان اندک، به منابع بی‌شمار دسترسی یافته و یا آن‌ها را در اختیار همهٔ مردم جهان قرار می‌دهند!)

هنگامی که این رساله به دست گاوس (که آن زمان ریاضی‌دان مطرح و شناخته شده‌ای بود) رسید، بی‌آنکه آن را بخواند، آن را دور افکند و گفت: «این هم یکی از همان مزخرفات است!»

اما بعد از این مقدمه، به نامهٔ معروفی از آبل اشاره می‌کنیم که شامل مقاله‌ای معروف از او تحت عنوان «یادداشتی در یک خاصیت عمومی دستهٔ بسیار وسیعی از توابع متعالی» است. این

افرازها



شکل ۱-۱۱

فرض کنیم S مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک افراز از S ، زیرتقسیمی از S است به زیرمجموعه‌های ناتهی و جدا از هم S . صراحتاً، یک افراز از S گردایه‌ای چون $\{A_i\}$ شامل زیرمجموعه‌های ناتهی S است، به طوری که:

(الف) هر a در S به یکی از A_i ها تعلق داشته باشد.
 (ب) مجموعه‌های موجود در گردایه $\{A_i\}$ متمایز (جدا از هم) هستند؛ یعنی اگر: $A_i \neq A_j$ ، آن‌گاه:

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

زیرمجموعه‌های موجود در این افراز را «سلول»ها می‌نامیم. شکل ۱-۱۱ نمودار وِن از یک افرازِ مجموعهٔ مستطیلی S از نقاط، به پنج سلول A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 و A_5 است.

مثال: گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ را در نظر بگیرید:

(الف) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}]$

(ب) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}]$

(ج) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}]$

در این صورت «الف» افرازی از S نیست، چون 7 در S به هیچ‌یک از زیرمجموعه‌ها تعلق ندارد. به علاوه، «ب» افرازی از S نیست چون، $\{1, 3, 5\}$ و $\{5, 7, 9\}$ جدا از هم نیستند. از طرف دیگر، «ج» یک افراز S است.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Partition افراز
2. nonempty ناتهی
3. Nonoverlapping جدا از هم
4. Collection گردایه
5. Belongs تعلق
6. Cell سلول، حفره
7. Venn diagram نمودار وِن
8. Rectangular مستطیل
9. Subset زیرمجموعه
10. Precisely صراحتاً



Partitions

Let S be a nonempty set. A partition of S is a subdivision of S into nonoverlapping, nonempty subsets. Precisely, a partition of S is a collection $\{A_i\}$ of nonempty subsets of S such that:

- (i) Each a in S belongs to one of the A_i .
- (ii) The sets of $\{A_i\}$ are mutually disjoint; that is, if

$$A_i \neq A_j \text{ then } A_i \cap A_j = \emptyset$$

The subsets in a partition are called cells. Figure 1-11 is a Venn diagram of a partition of the rectangular set S of points into five cells, A_1, A_2, A_3, A_4 , and A_5 .

EXAMPLE 1.10. Consider the following collections of subsets of $S = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$

- (i) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}\}$
- (ii) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}\}$
- (iii) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\}$

Then (i) is not a partition of S since 7 in S does not belong to any of the subsets. Furthermore, (ii) is not a partition of S since $\{1, 3, 5\}$ and $\{5, 7, 9\}$ are not disjoint. On the other hand, (iii) is a partition of S .

ترجمه برای دانش آموزان

Generalized Set Operation

The set operations of union and intersection were defined above for two sets. These operations can be extended to any number of sets, finite or infinite, as follows.

Consider first a finite number of sets say, A_1, A_2, \dots, A_m . The union and intersection of these sets are denoted and defined, respectively, by

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^m A_i = \{x: x \in A_i \text{ for some } A_i\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m = \bigcap_{i=1}^m A_i = \{x: x \in A_i \text{ for every } A_i\}$$

That is, the union consists of those elements which belong to at least one of the sets, and the intersection consists of those elements which belong to all the sets.



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

۳۱۵. چند تابع f از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به A می‌توان

تعریف کرد به‌طوری‌که:

$$\text{الف) } f(2) > f(3)$$

$$\text{ب) } f(1) \neq f(2)$$

ج) برد تابع مجموعه‌ای دوعضوی باشد.

ابتدا مسئله را در سه حالت جداگانه حل کنید. سپس در حالتی مسئله را حل کنید که سه شرط را با هم در نظر می‌گیرید.

۳۱۶. این گزاره را ثابت یا رد کنید: «زیرمجموعه S

از اعداد صحیح نامنفی به‌گونه‌ای وجود دارد که هر عدد صحیح نامنفی را به‌صورت یکتایی به فرم $x+2y$ می‌توان نوشت؛ به قسمی که: $x, y \in S$.

۳۱۷. نقطه P روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC را به سه رأس مثلث وصل کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع طول دو پاره‌خط کوچک‌تر در میان PA ، PB ، و PC با طول پاره‌خط بزرگ‌تر برابر است.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۱۱. عدد گویای r را بیابید، به‌طوری‌که:

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \pi r$$

۳۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\tan^{-1} \frac{1}{1+1^2} + \tan^{-1} \frac{1}{1+2^2} + \dots + \tan^{-1} \frac{1}{1+n^2} < \frac{\pi}{4}$$

۳۱۳. مقادیر a ، b و c را بیابید، به‌طوری‌که برای تابع

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = f(1) = f(2) = 1396$$

۳۱۴. دستگاه دو معادله دو مجهولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases} x^2 = y + \frac{1}{4} \\ y^2 = x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

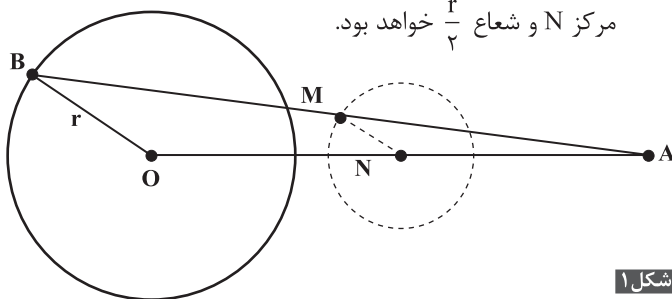
با یک یال به هم وصل کنیم، با توجه به شرایط مسئله، G باید همبند باشد. از طرف دیگر، هر گراف همبند با n رأس، حداقل $n-1$ یال دارد. پس تعداد یال‌های G حداقل برابر ۴۹ خواهد بود. برای رسیدن به شرایط خواسته شده، درخت G باید به شکل ستاره باشد؛ یعنی یک رأس به ۴۹ رأس دیگر وصل باشد.

۲۸۳. از ظرفی که ۱۰ لیتر آب دارد، می‌خواهیم ۶ لیتر آب برداریم. دو پیمانه با اندازه‌های ۵ لیتری و ۹ لیتری در اختیار داریم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

با پیمانه ۵ لیتری، ۵ لیتر آب برمی‌داریم و تمام آن را در پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم. سپس یکبار دیگر بقیه آب ظرف را در پیمانه ۵ لیتری می‌ریزیم و ۴ لیتر آن را در پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم تا پر شود. در نتیجه در پیمانه ۵ لیتری، ۱ لیتر باقی می‌ماند. ۹ لیتر آب پیمانه بزرگ‌تر را به ظرف ۱۰ لیتری برمی‌گردانیم. سپس ۱ لیتر آب پیمانه کوچک‌تر را داخل پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم. قدم آخر این است که با پیمانه کوچک‌تر ۵ لیتر آب برداریم و به پیمانه بزرگ‌تر اضافه کنیم.

۲۸۴. نقطه A خارج دایره C مفروض است. نقطه متحرک B را روی دایره، و M را نقطه میانی AB در نظر بگیرید. با حرکت B روی C ، مکان هندسی M را بیابید.

مطابق شکل اگر شعاع دایره، r و مرکز آن نقطه O باشد و M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و OA باشند، آن‌گاه MN طولی برابر $\frac{r}{2}$ خواهد داشت. در نتیجه M روی دایره‌ای به مرکز N و شعاع $\frac{r}{2}$ خواهد بود.



شکل ۱

۳۱۸. در مستطیل $ABCD$ با طول قطر d ، عمود AE را بر قطر BD رسم کرده‌ایم. اگر طول اضلاع مستطیل $EFCG$ برابر ۱ و n باشد، ثابت کنید: $\sqrt{d^2} = \sqrt{n^2} + 1$. نقطه F روی DC و نقطه G روی BG است.

۳۱۹. حاصل جمع ده جمله متوالی از یک دنباله هندسی برابر ۱۸ و حاصل جمع معکوس‌های آن‌ها برابر ۶ است. حاصل ضرب این ده جمله را به دست آورید.

۳۲۰. حاصل ضرب دو عدد سه رقمی $\overline{۱۳B}$ و $\overline{۲A۵}$ مضرب ۳۶ است، همه مقادیر ممکن برای دو رقم A و B را بیابید.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۲۸۱. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که میزان نیست (در حالی که هیچ وزنه یا شیء روی کفه‌ها نیست، دو کفه در یک ارتفاع نیستند). از طرف دیگر، وزنه یا سنگ ترازو به هر میزانی که بخواهیم در اختیار داریم. راهی برای وزن کردن یک شیء با وزن مجهول پیدا کنید.

در کفه‌ای که بالاتر است، آن قدر وزنه معلوم می‌گذاریم تا دو کفه در مقابل هم قرار گیرند و ترازو میزان شود. اکنون ترازو میزان شده است و می‌توان هر شیء را وزن کرد.

۲۸۲. در کشوری که ۵۰ شهر دارد، می‌خواهیم بین شهرها خطوط هوایی برقرار کنیم؛ به طوری که بتوانیم از هر شهر به شهر دیگر با حداکثر ۱ توقف مسافرت کنیم. حداقل تعداد خطوط مستقیم بین شهرها را به دست آورید.

اگر متناظر با هر شهر یک رأس در گراف G در نظر بگیریم و هر دو شهر با پرواز مستقیم را

۲۸۵. در یک کلاس تعداد دانش‌جویان دختر

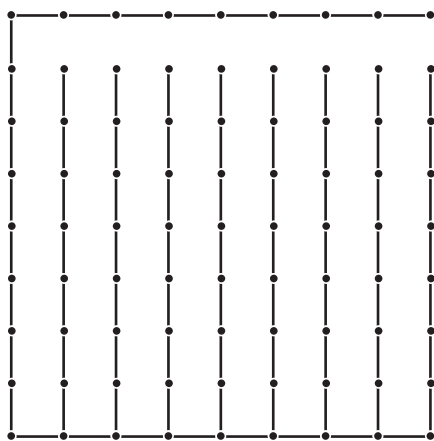
بیش از ۴۰ درصد و کمتر از ۵۰ درصد است. حداقل تعداد دانش‌جویان کلاس را بیابید.

اگر n تعداد کل دانش‌جویان و k تعداد دانش‌جویان دختر باشد، آن‌گاه باید: $\frac{1}{2} < \frac{k}{n} < \frac{1}{2}$ در نتیجه باید: $\frac{n}{2} < k < \frac{2n}{5}$. با بررسی مقادیر اولیه برای n به عدد $n=7$ می‌رسیم و در این حالت: $k=3$.

۲۸۶. با چوب کبریت یک جدول 8×8 ساخته‌ایم

که شامل ۶۴ خانه یک‌دریک است. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم، به طوری که بتوانیم از هر خانه جدول به هر خانه دیگر جدول حرکت کنیم و مسیر حرکت هیچ چوب کبریتی را قطع نکند؟

اگر G را به این صورت تعریف می‌کنیم: به ازای هر خانه جدول، رأسی در G در نظر می‌گیریم. هر دو رأس را که متناظر با دو خانه مجاور (با یک ضلع مشترک) هستند، با یک یال به هم وصل می‌کنیم. اگر ضلع مشترک آن‌ها را حذف کرده باشیم، چون می‌خواهیم از هر رأس به رئوس دیگر مسیری داشته باشیم، پس گراف G باید همبند باشد. در نتیجه G کم‌ترین تعداد یال را خواهد داشت؛ البته اگر یک درخت باشد. در نتیجه حداقل باید ۶۳ یال (چوب کبریت حذف شده) داشته باشد. شکل ۲ یک نمونه از جواب است.



شکل ۲

۲۸۷. یک جعبه در باز با ابعاد صحیح داریم که

قاعده آن مربع شکل و مساحت کل آن ۴۲۹ سانتی‌متر مربع است. ابعاد جعبه را بیابید، به طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

اگر x طول ضلع قاعده و y ارتفاع جعبه باشد، داریم: $x(x+4y)=429$ و یا: $x(x+4y)=3 \times 11 \times 13$. در نتیجه x برابر ۱، ۳، ۱۱، ۱۳ و یا مقداری بزرگ‌تر یا مساوی ۳۳ خواهد بود. اگر $x=1$ ، آن‌گاه: $y=107$ و حجم برابر ۱۰۷ خواهد بود. اگر $x=3$ ، آن‌گاه $y=35$ و حجم جعبه برابر ۳۱۵ خواهد شد. اگر $x=11$ ، آن‌گاه $y=7$ و حجم برابر ۸۴۷ خواهد شد. اگر $x=13$ ، $y=5$ و حجم جعبه برابر ۸۴۵ خواهد شد. در حالتی که $x \geq 33$ باشد، آن‌گاه: $x^2 > 429$ که غیرممکن است. در نتیجه پاسخ مسئله $(x,y)=(11,7)$ است.

۲۸۸. دو دایره به شعاع ۲ و ۴ در صفحه مفروض‌اند

و فاصله مراکز آن‌ها برابر است با ۱۰. نقطه متحرک A روی دایره اول و نقطه متحرک B روی دایره دوم به طور مستقل می‌توانند حرکت کنند. مکان هندسی وسط M پاره خط AB را پیدا کنید.

شعاع دایره بزرگ‌تر را r_1 و مرکز آن را O_1 و شعاع دایره کوچک‌تر را r_2 و مرکز آن را O_2 می‌نامیم. همچنین وسط پاره خط O_1O_2 را O می‌نامیم. اگر A را به O_2 وصل کنیم و وسط آن را با O' نمایش دهیم، آن‌گاه به راحتی می‌توان ثابت کرد: $OO' = \frac{r_1}{2}$ و $O'M = \frac{r_2}{2}$. حال اگر A را ثابت در نظر بگیریم و B را روی دایره دوم حرکت دهیم، M روی دایره‌ای به شعاع $\frac{r_2}{2}$ و مرکز O' تغییر خواهد کرد. با تغییر A نیز مرکز O' روی دایره‌ای به شعاع $\frac{r_1}{2}$ و مرکز O تغییر خواهد کرد. در نتیجه M در ناحیه خاکستری رنگ با شعاع داخلی $\frac{r_1 - r_2}{2}$ و شعاع خارجی $\frac{r_1 + r_2}{2}$ تغییر می‌کند.

۲۹۰. با فرض $x_1, x_2, x_3 > 0$ و $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = 1$

کمترین مقدار $P = x_1 x_2 x_3$ را به دست آورید.

با تغییر متغیر $\frac{1}{1+x_i} = y_i$ خواهیم داشت:

$$x_i = \frac{1-y_i}{y_i} \text{ در نتیجه:}$$

$$x_1 x_2 x_3 = \left(\frac{1-y_1}{y_1}\right) \left(\frac{1-y_2}{y_2}\right) \left(\frac{1-y_3}{y_3}\right)$$

$$= \frac{1}{y_1 y_2 y_3} (y_2 + y_3)(y_1 + y_3)(y_1 + y_2)$$

حال به کمک نامساوی واسطه‌ها خواهیم

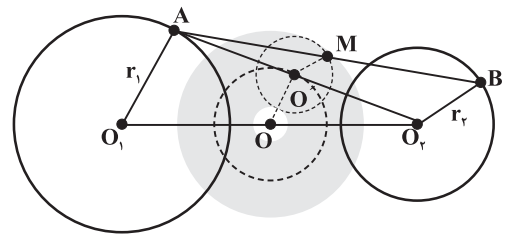
داشت:

$$x_1 x_2 x_3 \geq \frac{2\sqrt{y_2 y_3} \times 2\sqrt{y_1 y_3} \times 2\sqrt{y_1 y_2}}{y_1 y_2 y_3} = 8$$

در نتیجه کمترین مقدار $x_1 x_2 x_3$ برابر

۸ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2$$



شکل ۳

۲۸۹. با فرض $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ریشه‌های معادله زیر را

به دست آورید:

$$\sqrt[3]{x+a} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x-a}$$

اگر $m = \sqrt[3]{x+a}$ و $n = \sqrt[3]{x-a}$ ، آن‌گاه

$$m - n = \sqrt[3]{a}$$

$$(m - n)^3 = a$$

$$\text{بنابراین: } m^3 - n^3 - 3mn(m - n) = a$$

در نتیجه:

$$x + a - (x - a) - 3\sqrt[3]{x^2 - a^2} (m - n) = a$$

که پس از ساده کردن ما را به معادله

$$\sqrt[3]{x^2 - a^2} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{3}$$

$$\text{جواب } a = \frac{2\sqrt[3]{21}}{9} + a^2 \text{ می‌رسیم. } x = \sqrt{\frac{a^2}{27} + a^2}$$

پرسش‌های بیکار جو! ۳

در مثلث ABC ($BC > AB > AC$), طول‌های ضلع‌ها سه عدد طبیعی متوالی‌اند و ارتفاع وارد بر AB , ۴۵ سانتی‌متر است. اگر نیم‌ساز زاویه A این ارتفاع را در نقطه M قطع کند، مساحت مثلث MAB چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

(الف) $\frac{8}{17}$

(ب) $\frac{8}{25}$

(ج) $\frac{6}{17}$

(د) $\frac{6}{19}$

(ه) $\frac{6}{17}$

نسبت طلایی

در ۱۶ اثر باستانی جهان

اشاره

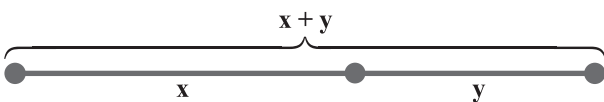
این مقاله به بررسی ریاضیات حاکم بر ۱۶ اثر خارق العاده معماری از دنیای قدیم می‌پردازد. این ۱۶ اثر شگفت‌انگیز در عین حال که هر کدام در جایگاه خود دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و جالبی هستند، و با اینکه کیلومترها از هم فاصله دارند، فاصله‌های خاصی با یکدیگر دارند و همگی روی یک دایره بزرگ فرضی قرار دارند که همچون کمربندی دور زمین را احاطه کرده است. به همین سبب به نظر می‌رسد، ارتباط عجیبی میان آن‌ها وجود دارد. این بناهای عظیم و شگرف، قرن‌ها فیلسوفان، دانشمندان و جهان‌گردان را از نقاط متفاوت جهان مجذوب خود ساخته‌اند. در این مقاله به معرفی اجمالی این ۱۶ اثر پرداخته‌ایم و ردپای نسبت طلایی را در فواصل میان آن‌ها جست‌وجو خواهیم کرد.



عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی ارومیه

کلیدواژه‌ها: دایره بزرگ، پی، فی، نسبت طلایی، آثار باستانی

حل جبری این مسئله، به زبان امروزی چنین است:



$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = xy + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 - yx - y^2 = 0$$

پس از حل این معادله درجه دوم دو ریشه $x_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y$ و $x_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)y$ برای x به دست می‌آید که به دلیل نامنفی بودن طول پاره خط، فقط $x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y$ قابل قبول است و در نتیجه:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

● دو ویژگی جالب فی

۱. مربع فی یک واحد از خودش بزرگ‌تر است؛ یعنی: $\varphi^2 = \varphi + 1$.
۲. وارون فی از خودش یک واحد کمتر است؛ یعنی: $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

■ مقدمات

● مایل، اینچ و ارش مصری

این سه واحدهای طول هستند. یک «مایل» معادل ۱۶۰۹/۳۴ متر و یک «اینچ» برابر ۲/۵۴ سانتی‌متر است. «ارش» که معادل انگلیسی آن «cubit» است، واحد طولی است که مصریان باستان از آن استفاده می‌کردند. هر ارش معادل ۲۰/۶۲۵ اینچ یا ۵۲/۳۸۷۵ سانتی‌متر است.

● فی

حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد، ریاضی‌دان برجسته یونان باستان، اقلیدس، در فصل چهارم از کتاب معروف «اصول» که تا ۱۰۰ سال پیش، از پرخواننده‌ترین کتاب‌های علمی بود، چنین نوشته است: «یک پاره خط مستقیم را می‌توان به دو قسمت کوچک و بزرگ آن چنان تقسیم کرد که نسبت طول پاره خط به جزء بزرگ برابر با نسبت طول جزء بزرگ به کوچک باشد.» او با حل جبری این مسئله دریافت که مقدار چنین نسبتی همواره معادل نصف جذر عدد پنج، به اضافه یک، یا به طور تقریبی برابر ۱/۶۱۸ است؛ عدد گنگی که با حرف یونانی φ نمایش داده شد و «نسبت طلایی» نام گرفت:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

تمرین

این دو ویژگی را ثابت کنید.

■ معرفی مختصر ۱۶ اثر تاریخی

۱ جزیره ایستر^۱: جزیره‌ای است متعلق به کشور شیلی که به‌خاطر تندریس‌های ۴۰۰ ساله عجیب خود (موآیی) معروف است.



۲ نازکا^۲: خطها و تصویرهای نازکا، مجموعه خطهایی در صحرای نازکا در کشور پرو هستند که توسط فرهنگ نازکا، بین ۲۰۰ پیش از میلاد تا ۷۰۰ میلادی، خلق شده‌اند، صدها شکل منحصر به فرد که از نظر پیچیدگی از خط‌های ساده تا عنکبوت، مرغ مگس، میمون و مارمولک، دارای تنوع هستند. این خط‌ها به جز از هوا (و گاه فضا)، به‌صورت منسجم قابل تشخیص نیستند. از این رو حدس زده می‌شود که مردم نازکا هرگز نتوانستند کاری را که خلق کرده‌اند، به‌صورت منسجم ببینند.



۳ اولان نای تامبو^۳: شهر کوچک باستانی مربوط به امپراتوری «ینکا» در «پرو جنوبی»



۴ پاراتو آری^۴: ترکیبی از شکل‌های هرم مانند که به‌طور طبیعی در جنوب کشور «پرو» اطراف «آمازون» تشکیل شده‌اند. این مجموعه در سال ۱۹۷۶ از فضا، توسط «مؤسسه فضانوردی ناسا» کشف شد.



۵ غارهای طاسیلی ناچر^۵: این غارها با بیش از ۱۵۰۰۰ طراحی و حکاکی متعلق به ۲۵۰۰۰ سال پیش از میلاد مسیح تا قرن اول میلادی، حاوی نقاشی‌های مرموزی هستند که نشان از وجود تمدن در حدود ۳۰۰۰۰ سال پیش دارند.



۶ جیزه^۶: سومین شهر بزرگ کشور مصر که شهرتش به واسطه اهرام ثلاثه و مجسمه‌ای به نام «ابوالهول» است.



۷ پترا^۷: شهری تاریخی با معماری شگفت‌انگیز در کشور «اردن» است که قدمت ۲۵۰۰ ساله دارد.



۸ پرسپولیس^۸: نام یکی از شهرهای باستانی ایران است. کاخی به نام تخت‌جمشید در آن وجود داشته که در سال ۵۱۸ پیش از میلاد بنایش آغاز شده است. در این کاخ نسبت ارتفاع سردرها به عرض آن‌ها و نیز ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون، برابر نسبت طلایی بوده است.



۹ پیای^۹: شهرکی با معماری جالب در کشور «میانمار».



۱۰ سوخوتای^{۱۰}: شهر قدیمی سوخوتای تایلند، محل بسیار مناسبی برای عکاسان و علاقه‌مندان به تاریخ است. قدمت این شهر به قرن سیزدهم میلادی برمی‌گردد.



۱۱ جزیره آناتوم^{۱۱}: جنوبی‌ترین جزیره مسکونی در کشور «وانواتو» که دارای مناظر و طبیعت خارق‌العاده‌ای است.



۱۲ ماچوپیچو^{۱۲}: پربازدیدترین مکان گردشگری کشور «پرو» و از عجایب هفتگانه جدید جهان است که قدمت ۵۰۰ ساله دارد.



۱۳ سیو: نام یک آبادی در کشور مصر است و قدمت آن به ۳۰۰۰ سال می‌رسد.



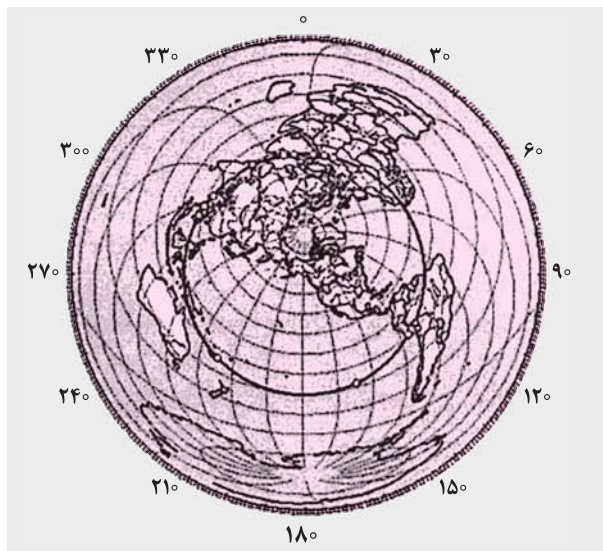
۱۶ اور: نام شهری باستانی در عراق مربوط به تمدن سومری که قدمت آن به ۳۸۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد.



۱۴ موهنجودارو: به معنای «تپه مردگان»، در کشور پاکستان. این اثر باستانی شاهد بلامنازعی بر عظمت تمدنی است که از ۵۰۰۰ سال پیش در پاکستان شکوفا شد.



این ۱۶ مورد از سه حیث جالب توجه هستند:
 ۱. این آثار جاذبه‌ها و شگفتی‌های خاص خود را دارند.
 ۲. به موقعیت این ۱۶ مکان روی کره زمین در تصویر زیر توجه کنید.



۱۵ آنگکور: شهری در شمال غربی کامبوج که در قرن نهم میلادی ساخته شده است.



این ۱۶ اثر، روی دایره‌ای واحد که همچون کمربندی به دور زمین کشیده شده است، هم‌ردیف هستند. به بیان دقیق‌تر، شش مورد اول دقیقاً روی دایره، موارد هفت تا یازده با اختلاف حداکثر یک درجه (حداکثر ۱۰ کیلومتر) و موارد دوازده تا شانزده، حداکثر به اندازه یک چهارم درجه (حداکثر ۶۰ کیلومتر) از دایره اصلی فاصله دارند. در جدول زیر مختصات و فاصله این نقاط تا دایره بزرگ آمده‌اند. محیط این دایره ۲۴۸۹۲ مایل و شعاع آن ۳۹۶۲ مایل، با محیط و شعاع استوایی زمین هم‌خوانی دارد.

نام فارسی	نام لاتین	عرض جغرافیایی	طول جغرافیایی	فاصله تا دایره‌ای بزرگ
جزیره ایستر	Easter Island	۲۷°۶' جنوبی	۱۰۹°۴۲' غربی	۰ مایل
نازکا	Nazca	۱۴°۴۲' جنوبی	۷۵°۶' غربی	۰ مایل
اولان تای تامبو	Ollantaytambo	۱۳°۱۵' جنوبی	۷۲°۱۶' غربی	۰ مایل
پاراتوآری	Paratoari	۱۲°۴۸' جنوبی	۷۱°۲۵' غربی	۰ مایل
طاسیلی ناچر	Tassili n'ajjer	۲۶°۳۲' شمالی	۹°۵۰' شرقی	۰ مایل
جیزه	Giza	۲۹°۵۹' شمالی	۳۱°۹' شرقی	۰ مایل
پترا	Petra	۳۰°۱۹' شمالی	۳۵°۲۸' شرقی	۶ مایل
پرسپولیس	Persepolis	۲۹°۵۶' شمالی	۵۲°۵۵' شرقی	۵ مایل
پیای	Pyay	۱۹°۱۵' شمالی	۹۵°۵' شرقی	۵ مایل
سوختای	Sukhothai	۱۷°۱' شمالی	۹۹°۴۲' شرقی	۵ مایل
جزیره آناتوم	Aneityum Island	۲۰°۱۰' جنوبی	۱۶۹°۴۸' شرقی	۸ مایل
ماچوپیکو	Machupicchu	۱۳°۶' جنوبی	۷۲°۳۵' غربی	۱۵ مایل
سیوه	Siwa	۲۹°۱۴' شمالی	۲۵°۳۱' شرقی	۱۰ مایل
موهنجودارو	Mohenjo Daro	۲۷°۱۵' شمالی	۶۸°۱۷' شرقی	۲۰ مایل
آنگکور	Angkor	۱۴°۲۴' شمالی	۱۰۴°۴۰' شرقی	۲۵ مایل
اور	Ur	۳۰°۵۷' شمالی	۴۶°۷' شرقی	۴۰ مایل

۳. نکته جالب توجه و در واقع اصلی‌ترین موضوع بحث این

مقاله، فاصله‌های شگرفی است که این نقاط با هم دارند. بین این فاصله‌ها می‌توان ردپای نسبت طلایی را به کرات دید. به دلیل محدودیت حجم مقاله، به ذکر یک مورد اکتفا و از خوانندگان علاقه‌مند دعوت می‌کنیم که به مقاله

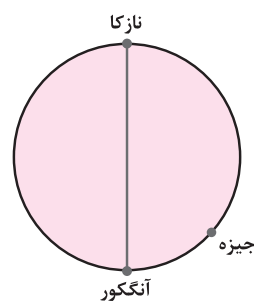
«The prehistoric alignment of world wonders» اثر

جیم آلیسون^{۱۷} مراجعه کنید.

موقعیت معبد آنگکور، هرم جیزه و مرغ مگس از مجموعه خط‌های نازکا و فاصله بین آن‌ها در شکل‌هایی که در ادامه به نمایش گذاشته شده است.

* پی‌نوشت‌ها

1. Easter Island
2. Nazca
3. ollan tay tambo
4. Para toary
5. Tassili n'ajjer
6. Giza
7. Petra
8. Persepolis
9. Pyay
10. Sukotai
11. Anatom Island
12. Machupiccho
13. Siwa
14. Mohenjo Daro
15. Angkor
16. Ur
17. jim Alison



همان‌طور که قبلاً اشاره شد، محیط دایره بزرگی که ۱۶ اثر یاد شده روی آن هم‌ردیف هستند، ۲۴/۸۹۲ مایل است. معبد آنگکور از هرم جیزه ۴۷۵۴ مایل و هرم جیزه از نازکا ۷۶۹۲ مایل فاصله دارد. اگر این دو فاصله را جمع کنیم، عدد ۱۲۴۴۶ مایل به دست می‌آید (نصف محیط دایره بزرگ). یعنی روی دایره، آنگکور و نازکا در نقطه مقابل هم قرار دارند و دو سطر قطری از دایره هستند. حال به تناسبات زیر توجه کنید:

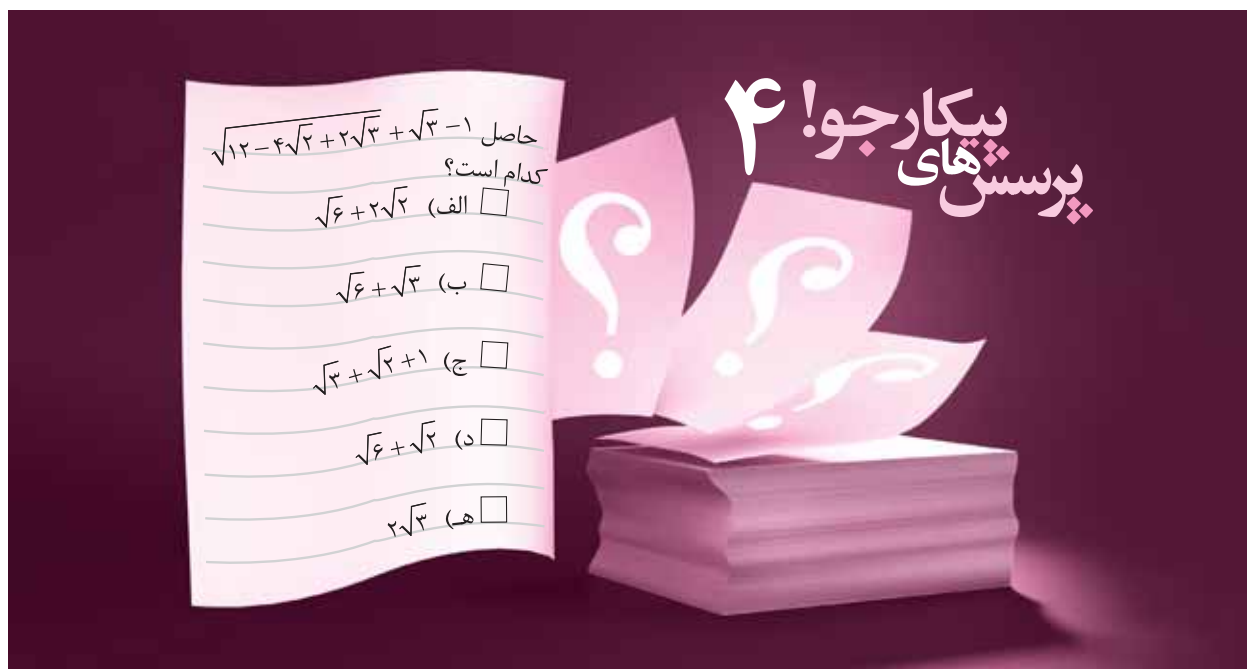
$$\frac{7692}{4754} = \frac{7692 + 4754}{7692} \approx 1/618$$

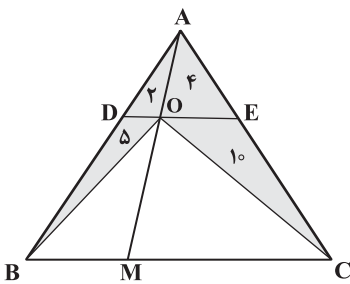
$$\frac{12446}{7692} = \frac{12446 + 7692}{12446} \approx 1/618$$

در واقع پاره‌خط و اصل آنگکور و نازکا توسط جیزه به نسبت طلایی به دو قطعه بزرگ و کوچک تقسیم شده است؛ همچنین پاره‌خط واصل جیزه و آنگکور توسط نازکا.

* منابع

۱. اطلس جامع گیتاشناسی ۸۷-۸۶. طرح، تهیه، کار توگرافی رایانه و چاپ از مؤسسه جغرافیایی و کار توگرافی گیتاشناسی (۱۳۸۶). زیر نظر سعید بختیاری. تهران. چاپ اول.
۲. جعفری، عباس (۱۳۶۶). فرهنگ بزرگ گیتاشناسی (اصطلاحات جغرافیایی). انتشارات گیتاشناسی. تهران. چاپ اول.
۳. قراگوزلو، جلیل... (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.
۴. قلعه پوراقدم، عباس (۱۳۹۴). «فی، پی و هرم بزرگ مصر». مجله رشد برهان ریاضی متوسطه ۲. شماره ۸۹. دوره ۲۴.
5. Alison, jim. A new look at an old design. the prehistoric alignment of world wonders.
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Nazca_lines.
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Tassili_n'Ajjer
8. lemesurier, peter. (1977). the great pyramid decoded
9. meisner, gary. (august 18. 2012), phi, pi and the great pyramid of EGYPT at GIZA.





۲. در شکل مقابل مساحت هر مثلث با عدد درون آن مشخص شده است. اگر $AM=10\text{ cm}$ طول OM را به دست آورید.

هندسه ۲

۱. در مثلث ABC، می‌دانیم مجموع AB و AC شش واحد بزرگ‌تر از BC است. از نقطه برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های B و C عمودی بر AC رسم می‌کنیم. اگر پای این عمود نقطه H باشد، طول AH را به دست آورید.

۲. نسبت مساحت‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای معین محاط شده و بر آن محیط شده‌اند.

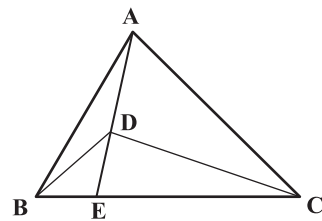
۳. ثابت کنید مربع تنها چهارضلعی است که هم محیطی و هم محاطی است و مرکزهای دایره‌های محاطی و محیطی آن برهم منطبق‌اند.

هندسه ۱

۱. الف) ثابت کنید اگر: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ، آن‌گاه: $\frac{a-c}{b-d} = \frac{e}{f}$ ($b \neq d$).

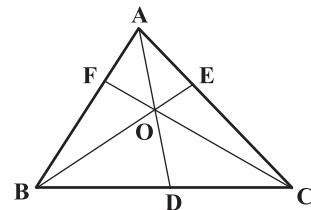
ب) در شکل زیر ثابت کنید:

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{BE}{EC}$$



ج) در مثلث ABC خطوط AD، BE و CF در نقطه O هم‌رس‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$



ریاضی (۳) تجربی

۱. دامنه توابع گویای زیر را به صورت بازه بنویسید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{ب) } g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$$

۲. برد تابع زیر را به دست آورید:

$$f(x) = -2 - \sqrt{x+4}$$

۳. با رسم نمودار تابع‌های با ضابطه‌های داده شده، مشخص کنید کدام یک

از آن‌ها یک‌به‌یک است. $(x \in [-2, 2])$

$$\text{الف) } y = x + [x]$$

$$\text{ب) } y = x - [x]$$

۴. اگر داشته باشیم: $f(x) = |x| - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را به دست آورید.

ریاضی

(پایه دهم)

۱. اگر $0 < a < 1$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|a - \sqrt{a}| - |\sqrt{a} - a| - |a^2 - \sqrt{a}|$$

۲. اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{-4a^3} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^4}$$

۳. اگر $3x + \frac{1}{x} = 5$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$x^3 + \frac{1}{27x^3}$$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:

$$\text{الف) } x^9 - y^9 \quad \text{ب) } 2a^2 - a^2 - 2a + 1$$

۵. مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید:

$$\text{الف) } \frac{1}{2 - \sqrt[3]{4}} \quad \text{ب) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

حسابان (۳)

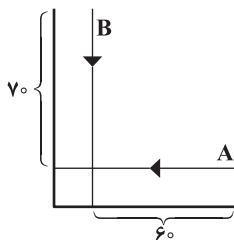
۱. اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ با دامنه $D_f = (0, +\infty)$ داده شده باشد، ضابطه تابع معکوس آن را مشخص کنید و $f^{-1}(\sqrt{3})$ را به دست آورید.

۲. اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ، دامنه تابع $f \circ f$ را به دست آورید و نشان دهید:

$$(f \circ f)(x) = x$$

۳. دو خودرو A و B به سمت محل تلاقی دو جاده (مطابق شکل) در حرکت‌اند. فاصله خودرو A از محل تقاطع ۶۰ کیلومتر و فاصله خودرو B از محل تلاقی ۷۰ کیلومتر است. هر دو خودرو با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در حرکت‌اند.

الف) پس از ۳۰ دقیقه فاصله بین دو خودرو چند کیلومتر است؟



ب) فاصله بین دو خودرو را برحسب کیلومتر به عنوان تابعی از زمان (برحسب دقیقه) به دست آورید.

۴. ویژگی‌های زیر را ثابت کنید.

$$\text{الف) } [x+n] = [x] + n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ب) } [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

آمار و احتمال

(پایه یازدهم)

۱. فرض کنید در استان مرکزی ۲۵ درصد جرائم در طول روز و ۸۰ درصد جرائم در شهر صورت می‌گیرند. اگر تنها ۱۰ درصد جرائم خارج از شهر و در طول روز واقع شوند، در این صورت چند درصد جرائم، داخل شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟ چند درصد آن‌ها خارج از شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟

۲. عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر ۴ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۶ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

۳. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

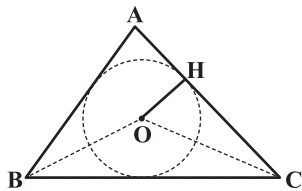
$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

۴. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول در هر بار پرتاب است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

۵. اگر $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه‌ای و $P(\{a, b, c\}) = \frac{3}{4}$ و $P(\{a, c, d\}) = \frac{4}{5}$ باشد، $P(\{a, c\})$ را محاسبه کنید.

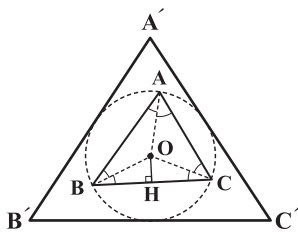
۶. اگر در فضای نمونه‌ای $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ داشته باشیم: $P(\{x_i, x_j\}) = \frac{1}{i} P(x_i + 1)$ ، حاصل $P(\{x_2, x_4\})$ را به دست آورید.

حل مسائل هندسه ۲



۱. نقطه O، نقطه همرسی نیم‌سازها و در نتیجه مرکز دایره محاطی داخلی مثلث است. بنابراین $OH=r$ شعاع دایره و $AH=p-a$

$$AH = p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} = \frac{6}{2} = 3$$



۲. O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است. بنابراین نقطه همرسی نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی مثلث است و در نتیجه:

$$\begin{aligned} OA = OB = OC &\Rightarrow \angle OCB = \angle OBC = 30^\circ \\ \Rightarrow OH = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}r, CH = \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ \Rightarrow BC = \sqrt{3}r \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3}r)^2 \\ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \end{aligned}$$

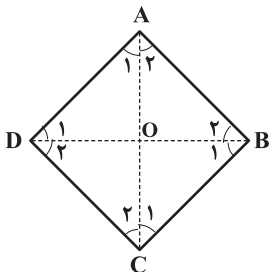
اما دایره فوق، دایره محاطی مثلث $A'B'C'$ است. بنابراین:

$$r = \frac{S_{A'B'C'}}{P_{A'B'C'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}B'C'^2}{\frac{3}{2}B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{6}B'C'$$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}r$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}B'C'^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(12r^2) = 3\sqrt{3}r^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 4$$



۳. فرض کنیم ABCD محیطی باشد. در این صورت نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی چهارضلعی در نقطه O (مرکز دایره محاطی) هم‌رس‌اند. اما چون ABCD محاطی هم است و O مرکز دایره محیطی آن است، بنابراین: $OA=OB=OC=OD=R$



حل مسائل هندسه ۱

(الف)

$$\begin{aligned} \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k &\Rightarrow a = bk, c = dk \\ \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{bk-dk}{b-d} = \frac{(b-d)k}{b-d} = k \\ \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{e}{f} \end{aligned}$$

(ب) به کمک ویژگی نسبت مساحت‌ها (قضیه کتاب درسی) داریم:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{ACE}} = \frac{BE}{CE}, \frac{S_{BDE}}{S_{CDE}} = \frac{BE}{CE}$$

و به کمک ویژگی (الف) داریم:

$$\frac{S_{ABE} - S_{BDE}}{S_{ACE} - S_{CDE}} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BE}{CE}$$

(ج) به کمک ویژگی ثابت شده در (ب) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BD}{DC}, \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CE}{EA}, \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{AF}{FB} \\ \Rightarrow \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \times \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} \times \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = 1 \end{aligned}$$

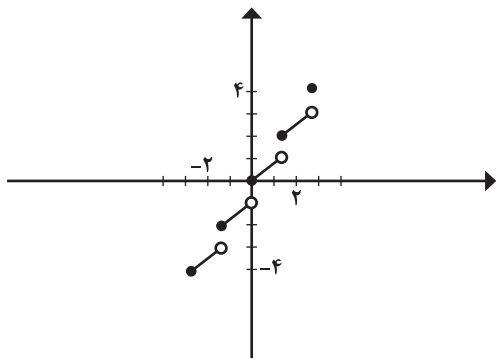
۲. با توجه به مقدار مساحت‌ها داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{S_{AOD}}{S_{DOB}} = \frac{2}{5}, \frac{AE}{EC} = \frac{S_{AOE}}{S_{OEC}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AO+OM}{OM} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{5}{7}$$

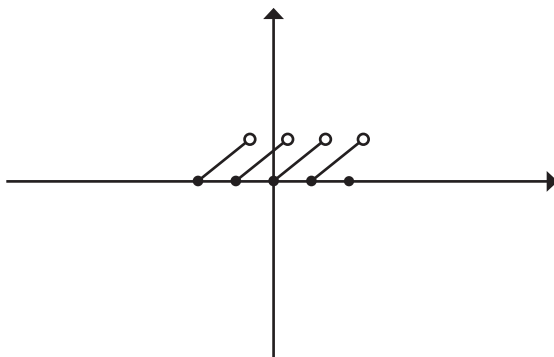


قسمت ب) نمودار تابع را در بازه $[-2, 2]$ رسم می‌کنیم:

ب) $y = x - [x]$

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x + 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} -2 \\ -1 \end{array} \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \\ x = 2 &\Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 2 - 2 = 0 \quad \text{نقطه } (2, 0) \end{aligned}$$

با رسم خطوط موازی محور x ها مشاهده می‌شود که این تابع یک‌به‌یک نیست.



$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{|x|-1}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [0, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow |x|-1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} \cap [0, +\infty) - \{1, -1\} = [0, +\infty) - \{1\}$$

یعنی مثلث‌های $\triangle AOB$ و $\triangle BOC$ متساوی الساقین هستند و لذا: $\hat{A}_r = \hat{B}_r$ و در نتیجه: $2\hat{A}_r = 2\hat{B}_r$. به همین صورت: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ و چون $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ پس: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ و در نتیجه $ABCD$ مربع است.

پاسخ مسائل ریاضی (۳) تجربی

۱. الف) مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

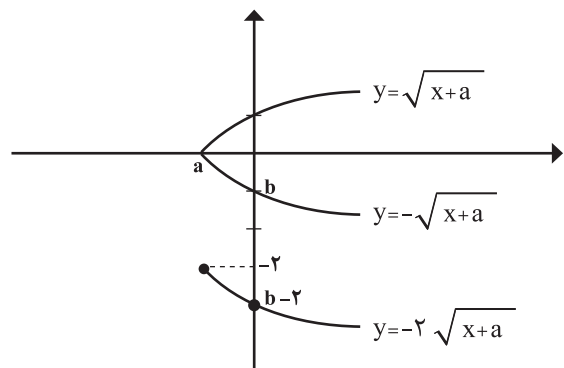
$$\text{نمای بازه‌ای } D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0 \quad \text{ب)}$$

بنابراین معادله جواب ندارد، یعنی:

$$D_g = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

۲. a را نقطه‌ای دلخواه فرض می‌کنیم:



$$\Rightarrow R = (-\infty, -]$$

۳. قسمت الف) نمودار تابع را در بازه $[-2, 2]$ رسم می‌کنیم:

الف) $y = x + [x]$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} -2 \\ -3 \end{array}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{بسته} \\ \text{باز} \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 2 + 2 = 4 \quad \text{نقطه } (2, 4)$$

با رسم خطوط موازی محور x ها مشخص می‌شود که این تابع

یک‌به‌یک است.

پاسخ مسائل ریاضی دهم

۱. اگر $0 < a < 1$ ، در این صورت: $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < a^2$. بنابراین:

$$|a - \sqrt{a}| - |\sqrt[3]{a} - a| - |a^2 - \sqrt{a}| \\ = \sqrt{a} - a - (\sqrt[3]{a} - a) - (\sqrt{a} - a^2) = a^2 - \sqrt[3]{a}$$

۲. در حالت کلی می‌دانیم که $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$. بنابراین:

$$\sqrt{-4a^2} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^4} = \sqrt{(4a^2)(-1)} - a - |a| \\ = 2|a|\sqrt{-1} - a - |a|$$

و چون $a < 0$ ، پس: $|a| = -a$. بنابراین عبارت بالا برابر است با:

$$-2a\sqrt{-1} - a - (-a) = -2a\sqrt{-1}$$

۳.

$$3x + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x + \frac{1}{3x} = \frac{5}{3} \Rightarrow (x + \frac{1}{3x})^3 = (\frac{5}{3})^3$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2(\frac{1}{3x}) + 3x(\frac{1}{9x^2}) + \frac{1}{27x^3} = \frac{125}{27}$$

$$\Rightarrow (x^3 + \frac{1}{27x^3}) + (x + \frac{1}{3x}) = \frac{125}{27}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{27x^3} = \frac{125}{27} - \frac{5}{3} = \frac{125 - 45}{27} = \frac{80}{27}$$

۴.

$$\text{الف) } x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 \\ = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ = (x - y)(x + y)(x^2 + x^2y^2 + y^2)$$

$$\text{ب) } 2a^2 - a^2 - 2a + 1 = (2a^2 - 2a) - (a^2 - 1) \\ = 2a(a - 1) - (a^2 - 1) \\ = (a^2 - 1)(2a - 1) \\ = (a - 1)(a + 1)(2a - 1)$$

۵.

$$\text{الف) } \frac{1}{2 - \sqrt{4}} = \frac{1}{2 - \sqrt{4}} \times \frac{4 + 2\sqrt{4} + \sqrt{16}}{4 + 2\sqrt{4} + \sqrt{16}} \\ = \frac{4 + 2\sqrt{4} + \sqrt{16}}{8 - 4} = \frac{4 + 2\sqrt{4} + \sqrt{16}}{4}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}} \times \frac{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}} \\ = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} \\ = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$$

پاسخ مسائل حسابان

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x} \Rightarrow 2xy = x^2 - 1 \quad ۱.$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = -y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

چون در فرض مسئله $x > 0$ ، پس جواب منفی قابل قبول نیست و:

$$f^{-1}(x) = -x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{در نتیجه: } x = -y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$f^{-1}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad ۲.$$

$$D_{f \circ f} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \frac{1-x}{1+x} \in \mathbb{R} - \{-1\} \right\}$$

معادله $\frac{1-x}{1+x} = -1$ جوابی ندارد. (چرا؟! بنابرین شرط دوم برای $D_{f \circ f}$ برقرار است و در نتیجه: $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$)

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

۳. الف) پس از 3^0 دقیقه خودروی A در فاصله $3^0 - 6^0 = 6^0 - 6^0 = 0$ کیلومتری تقاطع و خودروی B در فاصله $4^0 - 6^0 = 6^0 - 6^0 = 0$ کیلومتری محل تقاطع هستند.

فاصله بین دو خودرو برابر است با:

$$AB = \sqrt{3^0 + 4^0} = \sqrt{5} = 5 \text{ Km}$$

ب) در زمان t برحسب دقیقه خودروی A در فاصله

$$6^0 - 6^0 = 6^0 - 6^0 = 0 \text{ و خودروی B در فاصله } 7^0 - t \text{ از محل تقاطع}$$

قرار دارند. فاصله A و B از یکدیگر برابر است با:

$$S(t) = \sqrt{(6^0 - t)^2 + (7^0 - t)^2}$$

۴. الف) فرض کنید: $[x+n] = t$. داریم:

$$t \leq x + n \leq t + 1$$

$$\frac{t-n}{\text{دو عدد متوالی اند}} \leq x \leq (t-n) + 1 \Rightarrow [x] = t - n$$

$$\Rightarrow [x] + n = t \Rightarrow [x] + n = [x + n]$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x \quad \text{ب)}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = x + (-x) = 0$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x = n + p, n \in \mathbb{Z}, 0 < p < 1$$

$$[x] = [n + p] = n$$

$$[-x] = [-n - p] = -n + [-p] = -n - 1$$

$$[x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$$

$$\Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ مسائل آمار و احتمال (پایه یازدهم)

۱. فرض کنیم A پیشامد وقوع جرم در روز و B پیشامد وقوع جرم در شهر

باشد، در این صورت $P(A) = 0/25$ ، $P(B) = 0/8$ و $P(A \cap B) = 0/1$ و $P(A \cap B')$ مطلوب مسئله $P(A' \cap B)$ است.

$$P(A \cap B') = 0/1 \Rightarrow P(A - B) = 0/1$$

$$\Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0/1 \Rightarrow P(A \cap B) = 0/35$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\ = 0/8 - 0/35 = 0/45$$

۲. فرض کنیم A و B به ترتیب پیشامدهای بخش پذیری عدد انتخاب شده بر ۴ و ۶ باشد. حکم مسئله $P(A - B)$ است.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{\left[\frac{1000}{4} \right]}{100} - \frac{\left[\frac{1000}{12} \right]}{1000} = \frac{166}{1000}$$

۳. از رابطه $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به اینکه $P(A \cup B) \leq 1$ ، پس:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(1) = P(4) = P(6) = x,$$

$$P(2) = P(3) = P(5) = 3x$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 3x + 3x + x + 3x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = 7x = \frac{7}{12}$$

$$S = \{a, b, c, d\} \Rightarrow \frac{P(a) + P(b) + P(c) + P(d)}{P(\{a, b, c\})} + P(d) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} + P(d) = 1 \Rightarrow P(d) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(\{a, c, d\}) = P(\{a, c\}) + P(d) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P(\{a, c\}) = \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

$$P(x_i) = \frac{1}{i} P(x_{i+1})$$

$$\Rightarrow P(x_1) = P(x_2), P(x_2) = \frac{1}{2} P(x_3),$$

$$P(x_3) = \frac{1}{3} P(x_4), P(x_4) = \frac{1}{4} P(x_5)$$

فرض می‌کنیم: $P(x_1) = a$

بنابراین:

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$$

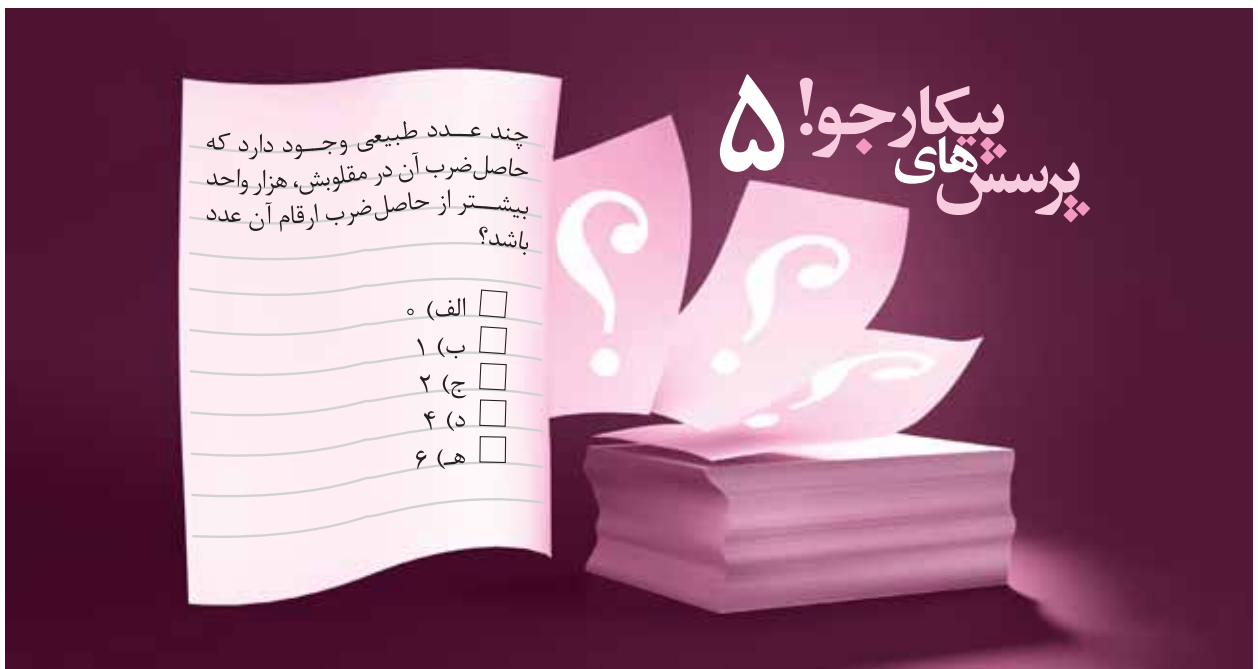
$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) + P(x_5) = 1$$

$$\Rightarrow a + a + 2a + 2(2a) + 4(6a) = 1 \Rightarrow 34a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{34}$$

پس:

$$P(\{x_2, x_4\}) = P(x_2) + P(x_4) = a + 24a = 25a = \frac{25}{34}$$



پاسخ پرسش‌های پیکار جو

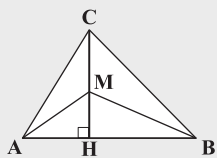
۳. با فرض $AB=x$ ، $AC=x-1$ و $BC=x+1$ و به کمک دستور هرون، مساحت و طول ارتفاع وارد بر AB را می‌یابیم:

$$p = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{3x}{2} \times \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{2} - 1\right)} = \frac{x}{2} \sqrt{3\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)}$$

$$= \frac{x}{4} \sqrt{3(x^2 - 4)} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \sqrt{3(x^2 - 4)} = 4.5$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 4) = 81 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 5.2$$



یعنی طول‌های اضلاع مثلث، ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ سانتی‌متر است. حال در شکل داریم:

$$AC = 51, AB = 52, BC = 53$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$$

$$\frac{S_{MAB}}{S_{CAB}} = \frac{MH}{CH}$$

$$\Delta CAH: \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{MC} = \frac{24}{51} = \frac{8}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{MH+MC} = \frac{8}{25} \Rightarrow \frac{MH}{CH} = \frac{8}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{CAB}} = \frac{8}{25}$$

(گزینه ب)

۴. با فرض $a = \sqrt{12 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$ ، $b = \sqrt{3} - 1$ داریم:

$$a^2 = 12 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, b^2 = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 15 - 4\sqrt{2}$$

$$a^2 b^2 = (12 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})$$

$$= 48 - 24\sqrt{2} - 16\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 18\sqrt{3} - 12$$

$$= 36 - 16\sqrt{2} + 8\sqrt{6} - 16\sqrt{3}$$

$$= 4(9 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}) = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2)^2$$

$$\Rightarrow ab = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2)$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 15 - 4\sqrt{2} \\ 2ab = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 8 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 11 + 4\sqrt{3}$$

$$(a+b)^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \Rightarrow a+b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

(گزینه د)

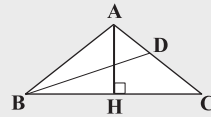
۵. چون حاصل ضرب ارقام عدد نمی‌تواند خیلی بزرگ باشد، لذا عدد مورد نظر نمی‌تواند سه رقمی یا بیشتر باشد و فقط می‌تواند دو رقمی باشد. بنابراین:

$$\overline{ab} \cdot \overline{ba} = 1000 + ab$$

$$\Rightarrow (10a+b)(10b+a) = 1000 + ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 10ab = 1000 \Rightarrow a=2, b=4$$

(گزینه ج)



۱. می‌دانیم در هر مثلث با دو ضلع مجاور به طول‌های a و b که با هم زاویه α بسازند، طول نیم‌ساز زاویه α از دستور $d = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}$ به دست می‌آید. پس مطابق شکل داریم:

$$BD = \frac{2AB \cdot BC \cdot \cos \frac{B}{2}}{AB+BC} = \frac{2AB \cdot BC \cdot \cos 18^\circ}{AB+BC}$$

$$AH = AB \cdot \sin B = AB \cdot \sin 36^\circ$$

$$\Rightarrow (\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ)$$

$$\frac{BD}{AH} = \frac{2BC \cdot \cos 18^\circ}{(AB+BC) \sin 36^\circ} = \frac{BC}{(AB+BC) \sin 18^\circ}$$

و به کمک قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$BC = 2R \sin 108^\circ$$

$$AB = 2R \sin 36^\circ,$$

$$\sin 108^\circ = \sin(90^\circ + 18^\circ) = \cos 18^\circ = \sin 72^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AH} = \frac{\sin 108^\circ}{(\sin 36^\circ + \sin 108^\circ) \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{2 \cos 18^\circ}{(\sin 36^\circ + \sin 72^\circ) \sin 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{(2 \sin 54^\circ \cos 18^\circ) \sin 18^\circ}$$

$$= \frac{1}{2 \sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{1}{2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ}$$

$$= \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}} = 2$$

(گزینه ج)

۲. اگر یک n تایی (a_1, a_2, \dots, a_n) با این ویژگی وجود داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_{n-1} a_n$$

اما واضح است که با فرض $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$

(که از کلیت مسئله نمی‌کاهد) داریم: $a_1 + a_2 + \dots + a_n < n a_n$

و بنابراین: $a_{n-1} a_n < n a_n$ و $a_{n-1} < n$ و برای آنکه a_n ها متمایز باشند، تنها امکان این است که: $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ و \dots و $a_{n-1} = n-1$ و از آنجا:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_n + \frac{n(n-1)}{2} = (n-1)a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n(n-1)}{2(n-2)}$$

اما واضح است که $a_n > a_{n-1}$ و در نتیجه:

$$\frac{n(n-1)}{2(n-2)} > (n-1)$$

و از آنجا: $n > 2n-4$ و در نتیجه: $n < 4$

پس تنها جواب ممکن $n=3$ است که به ازای آن سه‌تایی ۱ و ۲ و ۳

که در شرایط مسئله صدق می‌کند، به دست می‌آید (گزینه ب).

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...



باران و همراهان همیشگی
مجله برهان متوسطه ۲، با سلامی
دوباره مـروری گذرا بر نامه‌ها
و ایمیل‌های ارسالی‌تان داریم.

- آقای دکتر **ابراهیم سوری**، مدرس ریاضی از دانشگاه لرستان
ایمیل ارسالی‌تان با عنوان «بررسی یک اشکال علمی در کتاب ریاضی پایه دهم» به دستمان رسید. دوست گرامی، مجله ما به هیچ عنوان مأموریتی برای نقد و بررسی کتاب‌های درسی ندارد. مخاطبان مجله ما فقط دانش‌آموزان هستند. نقدهای مربوط به کتاب‌های درسی ریاضی را می‌توانید به «دفتر تحقیق و توسعه ریاضی» در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی انعکاس دهید.
- همکار گرامی، آقای **مسلم نادری** از شهرستان ثلاث باباجانی دو مطلب‌تان با عنوان‌های «عدد هفت» و «محاسبه زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار» به دست ما رسید. در مورد اولی باید بگوییم که مطالبی از این دست با این حجم در برنامه ما جایی ندارد. فقط به‌عنوان خواندنی ممکن است در حاشیه‌های صفحات از چنین مطالبی استفاده کنیم و در این صورت باید خلاصه و محدود و حداکثر نیم‌صفحه باشد. اگر بتوانید مجموعه‌ای از چنین مطالبی را برای ما ارسال کنید، می‌توانیم در هر شماره از یکی از آن‌ها استفاده کنیم. اما در مورد دومی باید بگوییم که موضوع آن بسیار قدیمی و تکراری است.
- همکار گرامی، آقای **کاظم اسفندیاری**، سرگروه محترم ریاضی ناحیه ۱ ساری
مسائل ارسالی‌تان را به مسئول صفحه «پای تخته» تحویل دادیم. با سپاس از توجه‌تان به مجله برهان.
- دوست دانش‌آموز، آقای **احسن محمودی**
مطلبتان درباره اثبات قضیه فیثاغورس و چند مطلب دیگر به دست ما رسید. با سپاس فراوان از تلاش‌تان باید بگوییم که استدلال‌هایتان به لحاظ منطقی چندان دقیق نبودند. توصیه می‌کنیم با مطالعه بیشتر دست به قلم ببرید و کارهایتان را به کمک دبیران ریاضی‌تان ویرایش و بازنگری کنید.
- همکار گرامی، خانم **زهرا دهقانی**، دبیر ریاضی از شهرستان زواره استان اصفهان
مقاله‌تان با عنوان «حل معادله درجه سوم - دستور کاردانو» به دستمان رسید. ضمن سپاس از توجه‌تان به اطلاعات می‌رسانیم که این دستور سال‌ها است که در برخی کتاب‌های آموزشی به زبان فارسی مطرح شده است و امروزه هم در برنامه درسی دانش‌آموزان جایی ندارد.

با مجله‌های رشد آشنا شوید



مجله‌های دانش آموزی
به صورت ماهنامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد کوکبک**
برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزشی ابتدایی
- رشد نوجوان**
برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزشی ابتدایی
- رشد دانش‌آموز**
برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزشی ابتدایی

مجله‌های دانش آموزی
به صورت ماهنامه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد نوجوان**
برای دانش‌آموزان دوره آموزشی متوسطه اول
- رشد برهان**
برای دانش‌آموزان دوره آموزشی متوسطه اول
- رشد جهان**
برای دانش‌آموزان دوره آموزشی متوسطه دوم
- رشد پژوهش**
برای دانش‌آموزان دوره آموزشی متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی
به صورت ماهنامه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد آموزش اجتماعی**
رشد تکنولوژی آموزشی
- رشد مدرسه نو**
رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:
به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی**
رشد آموزش زبان و ادب فارسی
- رشد آموزش هنر**
رشد آموزش مشاور مدرسه
- رشد آموزش تربیت بدنی**
رشد آموزش علوم اجتماعی
- رشد آموزش تاریخ**
رشد آموزش جغرافیا
- رشد آموزش زبان‌های خارجی**
رشد آموزش ریاضی
- رشد آموزش فیزیک**
رشد آموزش شیمی
- رشد آموزش زیست‌شناسی**
رشد مدیریت مدرسه
- رشد آموزش فن و حرفه‌ای و کارآفرینی**
رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی: برای همکاران، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌آموزان دانشگاه فرهنگیان و کارکنان گروه‌های آموزشی و ...
تعمیم و انتشار می‌شود.

پشتیبانی: تهران: خیابان ایرانشهر، شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۶۶۴.
تلفن و فاکس: ۰۲۱ - ۸۸۲۰۱۳۷۸
وبسایت: www.roshdmag.ir

پاسخ ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

• دوست دانش آموز، آقای امیرحسین عزیزی از شهرستان ابهر راه‌حل‌هایتان برای مسائل پای تخته را به مسئول این صفحه تحویل دادیم. ضمن سپاس از توجهتان باز هم با ما در تماس باشید.

• همکار گرامی، آقای جابر مختاری دهقادی

مقاله‌تان با عنوان «توابع بی‌گراف» به دستمان رسید. قبلاً هم از شما کارهایی داشته‌ایم و مقالاتتان در مجله به چاپ رسیده‌اند. ضمن سپاس از لطفی که به مجله خودتان دارید، متذکر می‌شویم که در نگارش مقالات به سطح اطلاعات مخاطبان، یعنی دانش‌آموزان پایه دوم متوسطه، توجه کنید. مطلبتان به لحاظ محتوا و پیش‌نیازهای لازم بسیار بالاتر از سطح آنان است.

• همکار محترم، خانم لیلا صالحی از شهرستان کرج

مقاله‌تان با عنوان «ورود احتمال به دنیای ریاضی» به دستمان رسید. نظر اکثر اعضای هیئت تحریریه مجله این بود که فاقد انسجام لازم برای درج در مجله است. مقاله باید دارای ورود به مطلبی مناسب باشد که برای دانش‌آموز خواننده انگیزه و جذابیت ایجاد کند. سپس به زبان ساده و با مثال‌های متنوع خواننده را با خود همراه سازد و در انتها او را به سمت‌وسویی مشخص هدایت کند. مقاله شما فاقد چنین ساختاری است. ضمن تشکر از شما منتظر کارهای دیگران هستیم.

• همکار گرامی، آقای نادر بلال‌زاده، از شهرستان هشترود

مقاله‌تان با عنوان «تصورات غلط بعضی داوطلبان نسبت به سؤالات کنکور» به دست ما رسید. باید به اطلاعاتتان برسانیم که مطالبی از این دست که بیشتر به کار مجلات مشاوره کنکور بعضی مؤسسات می‌آیند، در مجله ما جایی ندارند. سعی کنید با استفاده از تجربه‌هایتان مقالاتی کاربردی به رشته تحریر درآورید که در آنها به نیازهای واقعی دانش‌آموزان در یادگیری مباحث ریاضی توجه شود. ضمن پوزش از دوستانی که فرصت پرداختن به نامه‌ها و ایمیل‌هایشان در این شماره فراهم نشد، همگی را تا شماره آینده به پروردگار یکتا می‌سپاریم.

ایستگاه دوم:

اگر تعداد دوستان هم‌سن فرهاد x باشد، تعداد دوستان او که یک سال از او بزرگ‌ترند هم x و تعداد دوستان او که یک سال از او کوچک‌ترند هم x است و تعداد کل مهمانان او $3x$ می‌شود. در نتیجه سن فرهاد $3x$ و سن خواهرش $3x+10$ و مجموع سن همه مهمانان برابر است با:

$$x(3x-1) + x(3x) + x(3x+1) = 9x^2$$

و طبق فرض داریم:

$$9x^2 = 9(3x+10) \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5$$

و در نتیجه فرهاد ۱۵ سال دارد و ۱۵ مهمان داشته است.

پاسخ جدول ایستگاه اندیشه شماره ۱۰۳ (مهرماه):

رمز جدول «پروفسور تقی فاطمی» بود. درباره زندگی این استاد فرزانه در صفحه ۲ جلد (ریاضی دانان معاصر ایران) در شماره ۸۷ مجله مهرماه ۱۳۹۴ مطلبی داشتیم.

اقتصاد مقاومتی؛ تولید و اشتغال

رشد با کیفیت



نحوه اشتراک:

پس از واريز مبلغ اشتراك به شماره حساب ۳۹۲۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سپهراه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت اقسنت، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پیست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۰۲۲۳۳۰۸۴۹۰ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات در خواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

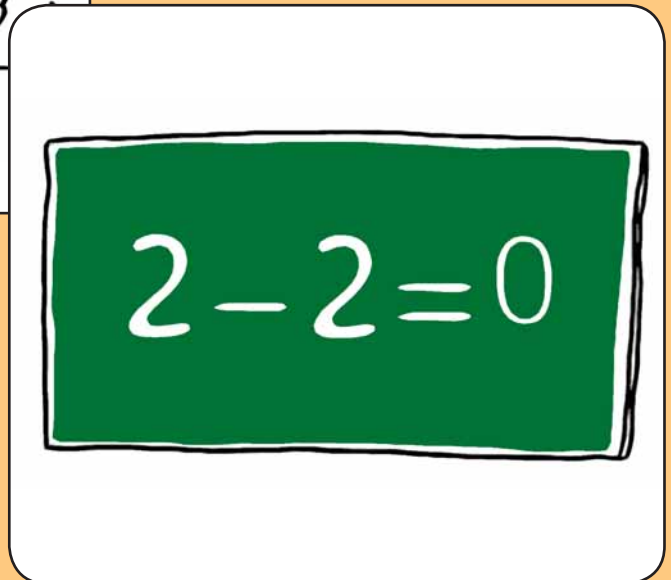
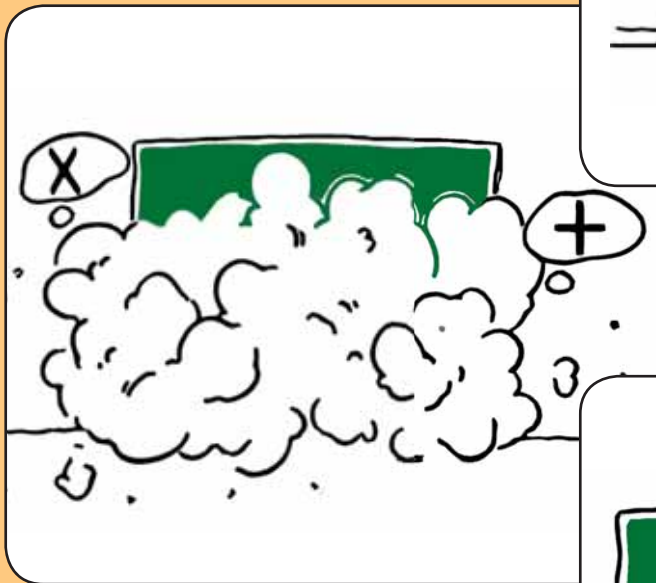
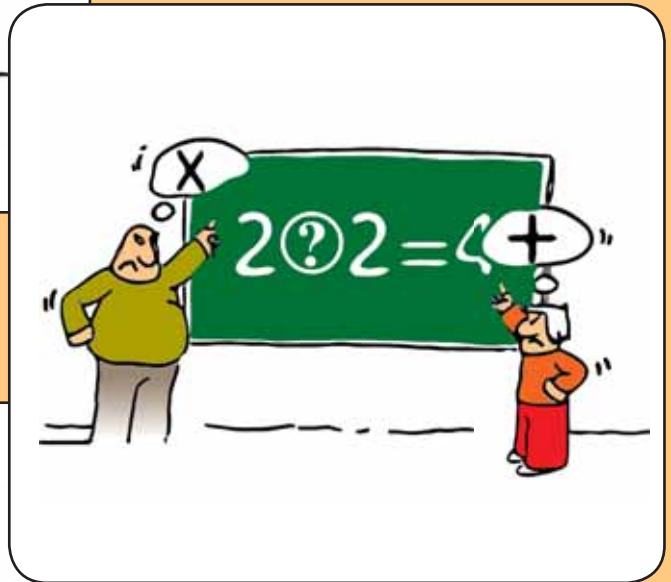
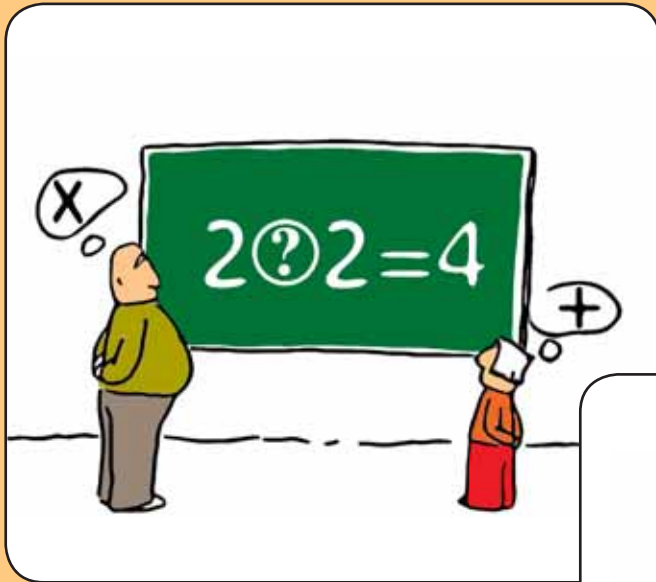
مبلغ پرداختی:

اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

• نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۳۳۳۱-۱۵۸۷۵
• تلفن بازرگانی: ۰۲۱-۸۸۸۲۳۰۸
• Email: Eshterak@roshdmag.ir

• هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
• هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



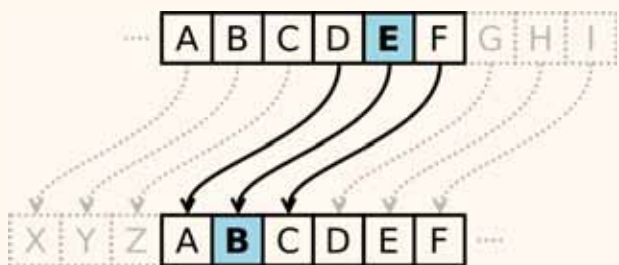
5/24

دنیای کد و رمزها



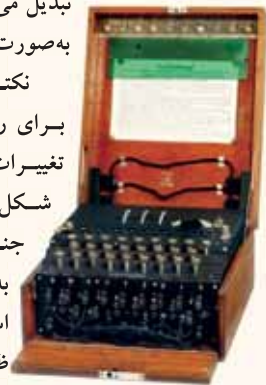
بود، در هر جمله، برای جابه‌جایی حروف آن، از یک الگو استفاده می‌کرد و در نتیجه کشف آن دشوار می‌شد. اما متفکین هم بی‌کار ننشستند! در انگلستان که زیر بمباران‌های پیاپی آلمانی‌ها قرار داشت، نظامیان برای مقابله با این وضع تصمیم به کشف رمز به کار رفته در پیام‌های مخابراتی آلمانی‌ها گرفتند. به این منظور گروه بزرگی از ریاضی‌دان‌ها، طراحان جدول و معما و منطق‌دان‌ها را در محلی به نام «پارک بلچلی»^۳ گرد آوردند. آن‌ها در این مکان امن به سرپرستی ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی، آلن تورینگ^۴ گرد آمدند و موفق به شکستن رمز انیگما شدند. نتیجه این کار تأثیر بسزایی در شکست نازی‌ها در جنگ جهانی دوم داشت. امروزه رمزنگاری یکی از شاخه‌های اصلی ترکیبیات در دوره دکتری ریاضی است و کاربردهای بسیاری در امور نظامی و غیرنظامی یافته است. از جمله در بانک‌داری الکترونیک کاربرد زیادی دارد.

یکی از کاربردهای بسیار جالب ریاضیات در شاخه ترکیبیات «رمزنگاری»^۱ است. منظور از رمزنگاری همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، رمز کردن پیام‌هایی است که باید به صورت سری ارسال شوند. اما این شاخه از ریاضیات امروزه بسیار گسترده‌تر از این هدف اولیه آن شده است. با این حال شاید جالب باشد که بدانید، سابقه این امر بسیار دیرینه است.



نخستین رد پای این موضوع به دوران قیصرهای روم برمی‌گردد. رمز قیصر (رمز سزار) یکی از روش‌های اولیه رمزنگاری بوده است. در این روش حروف الفبا به تعدادی ثابت جابه‌جا می‌شوند. مثلاً در الفبای زبان انگلیسی با انتقال ثابت (مثلاً ۵ واحد) حرف A به حرف F و حرف B به G... و U به Z و V به A و W به B و X به C و Y به D و Z به E تبدیل می‌شود. به این ترتیب، مثلاً کلمه MATH به صورت RFYM رمز می‌شود.

نکته جالب این است که از این ایده برای رمزنگاری تا حدود بیست قرن با تغییرات جزئی استفاده می‌شده است. البته شکل آن پیشرفته‌تر شد. برای مثال، در جنگ جهانی دوم آلمانی‌ها از دستگاهی به نام «ماشین انیگما»^۲ برای رمزنگاری استفاده می‌کردند. این دستگاه که ظاهر آن شبیه یک ماشین تایپ قدیمی



پارک بلچلی



1. cryptography

2. Enigma machine

3. Bletchley park

۴. Alan Turing (۱۹۵۴-۱۹۱۲) ریاضی‌دان، منطق‌دان، متخصص رایانه و فیلسوف انگلیسی قرن بیستم، مخترع ماشین به نام «بامب» که کدشکنی کدهای انیگما را انجام داد.



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)