



ISSN: 1735-4951

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

[www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)  
پیامک: ۰۰۰۸۹۹۵۰۶



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



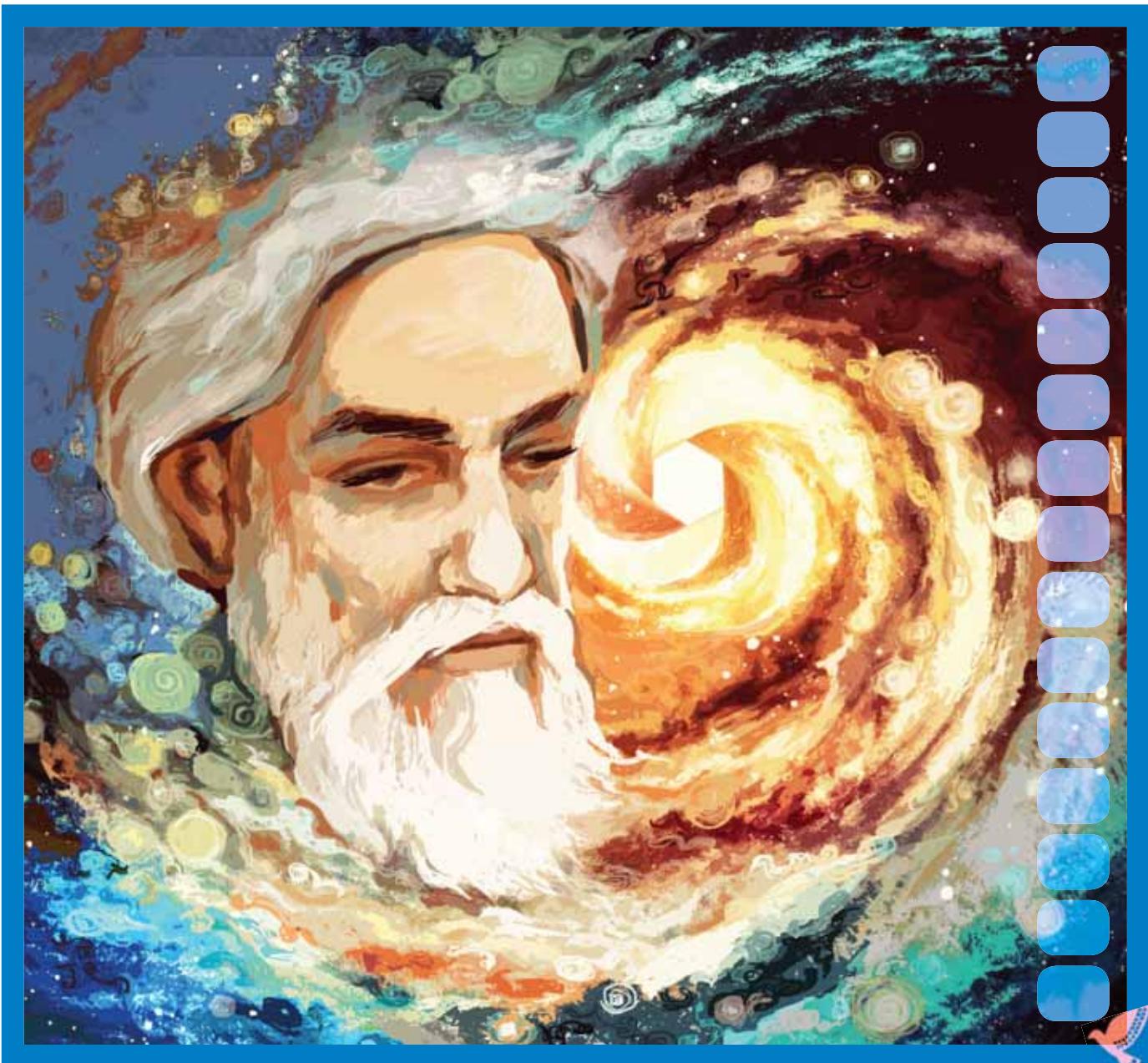
دوره بیست و هفتم

شماره ۱۰۴

آبان ۱۳۹۶

صفحه ۴۸

هزار ۱۱۰۰



☞ کتاب‌های درسی داروهای شفابخش آموزش ریاضی

☞ ریاضی کاربردی در فیزیک - حرکت با سرعت ثابت

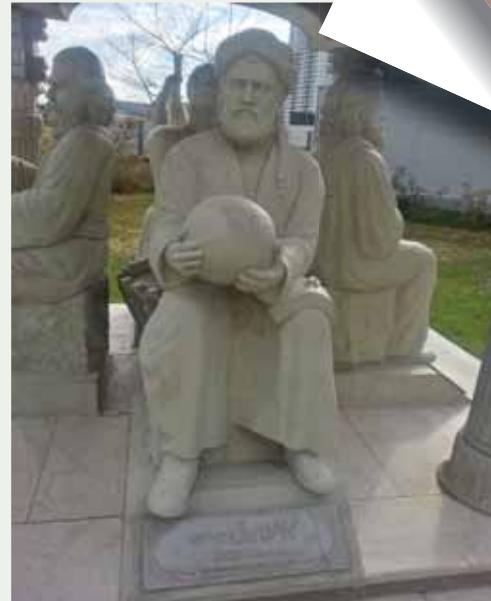
☞ سرزمین ستاره‌ها: ابو ریحان بیرونی

☞ کاربردهایی از لوزی در صنعت

# ابوریحان بیرونی

«آلبووم ریاضیات» سی‌تونی در مجله ریاضی رشد برهان متوسطه دوره دوم است که به معرفی و ارائه تمثیرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود... که به افتخار ریاضی‌دانان ایرانی و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان از جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانه انسان‌هاست. البته در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان موردنظر، به ارائه سطرهایی درباره وی می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

ابوریحان محمدبن‌احمدبیرونی، زاده ۱۴ شهریور ۳۵۲ خورشیدی در «کات» خوارزم و در گذشته ۲۲ آذر ۴۲۷ در غزنی، دانشمند ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، تقویم‌شناس، انسان‌شناس، هندشناس و تاریخ‌نگار برجسته و همه‌چیزدان نامدار ایران‌زمین است. بیرونی را بزرگ‌ترین دانشمند مسلمان و یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان ایرانی در همه اعصار می‌دانند.



مجسمه ابوریحان بیرونی

در چهار طاقی دانشمندان ایرانی

واقع در محوطه سازمان ملل متحد در وین اتریش



مجسمه ابوریحان بیرونی

ساخته شده توسط محمدعلی مددی در پارک لاله تهران



۱. تمبر منتشر شده در ایران در سال ۱۳۵۲ خورشیدی

۲. تمبر منتشر شده در افغانستان در سال ۱۹۷۳ میلادی

۳. تمبر منتشر شده در اتحادیه جماهیر شوروی در سال ۱۹۷۳ میلادی

۴. تمبر منتشر شده در پاکستان در سال ۱۹۷۳ میلادی



ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

## رشد

# ریاضی

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی در پی ۱۴
- آبان ۱۳۹۶
- شماره ۲
- صفحه ۴۸
- ۱۱۰۰۰ ریال



وزارت امور و پژوهش  
سازمان پژوهش و نوآوری آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی  
شرکت است

مدیر مسئول: محمد ناصری  
سرپرورد: حمیدرضا امیری  
 مدیر دادخواه: هوشنگ شرقی  
ویراستار ادبی: بهروز راستانی  
 طراح گرافیک: شاهزه خردگانی  
 تصویرگر: میثم موسوی  
 طرح جلد: امیر ساجی  
 هیئت تحریریه:  
 محمد هاشم رستمی  
 دکتر ابراهیم ریحانی  
 میرشهرام صدر  
 هوشنگ شرقی  
 سید محمد رضا هاشمی موسوی  
 غلامرضا یاسی پور  
 دکتر محram نژاد ابردموسی  
 حسین نامی ساعی  
 حسین کرمی  
 محمود داورزنی  
 احسان یارمحمدی

### حرف اول

در کلاس درس ریاضی / سردبیر ۲

### آموزشی

کتاب‌های درسی داروهای شفایخش آموزش ریاضی / افسین خاصه‌خان ۳

پای تخته / دکتر محرم نژاد ابردموسی ۱۷

بحثی درباره بردارها - حلقة به کدام سمت می‌رود؟! / عباس قلعه پوراقدم ۲۲

ریاضی کاربردی در فیزیک - حرکت با سرعت ثابت / هوشنگ شرقی ۲۶

کاربردهایی از لوزی در صنعت / حسین کرمی ۳۰

نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی / عباس قلعه پوراقدم ۳۴

ریاضیات در چند دقیقه / مترجم: غلامرضا یاسی پور ۳۸

مسائل برای حل ۴۰

### ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین ستاره‌ها: ابوریحان بیرونی = دانشمند همه‌چیزدان / احسان یارمحمدی ۶

### میزگرد

میزگرد با مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایه یازدهم / هوشنگ شرقی ۱۴

### آموزش ترجمه متون ریاضی

مجموعه‌های متنایی، اصل شمارش / حمیدرضا امیری ۲۰

### معرفی کتاب

پرورش مهارت‌های منطقی با استفاده از مسائل و بازی‌های منطقی ۴۵

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۱۲

ایستگاه اول: جدول اعداد / هوشنگ شرقی ۲۹

ایستگاه دوم: یک داستان و یک معما! ۲۷

ایستگاه سوم: داستان ریاضی دانان و سیاست! ۳۷

### پرسش‌های پیکارجوا

### با مخاطبان

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ... ۴۷

### پاسخ‌ها

راهنمای حل مسائل ۴۲

پاسخ پرسش‌های پیکارجوا! ۴۶

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

وبگاه:  
www.roshdmag.ir

پیام‌نگار:  
Borhanmotevaseh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:

http://weblog.roshdmag.ir/borhan-

motevaseh2

پیام‌گیر نشریات رشد:

۲۱ - ۸۸۳۱۴۸۲

پیام:

۳۸۹۹۵۶

roshdmag :

نشانی دفترچه:

۱۵۸۷۵۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله:

۲۱ - ۸۸۴۹۲۳۴

تلفن امور مشترکین:

۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۶

شماره گذار:

۸۵۰۰

### خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و  
مطلوب خود را به مرکز پژوهشی آثار مجلات  
رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۶۵۶۷

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

## در کلاس درس ریاضی

قبل‌اً معلمان و دیران مفترم ریاضی با ورد به کلاس و اهیاناً پس از مفهور و غیاب و پند پرسش کلاس از انش آموزان، اولین جمله آن‌ها این بود: «پهدها بروزه‌هایتان را باز کنید. آخربین مسئله با مثال و تکه‌ای که گفتم پیش بود».<sup>۱</sup> عناوan‌ها به صورت یکجا به از طرف دیر تریس می‌شد. ما هم آن‌ها را به شکل بروزه در فقره‌هایمان یادداشت مربوط به آن تمرین‌ها و تکالیف به کتاب مرابعه می‌شد. روش یادگاری مقاهم هم پیش به صورت مستقیم و بدون «فالات» (انش آموزان) بود. البته کلاس‌های درس ریاضیات کلاس‌هایی بسیار ساخت و آرام بودند. دیران ریاضی معلم و موده بودند و انش آموزان در حال کوشیدن و یادداشت برداری، آن هم از مطالبی که دیر یا دیگر کتاب‌های ریاضی شما را بدل در لرن و معلمان وقتی ولد کلاس می‌شوند، پس از مفهور و غیاب و پند پرسش کلاسی، می‌پرسند: «پهدها تا کجا کتاب را با هم مطالعه کردیم؟ امروز په فعالیت یا کار در کلاسی را باید کار کنیم؟ یعنی در کتاب‌های شما مقاهم اصلی به صورت مستقیم یا نشده و شما طی یک فرایندی که آن را فعالیت می‌نماییم، در سافتمن آن مفهوم سویم می‌شود و خودتان به آن مفهوم می‌رسید. سپس توسط دیر مفترم و کار در کلاس‌های بعدی، این مفهوم تعمیق و اهیاناً تعمیم آرده می‌شود.

ولی در حال حاضر کتاب‌های ریاضی شما را بدل در لرن و معلمان وقتی ولد کلاس می‌شوند، پس از مفهور و غیاب و پند پرسش کلاسی، می‌پرسند: «پهدها تا کجا کتاب را با هم مطالعه کردیم؟ امروز په فعالیت یا کار در کلاسی را باید کار کنیم؟ یعنی در کتاب‌های شما مقاهم اصلی به صورت مستقیم یا نشده و شما طی یک فرایندی که آن را فعالیت می‌نماییم، در سافتمن آن مفهوم سویم می‌شود و خودتان به آن مفهوم می‌رسید. سپس توسط دیر مفترم و کار در کلاس‌های بعدی، این مفهوم تعمیق و اهیاناً تعمیم آرده می‌شود.

و البته مانند کاری یادگیری یادگیری پیشتر است. اگر فعالیت‌ها هر فمد و غنی طراحت شده باشند، هنگاه باید این مقاهم نیز هی تواند فرایند یادگاری و یادگیری نقش اداشه باشد.

در کلاس درس ریاضی، شما فعال هستید. با هم کلاسی خود گفت و گو و بیش می‌کنید. نظرات دیگران را می‌شنوید، نظر خود را بیان می‌کنید و از راهنمایی‌های دیر تان کمک می‌کنید. کلاس ریاضی دیگر کلاسی ساخت و آرام نیست! اساسن فوبی (ارید، وقتی خودتان در یادگیری و سافتمن مقاهم درس شریک بوده‌اید و این تقریباً همه هدف ما از یادگاری است.

همیر، رضا امیری  
سردیر

## درمانگاه ریاضی

# کتاب‌های درسی داروهای شغاب‌خش آموزش ریاضی



افشین خاصه‌خان  
دبیر ریاضی شهرستان ارومیه

فهیم می‌کند. مثل نانوایی که قبل از چسباندن نان، آن را خوب ورز می‌دهد تا برای پخت آماده شود. فعالیت ۱، با پر کردن جاهای خالی، مطلب را شروع می‌کند. این فعالیت طوری تنظیم شده است که در آن نقش اصلی را دانش‌آموز ایفا کند. مؤلف از شما می‌خواهد که هدف درس را از نمونه مطرح شده (ساعت به دم) حدس بزنید و سپس جاهای خالی بعدی را با توجه به آن، پر کنید. در مرحله آخر از شما انتظار دارد، مثال کاملی از خودتان بزنید، چون در این مرحله انتظار می‌رود به درک لازم از مفهوم درس رسیده باشید.

وقتی شما این پنج مرحله فعالیت ۱ را طی می‌کنید، عمل مقایسه، تطبیق و عدم تطبیق را خودتان انجام می‌دهید و کشف هدف اصلی درس هم در همین فرایند اتفاق می‌افتد. آموزش ریاضی به این روش لذت‌بخش تر و ماندگارتر است و اعتماد به نفس دانش‌آموز را تقویت می‌کند. فکر کردن و نتیجه‌گیری را به او یاد می‌دهد و او را برای حل مسائل غیرتکراری درسی و مشکلات غیرقابل انتظار اجتماعی در آینده آماده می‌کند.

دانش‌آموزان عزیز به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. در این قسمت می‌خواهیم در مورد کتاب‌های درسی ریاضی متوجه دوم با شما حرف بزنم. کتاب‌هایی که کلی در مورد آن‌ها تحقیق و پژوهش شده تا به دست شما رسیده‌اند. این کتاب‌ها طوری نوشته شده‌اند که کشف و فهم مطلب موردنظر مؤلفان، توسط خود دانش‌آموز صورت بگیرند به زبان ساده‌تر، درس، شما را قدم به قدم با خودش همراه می‌کند. از شما سوال می‌پرسد و توقع دارد که جاهای خالی را پر کنید و بعد اجازه می‌دهد که به مرحله بعدی بروید.

می‌خواهیم مستند حرف بزنم. سعی می‌کنم از کتاب‌های درسی ریاضی برایتان مثال بزنم. مطابق شکل ۱، مبحث مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن، از صفحه ۹۵ کتاب ریاضی(۱) دهم را انتخاب می‌کنم تا با هم آن را بررسی کنیم:

همچنان که می‌بینید، مؤلف ابتدا به رابطه موجود بین بعضی از بدیده‌ها اشاره می‌کند و سپس با فعالیت ۱ وارد بحث اصلی می‌شود. قبل از بررسی فعالیت ۱، لازم است نکته‌ای را یادآوری کنم: در آموزش ریاضی جدید، مدرس مستقیماً درس را مطرح نمی‌کند، بلکه با مثال‌های عینی و قابل لمس از همان مفهوم در محیط اطراف دانش‌آموز، مطلب را آماده

**سؤال سوم از تابع**  
بودن یا نبودن رابطه  
بین پدیده‌های محیط  
اطرافتان سؤال می‌کند و  
به شما گوشزد می‌کند که  
این درس چه کاربردهایی  
هم می‌تواند در زندگی



روزمره داشته باشد. بالاخره در سؤال چهارم

سوال اول تکرار شده است، ولی تطبیق این سؤال با تعریف باید کمی دقیق‌تر باشد. در واقع به شما یاد می‌دهد که کلمات تعریف چقدر در جواب دادن به سؤال می‌تواند مهم باشد. مثلاً مورد سمت چپ، تابع نیست، زیرا هر عضو A باید کمی از اعضای B در ارتباط نیست که در تعریف بر کلمه هر تأکید شده. در ادامه مؤلف مبحث نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی را با همان روند، یعنی فعالیت و سپس کار در کلاس، ادامه می‌دهد و درس را تمام می‌کند.

در آخر هر درس تمریناتی برای تسلط و تثبیت درس قرار داده شده است و شما باید آن‌ها را با همان شکلی که در کلاس یاد گرفته‌اید، حل کنید. روی تمرینات پیچیده‌تر

حالانوبت به مطرح شدن فعالیت ۲ می‌رسد (شکل ۲). مؤلف با همان شیوه، شکل جدیدی از همان رابطه را می‌خواهد به شما آموزش بدهد. اعضای دو مجموعه که با پیکان به هم مرتبط می‌شوند، اما با اصولی خاص. شما باید نمونه را بینییند، کمی تأمل کنید و مراحل بعدی را کامل کنید. سه مثال را هم باید خودتان مطرح کنید. این کار قدرت خلاقیت شما را تقویت می‌کند و همچنین میزان فهم شما را از درس نشان می‌دهد.

حالا وقت آن رسیده که تعریف ریاضی این مفهوم مطرح بشود. این تعریف داخل کادر آبی رنگ آورده شده؛ جمله‌ای که کلامات دقیق و با ظرافت انتخاب شده‌اند تا چکیده اصلی این درس را نشان بدهند. از نظر مؤلف بعد از طی این دو فعالیت ذهن دانش‌آموز آماده پذیرش تعریف ریاضی درس موردنظر می‌شود که به نظر کاملاً منطقی می‌آید.

حالا وقت کار در کلاس است؛ تمرین مفاهیم جدید سرکلاس. مسئله اول از شما می‌خواهد موارد داده شده را با تعریف، تطبیق بدھید و نتیجه بگیرید که رابطه تابع است یا نه. سؤال دوم از شما نانتظار دارد یک رابطه‌ای بسازید که تابع باشد و رابطه دیگری بسازید که تابع نباشد. مقایسه جواب با دوستانتان هم به شما یادآوری می‌کند که این سؤال فقط یک جواب ندارد.

**نسل جدید از کتاب همان توقیعی را دارد**  
که از پدر و مادرش  
انتظار دارد. پدر  
و مادری که اکثر  
کارهای بچه‌شان  
را انجام می‌دهند و  
دوست ندارند او به  
ذحمت بیفتند. این  
تفکر در آموزش  
ریاضی اصلاح‌جواب  
نمی‌دهد

جدول ۱: می‌توان به گفک سعید و پیکان طایی که اعضای آنها را به هم مرتبط می‌کنند، شخص فرم. به این سویا  
نمایش، سوارهای پیکانی گفته‌اند. یک معرفه کامل نهاده است. بهره را انتها کامل کنند.

A 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19	B خودکار دفتر داد خطکش	
A B	A B	A B
A B	A B	A B

برای تکمیل این مورد از مسائل های مطرح شده در کلاس یک معرفه کرده  
مطرح شده در کلاس یک معرفه کرده

نحوه این در زیر آمده است: از هر تصریح مخصوصه ۹ تدقیقاً یک پیکانی خارج شده است. این گفته را به عنوان در مجموعه را یک تابع  
نمایند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن هر عضو از A را تلقی کنی  
تقریباً از ۹ تسبیب داده می‌شود.

نحوه این در زیر آمده است: از هر تصریح مخصوصه ۹ تدقیقاً یک پیکانی خارج شده است. این گفته را به عنوان در مجموعه را یک تابع  
نمایند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده این اسباب و اندام یک تابع نیست؟

A محمد حسین امید فوتbal	B والیبال
A محمد حسین امید فوتbal	B والیبال
A محمد حسین امید فوتbal	B والیبال



شکل ۲

شکل ۱

دانش آموز باید در  
یادگیری ریاضی  
مراحل آموزش را  
قدم به قدم طی کند  
و مطلقاً کس دیگری  
نمی تواند این کار را  
برایش انجام دهد.  
یعنی به جای او فکر  
کند، یاد بگیرد، بسته  
آموزشی بسازد و به  
دانش آموز هدیه  
بدهد و او فقط حل  
کند!

فقط حل کند. این تفکر متأسفانه در بسیاری از کتاب‌های اشاره شده رایج است. نتیجه این نوع آموزش که در دهه گذشته بسیار رایج شده، در آمار منتشر شده از سازمان سنجش خودش را نشان می‌دهد. در پنج سال اخیر بیش از ۸۰ درصد داوطلبان کنکورهای ریاضی، تجربی و انسانی نتوانستند نمره خام ۱۰ درصد را کسب کنند و میانگین درصد ریاضی در سال ۱۳۸۴ از ۳۳ درصد به ۵ درصد در سال ۱۳۹۴ افت کرده است:

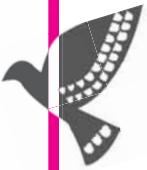
به نظرم کتاب‌های درسی ریاضی داروهای شفابخش این بیماری‌اند که به جان آموزش ریاضی کشور افتاده‌اند. استفاده مکرر از این داروه‌می تواند این بیماری را بهبود بخشد. چون دانش آموز دوره دوم دبیرستان دو آزمون مهم دارد: اولی آزمون نهایی و دومی کنکور که ثابت شده است، منبع اصلی طراحی سوالات در هر دو، کتاب‌های درسی‌اند. آن‌ها بی‌کتاب‌های درسی را نوشته‌اند، علاوه بر ریاضی، آموزش ریاضی را هم به خوبی می‌دانند و این فرق اساسی است که این کتاب‌های را ممتاز می‌کند. مثالی از فوتbal برایتان می‌زنم: ما بازیکنان بزرگی در دنیا داشتیم که نتوانستند مرتبی خوبی باشند. یعنی فوتbal را خیلی خوب بلد بودند، ولی آموزش فوتbal را به آن حد نه؛ مانند مارادونا. ریاضی هم به همین شکل است. خیلی از کسانی که ریاضی را خوب بلدند، ممکن است آموزش ریاضی شان به آن حد نباشد. کسی که دارد با سرعت نسبت حل می‌کند، هیچ تضمینی نیست که بتواند با همان کیفیت ریاضی را آموزش بدهد.

باید تأمل کنید و فکر کردن را تمرین کنید. به جواب هم تاحدامکان نگاه نکنید تا لذت واقعی حل مسئله را بچشید و به این ترتیب آموزش ریاضی بهطور کامل اتفاق بیفتند.

در آخر بحثمان می‌خواهم کتاب‌های درس ریاضی را با کتاب‌های قطعه چهار گزینه‌ای رایج مقایسه کنم. در بالا در مورد کتاب‌های درسی به صورت مستند و هدفمند شرح دادم، حلامی خواهم درباره کتاب‌های مملو از سوالات چهار گزینه‌ای صحبت کنم. مؤلفان محترم در این کتاب‌ها سعی می‌کنند چکیده درس را آماده و بدون زحمت و به صورت بسته‌ای با عنوان «درس‌نامه» در اختیار دانش آموز بگذارند؛ آن‌ها نهایتاً در یک یا دو صفحه سپس حجم انبوهی از سوالات تستی را برای آموزش مطرح می‌کنند (با حل تشریحی، تیپ‌بندی شده، ترکیبی و...). آن‌ها معتقدند، با حل تست آموزش صورت می‌گیرد. اما دانش آموز ما برای فهمیدن این درس‌نامه اصلاً چالشی نکرده و برایش زحمت نکشیده است. بنابراین با همان سرعتی که یاد گرفته، فراموش می‌کند. نسل جدید از کتاب همان توقعی را دارد که از پدر و مادرش انتظار دارد. پدر و مادری که اکثر کارهای فرزندشان را انجام می‌دهند و دوست ندارند فرزندشان به زحمت بیفتند.

این تفکر در آموزش ریاضی اصلًا جواب نمی‌دهد. دانش آموز باید در یادگیری ریاضی مراحل آموزش را قدم به قدم طی کند و مطلقاً کس دیگری نمی‌تواند این کار را برایش انجام بدهد. یعنی به جای او فکر کند، یاد بگیرد، بسته آموزشی بسازد و به دانش آموز هدیه بدهد و دانش آموز





## سرزمین ستاره‌ها: ابوریحان بیرونی

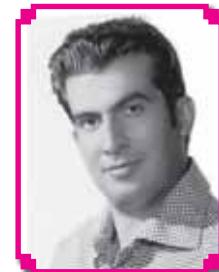


# دانشمند همه‌چیزدان

- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان ● تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی ● تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی ● پژوهشگر: محبوبه کلاتری ● طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت ● انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان ● گوینده و راوي: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیماهای جمهوری اسلامی ایران

### اشاره

ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، زاده ۱۴ شهریور ۳۵۲ خورشیدی در «کات» خوارزم و در گذشته ۲۲ آذر ۴۲۷ در غزین، دانشمند و ریاضی دان، ستاره‌شناس، تقویم‌شناس، انسان‌شناس، هندشناس، تاریخ‌نگار و همه‌چیزدان نامدار ایران زمین است. بیرونی نویسنده‌ای بی‌طرف در نگارش باورهای مردم کشورهای گوناگون بود و به‌پاس پژوهش‌های قابل توجهش با عنوان استاد شناخته شده است. در این مقاله با معرفی مستند ابوریحان بیرونی از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها» قصد داریم تا ریاضی آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌ بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل، نخست به ارائه سطرهایی از کتاب «نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران»، به قلم زنده‌یاد پرویز شهریاری (۱۳۰۵-۱۳۹۱) می‌پردازیم که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ توسط «انتشارات علمی و فرهنگی» به علاقه‌مندان تقدیم شد. در ادامه نیز به ارائه مطالبی از مستند مذبور خواهیم پرداخت.



احسان یارمحمدی



### یاقوت حموی، نویسنده «معجم الادب»

که از سال ۵۷۵ تا ۶۲۴ هجری قمری زندگی می‌کرد و بردهای آزاد شده بود، روایتی درباره ابویرحان بیرونی دارد که شنیدنی است: «... بر استاد وارد شدم و در دم مرگ بر بالین او نشستم، از من مسئله‌ای پرسید. گفت: اکنون جای این پرسش نیست. گفت: برادر من، کدام یک از این دو حالت بهتر است؟ این مسئله را بدانم و بمیرم یا ندانسته درگذرم... پاسخ مسئله را به او گفتم و بیرون آمدم، هنوز چند گامی بیش نرفته بودم که صدای شیون به گوشم رسید... مرگ استاد فرا رسیده بود.»

یاقوت حموی این روایت را از قول

**ابوالحسن علی فرزند عیسیٰ الوالجی** نقل کرده است. همچنین **شهرزادی محمد**، **فرزنده محمد** با شهرت **شمس الدین** که در سده‌های ششم و هفتم قمری می‌زیست، در کتابی که

زندگی‌نامه ۱۲۲ نفر از دانشمندان ایرانی

پیش و بعد از اسلام را تنظیم کرده است، درباره ابویرحان بیرونی می‌نویسد: «دست، چشم و فکر او هیچ گاه از عمل باز نماند و دائم در کار بود، مگر روز نوروز و روز مهرگان، یا برای تهیه نیازهای معاش.»

وقتی هنوز ابویرحان بیرونی در خوارزم بود، با محاسبه متوجه شد که باید گرفتگی ماه در روز معینی رخ دهد. در آن زمان، **ابوالوفای بوزجانی** در بغداد

زیرنظر رستم کوهی در رصدخانه بغداد کار می‌کرد (سال ۳۸۷ قمری). ابویرحان بیرونی به او نامه‌ای نوشت و از او خواست این ماه گرفتگی را در بغداد رصد کند.

خود ابویرحان هم در خوارزم به این عمل پرداخت. آن وقت نتیجه کارهای خود را برای یکدیگر فرستادند تا امکان مقایسه‌ای برای آن‌ها فراهم شود. این کار ابویرحان

بیرونی را باید یکی از نخستین تلاش‌های دانشمندان در زمینه کار گروهی دانست و این، هوشمندی بیرونی را می‌رساند که در آن زمان، یعنی در حدود هزار سال پیش، به اهمیت تبادل نظر دانشمندان پی برد بود.

محمد فرزند احمد، مشهور به ابویرحان بیرونی خوارزمی، در خانواده‌ای تهییدست زاده شد. او ایرانی بود و به زبان‌های فارسی، عربی، سانسکریت، سعدی، سریانی، عبری و ترکی تسلط داشت و نوشهایی به

همه این زبان‌ها دارد. خود بیرونی در نوشته معروف «آثار الباقيه عن القرون الخالية» (نوشته‌هایی که از سده‌های گذشته باقی مانده است)، درباره ساکنان خوارزم می‌نویسد: «آنان بخشی از ایرانیان و شاخه‌ای از آن درخت تناورند.»

ابویرحان بیرونی درباره گذشته خوارزم در آثار الباقيه می‌نویسد: «قتیبه اسردار عرب، هر کس را که با خط خوارزمی آشنا بود و روایتهای تاریخ خوارزم را می‌دانست و آنچه را در میان ایشان رواج داشت، به کلی از بین برد. به این ترتیب خبرهای مربوط به خوارزم چنان نابود شد که به سرچشمه‌های خبری آنجا، حتی آن بخش که به زمان اسلامی برمی‌گردد، به هیچ وجه دسترسی نیست.»

باز در جای دیگر همان کتاب می‌نویسد: «وقتی قتیبه فرزند مسلم باهله، کتاب‌های اهالی خوارزم را نابود کرد، هیربدان را کشت، کتاب‌هایشان را سوزاند و کسانی را به جای گذاشت که اندک سوادی هم نداشتند و [به] ناچار، تاریخ سرزمین خود را به حافظه سپرندند و چون روزگار درازی گذشت، تنها آنچه بر آن‌ها اتفاق نظر داشتند، باقی ماند.»

در سال ۳۹۰ قمری که بیرونی آثار الباقيه را



باز او در آثار باقیه می‌نویسد: «من آنچه را مطابق علم داشتم، می‌آورم. آنچه را درباره آن یقین نکردم و از کسی که مورد اعتماد باشد نشنیدم، نیاوردم.» ابوریحان بیرونی در «مالله‌ند» می‌نویسد: «وظيفة دانش، آزادی و رهانیدن روان است. دانشی که درباره چیزها احاطه کامل داشته باشد، از نیروی تمیز برخوردار باشد، از استنباط و استقراء مستغنی باشد، عینی و متکی بر تجربه باشد، تردیدها را برطرف کند و در مرحله‌های یقین بر سر برد.»

بیرونی به تقریب در همه زمینه‌های دانش زمان خود اظهار نظر کرده است. او بیش از ۱۳۰ کتاب در زمینه‌های گوناگون دارد. در فلسفه با پورسینا مکاتبه داشت. کتابی درباره پژوهشکی نوشت. در تاریخ، گاهشماری، وزن مخصوص انواع اجسام، شناخت گوهرها، زمین‌شناسی، کیهان‌شناسی، و در مورد چاههای آرتزین و... کتاب‌هایی دارد. همه‌جا کار خود را با استدلال و آزمایش انجام می‌دهد، درباره دیدگاه‌های خود پژوهش می‌کند و بسیاری از دیدگاه‌های او، هنوز هم ارزش علمی خود را حفظ کرده‌اند. در اینجا تنها بخشی از دیدگاه‌های او را درباره جایه‌جایی زمین می‌آوریم که نمونه‌ای از دقت علمی اوست (یادآوری می‌کنیم، بیرونی به نوعی به گردش زمین و سیاره‌ها اعتقاد داشته است).

او در کتاب «تحدید نهایات الاماکن»، بعد از اثبات کرده بودن زمین، اندازه‌گیری قطر آن و حل مسئله‌های دیگر می‌نویسد: «...هنگامی که پاره‌ای از زمین از جایی به جایی دیگر منتقل می‌شود، سنگینی آن نیز جایه‌جا می‌شود و میان سنگینی سوهای مختلف زمین، تفاوت پدید می‌آید ... و بهمین جهت است که دوری سرزمین‌ها از مرکز، با گذشت زمان، بر یک اندازه

می‌نوشت، پیروان و معتقدان به دین زرتشت، در خوارزم بودند. در پایان سده چهارم قمری، در دربار ابوالعباس مأمون خوارزم‌شاه دانشمندانی مانند پورسینا، مسکویه، کوهی مسیحی، ابوالخیر خمار، ابونصر عراق (ریاضی دانی که سرانجام به فرمان محمود غزنوی کشته شد) و ابوریحان بیرونی می‌زیستند. بیرونی به معنای واقعی دانشمندی جامع بود. او در زمینه‌های تاریخ، جغرافی، گاهشماری ملت‌های گوناگون، زمین‌شناسی، جامعه‌شناسی، روان‌شناسی، ریاضیات و اخترشناسی پژوهش‌هایی دارد که بسیاری از آن‌ها، هنوز هم می‌توانند مورد تأیید باشند. انسانی سنت‌شکن بود و جز بر حقیقتی که با آزمایش یا استدلال منطقی ثابت می‌شد، گردن نمی‌گذاشت. در تاریخ دانش که در غرب تنظیم شده است، راجر بیکن<sup>(۱)</sup> (۱۲۹۲-۱۲۲۰ م) را که بیش از ۱۷۰ سال بعد از مرگ ابوریحان بیرونی به دنیا آمده است، و سپس رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۷ م) را که ۵۵ سال بعد از درگذشت بیرونی پای به عرصه وجود گذاشت، مبتکر تجربه عقلانیت می‌داند، در حالی که بیرونی، سده‌ها پیش از آن‌ها بر تجربه و استدلال منطقی تأکید داشته است.

بیرونی در کتاب «الجماهر فی معرفة الجواهر» می‌نویسد: «این سخنان را نقل می‌کنند، بدون اینکه پژوهشی کرده باشند... کسی برایم سنگ باران را بی آورد و گمان داشت آن را با شادی خواهم پذیرفت، بی آن که به بررسی آن بپردازم، گفتم: اگر بتوانی با این سنگ باران بیاوری، هرچه که بخواهی به تو می‌دهم. سنگ را در آب فرو برد و آب را به آسمان پاشید. چون آزمایش تمام شد، باران نیامد و خود شگفت‌زده شد که چگونه، خواص در این باره همگی هم قول‌اند.»

بیرونی به تقریب در همه زمینه‌های دانش زمان خود اظهار نظر کرده است. او بیش از ۱۳۰ کتاب در زمینه‌های گوناگون دارد





پنجم از خانه اول، ابوریحان سیس ثابت می کند، اگر یک واحد از عدد خانه ها کم کنیم، مجموع خانه های قبل به دست می آید. برای نمونه، اگر از خانه پنجم که ۱۶ است، یک واحد کم کنیم، ۱۵ می شود که برابر است با مجموع جمله هایی از خانه اول تا خانه چهارم:

$$1+2+4+8=15$$

با توجه به این دو نکته، ابوریحان نتیجه می گیرد که مجموع جمله ها از خانه اول تا خانه شصت و چهارم، برابر است با:  $16 \cdot 2^4 - 1 = 255$  را که عدد خانه پنجم است، به توان ۲ برسانیم،  $2 \cdot 255 = 510$  به دست می آید که عدد خانه نهم است. توان دوم خانه نهم، یعنی توان دوم  $2 \cdot 255 = 510$  عدد خانه هفدهم است. اگر این عدد را به توان ۲ برسانیم، عدد است و اگر این عدد را به توان ۲ برسانیم، عدد خانه شصت و پنجم پیدا می شود که با کم کردن یک واحد از آن،

معادل مجموع جمله ها تا خانه شصت و چهارم است. اکنون در ادامه به ارائه مطالبی از مستند ابوریحان بیرونی از مجموعه مستند سرزمین سтарه ها می پردازیم و شما ریاضی آموزان و علاقه مندان به تاریخ دانش در ایران زمین را به تهیه و تماشای مستند مذبور تشویق می کنیم.

**آنچه من انجام داده ام چیزی است که بر هر انسانی واجب است آن را در فن خود پیش گیرد،** یعنی کوشش هایی را که پیشینیان برای پیشرفت آن فن متتحمل شده اند، با سپاس گزاری پذیرد و اگر به لغزش ها و استباهاهای از گذشته آگاه شد، آن ها را بی پروا تصحیح کند.

ابوریحان بیرونی

زمین‌شناسی دانشی است که ماهیت سیاره زمین

نمی‌ماند. چون برآمدگی زمین در جایی زیاد شود و اطراف خود را پر کند، آبها کم می‌شود و چشممهها گود می‌افتد و دره ها ژرف می‌شود و آبادانی دشواری پیدا می‌کند. پس مردمان از آنجا به جای دیگر کوچ می‌کنند و این ویرانی را به پیری زمین نسبت می‌دهند... و چنین است که گرسیرها سردسیر می‌شود و سردسیرها گرسیر... این حرکت هر چند اتفاقی و بی قاعده و در زمان اندک، کم باشد، ممکن است بر امتداد قطرهای کلی به تدریج صورت پذیرد یا به سمت مرکز اتفاق افتد. یا ترکیبی از هر دو حرکت باشد، و سوی آن به طرف هر یک از جهت های چهارگانه یا میانه آن ها باشد. و نیز ممکن است این حرکت ناگهانی و با پیدایش سبب آن که اتفاق یکباره سنگینی ها از جایی به جای دیگر است، صورت پذیرد...»

بیرونی، ضمن بحث های تاریخی، هرجا به مسئله ای برمی خورد که جنبه ریاضی داشته باشد، آن را با دقت و استدلال حل می کند. از جمله وقتی در آثار الاقیه به مسئله ای برمی خورد که مربوط به صفحه شترنج است و با محاسبه مجموع جمله های یک تصاعد هندسی ( $1+2+4+\dots+2^{n-1}$ ) مواجه می شود، آن را با دقت استدلال ریاضی حل می کند و به دست می آورد:

$$1+2+4+\dots+2^{n-1} = 184467440 \cdot 7370 \cdot 9551615$$

ابوریحان در آغاز ثابت می کند، توان دوم هر جمله از این تصاعد، برابر است با جمله ای که فاصله آن از این جمله، برابر است با فاصله این جمله تا جمله اول. برای نمونه، اگر عدد پنجم را که  $2^4$ ، یعنی ۱۶ است، به توان ۲ برسانیم،  $2 \cdot 16 = 32$  به دست می آید که عدد خانه نهم است. در ضمن، فاصله خانه نهم از خانه پنجم برابر است با خانه

و مردم، مذهب‌ها و مکان‌ها را مورد مطالعه قرار داد. او همه‌ای‌ها را در کتابی بزرگ با عنوان **تحقیق مالهند** نوشته است.

بیرونی به زبان هندی تسلط داشت و نیز یونانی، سانسکریت و زبان مردم سوریه را می‌دانست؛ اگرچه تمام کتاب‌هایش را به زبان پارسی و عربی نوشته. او در زمان اقامتش در هند، تاریخ طبیعی و زمین‌شناسی آن سرزمین را مطالعه و ماهیت رسوبات حوزه گنگ<sup>۲</sup> را به درستی شناسایی کرد. بیرونی در کتاب خود به معرفی سنگ‌های قیمتی، فلزها و آلیاژها پرداخته است. او از چگونگی پیدید آمدن سنگ‌های رسوبی به خوبی آگاه بود و پیدایش فسیل در بیابان‌ها را شاهدی بر پوشیده بودن آنجا از آب دریا دانسته است.

بیرونی در شرح زمین‌شناسی بیابان عربستان در کتاب خود به گوشه‌هایی از دانسته‌های خود اشاره کرده است و از فسیل‌ها به عنوان شاهدی بر نظریه‌های خود بهره می‌گیرد: «این بیابان عربستان که می‌بینیم، نخست دریا بوده و سپس پر شده است و نشانه‌های آن هنگام کندن چاهها به دست می‌آید. همچنین سنگ‌هایی بیرون می‌آیند که چون آن‌ها را بشکنند، صدفها و حلزون‌ها و چیزهایی که گوش‌ماهی نامیده می‌شوند، به نظر می‌رسد که یا به حال خود باقی است یا آنکه پوسیده و از میان رفته و جای خالی آن‌ها به شکل اصلی دیده می‌شود.» تاریخ زمین‌شناسی منعکس کننده اندیشه‌های بشتری درباره موقعیت زمین ماست. کودکان معمولاً از بزرگترها سؤال‌هایی می‌کنند که گاه پاسخ دادن به آن‌ها بسیار دشوار است. از جمله چرا آسمان آبی است؟ رنگین کمان کی به پایان می‌رسد؟ و چرا دریا به ماسه‌های ساحلی وارد می‌شود؟ امروزه ما بسیاری از چیزهایی را که در دنیای طبیعی پیرامونمان روی می‌دهند، بدیهی فرض می‌کنیم. اما مسلمانان متفکر در قرن سوم قمری به طور عمیق به این سؤال فکر می‌کردند و این به سبب کنجکاوی آنان برای درک رازهای محیط اطرافمان بوده است.

بیرونی ۶۰۰ سال قبل از گالیله<sup>۳</sup> فرضیه چرخش زمین به دور خود را ارائه کرده بود. بیرونی در آن زمان گرد بودن زمین را مسلم فرض کرده بود. او با اعتقاد به حرکت زمین حول محور خود، محیط زمین را نیز اندازه گرفت و روشی علمی برای تعیین جهت مکه از هر جای کره زمین ابداع کرد. بیرونی در عصر خود در



بیرونی به زبان هندی تسلط داشت و نیز یونانی، سانسکریت و زبان مردم سوریه را می‌دانست؛ اگرچه تمام کتاب‌هایش را به زبان پارسی و عربی نوشته است. بیرونی به ساخته‌های سنگی به دنبال سنگ‌های سخت و مقاوم تهیه ابزارهای سنگی باشد. بشر اولیه برای با لبه‌های تیز و برنده بود و نحوه استفاده و شیوه‌های به کارگیری از این ابزارهای سنگی در پیشرفت و رشد تمدن بشری مؤثر بوده است.

ابن سینا تنها دانشمندی نبود که مزهای علم را گسترش داد. ابو ریحان بیرونی دیگر دانشمند صاحب‌نام در علوم زمین، معاصر ابن سینا بوده است. بیرونی در حدود سال ۳۲۱ شمسی در بیرون شهر کاث دیده به جهان گشود. همانند دیگر هم‌عصرانش، وی را نمی‌توان متخصص در یکی از علوم دانست. زیرا در بسیاری از زمینه‌های علمی، از جمله ریاضیات، نجوم، پزشکی، فلسفه، تاریخ، داروشناسی و علوم زمین و کانی‌شناسی، به تحقیق پرداخته است. بیرونی مدت قابل توجهی از زندگی اش را در هند سپری کرد. در آنجا زبان آموخت

ابوریحان بارها خود را خادم علم دانسته است. بهویژه از اینکه توانسته است از روزگار کودکی یکسره به خدمت علم درآید، از بخت بلند خود سپاس‌گزار بوده است

آثار ابوریحان، چه از نظر اصالت و چه از نظر شیوه علمی، دست‌کم از نظر پژوهشگران روزگار ما، بسیار برتر از آثار ابن‌سینا بود. ابن‌سینا در بیشتر سال‌های فعالیت علمی خود در دربار آل بویه به‌سر برد که به علم و دانش و بحث‌های علمی بهای بسیار می‌دادند. آزاداندیشی در روزگار آنان بسیار رواج داشت. ابوریحان نیمة دور عمر خویش را که دوران بهره‌وری علمی او بود، در دربار سلاطین متعصب غزنوی گذراند که با هرگونه آزاداندیشی به سختی مقابله می‌کردند. بیرونی به عنوان بر جسته‌ترین دانشمند چنین درباری نمی‌توانست همچون ابن‌سینا در حکومت آل بویه بر سیر تکاملی نظریات علمی تأثیر گذارد. اگر بخواهیم بر اساس آثار برجای مانده بیرونی داوری کنیم، باید بگوییم که تقریباً همه آثار، پژوهشی ژرف در برداشته‌اند و پیداست که مؤلف برای نگارش آن‌ها وقت بسیار صرف کرده است. شاید به همین سبب بیرونی آن‌ها را فرزندان خود بر می‌شمرد و علاقه‌خود به آثارش را به شیفتگی مردمان به فرزندانشان تشبیه می‌کند.

علم نجوم، ریاضیات، فیزیک، تاریخ و جغرافیا تبحر داشت. اندازه‌گیری بین شهرها از دیگر دستاوردهای او به شمار می‌رود. در زمینه مثلثات کار بسیار مهم ابوریحان بیرونی در اندازه‌گیری محیط زمین از اهمیت بسیاری برخوردار است.

ابوریحان بارها خود را خادم علم دانسته است. بهویژه از اینکه توانسته است از روزگار کودکی یکسره به خدمت علم درآید، از بخت بلند خود سپاس‌گزار بوده است. به نظر بیرونی، خادم دانش نباید میان ساخته‌های علم جدایی قائل شود، بلکه باید بداند که دانش به طور مطلق پدیده‌ای شریف و نیکوست و جوینده را لذتی ابدی و پیوسته عطا می‌کند. وی همواره کسانی را که در مورد تحقیقات علمی به این نکته که در آنچه سود است، توجه دارند، به باد استیضاح گرفته است. تسلط بیرونی بر زبان‌های فارسی، عربی و سانسکریت ابزارهای لازم برای کار پژوهشی را برای وی فراهم آورده بود. به نظر وی، تعصب چشم‌های بینا را کور و گوش‌های شستنوار کر می‌کند و انسان را به کاری وامی‌دارد که فرد و دانش آن را گواهی ندهد.

او بارها از نظریات دانشمندان پیشین بهویژه ارسطو<sup>\*</sup> انتقاد کرده بود. به دلیل شیفتگی به نتایج واقعی، حقیقت را تنها در گفته‌ها و نوشه‌ها نمی‌جست و به آزمودنی‌ها و مشاهدات مستقیم پدیده‌های طبیعی بسیار علاقه‌مند بود. متأسفانه تأثیر ابوریحان بر سیر اندیشه علمی در مقایسه با تأثیر ابن‌سینا، بسیار ناچیز بود. در حالی که

\* پی‌نوشت‌ها.....\*

1. Roger Bacon
2. Ganges
3. Galilei
4. Aristotle

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه،  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$   
واحد سطح و اندازه ضلع متوسط آن  
واسطه هندسی بین اندازه‌های ضلع  
کوچک و وتر آن است. تاثر از زاویه  
حاده مقابل به ضلع متوسط کدام است؟

- (الف)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- (ج)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- (د)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- (ه)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

## پرسش‌های پیکار‌جو!



## جدول اصلی

### لئه افقی

۱. عددي چهار رقمي که رقمهای آن چهار عدد طبیعی متوالی هستند. - ۵۵ سال پیش! - عدد آتش نشان!
۲. مساحت مربعی که محیط آن ۴۶۸ متر است - عدد اول دو رقمی - تعداد بایت های موجود در یک کیلوبایت حافظه.
۳. عدد سه رقمی که رقمهای آن توان های ۲ هستند - عدد اول دو رقمی - کوچکترین عدد پنج رقمی مضرب بیست که مضرب ۱۰ نیست.
۴. عدد چهار رقمی که از کنار هم گذاشتن دو عدد دو رقمی یکسان به دست آمده است - عدد دو رقمی مضرب ۱۱ - عدد سه رقمی مربع کامل.
۵. مساحت مربعی که طول ضلع آن عددی اول بین ۴۰ و ۵۰ است - عدد چهار رقمی،



پیش از آغاز حل جدول به نکات زیر

توجه کنید:

- ♦ ردیف افقی از چپ به راست و ردیف عمودی از بالا به پایین پر می شود.
- ♦ تمام خانه های سفید جدول باید با عددهای طبیعی یا صفر پر شوند.
- ♦ خانه های سفید پشت سر هم باید با عددهایی که تعداد رقم های آن ها همان تعداد است، پر شوند.
- ♦ همه قسمت های جدول، حتی خانه های سفید تکی که باید با عددی یک رقمی پر شوند، دارای توضیح هستند.

## ۷) عمودی

۱. اطلاعات تلفنی شهر تهران - عدد دو رقمی که مجموع ارقام آن نخستین عدد اول است.  
- حاصل ضرب دو عدد اول متمایز، با رقامهای یکان مشابه.
۲. عدد هشت رقمی با رقامهای متوالی - مساحت مربعی که محیط آن ۴۸ واحد است.
۳. حاصل ضرب عدددهای طبیعی یکرقمی - مجموع تمام عدددهای طبیعی کوچکتر از دویست و ده.
۴. حاصل ضرب دو عدد طبیعی زوج متوالی - حاصل ضرب عدد هفت در توانی از سه - طول ضلع مثلث قائم الزاویهای که وتر آن مساوی ۱۳ است.
۵. آخرین عدد زوج سه رقمی - عدد هفت رقمی که سه رقم یک سه رقم صفر دارد و مضرب سه است.
۶. عدد طبیعی که هر توان آن مساوی خودش است - عدد اول یک رقمی - عدد اول زوج سه برابر عدد اول دو رقمی.
۷. عدد دو رقمی مضرب یازده - محیط مربعی که مساحت آن ۱۵۸۷۶ واحد سطح است - عدد طبیعی پنج رقمی که مضرب ده است و چهار رقم سمت چپ آن چهار عدد طبیعی متوالی به ترتیب نزولی هستند.
۸. عدد طبیعی دو رقمی با رقامهای متوالی - عدد طبیعی سه رقمی مضرب ۹ و ۶ - تعداد ثانیههای یک شبانه روز.

## ۹) عدد یک رقمی زوج - حاصل تقسیم

- هر عدد غیر صفر بر خودش - توانی از ۲  
- تعداد رقامهای لازم برای شماره گذاری صفحات یک کتاب ۱۴۱ صفحه ای - عددی که حاصل ضرب آن در هر عدد مساوی همان عدد است.
۱۰. نخستین عدد اول سه رقمی - حاصل تفاضل هر عدد از خودش - طول ضلع مربعی که مساحت و محیط آن از نظر عددی با هم برابرند.

۱۱. بزرگترین عدد دو رقمی مضرب ۵ و ۷ در مبنای ۲ - عدد اول دو رقمی - نخستین عدد اول دو رقمی.

۱۲. عدد طبیعی ده رقمی که چهار رقم صفر دارد و بقیه ارقام آن ۲ هستند - نمره دانش آموز زرنگ!

۱۳. مجموع اندازه های زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب - عدد دو رقمی مضرب ۷ - عدد اول یک رقمی - حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی.

۱۰. عدد طبیعی پنج رقمی و مضرب ده که چهار رقم سمت چپ آن دو عدد دو رقمی متوالی هستند. - عدد دو رقمی مربع کامل - نخستین عدد دو رقمی.

۱۱. مساحت ذوزنقه متساوی الساقینی که طول هر یک از دو ساقهای آن ۵ واحد و طول ارتفاع آن نصف طول قاعده کوچک و مساوی ۴ واحد باشد. - عدد نه مثبت و نه منفی! - مساحت مستطیلی که طول آن دو برابر عرض آن است.

۱۲. نصف اندازه زاویه قائمه - عددی مربع کامل در مبنای ۲، بزرگتر از ۲۰ - عددی سه رقمی که حاصل ضرب رقامهای آن مساوی مجموع رقامه است.

۱۳. نخستین عدد فرد و مثبت - اندازه زاویه بین نیمسازهای دو زاویه مثلثی که زاویه سوم آن  $30^\circ$  است.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱													
۲													
۳													
۴													
۵													
۶													
۷													
۸													
۹													
۱۰													
۱۱													
۱۲													
۱۳													

# گردن با مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایه یازدهم



اشاره

صبح یک روز گرم تابستان فرصتی به دست آمد تا با جمعی از مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایه یازدهم به گفت و گو بنشینیم و درباره چالش‌های مطالعه این کتاب، هدفها و رویکردهای آن، و دیدگاه‌های مؤلفان کتاب بحثی سازنده برای دانش‌آموزان تدارک بینیم. در این نشست چهار تن از مؤلفان کتاب، آقایان حمیدرضا امیری، میرشهرام صدر، محمود داورزنی و عادل محمدپور شرکت داشتند که از قضا سه نفر نسخت سردبیر و اعضای هیئت تحریریه مجله هم هستند: مشروح گفت و گوی ما با این عزیزان را در ادامه می‌خوانیم.



■ **شرقی:** در خدمت مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایه یازدهم رشتۀ ریاضی هستیم. ابتدا از آقای امیری که مدیریت تألیف کتاب را بر عهده داشتند، دعوت می‌کنیم درباره هدف‌های کلی و مباحثت کتاب صحبت کنند و مؤلفان کتاب را هم معرفی کنند.



■ **امیری:** سلام می‌کنم به همه عزیزانی که شرح این مصاحبه را می‌خوانند، یعنی دانش‌آموزان سخت‌کوش و بالاستعداد رشتۀ ریاضی. کتاب آمار و احتمال جزو اولین کتاب‌هایی بود که به شکل تخصصی برای دانش‌آموزان این رشتۀ تألیف شد. این کتاب براساس برنامۀ درسی تدوین شده گروه، روی دو محور اصلی آمار و احتمال متمرکز شد. هر دوی این مباحثت در برنامۀ درسی جدید، از همان سال‌های ابتدای تحصیلی در کتاب‌های درسی آمده‌اند. قبل این طور بود که مباحثت آمار و احتمال از سال دوم دبیرستان به بعد مطرح می‌شدند، اما حالا دانش‌آموزان از پایه دوم ابتدایی به طور شهودی با مفهوم پیشامد و احتمال آشنا می‌شوند و به طور مستمر تا پایه دهم با این مفاهیم کار می‌کنند و در این پایه (پایه یازدهم) باقی مانده مفاهیم را می‌خوانند و لذا در سال آینده دیگر با این مفاهیم کاری ندارند. برای اینکه به طور اصولی کار انجام شود، فصل اول کتاب را به مبانی ریاضی، شامل منطق و نظریه مجموعه‌ها اختصاص دادیم.

منطق ریاضی سال‌ها بود که به طور رسمی از کتاب‌ها حذف شده بود و همیشه معلمان ریاضی از این کمبود گلایه داشتند که نبود این بحث کار ما را در ارائه بعضی مفاهیم دشوار کرده است. از آن گذشته ما می‌خواستیم مبانی منطق، یعنی توانایی دانش‌آموزان در استدلال کردن نیز تقویت شود. در نتیجه قسمت اول را به منطق و جبر گزاره‌ها اختصاص دادیم.

همینجا توصیه می‌کنیم که دبیران محترم به هیچ عنوان از چارچوب کتاب درسی خارج نشوند و به مباحثت مانند اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها و استنتاج وارد نشوند که آن‌ها جزو هدف‌های ما نبوده‌اند. در بحث مجموعه‌ها، ما آنچه در سال‌های قبل درباره بحث مجموعه‌ها گفته نشده بود، یعنی قوانین جبر مجموعه‌ها را آوردیم تا پیش‌نیازهای لازم برای بحث احتمال را فراهم کرده باشیم. بعد از تعیین این سرفصل‌ها، ما همکاران خود را برای تألیف کتاب انتخاب کردیم. آقای دکتر عادل محمدپور - که در تألیف بخش آمار کتاب ریاضی و آمار پایه دهم رشتۀ انسانی قبلًا با ما همکاری داشتند - و آقای دکتر احسان بهرامی در تألیف بخش آمار این کتاب یاریگر ما بودند. دکتر محمدپور استاد آمار و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر و دکتر بهرامی هم عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی هستند.

آقایان دکتر امید نقشینه ارجمند و محمود داورزنی کار مربوط به بخش احتمال را انجام دادند. دکتر نقشینه دکترای احتمال دارد و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر است. ایشان همچنین از مдал آوران المپیاد ریاضی بوده است و در حال حاضر سرپرستی تیم المپیاد ریاضی دانش‌آموزی کشورمان را هم بر عهده دارد. آقای داورزنی هم در حال حاضر دانشجوی



**مباحثی مانند اثبات همارزی گزاره‌ها و استنتاج جزء  
هدف‌های ما (در تأليف كتاب آمار و احتمال) نبوده‌اند**

پیازه مورد توجه قرار گرفته که معتقد است: سن درک مفهوم احتمال، از سال‌های دبیرستان - دوره دوم متوسطه فعلی - به بعد است. اما پژوهش‌های بعدی نشان داد که بحث آمار و احتمال به صورت مقدماتی آن می‌تواند و باید از همان سال‌های ابتدایی شروع شود و برنامه‌های درسی معروف و شناخته شده، مثل «NCTM» هم این موضوع را مورد توجه قرار داده‌اند. اما زیاد هم به آمار و احتمال نپرداخته‌ایم. مثلاً یک فصل از هر کتاب را به آن اختصاص داده‌ایم و سعی کرده‌ایم استمرار مطلب حفظ شود.

■ **شرقی:** آیا رابطه‌ای هم بین آمار و احتمال در این کتاب بیان شده است؟

■ **امیری:** بله، بهخصوص در این کتاب، در بخش آمار استنباطی، ارتباط این دو مطلب به خوبی دیده می‌شود.

■ **شرقی:** بسیار خب، پس از آقای دکتر محمدپور خواهش می‌کنم درباره این مطلب قدری توضیح بدهند. منظور از آمار استنباطی چیست؟

■ **محمدپور:** آمار استنباطی در واقع یعنی رسیدن از جزء به کل. یعنی ما تعداد محدودی نمونه داریم و می‌خواهیم براساس رفتار آن نمونه در مورد جامعه قضاؤت و نتیجه‌گیری کنیم و به استنباطی برسیم. به همین لحاظ به آن آمار استنباطی می‌گوییم. تفاوت آمار استنباطی با آمار توصیفی همین است. در آمار توصیفی شما همه داده‌ها را

دکترای ریاضی (شاخه رمزنگاری) در دانشگاه خوارزمی است. من و آقای میرشهرام صدر که در حال حاضر هردویمان دانشجوی دکترای رشتة «فلسفه علم» هستیم و سه دهه معلمی ریاضی را در کارنامه خود داریم، کارهای مربوط به بخش اول کتاب (منطق و نظریه مجموعه‌ها) را انجام داده‌ایم.

البته پس از تأليف هر بخش، مطالب مجدداً در گروه به نظر جمع می‌رسید و بارها اصلاح می‌شد تا نهایی شود.

اگرچه عنوان این کتاب تازه است، ولی مباحثت آن - به جز بحث منطق - قبلاً در کتاب‌های دیگر آمده‌اند. این را هم اضافه کنم که این کتاب، بعد از حدود ۶۰ جلسه بحث و گفت‌و‌گو در گروه تأليف، روی سایت دفتر تحقیق و توسعه ریاضی گذاشته شد و معلمان و صاحب‌نظران درباره آن نظر دادند. در نهایت هم از طریق سامانه اعتبارسنجی مورد نقد و بررسی دبیران ۳۱ استان کشور قرار گرفت که این نظرات را هم در اصلاح نهایی آن اعمال کردیم.

■ **شرقی:** چون شما در جریان کارهای انجام شده در پایه‌های متفاوت تحصیلی قرار دارید، یک سؤال بهطور خاص، از شما دارم: دلیل این همه تأکید بر آمار و احتمال از دوره ابتدایی تا پایه‌یازدهم چیست؟

■ **امیری:** قبلاً احتمال در دوره دبیرستان و پایه‌های آمار هم از دوره راهنمایی آموزش داده می‌شد. اما وقتی آزمون تیمز برگزار شد (در پایه‌های چهارم و هشتم)، دیدیم که در آزمون پایه چهارم سؤال‌های مرتبط با آمار و احتمال می‌آید. با تحقیقی که انجام شد، دریافتیم که در تدوین کتاب‌های قبلی، نظری نزدیک به نظرات



**داورزنی:** فصل احتمال در کتاب یازدهم از چهار درس تشکیل می‌شود؛ درس اول به «قوانين احتمال» می‌پردازد و بعضی از قوانین در آن اثبات می‌شوند. در درس سوم که کاملاً تازگی دارد و شاید چالشی برای دبیران و دانشآموزان باشد، «احتمال شرطی» و «قانون احتمال کل» بیان می‌شود. در درس دوم به «پیشامدهای ناهمشانس» می‌پردازیم و در درس چهارم هم «پیشامدهای مستقل وابسته» مطرح می‌شوند. توصیه می‌کنیم که دبیران محترم در چارچوب کتاب درسی و مفاهیم آن کار کنند و از ارائه فرمولهای اضافی پرهیزنند.



**شرقی:** خُب آقای صدر، شما در مورد مباحث فصل اول کتاب اگر توضیحی دارید بفرمایید.

**میرشهرام صدر:** مفهوم‌های مجموعه و عضویت (تعلق) جزو مفاهیم اولیه ریاضیات هستند و بعد از آن برای تعریف، استدلال و گسترش مفاهیم نیازمند منطق ریاضی هستیم. بنابراین درستی تئوری مجموعه‌ها از درستی منطق بر می‌آید و در نتیجه دانشآموزان باید با منطق ریاضی آشنا شوند. پس فصل اول را با منطق ریاضی شروع کردیم. بعد از آن ویژگی‌های مجموعه‌ها براساس منطق ریاضی بیان می‌شوند. یعنی از روش عضوگیری برای اثبات قوانین مجموعه‌ها استفاده کردیم. همچنین، قوانین جبر مجموعه‌ها را به طور کامل بیان کردیم و به کمک آنها اثبات روابط مجموعه‌ها را نیز انجام دادیم.



**شرقی:** پس قوانین جبر مجموعه‌ها را به طور کامل (نسبت به کتاب سابق جبر و احتمال) آورده‌ایم. ضرب دکارتی چطور؟

**امیری:** بله قوانین را کاملاً آورده‌ایم و ضرب دکارتی را هم با این هدف که دانشآموزان با مفهوم هندسی آن و تعریف و رابطه ابتدایی آن آشنا شوند، بیان کردیم. اما وارد بحث رابطه‌ها نشده‌ایم.

**شرقی:** سپاس از وقتی که در اختیار مجله قرار دادید.

**برآوردهای دو نوع است:** برآوردهای نقطه‌ای و برآوردهای فاصله‌ای که سعی کرددهای هر دو نوع را در این کتاب به زبان ساده بیان کنیم

در اختیار دارید و درباره آن‌ها قضایت می‌کنید، ولی در آمار استنباطی شما بخش کوچکی از داده‌ها را دارید و می‌خواهید براساس این بخش در مورد جامعه به استنباطی برسید.

استنباطی که ما در این کتاب انجام می‌دهیم، ساده‌ترین استنباطها، ولی در عین حال پرکاربردترین آن‌هاست که به آن «برآورده» گفته می‌شود. برآوردهای دو نوع است: برآوردهای نقطه‌ای و برآوردهای فاصله‌ای که سعی کرددهایم در این کتاب هر دو نوع را به زبان ساده بیان کنیم. مثال ساده‌ای که در کتاب آورده‌ایم این است که وقتی شما از امتحانی بیرون می‌آید، از شما می‌پرسند نمره‌تان چه می‌شود. گاهی امتحان را خوب داده‌اید و می‌گویید مثلاً نمره من ۱۸ می‌شود. ولی گاهی چندان مطمئن نیستید و می‌گویید: با اطمینان ۹۰ درصد نمره من بین ۱۵ تا ۱۸ می‌شود. این دو حالت در واقع همان دو نوع برآورده‌ی است که از آن یاد کردیم. البته این‌ها برآوردهای ذهنی هستند، ولی ما در کتاب توضیح می‌دهیم که چگونه با داشتن داده‌ها همین کار صورت بگیرد. بخش آخر آمار استنباطی روی این موضوع متتمرکز است که تعداد داده‌ها را چقدر بگیریم تا با اطمینان ۹۵ درصد بتوانیم نتیجه‌گیری مطمئنی داشته باشیم. همچنین، درباره روش‌های متفاوت نمونه‌گیری تصادفی و انتخاب نمونه مناسب مطالبی داریم.

**شرقی:** در مورد سیر آموزش احتمال طی این ۱۱ سال هم قدری توضیح دهید.

**امیری:** مفهوم احتمال از همان سال‌های ابتدای تحصیل، یعنی پایه دوم ابتدایی، برای دانشآموزان مطرح می‌شود. یعنی دانشآموزان با مفهوم‌هایی مثل شناس، امکان، پدیده‌های قطعی و احتمالی به صورت ابتدایی آشنا می‌شوند و این آشنایی به مرور کامل می‌شود. به طوری که در پایه‌های پنجم و ششم موضوع اختصاص یک عدد (به طور ذهنی) به یک پدیده تصادفی برای دانشآموزان مطرح می‌شود. در پایه هشتم به طور رسمی به آن‌ها یک دستور برای محاسبه احتمال - تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد کل حالت‌ها - داده می‌شود. در پایه نهم، بعد از آنکه دانشآموزان با مفهوم مجموعه‌ها و زیرمجموعه آشنا شدند، دستور  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  را ارائه می‌کنیم (تعداد اعضای پیشامد تصادفی تقسیم بر تعداد اعضای فضای نمونه). اما به شکل کامل‌تر در پایه دهم مفاهیم احتمال و جبر پیشامدها را مطرح و در سال یازدهم کار را تکمیل می‌کنیم. حالا آقای داورزنی درباره جزئیات توضیح می‌دهند.

# آموزشی

دکتر مهرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهانمه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهانمه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه حل‌های خود را برای انعکاس در ماهانمه برایمان بفرستید تا نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (با راه حل‌های آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد).

مسائل و راه حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهانمه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهانمه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوايز نفيسی اهدا می‌شود.

## بخش اول:

### مسئله‌ها

۳۰۵. میانگین ده عدد طبیعی برابر است با ۱۰. ثابت کنید اگر  $k$

عددی طبیعی کوچک‌تر از ۱۱ باشد، حداقل  $k$  عدد با میانگین حداقل ۱۰ در میان این اعداد وجود دارد.

۳۰۶. حاصل ضرب سه عدد طبیعی برابر است با: ۱۲۳۰. کمترین

مقدار مجموع آن‌ها چقدر است؟

۳۰۷. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۶ را در خانه‌های جدول‌های زیر بنویسیم. بهطوری که مجموع هر دو خانه مجاور (دو خانه با ضلع مشترک) فرد باشد. برای هر شکل تعداد حالت‌های ممکن را به‌دست آورید.

۱)

۲)

۳)

۴)

۳۰۱. فرصل کنید  $S$  مجموعه همه اعداد صحیح است که می‌توان

به صورت مجموع مربع دو عدد صحیح نوشت. ثابت کنید  $S$  نسبت به عمل ضرب بسته است. یعنی اگر:  $x,y \in S$ , آن‌گاه:  $xy \in S$ .

۳۰۲. برای هر عدد طبیعی  $n$ ، بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که حاصل  $(2^n)$  را عاد کند.

۳۰۳. از راننده پرسیدم: نتیجه بازی والیبال چی شد؟ گفت: دو سمت را ایران برده و دو سمت را لهستان. سمت پنجم هم تا اینجا ۵-۵ هستند.

الف) برای چهار سمت اول چند حالت متفاوت وجود دارد؟  
ب) برای امتیازهای سمت پنجم چند حالت متفاوت وجود دارد؟

۳۰۴. چند تابع از  $\{1, 2, \dots, 10\}$  به  $\{1, 2, \dots, 10\}$  می‌توان تعریف کرد، بهطوری که برای هر  $x$ ,  $f(x) - x$  مضرب ۵ باشد؟

مجموع زوایای داخلی یک  $n$  ضلعی محدب برابر است  
با:  $\pi(n-2)$ . اگر سطح  $n$  ضلعی به  $m$  چهار ضلعی افزایش شود،  
آن گاه باید داشته باشیم:  $n = \frac{(n-2)\pi}{2\pi} m$ . در نتیجه باید  
زوج باشد و در نتیجه:  $1 - \frac{n}{2} m$ . می‌توان به کمک استقرا  
کافی بودن این شرط را ثابت کرد. اگر  $k$  تعداد قطرهای رسم  
شده باشد، با شمارش تعداد اضلاع  $m$  چهار ضلعی خواهیم  
داشت:  $k = n + 2m - 4$ . در نتیجه:  $2 - \frac{n}{2} = m$ .

**۲۷۳.** ساعت دیواری کلاس ما فقط عقربه ساعت‌شمار دارد.  
اگر عقربه  $\frac{7}{8}$  از فاصله بین ۴ و ۵ را طی کرده باشد،  
ساعت دقیقاً چند است؟

طی شدن  $\frac{7}{8}$  از فاصله بین ۴ و ۵ معادل است با:  
 $\frac{7}{8} \times 60 = 52\frac{1}{2}$  دقیقه. در نتیجه ساعت دقیقاً  $5\frac{1}{2}$  دقیقه  
مانده به ۵ است.

**۲۷۴.** در یک فروشگاه بسته‌های ۷ تایی، ۱۳ تایی و ۲۵ تایی از  
کیک فروخته می‌شود. مثلاً اگر شما ۱۴ کیک بخواهید،  
باید دو بسته ۷ تایی بخرید، اما هیچ امکانی برای خرید  
دقیقاً ۱۵ کیک وجود ندارد. بیشترین مقدار  $n$  باید،  
به طوری که امکان خرید  $n$  کیک از این فروشگاه وجود  
نداشته باشد.

پاسخ ۴۴ است. با بررسی تعداد بسته‌های ۱۳ تایی و  
۲۵ تایی (شش حالت) می‌توان به راحتی نشان داد که ۴۴  
کیک را نمی‌توان خرید. از طرف دیگر:

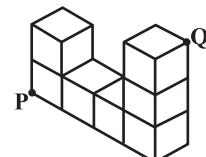
$$45 = 7+13+25, 46 = 21+25, 47 = 21+26, 49 = 7 \times 7, \\ 50 = 2 \times 25, 51 = 26+25$$

در نتیجه تعداد کیک‌های خریداری شده می‌تواند هر  
عددی بزرگتر از ۴۴ باشد (۴۵ تا ۵۱ قابل قبول هستند). با  
اضافه کردن مضارب ۷ به این اعداد، همه اعداد بعدی هم قابل  
قبول هستند).

**۲۷۵.** می‌خواهیم ۱۰۰ کبوتر را در تعدادی قفس جای دهیم،  
به طوری که تعداد کبوترها در قفس‌ها دوبه‌دو متفاوت  
باشد و اگر قفس‌ها را برحسب تعداد کبوترها مرتب  
کنیم، اختلاف کبوترها در دو قفس متولی حداقل ۲  
باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

**۳۰۸.** اگر  $\overline{abcd}$  یک عدد چهار رقمی باشد، جمع لایه‌ای آن برابر  $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d$  تعریف می‌شود. اگر جمع لایه‌ای یک عدد چهار رقمی برابر ۱۴ باشد، آن گاه مجموع رقمهای آن چقدر است؟

**۳۰۹.** در شکل زیر طول پاره خط  $PQ$  چقدر است؟



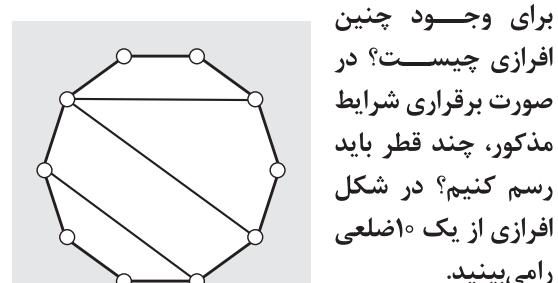
**۳۱۰.** مجموع سه عدد سه رقمی  $\overline{aaa}$ ,  $\overline{bbb}$  و  $\overline{ccc}$  برابر عدد چهار رقمی  $\overline{cbba}$  شده است. ارقام  $a$ ,  $b$  و  $c$  را مشخص کنید.

## بخش دوم: راه حلها

**۳۷۱.** پانزده دانش‌آموز در یک اردوی تابستانی شرکت  
کردند. هر روز سه دانش‌آموز موظف بودند که در پایان  
کلاس‌های آن روز، کلاس را تمیز کنند. در پایان اردو،  
علوم شد که هر دو دانش‌آموز دقیقاً یک روز با هم در  
گروه‌های مذکور شرکت داشته‌اند. این اردو چند روز  
طول کشیده است؟

اگر اردو  $n$  روز طول کشیده باشد، آن گاه خواهیم داشت:  
 $n = \binom{15}{2} = 35$ . در نتیجه:  $n=35$ . برای اثبات تساوی فوق  
کافی است تعداد زوج‌هایی را که در یک روز با هم کلاس را  
تمیز کردند، به دو طریق بشمارید.

**۲۷۷.** یک  $n$  ضلعی محدب را می‌خواهیم به چهار ضلعی‌هایی  
افراز کنیم. برای این کار چند قطر که در داخل  $n$   
ضلعی متقاطع نیستند باید رسم کنیم تا سطح  
 $n$  ضلعی به چهار ضلعی‌ها افزایش شود؟ شرط لازم و کافی  
برای وجود چنین افرازی چیست؟ در



صورت برقراری شرایط  
مذکور، چند قطر باید  
رسم کنیم؟ در شکل  
افرازی از یک ۱۰ ضلعی  
رامی‌بینید.

مربع را به مثلثهایی کوچک‌تر افزای کرد، به‌طوری که رأس‌های مثلثها یا یکی از چهار رأس مربع بودند و یا یکی از نقاط اضافه شده توسط رضا. اگر تعداد مثلثها ۹۶ باشد، تعداد نقطه‌هایی که رضا اضافه کرده بود، چندتا بود؟

مجموع زاویه‌های تمام مثلثها برابر است با:  $96\pi$ . از طرف دیگر، اگر  $k$  نقطه در داخل مربع اضافه کرده باشیم، مجموع زاویه‌ها برابر است با:  $k \times 2\pi + 2\pi = 2\pi + 47$ .

### ۲۷۹. $a, b$ و $c$ عدد حقیقی هستند. ثابت کنید حداقل

یکی از سه معادله زیر ریشه حقیقی دارد:

$$ax^3 + 2bx^2 + c = 0, \quad bx^3 + 2cx^2 + a = 0, \quad cx^3 + 2ax^2 + b = 0$$

برای آنکه یکی از معادله‌ها ریشه حقیقی داشته باشد، باید حداقل یکی از این نامساوی‌ها برقرار باشد:  $a^3 - bc \geq 0$ ,  $b^3 - ac \geq 0$ ,  $c^3 - ab \geq 0$ . دو راه برای اثبات وجود دارد:

**روش اول (برهان خلف):** اگر چنین نباشد، آن‌گاه  $b^3c^3a^3 < acabc$  و  $a^3 < bc$  و  $c^3 < ab$ . در نتیجه:  $a^3b^3c^3 < a^3b^3c^3$  که تناقض است.

**روش دوم:** اگر  $x = \max\{|a|, |b|, |c|\}$ ، آن‌گاه حتماً  $x^3 \geq yz$  که در آن  $y$  و  $z$  دو عدد دیگر به جز  $x$  هستند.

### ۲۸۰. ۹۶ عدد حقیقی مثبت دور یک دایره مفروض‌اند. ثابت کنید دو عدد متولای جمود دارند که مجموع اولی و معکوس دومی از ۲ کمتر نیست. (ترتیب اعداد در جهت ساعت‌گرد است).

برهان خلف. فرض کنید عددها به ترتیب  $x_1, x_2, \dots, x_{96}$  باشند و داشته باشیم:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} < 2, \quad x_2 + \frac{1}{x_3} < 2, \dots, \quad x_{96} + \frac{1}{x_1} < 2$$

در نتیجه با جمع نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$(x_1 + \frac{1}{x_2}) + (x_2 + \frac{1}{x_3}) + \dots + (x_{96} + \frac{1}{x_1}) < 2 \times 96$$

در نتیجه حداقل برای یکی از این ۹۶ مقدار، مانند  $\frac{1}{x_i}$ ، باید داشته باشیم:  $\frac{1}{x_i} < 2 - x_i$  که تناقض است، چون:

$$x_i + \frac{1}{x_i} < 2 \Leftrightarrow x_i^2 - 2x_i + 1 < 0 \Leftrightarrow (x_i - 1)^2 < 0$$

اگر  $n$  تعداد قفس‌ها باشد، برای هر  $1 \leq n \leq 13$ ، این کار امکان‌پذیر است. در صورت مسئله این خواسته جافتاده است که می‌خواهیم تعداد قفس‌ها ماقزی مم باشد. پس تلاش کنید ثابت کنید تعداد قفس‌ها نمی‌تواند ۱۴ یا بیشتر باشد. چون:  $1 + 2 + \dots + n \leq 1 + 2 + \dots + 13 = 91$ ، می‌توان در قفس اول ۱، در قفس دوم ۲ کبوتر، ..., در قفس  $n$  کبوتر قرار دهیم. باقی‌مانده کبوترها را اگر  $m$  فرض کنیم، سعی می‌کنیم  $m$  کبوترها را تا جایی که ممکن است به نسبت مساوی در قفس‌ها توزیع کنیم. اگر  $m$  را بر  $n$  تقسیم کنیم، خواهیم داشت: که در آن: آن‌گاه  $m = nq + r$  به هر قفس  $q$  کبوتر اضافه می‌کنیم.  $r$  کبوتر باقی‌مانده را در ۲ قفس آخر قرار می‌دهیم تا اختلاف کبوترهای دو قفس متوالی از ۲ بیشتر نشود.

۲۷۶. در شکل زیر، هر خانه با یک عدد پر شده است، به‌طوری که مجموع هر سه عدد متولای برابر است با ۱۹. عدد را مشخص کنید.

۴	a	b	c	d	e	f	g	۸	h
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

چون:  $4 + a + b = 19 = a + b + c$ , پس:  $c = 4$ . به همین ترتیب می‌توان گفت:  $f = 4$  و  $h = 4$ . در نتیجه:  $f = e + f + g = 7$ , چون:  $g = 19 - 8 - 4 = 7$ , در  $d + e + f = 19$ , در نتیجه:  $d = 7$ .

۲۷۷. یک مربع  $4 \times 4$  را می‌خواهیم با موزاییک‌هایی به فرم  فرش کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

یک خانه گوشی را در نظر بگیرید. اگر خانه‌های یک موزاییک را به صورت زیر شماره‌گذاری کنیم، خانه گوشی فقط می‌تواند ۱، ۲، و یا ۴ باشد.

۱	۲	۳
۴		

با حالت‌بندی و شمارش خواهیم دید که در حالت اول ۴ طریق، در حال دوم ۴ طریق، در حالت سوم ۲ طریق و در مجموع ۱۰ طریق برای موزاییک‌بندی انتخاب وجود دارد.

۲۷۸. رضا تعدادی نقطه داخل یک مربع انتخاب کرد و سه‌های با وصل کردن بعضی از آن‌ها به هم سطح

# مجموعه‌های متناهی، اصل شمارش

یک مجموعه متناهی نامیده می‌شود، اگر دقیقاً دارای  $m$  عضو متمایز و  $m$  عددی صحیح و نامنفی باشد. در غیر این صورت مجموعه، نامتناهی نامیده می‌شود. برای مثال، مجموعه تهی و مجموعه حروف الفبای انگلیسی مجموعه‌هایی متناهی هستند، در حالی که مجموعه اعداد زوج صحیح و مثبت،  $\{2, 4, 6, \dots\}$ ، نامتناهی است.

نماد  $n(A)$  تعداد اعضای موجود در مجموعه  $A$  را نشان می‌دهد.  
در بعضی از متن‌ها از  $\#(A)$  یا  $|A|$  یا  $\text{Card}(A)$  به جای  $n(A)$  استفاده می‌شود.

**قضیه ۱۰۵:** اگر  $A$  و  $B$  مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت  $A \cup B$  و  $A \cap B$  متناهی‌اند و داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ما می‌توانیم این نتیجه را برای بدهست آوردن فرمولی مشابه برای سه مجموعه به کار ببریم:

**نتیجه ۱۰۶:** اگر  $A$ ,  $B$  و  $C$  مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت  $A \cup B \cup C$  نیز چنین است (متناهی است)، و

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

از استقرای ریاضی (بخش ۱۰۰) به منظور تعمیم این نتیجه برای هر تعداد متناهی از مجموعه‌ها می‌توان استفاده کرد.

## لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Finite Sets	مجموعه‌های متناهی
2. Counting principle	اصل شمارش
3. Contain	شامل شدن
4. Distinct	متمایز
5. Nonnegative integer	عدد صحیح نامنفی
6. Elements	اعضا، عناصر
7. Infinite	نامتناهی
8. To obtain	به دست آوردن
9. Generalize	تعمیم‌دادن
10. Mathematical induction	استقرای ریاضی



## 1.8 FINITE SETS, COUNTING PRINCIPLE

A set is said to be finite if it contains exactly  $m$  distinct elements where  $m$  denotes some nonnegative integer. Otherwise, a set is said to be infinite. For example, the empty set  $\emptyset$  and the set of letters of the English alphabet are finite sets, whereas the set of even positive integers,  $\{2, 4, 6, \dots\}$ , is infinite.

The notation  $n(A)$  will denote the number of elements in a finite set  $A$ . Some texts use  $\#(A)$ ,  $|A|$  or  $\text{card}(A)$  instead of  $n(A)$ .

**Theorem 1.5:** If  $A$  and  $B$  are finite sets, then  $A \cup B$  and  $A \cap B$  are finite and

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

We can apply this result to obtain a similar formula for three sets:

**Corollary 1.6:** If  $A$ ,  $B$ , and  $C$  are finite sets, then so is  $A \cup B \cup C$ , and

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Mathematical induction (Section 1.10) may be used to further generalize this result to any finite number of sets.

### ترجمه برای دانش اموزان

**Lemma 1.4:** If  $A$  and  $B$  are disjoint finite sets, then  $A \cup B$  is finite and

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

*Proof.* In counting the elements of  $A \cup B$ , first count those that are in  $A$ . There are  $n(A)$  of these. The only other elements of  $A \cup B$  are those that are in  $B$  but not in  $A$ . But since  $A$  and  $B$  are disjoint, no element of  $B$  is in  $A$ , so there are  $n(B)$  elements that are in  $B$  but not in  $A$ . Therefore,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .

We also have a formula for  $n(A \cup B)$  even when they are not disjoint. This is proved in Problem 1.28.

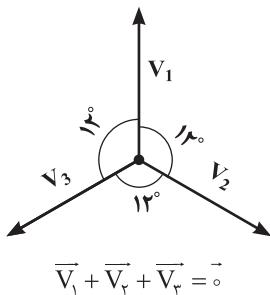
# بحثی در بارهٔ بردارها



عباس قلهه پوراقدام،  
دبیر ریاضی ارومیه

زیرا بردارها دو به دو قرینه هم هستند:  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{0}$  و  $\vec{V}_3 + \vec{V}_4 = \vec{0}$ .

اما اگر سه دانش‌آموز، سه طناب هم‌طول را با سه نیروی برابر که با هم دو به دو زاویه  $120^\circ$  می‌سازند، به سه طرف بکشند چطور؟ باز هم به نظر می‌آید حلقه به هیچ سمت متمایل نشود. یعنی در شکل ۳ داریم:



شکل ۳.

اما چطور می‌توانیم درستی این موضوع را در این حالت اثبات کنیم. به نظر می‌رسد این بار که تعداد بردارها عدد فردی است، کار دشوارتر است. البته اگر از قانون متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها استفاده کنیم، اثبات آسان می‌شود. می‌دانیم برای دو بردار  $\vec{V}_1$  و  $\vec{V}_2$  که مبدأ مشترک دارند، قطر متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار بنا می‌شود، مجموع دو بردار را مشخص می‌کند. بنابراین در این حالت مجموع دو بردار  $\vec{V}_1$  و  $\vec{V}_2$  قطر متوازی‌الاضلاع (لوزی) است که اضلاع مجاور آن  $\vec{V}_1$  و  $\vec{V}_2$  هستند.

اما به سادگی می‌توان نشان داد، در این صورت دو مثلثی که با این قطر در لوزی ایجاد می‌شوند، متساوی‌الاضلاع هستند و در نتیجه بردار  $\vec{V}_1$  با  $\vec{V}_2$  و  $\vec{V}_3$  و با  $\vec{V}_4$  هم‌طول و با  $\vec{V}_1$  هم‌راستاست. (چرا؟) لذا:  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$  و  $\vec{V}_1 + \vec{V}_4 + \vec{V}_3 = \vec{0}$  و در نتیجه:  $\vec{V}_4 = \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

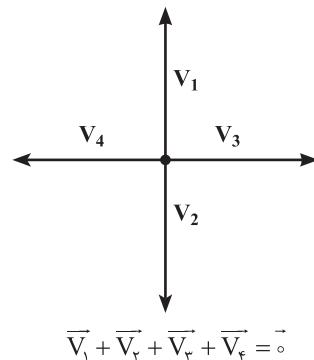
## ورود به مطلب

دو دانش‌آموز با نیروی یکسان دو طناب هم‌طول را که به یک حلقه فلزی کوچک وصل شده‌اند، به دو طرف می‌کشند. حلقه به کدام سمت حرکت می‌کند؟ احتمالاً بیشتر شما می‌گویید به هیچ طرف. اما چرا؟ به صورت شهودی و بدون استدلال دقیق علمی، می‌گویید نیروی دو طرف مساوی است و هیچ‌کدام نمی‌توانند بر دیگری غلبه کنند و حلقه را به سمت خود متمایل کنند. اما به زبان فیزیک و ریاضی می‌گوییم دو بردار نیروی مساوی، یکدیگر را خنثاً می‌کنند و مجموع آن‌ها بردار صفر است:

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$$

شکل ۱.

حالا فرض کنید چهار دانش‌آموز با چهار طناب به طول‌های برابر و با نیروی مساوی از چهار طرف در جهت‌های عمودبرهم و یا در یک راستا همان حلقه را می‌کشند (شکل ۲). حلقه به کدام سو می‌رود؟ احتمالاً باز هم می‌پذیرید که مجموع چهار بردار فوق در این حالت مساوی بردار صفر است:

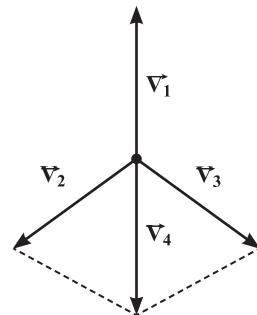


شکل ۲.

است، همیشه کمیتی مثبت است. در واقع، طول پاره خط برابر قدر مطلق اندازه جبری است.

**نکته ۲.** در مورد نقطه‌های  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  به صورت  $\overline{AB} = \sqrt{x_2 - x_1, y_2 - y_1}$  تعریف می‌شود.

**تعریف:** بردار یکه در راستای هر محور، برداری است به طول واحد و در جهت همان محور. بردارهای یکه روی محورهای  $x$  و  $y$  را به ترتیب  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  می‌نامیم.



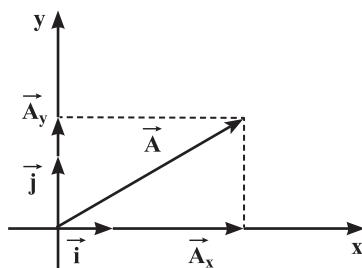
شکل ۴.

**تجزیه یک بردار بر حسب بردارهای یکه و مؤلفه‌هایش**  
برای تعیین مؤلفه‌های  $\vec{A}$  روی محورهای  $x$  و  $y$  مطابق شکل ۶ از انتهای بردار  $\vec{A}$  خطوطی موازی هر یک از دو محور رسم می‌کنیم تا محورها را قطع کنند.  $\vec{A}_x$  و  $\vec{A}_y$  مؤلفه‌های بردار  $\vec{A}$  هستند. در واقع  $\vec{A}$  برایند این دو بردار است و می‌توان نوشت:  $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ . فرض کنیم  $a_x$  و  $a_y$  به ترتیب اندازه‌های جبری  $\vec{A}_x$  و  $\vec{A}_y$  باشند.

بهوضوح داریم:

$$\vec{A}_x = a_x \vec{i}, \quad \vec{A}_y = a_y \vec{j}$$

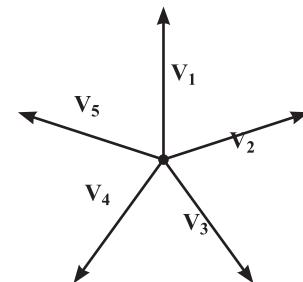
$$\therefore \vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$



شکل ۶.

حال فرض کنیم زاویه‌ای که بردار  $\vec{A}$  با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد و پادساعت گرد نسبت به این محور اندازه‌گیری می‌شود،  $\theta$  باشد. همچنین طول  $\vec{A}$  را در نظر می‌گیریم. روابط میان  $a_x, a_y, \theta$  و  $\vec{A}$  را با توجه به مقادیری که  $\theta$  می‌تواند اختیار کند، در دو حالت بررسی و به دست می‌آوریم و دو حالت بعدی را برای تمرین در نظر می‌گیریم.

**حالت اول ( $\theta$  حاده):** مطابق شکل ۷، در مثلث قائم الزاویه  $OPQ$  می‌توان نوشت:  $\cos \theta = \frac{OQ}{OP}$  و  $\sin \theta = \frac{PQ}{OP}$ .  $a_y = a \sin \theta$ .  $a_x = a \cos \theta$  چون  $a_x$  و  $a_y$  مثبت‌اند، لذا:



شکل ۵.

اکنون می‌خواهیم راه حلی کلی برای اثبات اینکه به ازای هر عدد طبیعی  $n$  هر  $n$  بردار هم‌طول و هم مبدأ که دو بهدو با هم زاویه‌های  $\frac{360^\circ}{n}$  بسانند، دارای مجموع صفر هستند، ارائه دهیم. به این منظور به مقدماتی نیاز داریم که در ادامه می‌آید.

**تعریف:** اگر  $A$  نقطه  $(x_1, y_1)$  و  $B$  نقطه  $(x_2, y_2)$  باشد (A و B دارای عرض‌های یکسان ولی طول‌های متفاوت هستند)، آن‌گاه فاصله جهت‌دار از A تا B (اندازه جبری پاره خط AB) با علامت  $\overline{AB}$  نشان داده و با مقدار  $x_2 - x_1$  تعریف می‌شود.

**مثال ۱.** اگر A نقطه  $(3, 4)$  و B نقطه  $(9, 4)$  باشد، آن‌گاه:

$$\overline{AB} = 9 - 3 = 6$$

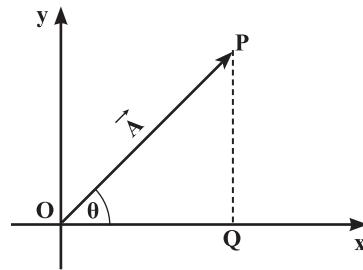
**مثال ۲.** اگر C نقطه  $(-8, 0)$  و D نقطه  $(6, 0)$  باشد، آن‌گاه:

$$\overline{CD} = 6 - (-8) = 14$$

**مثال ۳.** اگر P نقطه  $(4, 2)$  و Q نقطه  $(1, 2)$  باشد، آن‌گاه:

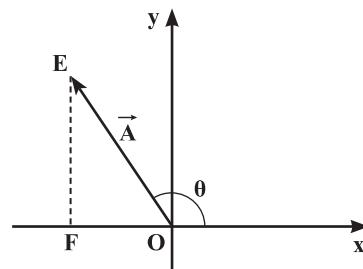
$$\overline{PQ} = 1 - 4 = -3$$

**نکته ۱.** اندازه جبری می‌تواند مثبت یا منفی باشد، ولی  $\overline{AB}$  که همان طول پاره خط AB فاصله غیرجهت‌دار از A تا B است.



شکل .۷

**حالت دوم** ( $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ): مطابق شکل ۸، در مثلث قائم الزاوية OEF می‌توان نوشت:



شکل .۸

به وضوح  $a_x$  مقداری منفی و  $a_y$  مقداری مثبت است، لذا طول EF با  $a_y$  برابر است، ولی طول OF با قدر مطلق  $OE=a$  همان  $a_x$ -برابر است. با توجه به اینکه  $a_x = a \sin \theta$  و  $a_y = a \cos \theta$ ، باز همان روابط  $\sin(180^\circ - \theta) = -\sin \theta$  و  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$  را داشتیم.

$$a_x = a \sin \theta \quad a_y = a \cos \theta$$

مطابق شکل ۹، بردار A را روی محور x ها می‌اندازیم و با فرض  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  به عنوان مقادیر  $\theta$  به ترتیب برای بردارهای A, B, C و  $\vec{R}$  داشتیم:  $\theta_1 = 12^\circ$ ,  $\theta_2 = 24^\circ$  و  $\theta_3 = 120^\circ$ . در ادامه داریم:

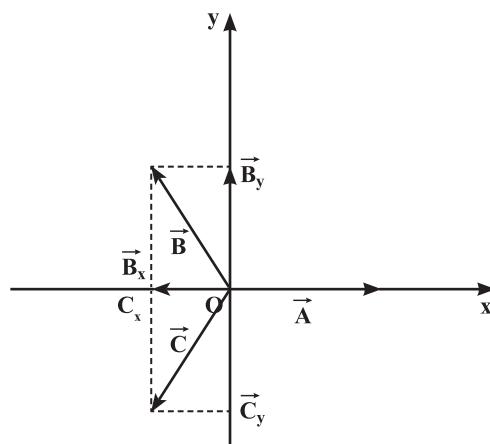
$$a_x = a \cos 12^\circ = a, \quad b_x = a \cos 12^\circ = \frac{-a}{2},$$

$$c_x = a \cos 24^\circ = \frac{-a}{2}$$

$$a_y = a \sin 12^\circ = \cdot, \quad b_y = a \sin 12^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$c_y = a \sin 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

با توجه به اینکه:  $a_y + b_y + c_y = 0$  و  $a_x + b_x + c_x = 0$  لذا  $\vec{R} = 0$  و حلقه حرکتی نخواهد کرد.



شکل .۹

برای  $N=4$  هم حلقه تکان نخواهد خورد. همان‌طور که دیدید

**مثال ۴.** بردار A به طول  $10$  واحد با جهت مثبت محور x ها پادساعت‌گرد، زاویه  $60^\circ$  درجه می‌سازد. اندازه جبری مؤلفه‌های  $\vec{A}$  روی محورهای x و y بیابید.

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos \theta \Rightarrow a_x = 10 \times \cos 60^\circ = 5 \\ a_y &= a \sin \theta \Rightarrow a_y = 10 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{A} = 5\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}$$

حال به سراغ سه نفری می‌رویم که شوق طناب کشی به سرشان افتاده‌اند. بردارهای مربوط به سه نیروی کششی هم اندازه را  $\vec{B}$  و  $\vec{C}$  می‌نامیم و طول بردارها را  $a$  فرض می‌کنیم. اگر بردار برایند این سه را R بنامیم، و فرض کنیم:  $\vec{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ ,  $\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$  و  $\vec{C} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j}$ . خواهیم داشت:

$$\vec{R} = (a_x + b_x + c_x)\vec{i} + (a_y + b_y + c_y)\vec{j}$$



$$\begin{aligned} \text{صورت کسر} &= \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) \right] \\ &+ \left[ \sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \theta\right) + \sin\left(\frac{-\alpha}{2} - \theta\right) \right] \\ &+ \left[ \sin\left(\frac{5\alpha}{2} + \theta\right) + \sin\left(\frac{-3\alpha}{2} - \theta\right) \right] + \dots \\ &+ \left[ \sin\left(\frac{(2m+1)\alpha}{2} + \theta\right) + \sin\left(\frac{-(2m)\alpha}{2} - \theta\right) \right] \end{aligned}$$

و با توجه به  $\sin(-x) = -\sin(x)$ ، با حذف جملات قرینه در صورت کسر خواهیم داشت:

$$\text{صورت کسر} = \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) + \sin\left(\frac{(2m+1)\alpha}{2} + \theta\right)$$

و به کمک دستور  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ، نتیجه مطلوب به دست می‌آید. حال با جاگذاری  $\theta = 0$  و  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ ، به برابری زیر می‌رسیم که برای اثبات قضیه اصلی بدان نیازمندیم:

$$\cos^o + \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + \cos \frac{(N-1)2\pi}{N} = o \quad (3)$$

در برابری (2) نیز با جاگذاری‌های فوق، به برابری زیر خواهیم رسید:

$$\sin^o + \sin \frac{2\pi}{N} + \sin \frac{4\pi}{N} + \dots + \sin \frac{(N-1)2\pi}{N} = o \quad (4)$$

حال برای یافتن برايند  $N$  بردار، تجزیه آن‌ها را روی محورها با فرض اینکه  $\overrightarrow{A}_t$  روی محور  $x$  ها واقع باشد. در نظر می‌گیریم. فرض کنیم:  $\overrightarrow{A}_t = a_t \hat{i} + b_t \hat{j}$  و  $1 \leq t \leq N$ . در این صورت خواهیم داشت:

$$a_1 = a \cos^o, a_2 = a \cos \frac{2\pi}{N}, a_3 = a \cos \frac{4\pi}{N}, \dots,$$

$$a_N = a \cos \frac{(N-1)2\pi}{N}$$

$$b_1 = a \sin^o, b_2 = a \sin \frac{2\pi}{N}, b_3 = a \sin \frac{4\pi}{N}, \dots,$$

$$b_N = a \sin \frac{(N-1)2\pi}{N}$$

از طرف دیگر، با توجه به برابری‌های (3) و (4) داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = a \left[ \cos^o + \cos \frac{2\pi}{N} + \dots + \cos \frac{(N-1)2\pi}{N} \right] = a \times o = o$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_N = a \left[ \sin^o + \sin \frac{2\pi}{N} + \dots + \sin \frac{(N-1)2\pi}{N} \right] = a \times o = o$$

لذا  $\overrightarrow{A}_1 + \overrightarrow{A}_2 + \overrightarrow{A}_3 + \dots + \overrightarrow{A}_N = o$  و باز هم حلقه تکانی نمی‌خورد!

- .....  
\* منابع:  
۱. رسکی، شکلیا، باکلوم، ایساک موسوویچ؛ چنتسوف (۱۳۶۶). گزیده‌ای از مهم‌ترین مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی. ترجمه پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار. تهران. چاپ اول.  
۲. Halliday, David, Resnick, Robert. (1978). Physics. John Wiley and Sons. 3rd ed.

با دو جفت بردار هم راستا و غیرهمجهت طرف هستید که یکدیگر را خنثی می‌کنند. اگر قانع نشده‌ید، بردارها را تجزیه و برايند مؤلفه‌ها را محاسبه کنید.

**حالت کلی (قضیه اصلی):**  $N$  بردار  $A_1, A_2, \dots, A_N$  با شرط  $1 < N$  را با مفروضات زیر در نظر می‌گيریم:

$$|\overrightarrow{A}_1| = |\overrightarrow{A}_2| = \dots = |\overrightarrow{A}_N| = a$$

۱. نقطه ابتدایی هر  $N$  بردار یکسان است.

۲. هر بردار با بردار قبلی زاویه  $\frac{2\pi}{N}$  می‌سازد.

در این صورت برايند این  $N$  بردار صفر است.

**برهان:** برای اثبات قضیه به دو برابری زیر نیاز داریم. اولی را ثابت می‌کنیم و شماره دوم را تمرین قرار می‌دهیم.

$$\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \dots + \cos(\theta + m\alpha)$$

$$= \frac{\sin \frac{(m-1)\alpha}{2} \cos(\theta + \frac{m\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$\sin \theta + \sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta + 2\alpha) + \dots + \sin(\theta + m\alpha)$$

$$= \frac{\sin \frac{(m+1)\alpha}{2} \sin(\theta + \frac{m\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

عبارت سمت چپ (1) را در  $2 \sin \frac{\alpha}{2}$  ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\tau \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta + \tau \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\theta + \alpha) + \tau \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\theta + 2\alpha) + \dots + \tau \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\theta + m\alpha)}{\tau \sin \frac{\alpha}{2}} = \text{سمت چپ}$$

حال به کمک دستور  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$  داریم:

## ریاضی کاربردی در فیزیک

# حرکت با سرعت ثابت

### مقدمه

درباره کاربردهای ریاضیات در علم فیزیک می‌توان دهها مقاله نوشت. این کار را با بحث «مکانیک تحلیلی»، یعنی بررسی مباحث مرتبه با حرکت، مانند سرعت و شتاب، آغاز می‌کنیم. در این بخش به متحرک‌های با سرعت ثابت می‌پردازیم و سپس در بخش بعدی حرکت‌های شتاب‌دار را بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که چگونه می‌توان با مدل‌سازی ریاضی و حل معادله‌ها و نامعادله‌ها، مسائل زیبایی را طرح و حل کرد.

**حل:** اگر پس از  $t$  ثانیه خواهر و برادر به هم برستند، و طبق دستور گفته شده، اگر مسافت طی شده توسط آن‌ها به ترتیب  $d_1$  و  $d_2$  باشد، داریم:  $\frac{d_1}{t} = \frac{d_2}{2t}$  و در نتیجه:  $d_1 = 2t$  و  $d_2 = 3t$ . چون:  $d_1 + d_2 = 200$  پس:  $2t + 3t = 200$ ،  $5t = 200$  و  $t = 40$  ثانیه بعد به هم می‌رسند و در این مدت، خواهر  $80$  متر و برادر  $120$  متر طی کرده‌اند. در حالت کلی، اگر دو متحرک با سرعت‌های  $V_1$  و  $V_2$  از دو طرف مسیری به طول  $L$  به طرف هم حرکت کنند، با همین روش نتیجه می‌گیریم که پس از زمان  $t = \frac{L}{V_1 + V_2}$  به هم می‌رسند و اولی به

چنان که می‌دانیم، وقتی متحرکی با سرعت ثابت  $V$  در زمان  $t$  مسافت  $d$  را می‌پیماید،  $\frac{d}{t} = V$  و در واقع، سرعت همان آهنگ تغییر مسافت در واحد زمان است و واحد اندازه‌گیری سرعت متر بر ثانیه ( $\frac{m}{s}$ ) یا کیلومتر بر ساعت ( $\frac{km}{h}$ ) است.

**مثال ۱.** خواهر و برادری از دو سریک کوچه  $200$  متری به طرف هم می‌دوند. خواهر با سرعت  $\frac{m}{s}$  و برادر با سرعت  $\frac{m}{s}$  می‌دود. چند ثانیه بعد و در کجا کوچه به هم می‌رسند؟



اندازه  $\frac{LV_2}{V_1 + V_2}$  و دومی به اندازه  $\frac{LV_1}{V_1 + V_2}$  طی مسیر می‌کنند. این دستورها را به خاطر بسپارید.

### مثال ۲: داستان روباه و خرگوش پیر!

خرگوش تا جوان بود، به آسانی از چنگ روباه فرار می‌کرد و سرعت دویden او از سرعت روباه بیشتر بود. ولی حالا خرگوش پیر شده و سرعت دویden فقط  $\frac{6}{8}$  است. اما روباه با سرعت  $\frac{8}{8}$  می‌دود. خرگوش در راه رفتن به لانه‌اش بود که با گوش‌های تیزش صدای حرکت روباه را در  $200$  متری پشت سرش شنید و بلافاصله به طرف لانه‌اش دوید. حداکثر فاصله او تا لانه‌اش چقدر باید باشد تا بتواند از چنگ روباه فرار کند؟

**حل:** برای حل این مسئله یک مدل ریاضی می‌سازیم. فرض می‌کنیم خرگوش در فاصله  $x$  از لانه‌اش باشد. به این ترتیب روباه در فاصله  $x+200$  از لانه خرگوش است. با توجه به دستور  $\frac{d}{t} = V$ ، زمان لازم برای رسیدن خرگوش به لانه‌اش  $\frac{x}{8}$  و زمان رسیدن روباه به آنجا  $\frac{x+200}{8}$  است. برای آنکه خرگوش زودتر به لانه برسد، باید داشته باشیم:  $\frac{x+200}{8} < \frac{x}{6}$  و با حل

این نامعادله خواهیم داشت:

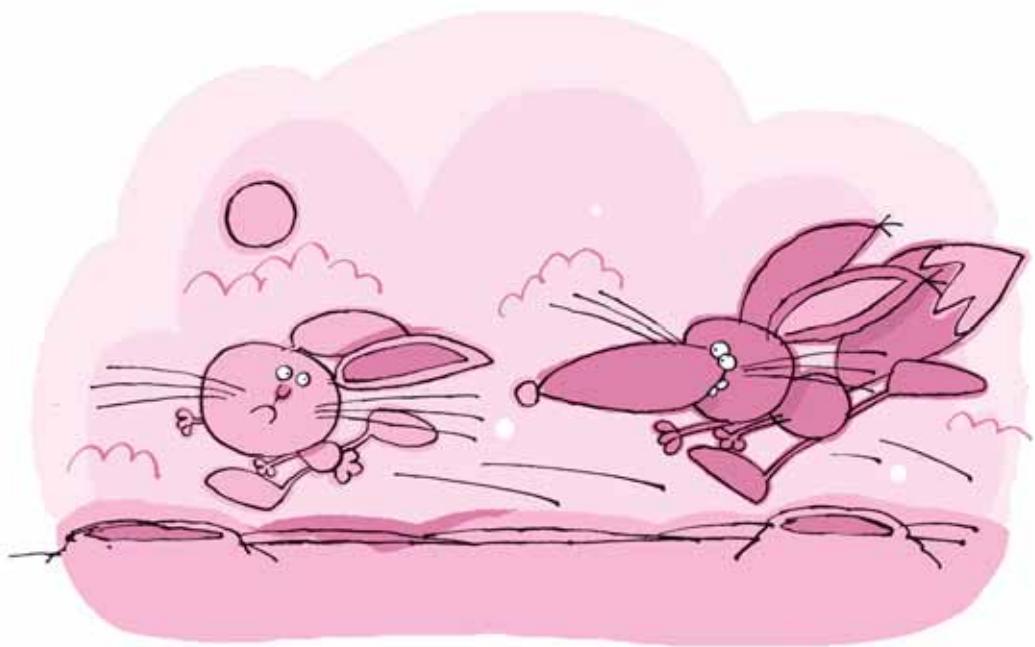
$$\frac{x}{3} < \frac{x+200}{4} \Rightarrow 4x < 3x + 600 \Rightarrow x < 600$$

يعنى فاصله خرگوش از لانه‌اش باید کمتر از  $600$  متر باشد تا بتواند به سلامت به لانه‌اش برسد و اگر از این بیشتر باشد، شکار روباه می‌شود!

### مثال ۳: داستان روباه و خرگوش جوان!

لانه خرگوش جوان به اندازه کافی ایمن نیست و او تصمیم می‌گیرد که جای لانه‌اش را عوض کند. او لانه‌ای در فاصله‌ای از لانه‌اش تعییه می‌کند که کاملاً مطمئن است. در حال حرکت به سمت لانه قدیمی‌اش است که دقیقاً در میانه مسیر متوجه روباه می‌شود که در فاصله  $200$  متری لانه قدیمی‌ش ایستاده است. سرعت حرکت روباه همان  $\frac{m}{s}$  است، اما سرعت حرکت خرگوش جوان به  $\frac{m}{s}$  می‌رسد. خرگوش باید با سرعت به لانه قدیمی‌اش برود و بچه‌اش را بردار و با خود به سمت لانه جدید ببرد. مشکل اینجاست که سرعت دویden بچه خرگوش فقط  $\frac{m}{s}$  است و در مسیر حرکت به سمت لانه جدید خرگوش باید سرعت خود را با سرعت بچه‌اش تنظیم کند. فاصله بین دو لانه حداکثر چقدر باید باشد تا خرگوش‌ها به سلامت به لانه جدیدشان برسند؟

**حل:** همان‌طور که گفته شد، خرگوش در وسط مسیر دو لانه است. پس فرض می‌کنیم فاصله از دو لانه  $x$  باشد. در این صورت، خرگوش در مدت زمان  $\frac{x}{12}$  خود را به لانه‌اش می‌رساند و با بچه خرگوش در مدت  $\frac{2x}{6}$  خود را به لانه جدید می‌رسانند. به همین ترتیب، زمان حرکت روباه را هم تا لانه جدید محاسبه کنید و با تشکیل یک نامعادله، نتیجه بگیرید که فاصله دو لانه باید از  $300$  متر بیشتر باشد.



**کاوه:** خب یعنی باید تو را کجای مسیر پیاده می‌کردم؟  
 و بیژن با محاسبه‌ای دیگر جواب او را داد. حالا دوستان عزیز، آیا شما هم می‌توانید این محاسبه را انجام دهید؟ کاری ندارد! فرض کنید، کاوه بیژن را در  $10 \times$  کیلومتر مانده به خانه هرمز پیاده کند. پس  $10 \times$ -کیلومتر را به اتفاق او با دوچرخه پیموده است. بعد بر می‌گردد تا پرویز را سوار کند و دوتایی با هم به مقصد بروند. با محاسبه زمان رسیدن آن‌ها به هم و زمان برگشت و مساوی قراردادن مجموع این دو زمان با زمان رسیدن بیژن به مقصد، معادله‌ای تشکیل دهید و  $x$  را بیابید. (جواب:  $x = 2/5 \text{ km}$  و در این صورت مجموع زمان رسیدن سه دوست به منزل هرمز،  $\frac{2}{3}$  ساعت یا  $40$  دقیقه خواهد بود که از زمان  $\frac{7}{9}$  ساعت کمتر است! و در این صورت حدود  $7$  دقیقه زودتر می‌رسیدند).  
 کارمان را با یک تمرین خوب و تفکربرانگیز به پایان می‌بریم.

### تمرین:

یکبار دیگر همین سه دوست تصمیم گرفتند طول خیابان دکتر شریعتی تهران را که  $15$  کیلومتر است، از ابتدا (پیچ شمیران) تا انتهای (میدان قدس) پیاده‌روی کنند! صبح زود پرویزآمد و چون دوستانش را ندید، خودش پیاده رو به بالا حرکت کرد. مدتی بعد بیژن آمد و دید کاوه با دوچرخه‌اش آمده است (!) از همان جا بیژن پیاده و کاوه با دوچرخه حرکت کردند و کاوه وقتی به پرویز رسید، دوچرخه‌اش را به او داد و خودش بقیه راه را پیاده ادامه مسیر داد.

اما پرویز وقتی دوچرخه را گرفت برگشت تا به بیژن رسید و دوچرخه را به او داد و خودش به خانه رفت. بیژن هم با دوچرخه به سمت میدان قدس رفت و وقتی به آنجا رسید، کاوه هم همزمان با او رسید! اگر سرعت پیاده  $6$  و با دوچرخه  $15$  کیلومتر در ساعت باشد، صبح آن روز پرویز چه مدت زودتر از دوستانش آمده بود؟

**مثال ۴. کاوه، بیژن و پرویز دوستانی صمیمی هستند**  
 که می‌خواهند به خانه دوستشان هرمز بروند که در فاصله  $10$  کیلومتری محله آن‌هاست. آن‌ها فقط یک دوچرخه دارند که سرعت حرکت آن در این مسیر  $5$  کیلومتر در ساعت است. سرعت حرکت خودشان به صورت پیاده  $6$  کیلومتر در ساعت است. قرار می‌شود که یکی از آن‌ها، مثلاً کاوه، با دوچرخه‌اش، یکی دیگر، مثلاً بیژن را همراه ببرد و بعد از رسیدن به منزل هرمز او را پیاده کند. در بازگشت هم، پرویز را که پیاده آمده است، در جایی از مسیر سوار کند و دوتایی با هم به خانه هرمز بروند و به همین ترتیب عمل می‌کنند.

در خانه هرمز بیژن گفت: «راستی بچه‌ها چقدر طول کشید تا به اینجا رسیدیم؟»  
**کاوه:** کاری ندارد، محاسبه کنیم! چون سرعت دوچرخه ما  $5$  کیلومتر در ساعت است و مسیر ما  $10$  کیلومتر بود، پس  $\frac{1}{5}$  ساعت یا  $20$  دقیقه طول کشید تاماً (من و بیژن) به اینجا برسیم، بعد من بیژن را پیاده کردم. در این  $20$  دقیقه (یا  $\frac{1}{3}$  ساعت) پرویز با توجه به سرعتش  $6$  کیلومتر در ساعت)  $2$  کیلومتر حرکت کرده است.

حالا من با سرعت  $30$  کیلومتر در ساعت و پرویز با سرعت  $6$  کیلومتر در ساعت به طرف هم حرکت می‌کنیم و طول مسیرمان هم  $8$  کیلومتر است. پس طبق دستور  $\frac{d}{V_1 + V_2} = t$  زمان رسیدن ما به هم  $t = \frac{8}{30+6} = \frac{8}{36}$  ساعت بعد از حرکتمان است. اما وقتی به هم رسیدیم، دویاره همین مسیر را دو نفره باید بر می‌گشیم. پس  $\frac{2}{9}$  ساعت دیگر هم طول کشید تا دوتایی به اینجا برسیم. یعنی در مجموع  $\frac{2}{9} + \frac{8}{36} = \frac{7}{18}$  ساعت طول کشید تا به اینجا برسیم.  
**بیژن:** من فکر می‌کنم می‌شد زودتر به اینجا برسیم!

**کاوه:** چطور؟  
**بیژن:** اگرچه به ضرر من است (!) ولی باید بگویم، در آن مدتی که من اینجا در منزل هرمز منتظر شدم بودم، بی کار نشسته بودم، در حالی که می‌شد تو مرا قبل از رسیدن به منزل هرمز پیاده کنی تا در مدت زمانی که بر می‌گردی و پرویز را با خودت می‌آوری، من هم حرکتی کرده باشم و سه تایی با هم به اینجا برسیم!

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

پیک داستان  
و پیک معما!

باز هم با فرهاد کوچولوا دوست قدیمی من همراه می‌شویم و معماهای دیگر را از میان ماجراهای او مطرح می‌کنیم. در شماره قبیل دیدید که فرهاد کوچولو و پدرش بحثی را درباره کاشی‌کاری حیاط خانه‌شان داشتند. در ادامه همان بحث پدر فرهاد گفت: «یادم هست که در ابتدای ساختن خانه، می‌خواستیم تمام این حیاط را (که از قسمت قبل به یاد دارید که ابعاد آن ۶ متر در ۸ متر بود) با کاشی‌های مربع شکل سفید کاشی‌کاری کنیم. ولی ابعاد کاشی‌ها طوری بود که از هر دو طرف طول یا عرض زمین خالی می‌ماند و مجبور به استفاده از تعداد زیادی کاشی تکه شده بودیم و از این کار منصرف شدیم.

اما هنوز یادم هست که وقتی برای امتحان، کاشی‌ها را روی ضلع کوچک زمین چیدیم، ۱۲ سانتی‌متر جای خالی ماند و در ضلع دیگر نیز که امتحان کردیم، ۱۶ سانتی‌متر جای خالی باقی ماند. علاوه بر آن، یکباره هم با کاشی سفید زمین را به‌طور کامل پوشاندیم و دیدیم بدون شکستن کاشی‌ها و استفاده از تکه کاشی، حداقل ۵۸۸ کاشی در زمین جا می‌گیرد.

آیا می‌توانی بگویی که اگر می‌خواستیم به همین ترتیب زمین را فرش کنیم، لاقل چند کاشی دیگر را باید می‌شکستیم؟»

فرهاد کمی فکر کرد و گفت: «معماهی چندان دشواری نیست! بیشتر محاسبات است تا هندسه!»

پدر گفت: «باشد پسرم! ولی ارزش فکر کردن را ندارد!»

فرهاد گفت: «چرا پدر، به زودی جوابش را می‌دهم.»

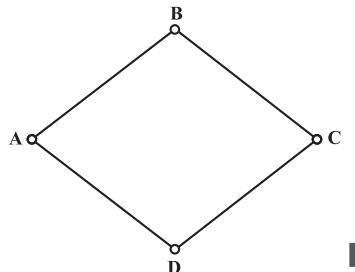
شما هم تلاش کنید و با کمی دققت و محاسبه جواب آن را به‌دست می‌آورید.

ایستگاه  
مدفن

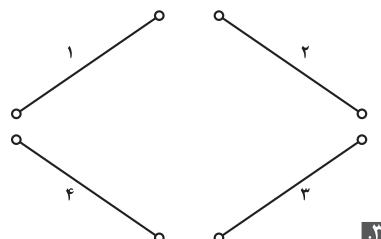


### طرز به کارگیری خاصیت لوزی در صنعت

چهار تسمه ۱، ۲، ۳ و ۴ را با طول های برابر اختیار می کنیم و دو سر هر یک از آن ها را سوراخ و مانند شکل ۲ به هم لولا می کنیم تا لوزی لولایی ABCD به دست آید.

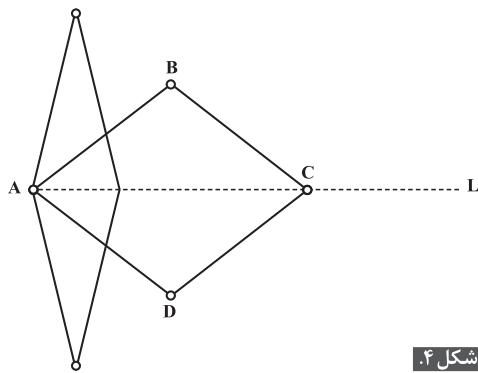


شکل ۲.



شکل ۳.

وقتی به لوزی لولایی نیرویی وارد شود، شکل آن تغییر می کند، اما همواره دو قطر آن، عمودمنصف یکدیگر باقی می مانند که از این خاصیت در صنعت بهره می گیرند.



شکل ۴.

لوزی لولایی ABCD را در نظر می گیریم و امتداد AC را خط L می نامیم (شکل ۴). با ثابت نگه داشتن رأس A، رأس C را روی خط L حرکت می دهیم. شکل لوزی ABCD تغییر می کند، اما خط BD همواره دارای امتداد ثابت است (عمود بر خط L).

در شکل ۱ در قسمت جلو، چهار تسمه هم طول دیده می شود که یک لوزی تشکیل می دهند. همچنین

# کاربردهایی از

# لوزی

## در صنعت



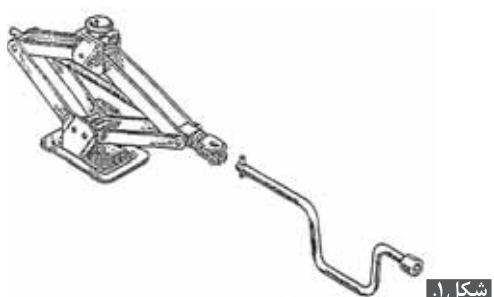
برای مطالعه جک لوزی ابتدا مطالب زیر را مرور می کنیم:

**تعريف لوزی:** لوزی یک چهارضلعی است که چهار ضلع آن با هم برابرند.

**خاصیت لوزی:** دو قطر لوزی، عمودمنصف یکدیگرند و هر دو، محور تقارن شکل.



حسین کریمی

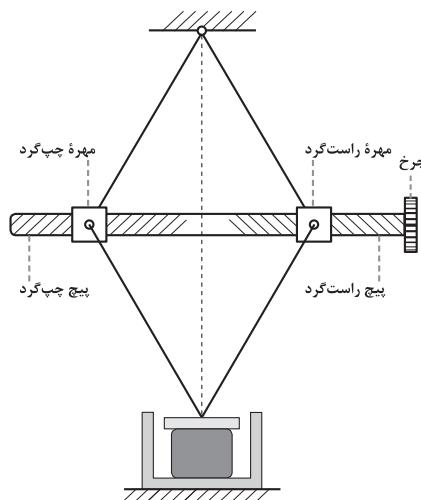


شکل ۱.

پس با چرخاندن دسته جک، تکیه‌گاه بالایی جک بالا و پایین می‌رود، اما سطح بالای آن همواره به وضع افقی باقی می‌ماند. در نتیجه، قسمتی از زیر اتومبیل که بر این تکیه‌گاه قرار می‌گیرد، روی این تکیه‌گاه نمی‌لغزد. از دیگر کاربردهای لوزی در صنعت می‌توان از دستگاه‌های زیر نیز نام برد:

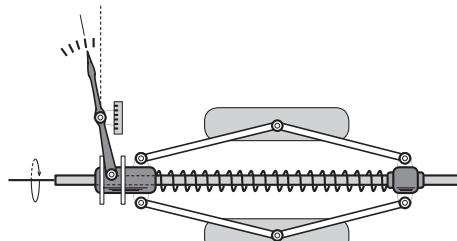
دستگاه‌های زیر نیز نام برد:

#### ۱. دستگاه پرس دسته‌دار



شکل ۷.

#### ۲. دستگاه سرعت‌سنج مکانیکی



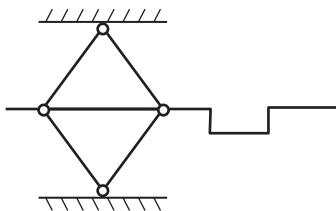
شکل ۸.

۱. اکنون دو سؤال مطرح می‌شود:
۲. عمودمنصف یکدیگر بودن دو قطر در چهارضلعی مورد استفاده در صنعت، چقدر ارزش دارد؟
۳. اگر فقط یکی از قطرها عمودمنصف دیگری باشد، چه مشکلات کاربردی در صنعت پدید می‌آورد؟

**تعريف:** اگر در یک چهارضلعی فقط یکی از قطرها عمودمنصف قطر دیگر باشد، آن را ترجی (بادبادک یا کایت) می‌نامند.

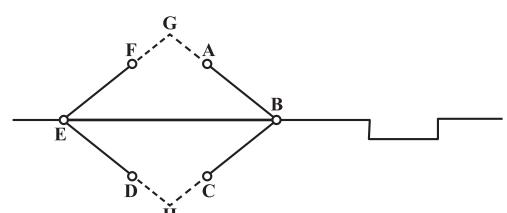
چهار تسمه دیگر در قسمت عقب قرار دارند که یک لوزی برابر با لوزی اول می‌سازند. جک دارای یک پایه مستطیل است که هنگام به کارگیری روی زمین قرار داده می‌شود و یک تکیه‌گاه بالایی دارد که زیر اتومبیل بر آن تکیه می‌کند.

جک لوزی اگر کاملاً به صورت لوزی ساخته شود (مانند شکل ۵)، آن گاه تعادل ندارد.



شکل ۵.

برای آنکه جک تعادل کافی داشته باشد، تسمه‌ها را به صورت شکل ۶ لولا می‌کنند. چهارضلعی GBHE لوزی است. (G و H به ترتیب نقاط برخورد دو زوج خط (BC و ED) و (BA و EF) هستند).



شکل ۶.

در شکل ۱، دو قطر افقی دو لوزی در یک صفحه افقی که آن را صفحه p می‌نامیم، قرار دارند. محور پیج در صفحه p قرار دارد و از دو قطر افقی دو لوزی به یک فاصله است. (منظور از محور پیج، همان محور استوانه فلزی است که سطح جانبی آن را شیار مارپیچی داده‌اند تا پیچ حاصل شده است).

با چرخاندن پیج به وسیله دسته جک، دو مهره پیج به یک اندازه به هم نزدیک و با یک اندازه از هم دور می‌شوند. اگر دسته جک را از چپ به راست بچرخانیم، دو مهره به هم نزدیک می‌شوند، تسمه‌ها بالا می‌روند و لذا تکیه‌گاه بالایی جک بالا می‌رود. وقتی دسته جک را می‌چرخانیم، محور پیج موازی با سطح زمین بالا یا پایین می‌رود، اما امتداد آن همواره موازی با سطح زمین باقی می‌ماند. چون دو قطر لوزی برهم عمودند. امتداد قطر غیرافقی لوزی همواره بر سطح زمین عمود باقی می‌ماند.

با ثابت نگه داشتن رأس A' (A) و حرکت دادن نقطه C (C') روی خط L' (L) به سمت نقطه' (A')، نقطه' (B') از خط L' (L) دور می‌شود که اگر حداکثر فاصله B از خط L را m در نظر بگیریم (AB=m) و حداکثر فاصله' B از خط' L' را n فرض کنیم (A'B'=n)، داریم:

میانگام تغییر اندازه قطری که عمودمنصف قطر دیگر است (یا به عبارت دیگر، نقش محور تقارن را در هر دو دارد)، تغییرات بیشتری خواهد داشت.

#### ب) تعادل دینامیکی

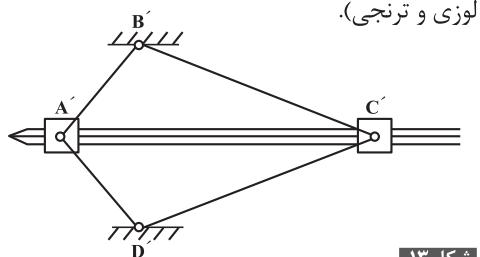
مزیت دیگر لوزی لولایی بر ترنجی لولایی، تعادل دینامیکی آن است. اگر لوزی لولایی را دور هر یک از قطرهایش بچرخانیم، این دستگاه لولایی در حال دوران، لنگ نمی‌زند (تعادل دینامیکی دارد) در حالی که در ترنجی لولایی چنین نیست.

#### ج) ارجحیت اقتصادی

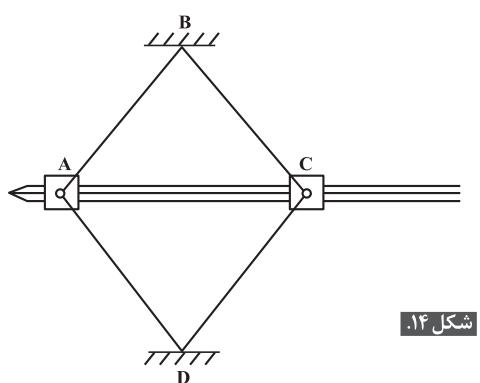
چون ساخت میله‌ها به صورت سری انجام می‌گیرد، ساخت لوزی (چهار میله مساوی) از نظر اقتصادی بر ساخت ترنجی ترجیح دارد.

### مقایسه جک لوزی و جک ترنجی

Jack لوزی ABCD و Jack ترنجی A'B'C'D' را که در آن  $A'B' < B'C'$  است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:  $AB+BC=A'B'+B'C'=k$  (هم محیط بودن لوزی و ترنجی).

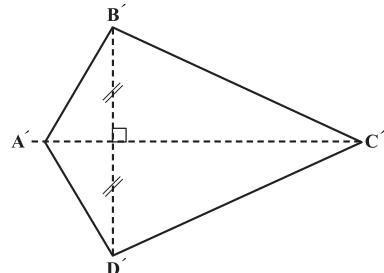


شکل .۱۳

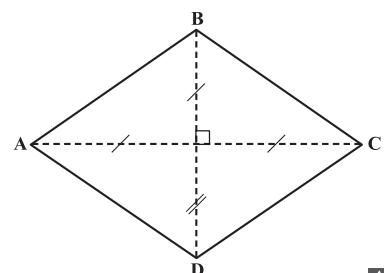


شکل .۱۴

لوزی ABCD و ترنجی A'B'C'D' هم محیط با آن را در نظر می‌گیریم.



شکل .۹



شکل .۱۰

که در آن داریم:

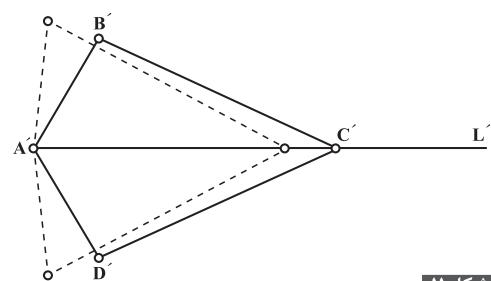
$$AB+BC=A'B'+B'C'$$

$$(AD=AB)>(A'B'=A'D')$$

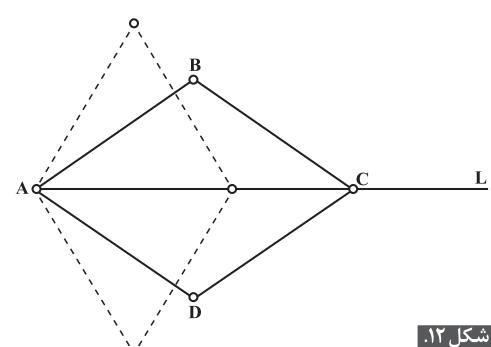
$$(DC=BC)<(B'C'=D'C')$$

اکنون به بررسی مزیت‌های لوزی لولایی بر ترنجی لولایی می‌پردازیم.

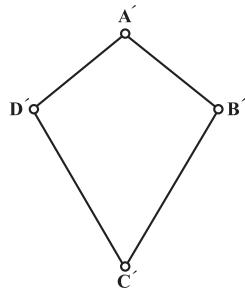
#### الف) دامنه تغییرات اندازه قطر نصف شده



شکل .۱۱

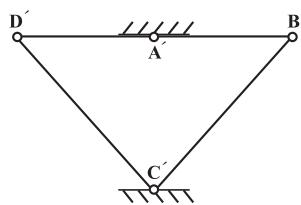


شکل .۱۲



شکل ۱۵.

پایین ترین موضعی که تکیه گاه بالایی می‌تواند اشغال کند، در شکل ۱۶ نشان داده شده است. در این شکل، مثلث  $C'B'D'$  متساوی الساقین است و در آن داریم:  $C'B'=A'D'$  و  $C'B'=C'D'$ . چون تکیه گاه بالایی جک ترنجی نمی‌تواند خیلی به تکیه گاه پایینی آن نزدیک شود، پس جک ترنجی نمی‌تواند زیر خودروهای کوتاه برود و از این مهمتر، این جک نمی‌تواند کاملاً جمع شود تا جای کمی اشغال کند.



شکل ۱۶.

هنگامی که با چرخاندن دسته جک لوزی دو مهره  $A$  و  $C$  به هم نزدیک می‌شوند، تکیه گاه بالایی جک حداکثر به اندازه  $AB+AD=k$  بالا می‌رود.

(البته تکیه گاه بالایی به علت ضخامت و پهنای تسمه‌ها، به اندازه‌های کمتر از  $k$  بالا می‌رود.) اما در جک ترنجی، هنگامی که با چرخاندن دسته جک دو مهره  $A'$  و  $C'$  به هم نزدیک می‌شوند، تکیه گاه بالایی حداکثر به اندازه  $A'B'+A'D'=p$  بالا می‌رود (البته تکیه گاه بالایی جک به علت ضخامت و پهنای تسمه‌ها به اندازه‌ای کمتر از  $p$  بالا می‌رود) و می‌دانیم  $p < k$  است. پس در جک لوزی، تکیه گاه بالایی بیشتر از جک ترنجی می‌تواند بالا برسود. یعنی جک لوزی خودرو را بیشتر بالا می‌برد و این یک مزیت جک لوزی نسبت به جک ترنجی است.

اگر جک ترنجی به صورت شکل ۱۵ ساخته شود (یعنی پیچ جک منطبق بر قطری از ترنجی باشد که محور تقارن ترنجی نیست)، وقتی دسته آن را طوری بچرخانیم که دو مهره  $B'$  و  $D'$  بهم نزدیک شوند، تکیه گاه بالایی به اندازه  $k$  از تکیه گاه پایینی دور می‌شود. اما وقتی دسته جک را طوری بچرخانیم که دو مهره  $B'$  و  $D'$  از هم دور شوند، تکیه گاه بالایی نمی‌تواند خیلی پایین بیاید.

**پرسش‌های پیکارجو! ۳**

قطرهای یک چهارضلعی محاطی برهم عمودند و اندازه‌هایی دو ضلع رو به روی آن  $2$  و  $6$  واحد است. طول شعاع دایره محیطی این چهارضلعی کدام است؟

الف)  $\boxed{3}$   
 ب)  $\boxed{2\sqrt{3}}$   
 ج)  $\boxed{2\sqrt{2}}$   
 د)  $\boxed{\sqrt{10}}$   
 ه)  $\boxed{\sqrt{11}}$

## نابرابری

# واسطه‌های هندسی و حسابی

### اشاره

موضوع این مقاله، طرح و اثبات یکی از مهم‌ترین نابرابری‌های ریاضی است که در آنالیز ریاضی و هندسه کاربرد فراوانی دارد. این نامساوی، به «قضیه نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی» موسوم است که در مسئله ششم و حالت خاص آن (برای دو عدد)، در اولین مسئله معرفی و اثبات می‌شود.

**کلیدواژه‌ها:** واسطه هندسی، واسطه حسابی، روابط بازگشتی، استقرای ریاضی

### مقدمه

برای  $n$  عدد حقیقی مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، واسطه‌های  $G_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  و  $H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

در حالت خاص، واسطه‌های حسابی، هندسی و توافقی دو عدد حقیقی مثبت  $a$  و  $b$  به صورت  $\frac{a+b}{2}$  و  $\sqrt{ab}$  تعریف می‌شوند.

### حل (اثبات به روش روابط بازگشتی): طرفین

نابرایری (۱) را به توان دو می‌رسانیم و سپس  $4ab \leq (a+b)^2$  تا به نامساوی  $(a-b)^2 \geq 0$  بررسیم. با بسط سمت راست و انتقال  $a$ ،  $b$  خواهیم داشت:  $(a-b)^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 - ab \geq 0$ . بهوضوح نابرایری اخیر برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  برقرار است. پس فرایند اثبات می‌تواند از همین نامساوی آغاز شود:  $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ . به طرفین نابرایری اخیر  $4ab$  را اضافه می‌کنیم:

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow a+b \geq \sqrt{4ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

تساوی در رابطه (۱) با  $a=b$  برقرار می‌شود و شرط آن  $a=b$  است.

### مسئله ۲. ثابت کنید، برای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$

داریم:  $\frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$  (مربع واسطه حسابی) دو عدد، کمتر یا مساوی واسطه حسابی مربعات آن دو عدد است.

### حل:

سمت چپ نابرایری (۲) را بسط و عبارت  $\frac{a^2 + b^2}{2}$  را به چپ انتقال می‌دهیم:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{2} \leq 0 \Rightarrow \frac{2ab - a^2 - b^2}{4} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

بهوضوح نابرایری اخیر برای هر دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  برقرار است و چون تمامی روابط برگشت‌پذیرند، لذا حکم به اثبات رسیده است.

### مسئله ۳. نشان دهید مجموع یک عدد مثبت و

معکوس آن، حداقل برابر دو است.

### حل:

فرض می‌کنیم  $x$  عدد حقیقی مثبتی باشد. در این صورت  $\frac{1}{x}$  نیز چنین خواهد بود. از مسئله (۱) برای

دو عدد  $x$  و  $\frac{1}{x}$  داریم:

$$\sqrt{x \times \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \Rightarrow \sqrt{1} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

### مسئله ۱. نشان دهید، برای هر دو عدد حقیقی مثبت

$a$  و  $b$  داریم:  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$  (۱). حالت تساوی موقعي

برقرار است که  $a$  و  $b$  برابر باشند.

**مسئله ۴.** ثابت کنید واسطه توافقی دو عدد مثبت a و b

b از واسطه هندسی آنها بیشتر نیست. به بیان دیگر:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$$

**حل:** از مسئله (۱) برای دو عدد مثبت a و b

داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

**مسئله ۵.** نشان دهید بین همه مستطیل‌های دارای

مساحت ثابت S، مربع کمترین محیط را دارد.

**حل:** فرض می‌کنیم a و b طول و عرض مستطیل

باشند. محیط این مستطیل  $p=2(a+b)$  و مساحت آن

خواهد بود. از مسئله (۱) می‌توان نوشت:

$$ab \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \quad (*)$$

چون  $S=ab$  و  $S=ab$ ، پس داریم:

$$S = ab \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \left( \frac{p}{2} \right)^2$$

و در ادامه:

$$S \leq \left( \frac{p}{2} \right)^2 \Rightarrow p \geq 4\sqrt{S} \quad (***)$$

P کمترین مقدار خود، یعنی  $4\sqrt{S}$  را خواهد داشت اگر نابرابری (\*\*) به یک تساوی تبدیل شود، که شرط آن برقراری حالت برابری در (\*) است. بنا به مسئله (۱)، شرط تساوی در (\*) a=b است. مستطیلی که طول و عرض آن برابرند، مربع است.

**مسئله ۶.** «قضیه نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی»

برای هر n عدد مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داریم:

$$G_n(a) \leq A_n(a),$$

به عبارت دیگر:  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

حالت تساوی با شرط  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  برقرار می‌شود.

**حل:** اثبات‌های زیادی برای قضیه وجود دارند که برخی از آنها به مباحث ریاضیات عالی وابسته هستند و در دبیرستان نمی‌توان آنها را مطرح کرد. از بین

اثبات‌های دبیرستانی، روش استقرای ریاضی را ارائه

می‌کنیم:

قضیه به وضوح برای  $n=2$  برقرار است، چون:

$$\frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1 a_2}} \geq \sqrt{a_1 a_2} \quad \text{فرض کنیم (فرض استقرای، قضیه}$$

برای n عدد مثبت برقرار باشد. باید نشان دهیم برای

$n+1$  عدد مثبت نیز برقرار است. عدد مثبت

دخلخواه به صورت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $a_{n+1}$  را در نظر

می‌گیریم و فرض می‌کنیم طوری چیده شده باشند

که بزرگ‌ترین عدد باشد. در این صورت خواهیم

داشت:  $a_{n+1} \geq a_1, a_{n+1} \geq a_2, \dots, a_{n+1} \geq a_n$ . چون از

تمامی a ها که  $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  بیشتر یا مساوی است،

پس از میانگین آنها هم کمتر نخواهد بود. یعنی:

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

فرض کنیم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A_n,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = A_{n+1}$$

$$\text{در نتیجه: } A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}. \text{ از طرف دیگر،}$$

چون  $a_{n+1} \geq A_n$ ، پس عدد نامنفی b وجود دارد، به طوری

که  $a_{n+1} = A_n + b$  در نتیجه:

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}$$

طرفین تساوی را به توان  $(n+1)$  می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (A_{n+1})^{n+1} &= (A_n + \frac{b}{n+1})^{n+1} \\ &= (A_n)^{n+1} + \binom{n+1}{1} (A_n)^n \frac{b}{n+1} + \binom{n+1}{2} \dots \geq (A_n)^{n+1} + (A_n)^n b \\ &= (A_n)^n (A_n + b) = (A_n)^n a_{n+1} \end{aligned}$$

در بالا از بسط دو جمله‌ای استفاده کردیم و توجه

داریم که نوشتتن دو جمله اول از بسط، برای منظور ما

$$\text{کافی بود. همچنین: } \binom{n+1}{1} = n+1$$

چون بنا بر فرض استقرای، قضیه برای n عدد برقرار

است، پس:  $(A_n)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$ . در نتیجه:

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq (A_n)^n a_{n+1} \geq a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$$

و سرانجام:  $A_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$ . پس حکم

استقرای ثابت شد.

با کمی عملیات جبری به سادگی می‌توانید نابرابری مسئله را نتیجه بگیرید.

**مسئله ۹.** نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $n > 1$  داریم:  $\frac{n!}{(\frac{n+1}{2})^n} \leq n$

**حل:** در قضیه نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی (مسئله ۶)،  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \dots, a_n = n$  را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 \times 2 \times \dots \times n} &\leq \frac{1+2+\dots+n}{n} \\ \Rightarrow \sqrt[n]{n!} &\leq \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

طرفین را به توان  $n$  برسانید تا نتیجه موردنظر به دست آید.

### تمرین

۱. نشان دهید در بین همه مستطیل‌های با محیط ثابت  $p$ ، مربع بیشترین مساحت را دارد.

۲. نشان دهید برای هر زاویه حاده  $\alpha$  داریم:  $\tan \alpha + \cot \alpha \geq 2$

۳. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مثبت  $a$  و  $b$  با شرط  $a+b=1$  داریم:

$$(a + \frac{1}{a})^r + (b + \frac{1}{b})^r \geq \frac{25}{2}$$

**مسئله ۷.** ثابت کنید واسطه توافقی  $n$  عدد مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  از واسطه هندسی آن‌ها بیشتر نیست؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{n}{(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n})} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

**حل:** قضیه نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی (مسئله ۶) را برای  $n$  عدد مثبت  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$  اعمال می‌کنیم:

$$\frac{(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n})}{n} \geq \sqrt[n]{(\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n})}$$

با معکوس کردن طرفین نابرابری اخیر به حکم می‌رسیم.

**مسئله ۸.** نشان دهید برای هر  $n$  عدد مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داریم:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$$

**حل:** از مسئله‌های ۷ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت: واسطه حسابی  $n$  عدد مثبت  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$  عدد مثبت

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{n}{(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n})} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

## پرسش‌های پیکارجو!

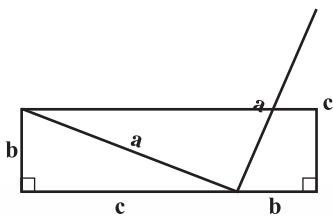
چند عدد طبیعی سه رقمی  $n$  وجود دارد که  $4^n - 5^n$  بر ۶۱ بخش‌پذیر باشد؟

- الف)  ۳۳۰
- ب)  ۳۰۰
- ج)  ۳۲۰
- د)  ۱۵۰
- ه)  ۹۰



## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

حالا که صحبت از فعالیت سیاستمداران در ریاضیات شد، بد نیست که بدانید از میان دهها راه حلی که برای اثبات قضیه فیثاغورس از سوی ریاضی دانها و ریاضی خوانها طی صدها سال ارائه شده است، یکی هم متعلق به بیستمین رئیس جمهور آمریکا، جیمز آبراهام گارفیلد (۱۸۳۱-۱۸۸۱) است (که البته قبل از رئیس جمهور شدن آن را کشف و اعلام کرده بود)! که در همان زمان در یک مجله علمی به چاپ رسیده بود. این راه حل در بسیاری از کتابهای رسمی و غیررسمی هندسه آمده است و به احتمال زیاد، شما هم با آن آشنایی دارید. مساحت ذوزنقه مقابل را از دو راه به دست آورید و با مساوی قرار دادن آنها به تساوی  $c^2 + b^2 = a^2$  برسید.



ظاهراً ریاضیات تنها دانشی است که همه می‌توانند در حیطه آن مطلب بنویسند و اظهارنظر کنند! اگر امروزه می‌بینیم که صاحبان همه تخصص‌ها و حتی پژوهشکان می‌توانند در کلاس‌های کنکور ریاضیات تدریس کنند، در گذشته همچنین بوده است و شاید هم یکی از زیبایی‌های ریاضیات همین باشد که همه را شیفتۀ خودش می‌کند!

آیا می‌دانستید **ناپلئون** بناپارت، امپراتور مستبد و کوتاه قد فرانسوی (که گفته می‌شود قد او حدود  $150$  سانتی‌متر بوده است!) هم دستی در ریاضیات داشته است و در اوقات فراغت (و شاید هم در تبعیدگاه سنت هلن!) مسائل ریاضی حل و طرح می‌کرده است؟! این مسئله منسوب به اوست و ضرری ندارد که به راه حل آن بیندیشید: «محیط دایره مفروضی را که جای مرکز آن معلوم است، به کمک یک پرگار و بدون استفاده از خط‌کش، به چهار قسمت برابر تقسیم کنید.»

کاستان  
ریاضی‌دانان و  
سپاهیست!

ایستگاه  
ریاضی





## ریاضیات در چند دقیقه

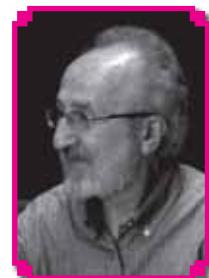
### محاسبه مثلث

«محاسبه مثلث» (triangulation) روشی برای محاسبه تمام ویژگی‌های یک مثلث، فقط با استفاده از اندازه‌گیری یک ضلع و یک زاویه است. این روش ممکن بر دانستن مقادیر توابع مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت است.

تصور کنید شاهزاده‌ای سعی در رسیدن به اتاق واقع در بالای برج قصر بدون دروازه را دارد. در این صورت چگونه می‌تواند،  $d$ ، ارتفاع پنجره اتاق را بداند، وی در فاصله  $l$  از برج می‌ایستد و  $\theta$ ، زاویه بین پایه برج و پنجره را اندازه می‌گیرد.

با این فرض که برج قائم است، پنجره و پایه آن، نیز، محل شاهزاده، گوشه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند. او اندازه زاویه  $\theta$  و ضلع مجاور  $l$  را می‌داند، و می‌خواهد اندازه  $d$ ، ضلع مقابل زاویه  $\theta$ ، را بداند. در این صورت با قرار دادن این مقادیر در فرمول تانژانت، می‌تواند  $\tan \theta = \frac{d}{l}$  ملاحظه کند که: و در نتیجه:

$$d = l \times \tan \theta$$



ترجمه غلامرضا یاسی پور



## اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی عبارتی شامل توابع سینوس، کسینوس و تانژانت اند که در مورد جمیع زاویه‌ها برقرارند. قضیه فیثاغورس بر این است که با معلوم بودن یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه  $\theta$ ، طول ضلع مقابل O، طول ضلع مجاور A ووتر H داریم:

با تقسیم هر دو طرف این معادله بر  $H^2$  به دست می‌آید:

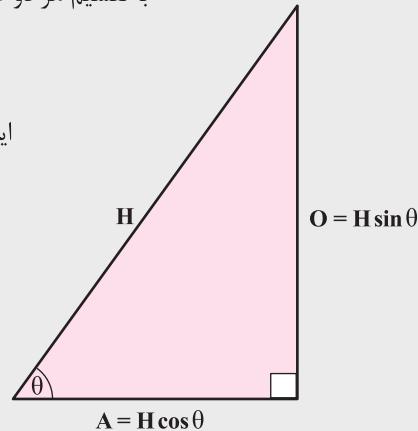
$$\left(\frac{O}{H}\right)^2 + \left(\frac{A}{H}\right)^2 = 1, \text{ یا } \frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1$$

این رابطه از آنجا که:  $\cos \theta = \frac{A}{H}$  و  $\sin \theta = \frac{O}{H}$  معناست که به ازای هر زاویه  $\theta$ :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

توجه داشته باشید که شکل  $\sin^2 \theta$  نشان می‌دهد که درباره مربع سینوس  $\theta$  صحبت می‌کنیم، نه سینوس  $\theta$ . این اتحاد در مورد جمیع مقادیر  $\theta$  برقرار است، اما گاهی مطلبی جالب در مورد خود

توابع بیان می‌کند. باز توجه داشته باشید که رابطه مزبور در واقع گزاره تازه‌ای از قضیه فیثاغورس است.



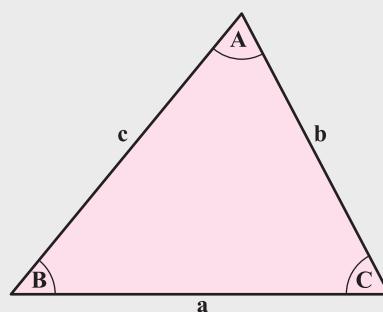
در مورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن H طول وتر و زاویه  $\theta$  معلوم است، تعاریف سینوس و کسینوس باقتن طول‌های اضلاع دیگر را آسان می‌کند.

## قاعده‌های سینوس و کسینوس

قاعده‌های سینوس و کسینوس فرمول‌های رابط زاویه‌ها و اضلاع مثلث‌های دلخواه‌اند. مفهوم همنهشتی نشان می‌دهد که در هر مثلث، دو ضلع و زاویه بین آن‌ها، مثلث را مشخص می‌کنند. بنابراین باید یافتن زاویه‌ها و اضلاع دیگر، از این اطلاعات ممکن باشد.

این قاعده‌ها در مورد مثلثی با اضلاع و زاویه‌های نشان داده شده در شکل بعد، عبارت‌اند از:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (\text{قاعده سینوس‌ها})$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (\text{قاعده کسینوس‌ها})$$

اگر C زاویه‌ای قائمه باشد، آن‌گاه:  $\cos C = 0$  و قاعده کسینوس‌ها همان قضیه فیثاغورس است. بنابراین، می‌توانیم درباره قاعده کسینوس‌ها به عنوان اصلاح قضیه فیثاغورس در مورد حالاتی بیندیشیم که در آن‌ها C زاویه‌ای قائمه نیست.

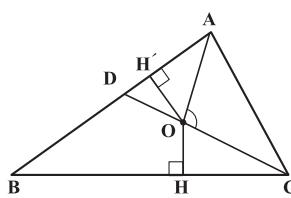
# آموزشی

هوشنگ شرقی، حمیدرضا امیری، محمد تقی طاهری تنجانی  
 محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی



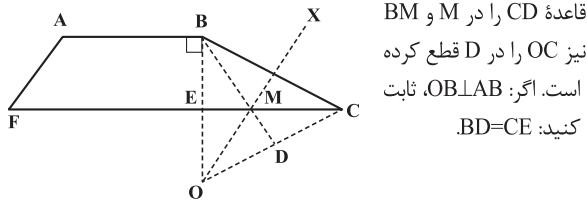
## هندسه ۱

(پایه دهم)

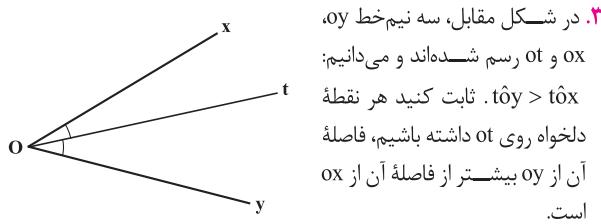


۱. در شکل مقابل،  $CD$  نیمساز زاویه  $C$  است و  $O$  نقطه‌ای از آن است که از  $BC$  و  $AB$  به یک فاصله است.  $A\hat{O}C = 100^\circ$ . اگر:  $OH = OH'$  اندازه  $\hat{B}$  چند درجه است؟

۲. در شکل زیر،  $ABC$  ذوزنقه است و نیم خط  $ox$  عمودمنصف ساق  $BC$ .



قاعده  $BM$  را در  $CD$  و  $M$  نیز  $OC$  را در  $D$  قطع کرده است. اگر:  $OB \perp AB$ . ثابت کنید:  $BD = CE$



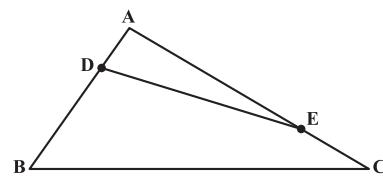
۳. در شکل مقابل، سه نیم خط  $oy$ ،  $ot$  و  $ox$  رسم شده‌اند و می‌دانیم:  $t \hat{o}y > t \hat{o}x$ . ثابت کنید هر نقطه دلخواه روی  $ot$  داشته باشیم، فاصله آن از  $oy$  بیشتر از فاصله آن از  $ox$  است.

## ریاضی

(پایه دهم)

۱. یک برج از نقطه‌های  $A$  و  $B$  که در فاصله ۲۷ متری از یکدیگر و در یک طرف برج قرار دارند، با زوایه  $30^\circ$  و  $45^\circ$  درجه دیده می‌شود. ارتفاع برج را به دست آورید.

۲. در شکل زیر داریم:  $AC = 3EC$  و  $AB = 3AD$ . مساحت مثلث  $ADE$  چه نسبتی از مساحت مثلث  $ABC$  است؟



۳. اگر  $15^\circ < \alpha < 30^\circ$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left| \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| + \left| \tan \alpha - \cot \alpha \right|$$

۴. درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

## هندسه ۲

### (پایه یازدهم)

- الف) اگر  $DR=36$  و  $AP=12$ ، اندازه  $AC$  را بیابید.  
ب) اگر  $EF=21$  و  $BC=15$  باشد، اندازه  $DR$  چقدر است؟

## مسائل آمار و احتمال (پایه یازدهم)

۱. اگر  $p$  گزاره‌ای درست،  $q$  نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را با استدلال مشخص کنید.

الف)  $r \Rightarrow (p \vee q)$

ب)  $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (q \vee r)$

ج)  $r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

د)  $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)$

۲. به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید: اگر:  $A \cup B = A \cap B$ ، آن‌گاه:  $A=B$ .

۳. برای مجموعه  $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  دو افزار سه عضوی و یک افزار چهار عضوی بنویسید.

۴. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

(الف)  $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

(ب)  $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

## مسائل درس حسابان

۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$$

۲. فاصله شهر A تا شهر B  $700$  کیلومتر است. قطاری از شهر A به شهر B می‌رود و دوباره این مسیر را برمی‌گردد. اگر سرعت رفت از سرعت برگشت آن  $30$  کیلومتر بر ساعت کمتر باشد و کل مسیر رفت و برگشت  $17$  ساعت طول بکشد، سرعت رفت قطار چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

$$۳. \text{معادله } |2x+6| = |x+3| \text{ را حل کنید.}$$

۴. نقاط  $A(-2, 4)$  و  $B(0, 0)$  دو رأس یک مثلث و اضلاع  $AC$  و  $BC$  روی خطهایی به معادله  $8x-3y+8=0$  و  $BC: y=3x+2$  قرار دارند.

الف) مختصات رأس C را به دست آورید.

ب) معادله ارتفاع  $BH$  را بنویسید.

پ) مختصات نقطه  $H$  پای ارتفاع  $AH$  را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع  $BH$  چقدر است؟

۵. نقطه‌ای روی خط  $y=2x$  و در ربع اول چنان تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه  $A(3, 1)$  برابر  $2\sqrt{5}$  باشد.

۱. نقطه P بر امتداد وتر AB به طول ۳ واحد از دایره  $C(O, 4)$  و از A به فاصله ۵ واحد واقع است. طول OP را به دست آورید.

۲. نقاط A، B و C روی دایره‌ای واقع‌اند. خط مماس بر دایره در نقطه A امتداد وتر BC را در نقطه P قطع می‌کند که بین C و P واقع است. اگر:  $BC=20$  و  $PA=10\sqrt{3}$ ، آن‌گاه طول PB چقدر است؟

۳. دایره‌های  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  در نقطه A، مماس مشترک خارجی دو دایره را در نقطه قطع کند، طول AM را بحسب R و R' بیابید.

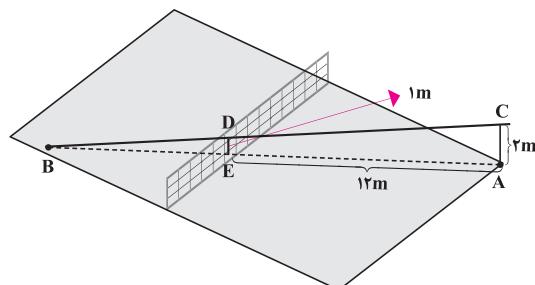
## ریاضی تجربی

### (پایه یازدهم)

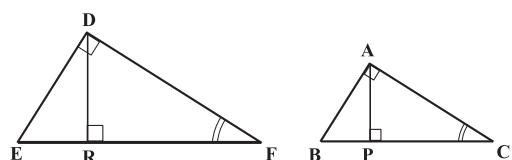
۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن  $AC=AB$ ، ضلع BC برابر ۷ سانتی‌متر و اندازه ارتفاع وارد بر این ضلع ۴ سانتی‌متر است. این مثلث رسم کنید.

۲. در شکل مقابل،  $AC \parallel BD$  و  $OA=3$ ،  $DE \parallel BC$  و  $AB=5$  به دست آورید.

۳. یک بازیکن والیبال از گوشۀ زمین (نقطه A) از ارتفاع ۲ متری به توپ ضربه می‌زند و توپ درست از لبۀ تور که ۱ متر ارتفاع دارد، عبور می‌کند. اگر فاصله او تا تور ۱۲ متر باشد و توپ مسیری مستقیم را طی کند، محل برخورد توپ با زمین با بازیکن چقدر فاصله دارد؟



۴. در مثلث‌های متشابه قائم‌الزاویه ABC و DEF، دو زاویه  $\hat{C}$  و  $\hat{F}$  با هم برابرند.



$\cos \alpha > \sin \alpha$  از اندازه  $\alpha$  بزرگ‌تر است، داریم:  $\cot \alpha > \tan \alpha$

بنابراین:

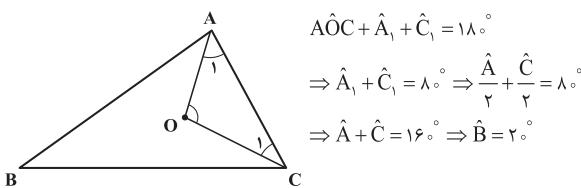
$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| + |\tan \alpha - \cot \alpha| \\ &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \cot \alpha - \tan \alpha \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cot \alpha - \tan \alpha \\ &= 1 - \cot \alpha + \cot \alpha - \tan \alpha = 1 - \tan \alpha \end{aligned}$$

۴. برای اثبات تساوی داده شده می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

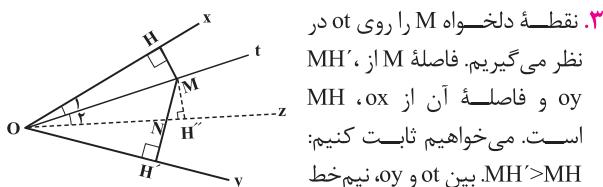
$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} \\ &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - 1} \\ &= \frac{2\sin \alpha (\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

## حل مسائل هندسه ۱

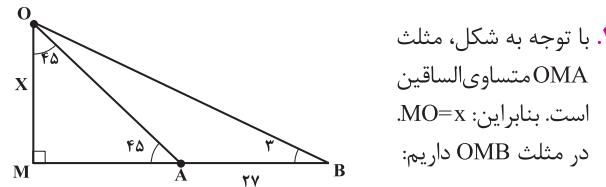
۱. می‌دانیم هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه واقع است. پس  $O$  روی نیمساز  $\hat{B}$  است. یعنی  $O$  روی نیمسازهای  $\hat{A}$  و  $\hat{C}$  و در نتیجه نقطه همرسی نیمسازهای است. پس  $OA$  نیمساز  $\hat{A}$  است و از آنجا نتیجه می‌شود:



۲. چون داریم:  $AB \parallel CF$  و  $OB \perp AB$ ، پس:  $CE \perp CF$  در مثلث  $BOC$  ارتفاع است و  $Ox$  هم بر  $BC$  عمود است. لذا  $M$  بر  $BC$  عمود است. این معنی است که  $BD$  ارتفاع هاست و در نتیجه  $BD$  هم ارتفاع وارد بر  $OC$  است. اما می‌دانیم، هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین  $OB = OC$ . یعنی مثلث  $BOC$  متساوی‌الساقین است. بنابراین ارتفاع‌های وارد بر دو ساق آن با هم برابرند:  $BD = CE$ .



## حل مسائل ریاضی دهم

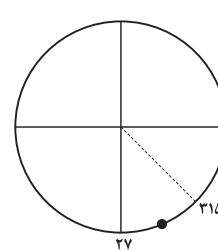


$$\begin{aligned} \cot B &= \frac{MB}{OM} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x + 27}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = x + 27 \\ \Rightarrow x(\sqrt{3} - 1) &= 27 \Rightarrow x = \frac{27}{\sqrt{3} - 1} \cong 36/9 \end{aligned}$$

۲. اگر فرض کنیم:  $EC = y$  و  $AD = x$  پس:  $AB = 3x$ . با توجه به اینکه  $AC = 3y$ :  $AE = 2y$  بنابراین:  $ACN$  داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times AE \times \sin A}{\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A} = \frac{\frac{1}{2}(x)(2y)\sin A}{\frac{1}{2}(3x)(3y)\sin A} = \frac{2}{9}$$

۳. اگر  $\alpha < 315^\circ < 270^\circ$  با توجه به دایرة مثلثاتی داریم:



$$\sin \alpha < \cos \alpha, \sin \alpha < 0$$

بنابراین:  $\left| \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha}$  از سوی دیگر، با توجه به اینکه:  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  و  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  و اینکه:  $|\sin \alpha| < |\cos \alpha|$  و  $\sin \alpha < 0$ ، یعنی اندازه

## پاسخ مسائل ریاضی تجربی

۱. ابتدا ضلع  $BC$  را به طول ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. دهانه پرگار را بیش از نصف طول  $BC$  باز می‌کنیم و یک بار به مرکز نقطه  $B$  و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز نقطه  $C$  کمان می‌زنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند  $M$  و  $N$  قطع کنند. این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم. خط به وجود آمده عمود منصف  $BC$  است. محل برخورد  $MN$  با  $BC$  را  $H$  می‌نامیم. حال به مرکز  $H$  و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با  $A$  را  $MN$  می‌نامیم. مثلث  $MN$  مثلث مطلوب است.

۲. از آنجا که:  $AC \parallel BD$ , بنابر قضیه تالس در مثلث  $ODB$  داریم:

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

همچنین در مثلث  $ODE$  داریم:  $DE \parallel BC$ . بنابراین:

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{\overline{OA} + \overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{\overline{A} + \overline{B}}{\overline{B} - \overline{A}} = \frac{3}{5} \rightarrow BE = \frac{4}{3}$$

۳. با  $AC$  موازی است. بنابراین اگر مثلث  $ABC$  را در نظر بگیریم،

$$\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}$$

$$\rightarrow \frac{BE}{BE+12} = \frac{1}{2} \rightarrow BE = 12 \rightarrow AB = 24$$

$$DF = DR \rightarrow \frac{DF}{AC} = \frac{DR}{AP} \rightarrow \frac{39}{AC} = \frac{36}{12} \rightarrow AC = 13 \quad (4)$$

$$\frac{DR}{AP} = \frac{EF}{BC} \rightarrow \frac{DR}{10} = \frac{21}{15} \rightarrow DR = 14 \quad (5)$$

## پاسخ مسائل آمار و احتمال

۱. (الف) چون:  $T \equiv p \vee q$ , پس:  $T \equiv T$  (۱). بنابراین ارزش گزاره  $T$

همواره درست است و به ارزش گزاره  $r$  بستگی ندارد.

(ب) چون:  $p, p \equiv T$ , پس:  $p \equiv F$  و  $p \wedge r \equiv F$  (۲) در نتیجه گزاره

شرطی ( $\sim p \wedge r \Rightarrow (q \vee r)$ ) به انتفای مقدم درست است.

(ج) چون:  $p, p \equiv T$ , پس:  $p \equiv q$  همواره درست و لذا ( $q \Rightarrow p$ ) نیز

همواره درست است.

(د) چون:  $T \equiv p \vee q$ , پس:  $T \equiv F$ , گزاره  $F$  (۳) و چون:  $p \equiv T$ , پس:  $p \equiv F$  (۴)

به انتفای مقدم درست است و در نتیجه:

$$[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv T$$

تعريف اجتماع

$$x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

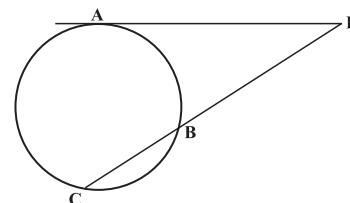
$$\Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

را طوری رسم می‌کنیم که:  $\hat{o}_1 > \hat{o}_2$  (با توجه به اینکه:  $t\hat{o}_1 > t\hat{o}_2$  می‌توان درون زاویه  $t\hat{o}_1$ , زاویه  $t\hat{o}_2$  را مساوی زاویه جدا کرد). اکنون از  $M$  بر این نیم خط عمود "MH" را رسم می‌کنیم. اگر  $N$  نقطه برخورد "OH" و "MH" باشد، در مثلث "MNH" داریم:  $MN > MH$  (چرا؟) و چون  $t\hat{o}_1$  نیمساز زاویه "HOH" است، پس:  $MH = MH$ . بنابراین  $MN > MH$  و لذا:  $MN + NH > MH$  یا:  $MN > MH$

## حل مسائل هندسه ۲

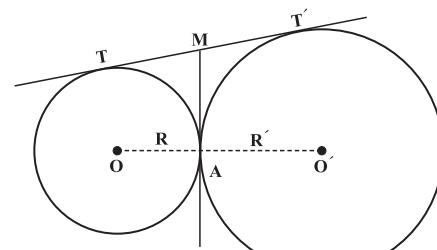
۱. دو حالت داریم: یکی اینکه مانند شکل،  $P$  در سمت راست  $AB$  باشد که در این صورت:  $AB = 2$  و  $PB = 8$ . دیگر آنکه  $P$  در سمت چپ  $AB$  باشد که در این صورت:  $PA = 5$  و  $PB = 8$ . در حالت اول مسئله را حل می‌کنیم و حل حالت دوم را به خودتان واگذار می‌کنیم (به روش مشابه حل می‌شود):

$$\begin{aligned} PB \cdot PA &= PD \cdot PC \Rightarrow 2 \times 5 = (OP - OD)(OP + OC) \\ OD = OC = R &= 4 \Rightarrow 10 = (OP - 4)(OP + 4) = OP^2 - 16 \\ \Rightarrow OP^2 &= 24, OP = \sqrt{24} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} PA^2 &= PB \cdot PC \Rightarrow (1 \cdot \sqrt{2})^2 = PB(PB + 2) \\ \Rightarrow PB^2 + 2 \cdot PB - 2 &= 0 \Rightarrow (PB + 2)(PB - 1) = 0 \\ \Rightarrow PB &= 1. \end{aligned}$$

۲. با توجه به برابری مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج از دایره، داریم:  $MT = MA$  و  $MT' = MA$  و در نتیجه:



$$MT = MT' = MA \Rightarrow MA = \frac{TT'}{2}$$

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} \\ &= \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow AM = \sqrt{RR'} \end{aligned}$$

۳. می دانیم اگر: آن گاه:  $x = \pm a$  و در نتیجه داریم:

$$|x + 3| = |x + 2| + 6$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = |x + 3| + 6 \Rightarrow |x + 3| = 2x - 5 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 2x - 5 \Rightarrow x = 8 & \text{مورد قبول} \\ x + 3 = -2x + 5 \Rightarrow x = \frac{2}{3} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases} \\ 2x + 1 = -|x + 3| - 6 \Rightarrow |x + 3| = -2x - 7 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = -2x - 7 \Rightarrow x = -\frac{10}{3} & \text{غیرقابل قبول} \\ x + 3 = 2x + 7 \Rightarrow x = -4 & \text{مورد قبول} \end{cases} \end{cases}$$

جوابهای  $x = 8$  و  $x = -4$  تنها جوابهای مورد قبول معادله‌اند.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda x - 3y + \lambda = 0 \\ y = 3x + 2 \end{cases} &\Rightarrow \lambda x - 3(3x + 2) + \lambda = 0 \\ &\Rightarrow x = 2, y = \lambda \Rightarrow C(2, \lambda) \end{aligned} \quad (الف)$$

$$m_{AB} = -2 \Rightarrow m_{BH} = \frac{1}{2} \quad (ب)$$

$$\Rightarrow BH \quad \text{معادله ارتفاع: } y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5 \quad (پ)$$

$$\begin{aligned} m_{BC} = 1 &\Rightarrow m_{AH'} = -1 \\ \Rightarrow AH' &: y + 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x - 2 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه پای ارتفاع، دستگاه معادلات متشکل از ارتفاع و ضلع را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = -x - 2 \\ \lambda x - 3y + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda x - 3(-x - 2) + \lambda = 0 \\ \Rightarrow 11x + 14 = 0 \Rightarrow x = -\frac{14}{11}, y = \frac{-\lambda}{11} \\ H'\left(-\frac{14}{11}, -\frac{\lambda}{11}\right) \quad (ت)$$

$$BH = \frac{|3(-2) - 4 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

۵. فرض کنیم نقطه M(a, 2a) روی خط  $y = 2x$  باشد (چون M در ربع اول است، پس:  $a > 0$ ).

$$OM + OA = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a^2 + 4a^2} + \sqrt{(a - 2)^2 + (2a - 1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}|a| + \sqrt{(a - 2)^2 + (2a - 1)^2} = 2\sqrt{5}$$

(توجه کنید  $a > 0$  است.)

$$\sqrt{(a - 2)^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{5}(2 - a)$$

$$(a - 2)^2 + (2a - 1)^2 = 5(2 - a)^2$$

$$a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 4a + 1 = 5a^2 - 20a + 20 \Rightarrow a = 1$$

نقطه موردنظر M(1, 2) است.

و به همین ترتیب با فرض  $x \in B$  ثابت می‌شود:  $x \in A$ , یعنی:  $B \subseteq A$  و  $A = B$  در نتیجه ثابت می‌شود:

$$\begin{cases} A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}, A_3 = \{5, 6, 7\} \\ B_1 = \{1\}, B_2 = \{6\}, B_3 = \{2, 3, 4, 5, 7\} \end{cases} \quad (۳)$$

$C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3\}, C_3 = \{4, 5\}, C_4 = \{6, 7\}$  : افزای چهار عضوی

$$\begin{aligned} (الف) \quad (A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' \\ &= (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\ &= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \\ &= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \\ &= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} (ب) \quad (A - C) \cap (B - C) &= (A \cap C') \cap (B \cap C') \\ &= (A \cap C') \cap (C' \cap B) = [(A \cap C') \cap C'] \cap B \\ &= [A \cap (C' \cap C')] \cap B = (A \cap C') \cap B \\ &= A \cap (C' \cap B) = A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap C' \\ &= (A \cap B) - C \end{aligned}$$

## پاسخ مسائل درس حسابان

$$1. \text{ با فرض } \frac{1}{u} + \frac{2}{u+1} = \frac{6}{u+2} \text{ داریم:}$$

با ضرب طرفین معادله گویا در کوچکترین مضرب مشترک مخرجها ( $u+1)(u+2)$  داریم:

$$(u+1)(u+2) + 2u(u+2) = 6u(u+1)$$

$$u^2 + 3u + 2 + 2u^2 + 4u = 6u^2 + 6u$$

$$3u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$u = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{مورد قبول}$$

$$u = -\frac{2}{3} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{8}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - \frac{32}{3} < 0 \quad \text{جواب ندارد.}$$

۲. اگر سرعت این قطار در مسیر رفت  $k$  کیلومتر بر ساعت باشد، آن گاه سرعت آن در مسیر برگشت  $k+3$  کیلومتر بر ساعت است.

بنابراین قطار در مسیر رفت هر کیلومتر را در  $\frac{1}{k}$  ساعت و کل مسیر

را در  $\frac{7}{k}$  ساعت طی می‌کند. در مسیر برگشت هم هر کیلومتر را در

$\frac{1}{k+3}$  ساعت، و در نتیجه کل مسیر برگشت را در  $\frac{7}{k+3}$  ساعت

می‌پیماید. اکنون می‌توانیم معادله زیر را تشکیل دهیم:

$$\frac{7}{k} + \frac{7}{k+3} = 17 \Rightarrow 7 \cdot k + 7 \cdot (k+3) = 17k(k+3)$$

$$\Rightarrow 17k^2 - 89k - 210 = 0 \Rightarrow (k - 10)(17k + 21) = 0$$

$$\begin{cases} k = 10 \\ k = -\frac{21}{17} \end{cases} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

## پروردش مهارت‌های منطقی با استفاده از مسائل و بازی‌های منطقی

نویسنده‌گان: شوئن فیلد، مارک / روزن بلاست، ژانت / پست، بورلی / ایوز، ساندرا.

مترجمان: غلامرضا یاسی‌بور و علیرضا توکلی ناشر: محراب قلم سال نشر: ۱۳۹۴

این کتاب در ۲۶۲ صفحه و چهار بخش تنظیم شده است.

بخش اول با عنوان «حل مسئله‌های منطقی با استفاده از دایره»، به معرفی روشهای حل بعضی معماها و مسائل منطقی می‌پردازد و به این منظور از یک نمودار دایره‌ای استفاده می‌کند.

بخش دوم با عنوان «ماجراجویی‌های منطقی»، یک سلسله بازی‌های منطقی ارائه می‌دهد؛ مانند پرسش‌های چهارگزینه‌ای درباره نامهای مشابه و متفاوت و نسبت‌ها:

نسبت انواعی با جاده مانند قطار با..... است.

(الف) موتور      (ب) خط آهن

(د) مسافر

(ج) مسیر

یا معماهایی از کشف رمز در پیام‌های رمزی و... در بخش سوم که عنوان آن «کشف‌های منطقی» است، مؤلفان سرگرمی‌هایی را مطرح می‌کنند که طبق گفته آسان در مقدمه این بخش مبتنی بر مهارت‌های رده‌بندی، ذنباله‌بندی، استنتاج، قیاس و منطق خلاق هستند

و بالاخره در بخش چهارم با عنوان «کاوش‌های منطقی»، با چگونگی حل مسائل منطقی به روش ماتریسی آشنا می‌شویم و می‌آموزیم که چگونه می‌توان با تنظیم اطلاعات یک معمای منطقی در قالب یک ماتریس یا یک جدول  $m \times n$  (با  $m$  سطر و  $n$  ستون)، قدم به قدم به سمت پافتن پاسخ یک معما پیش رفت.

از آنجا که معماهای منطقی معمولاً پیش‌نیازهای زیادی نیاز ندارند، لذا منبع بسیار خوبی برای پرورش استعدادهای نهفته دانش‌آموزان هستند. درگیر شدن با این معماها و مسئله‌ها از طریق روش‌هایی که در این کتاب آموزش داده شده‌اند، به پرورش خلاقیت و ذهن نوگرانان و تقویت قوّه ابتکار آنان کمک سازی می‌کند. از این منظر تهیه و مطالعه کتاب حاضر را به علاقه‌مندان رشته ریاضی توصیه می‌کنیم.

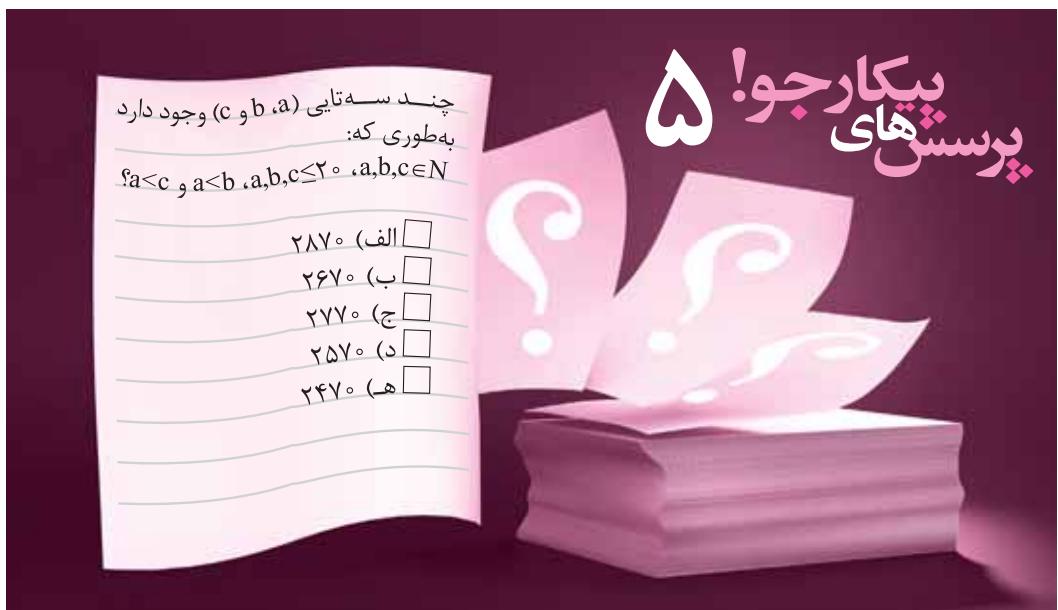
## پیکار جو!

چند سه‌تایی (a, b و c) وجود دارد

به طوری که:

$$a < c \quad a, b, c \in N$$

- (الف)  ۲۸۷۰
- (ب)  ۲۶۷۰
- (ج)  ۲۷۷۰
- (د)  ۲۵۷۰
- (ه)  ۲۴۷۰

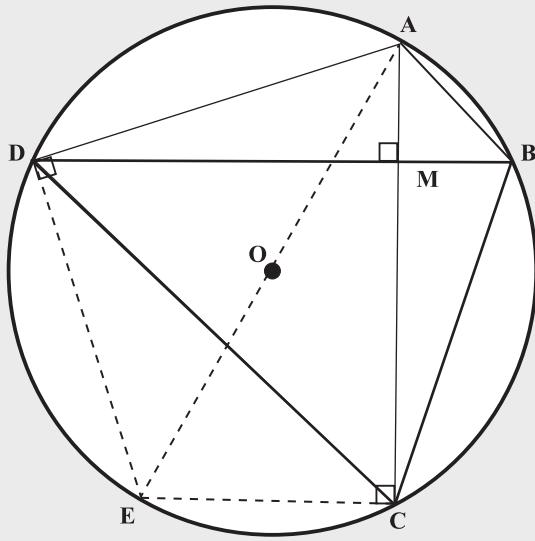


## ؟ پاسخ پرسش‌های پیکارجو | ؟

و به کمک قضیه فیثاغورس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} AE^2 &= AD^2 + BC^2 = AM^2 + MD^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (AM^2 + MB^2) + (MD^2 + MC^2) = AB^2 + CD^2 \\ &= 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow AE = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

یعنی قطر دایره مساوی  $2\sqrt{10}$  و شعاع آن  $\sqrt{10}$  است.  
(گزینه د).



۴. روش‌ن ا است که:  $n = 3k$  یا  $n = 3k+1$  یا  $n = 3k+2$  به راحتی می‌توان ثابت کرد که در حالت اول  $5^n - 4^n$  مضرب ۶۱ است.

$$\begin{aligned} 5^k - 4^k &= 125^k - 64^k \\ &= (125 - 64)(125^{k-1} + \dots + 64^{k-1}) = 61m \end{aligned}$$

و در حالت‌های دیگر حاصل، مضرب ۶۱ نیست. پس باید تعداد عددهای مضرب ۳ و سه رقمی را تعیین کنیم که عدد

است (گزینه ب).

۵. اگر  $a=1$  و  $2 \leq b \leq 20$ ،  $2 \leq c \leq 20$ ، پس برای  $19$  عدد و برای  $c$  هم  $19$  عدد متفاوت داریم و طبق اصل ضرب،  $19 \times 19$  حالت گوناگون برای  $b$  و  $c$  وجود دارد. اگر  $a=2$ ،  $3 \leq b \leq 20$  و  $3 \leq c \leq 20$ ، پس برای  $b$  و  $c$   $18 \times 18$  حالت داریم و... بنابراین تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 19^2 = \frac{19 \times 20 \times 39}{6} = 2470. \quad (\text{گزینه ه})$$

۱. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 4p^4 + 1 &= (2p^2 + 1)^2 - 4p^2 \\ &= (2p^2 + 2p + 1)(2p^2 - 2p + 1) \end{aligned}$$

و چون  $p > 0$ ، پس عبارت‌های هر دو پرانتز مثبت هستند و لذا این عدد هیچ وقت عدد اولی نخواهد شد (گزینه الف).

۲. اگر وتر مثلث را با  $z$  و اضلاع دیگر آن را  $x$  و  $y$  (y > x) بنامیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (\text{قضیه فیثاغورس}) \\ y = xz & (\text{فرض مسئله}) \\ S = \frac{xy}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow xy = 4\sqrt{2} & \end{cases}$$

و از این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{x}, z = \frac{y}{x} = \frac{4\sqrt{2}}{x^2}, x^2 + \frac{4\sqrt{2}}{x^2} = \frac{1024}{x^2} \\ \Rightarrow x^4 + 32x^4 - 1024 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 + 16)^2 - 256 - 1024 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 + 16)^2 = 1280 \Rightarrow x^2 + 16 &= 16\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 &= 16(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow x = 2\sqrt{\sqrt{5} - 1}, y = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{5} - 1}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt[4]{\sqrt{5} + 1})}{\sqrt[4]{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt[4]{\sqrt{5} + 1}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt[4]{\sqrt{5} + 1})}{\sqrt[4]{\sqrt{5} - 1}} = \sqrt[4]{\sqrt{5} + 1} \\ \tan \alpha &= \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{2\sqrt{\sqrt{5} - 1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} \quad (\text{گزینه ب}) \end{aligned}$$

۳. انتهای قطر گذرنده از نقطه A را به رأس C چهارضلعی وصل می‌کنیم. چون  $\widehat{ACE}$  محاطی رو به قطر و مساوی  $90^\circ$  است، پس  $AC \perp CE$  و طبق فرض  $AC \perp DB$ . بنابراین:  $CE \parallel DB$  لذا:  $\widehat{DE} = \widehat{BC}$  در نتیجه:  $BC = DE$  حال در مثلث قائم‌الزاویه  $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$  (داریم:  $\widehat{ADE} = \frac{\widehat{AE}}{2} = 90^\circ$ )

$$AD^2 + DE^2 = AE^2 \Rightarrow AD^2 + BC^2 = AE^2$$

# پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...



می‌پردازند، چندان جاذبه‌ای برای دانش‌آموزان ندارند. سعی کنید که به جنبه‌های کاربردی ریاضیات بیشتر پردازید. قبلًا مقالاتی از شما در مجلهٔ ما به چاپ رسیده‌اند و این نشان از توانایی‌های شما دارد. منتظر کارهای دیگری از شما می‌مانیم.

▪ دوستان دانش‌آموز، خانم‌ها مبیناً جمالی و طوبی میرزا کلهر از مرکز استعدادهای درخشان حضرت زینب شهری را در مقاله‌تان با عنوان «ذوزنقهٔ خیام - پاسکال» به دست ما رسید. متأسفانه باید به اطلاع‌تان برسانیم که مطلب‌تان فاقد انسجام لازم برای یک مقالهٔ مدون است. ابتدا باید هدف از مقالهٔ روش شود تا برای مخاطبان جذابیت پیدا کند. سپس ورود به مطلب مناسبی داشته باشد و به تدریج خواننده را با خود همراه کند و در نهایت با تمریناتی به پایان برسد. ان شاء‌الله با انجام این تغییرات و بازنویسی کامل مقالهٔ می‌توانیم از آن در مجلهٔ استفاده کنیم. برایتان آرزوی توفیق روزافزون داریم.

با عرض پوزش از عزیزانی که فرست پاسخ‌گویی به نامه‌های شما فراهم نشد، این کار را به شمارهٔ آینده موکول می‌کنیم تا آن هنگام همهٔ عزیزان را به خدای بزرگ می‌سپاریم.

دروزی دیگر به همراهان صمیمی و یاران و فادار مجلهٔ ریاضی برهان. باز هم نامه‌ها و ایمیل‌هایی از شما عزیزان به دستمان رسید که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

## • همکار گرامی، سرکار خانم سارا اسلامی از آذربایجان شرقی

دو مقاله‌تان با عنوان‌های «راهکارهایی برای غلبه بر مشکلات آموزش ریاضی» و «ذهن و هوش و آموزش ریاضیات» به دستمان رسید. بارها تأکید کردایم که این گونه مقالات که مخاطبان اصلی آن‌ها، معلمان ریاضی و دانشجویان رشتهٔ دبیری ریاضی هستند، بیشتر برای چاپ در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» مناسب هستند. با سپاس از توجهتان، اگر بتوانید مقالاتی برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه بنویسید، خوش حال می‌شویم بتوانیم از تجربیاتتان استفاده کنیم.

## • همکار گرامی، جناب آقای جابر مختاری دهقادی از استان لرستان

مقاله‌تان با عنوان «ماتریس‌های خودمعکوس» به دست ما رسید. ضمن سپاس از لطفتان باید به اطلاع‌تان برسانیم که اولاً بحث ماتریس‌ها در ساختار کتاب‌های جدید‌التألیف رشتهٔ ریاضی جایگاه چندانی ندارد و هنوز وضعیت این بحث روشن نیست. ثانیاً مقالات از این دست که به صورت انتزاعی و محض به ریاضیات

## با مجلدهای رشد آشنا شوید

مجلدهای دانش آموزی  
به صورت ماه‌نامه و نه شماره در سال تجربی منتشر می‌شوند:

▪ **رشد - نوآور**  
برای دانش‌آموزان پایه‌هایی دارم و سیم دوره دویش ایندیش  
▪ **رشد - رشد - رشد**  
برای دانش‌آموزان دورهٔ اموزش متوسطه دهم  
▪ **رشد - رشد - رشد**  
برای دانش‌آموزان دورهٔ اموزش متوسطه دهم

مجلدهای دانش آموزی  
به صورت ماه‌نامه و نه شماره در سال تجربی منتشر می‌شوند:

▪ **رشد - نوآور**  
برای دانش‌آموزان دورهٔ اموزش متوسطه اول  
▪ **رشد - نوآور**  
برای دانش‌آموزان دورهٔ اموزش متوسطه اول

(ب) صورت قیام و سه شماره در سال تجربی منتشر می‌شود:  
▪ **رشد - نوآور**  
▪ **رشد - نوآور**  
▪ **رشد - نوآور**

### مجلدهای بزرگ‌نمایی:

▪ **رشد - نوآور**

▪ **رشد - نوآور**

▪ **رشد - نوآور**

(ج) صورت قیام و سه شماره در سال تجربی منتشر می‌شود:

▪ **رشد - نوآور**



## پاسخ

# ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

### ایستگاه دوم:

طبق فرض مسئله اگر  $x$  کاشی در طول و  $y$  کاشی در عرض چیده شده باشند، با توجه به مساحت زمین خواهیم داشت:  

$$ax + 12 = 600, ay + 16 = 800, xy = 588$$

(که  $a$  طول ضلع کاشی سفیدرنگ است). بنابراین:

$$\frac{600 - 12}{a} \times \frac{800 - 16}{a} = 588 \Rightarrow a^2 = 784 \Rightarrow a = 28$$



يعنى طول ضلع کاشی هاي مربع شكل ۲۸ سانتي متر بوده و در نتيجه مساحت قسمت فرش نشده اندیشه برابر است با:  

$$600 \times 800 - 588 \times 784 = 19008$$
 لذا  $19008$  سانتي متر مربع جاي خالي مى ماند که برای پر کردن آن لااقل  $25$  عدد کاشی باید تکه مى شد.

### ایستگاه اول:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱	۲	۵
۲	۱	۳	۶	۸	۹	۲	۷	۳	۱	۰	۲	۴
۳	۸	۴	۲	۹	۷				۱	۰	۰	۲
۴		۵	۸	۵	۸		۵	۵		۱	۰	۰
۵	۱	۶	۸	۱		۲	۰	۴	۸	۱	۰	۲
۶	۱	۷	۰	۰			۴	۰		۱	۲	۱
۷		۸		۳	۹	۶			۳	۰	۰	۰
۸	۱	۹	۲		۱	۹	۸	۸	۱		۲	۷
۹	۱		۱	۱	۰		۷	۶	۵	۴	۳	۲
۱۰	۹	۱	۹	۲	۰		۶	۴		۱	۰	
۱۱		۴	۴		۰		۵	۰				
۱۲		۴	۵		۱	۱	۰	۰	۱	۱	۲	۳
۱۳				۱						۱	۰	۵

### اقتصاد مقاومت؛ تولید و شغل

## رسانه‌گران

نموده اشتراک،  
پیش از یادداشت، مبلغ اشتراک به شماره حساب **۰۰۰۰۰۶۹۶۹۳** باشکن نهار،  
شنبه و سه شنبه از زمانی که اشتراک شد و شرکت افتادت، به روشن زیر،  
مشترک مجله شوهد:

۱. مراجده به وکاه مجلات رشد به نشان: [www.roshdmagir.com](http://www.roshdmagir.com)  
اشتراك به همراه ثبت مشخصات فيش و زير:

۲. ارسال اصل فيش يادگاري همراه شماره سيماهه **۰۰۵۴۵۷۸۸۷۸۷۸** اتفاقاً فيش را نزد خود نگه داريد.

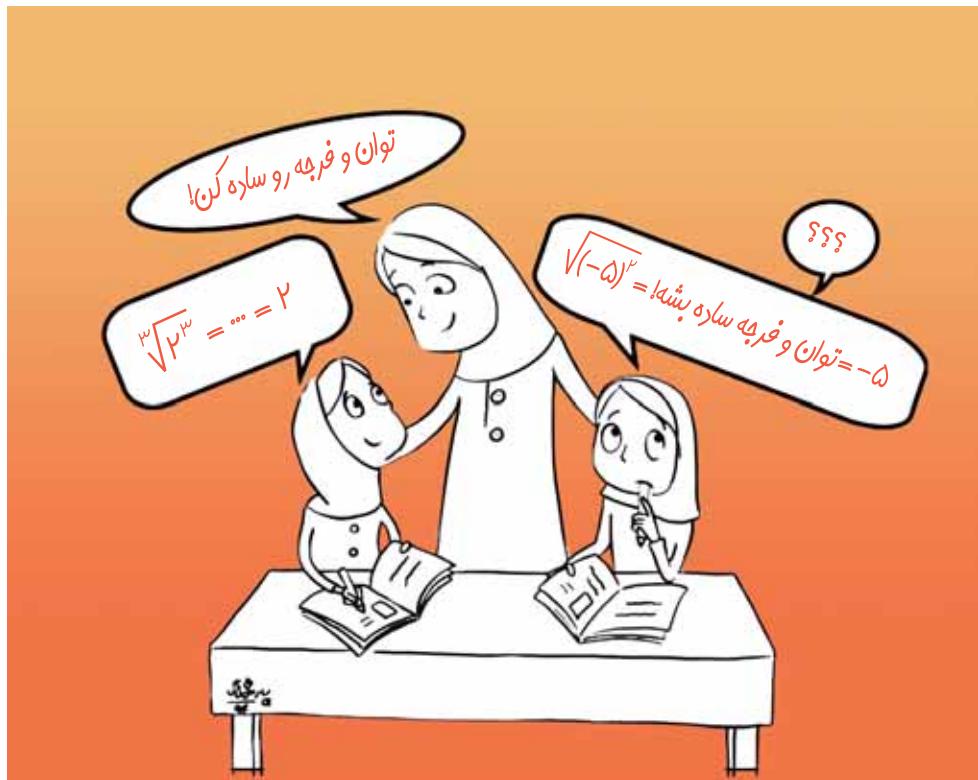
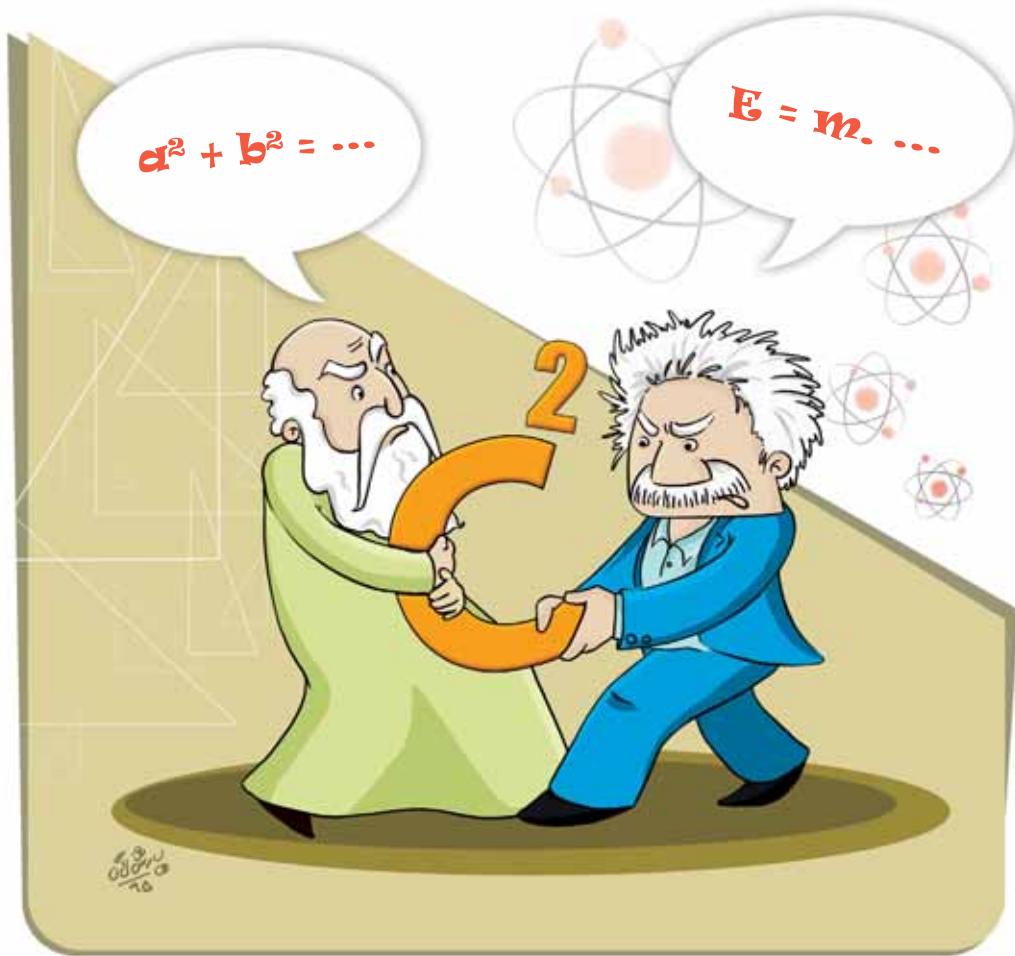
عنوان مجلات در خواسته:

نام و نام خانوادگی:	تاریخ تولد:	میزان تChuckلات:
تلفن:	نشانی کامل پستی:	آستان:
خیابان:	شهرستان:	پلاک:
شماره پستی:	شماره فیش يادگار:	مبلغ پرداخت:
مايل:	ملحق:	اکر قبلاً مشترک مجله را شد و مدارج شماره اشتراك فود را پرسید:
امضا:		

شماره: **۱۵۸۷۳۶۷۵۷۳۴۱** تهران صندوق پستی: **۰۲۱-۸۸۷۰۰۰۰**

شماره: **۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰** Email: [Eshterak@roshdmagir.ir](mailto:Eshterak@roshdmagir.ir)

هزينه اشتراك مبالغ مجلات شخصي (رشد شماره): **۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰** ۲ دلار  
هزينه اشتراك مبالغ مجلات شخصي (رشد شماره): **۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰** ۰ دلار



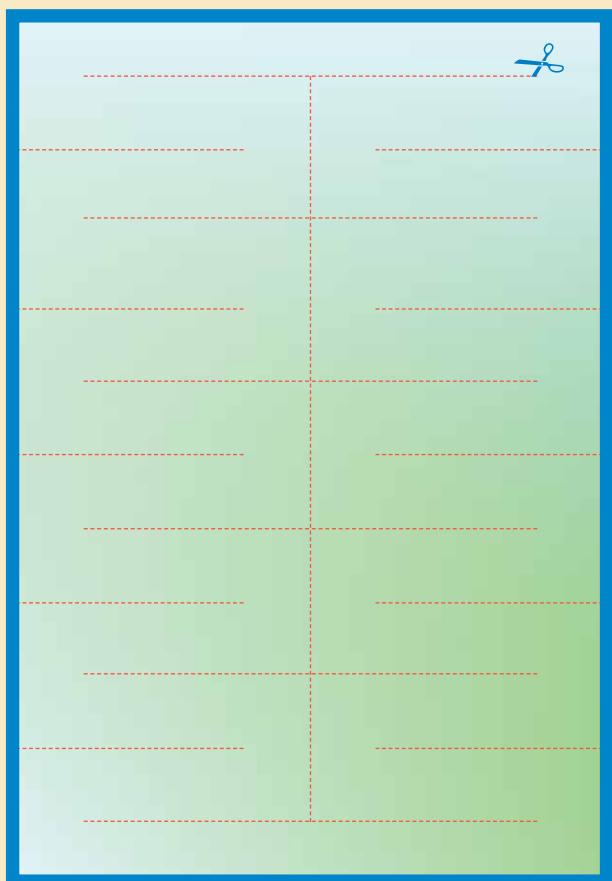
پوشنگ امانی - دبیر ریاضی از شهرستان سقز



بعد کاغذ را باز کنید. خواهید دید که سو راخ بزرگی در آن ایجاد می شود (با حفظ مرزهای بیرونی کاغذ) که می توان از آن عبور کردا! اگر فاصله خطوط متواالی را کم تر کنید، سو راخ را می توانید به صورت نامحدودی بزرگ کنید؛ طوری که یک اتومبیل هم از آن عبور کند!



چطور در یک برگ کاغذ معمولی سوراخی ایجاد کنیم که خودمان بتوانیم از آن بگذریم؟ اصلاً شوخی نیست و کاملاً هم واقعی است. شاخه‌ای از ریاضیات به نام «توبولوژی»<sup>۱</sup> به ما می‌گوید که چطور می‌توانیم با تغییر دادن شکل اجسام هندسی آنها را (بدون اینکه در تعداد اضلاع یا وجههای آنها تغییری به وجود آید)، تغییر حالت بدھیم. یک برگ کاغذ A4 معمولی را بردارید و مطابق نقشه زیر از روی خطوط رسم شده برش بزنید:



\*پی‌نوشت‌ها

۱. Topology (مکان‌شناسی) یکی از شاخه‌های جوان ریاضیات است که از تلفیق مباحث هندسه و نظریه مجموعه‌ها به وجود آمده است. شاید بتوان منشأ آن را مقاله‌ای از جان لیستنگ (1882-1880)، ریاضی‌دان آلمانی، در سال ۱۸۴۷ دانست.



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کanal سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)