برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

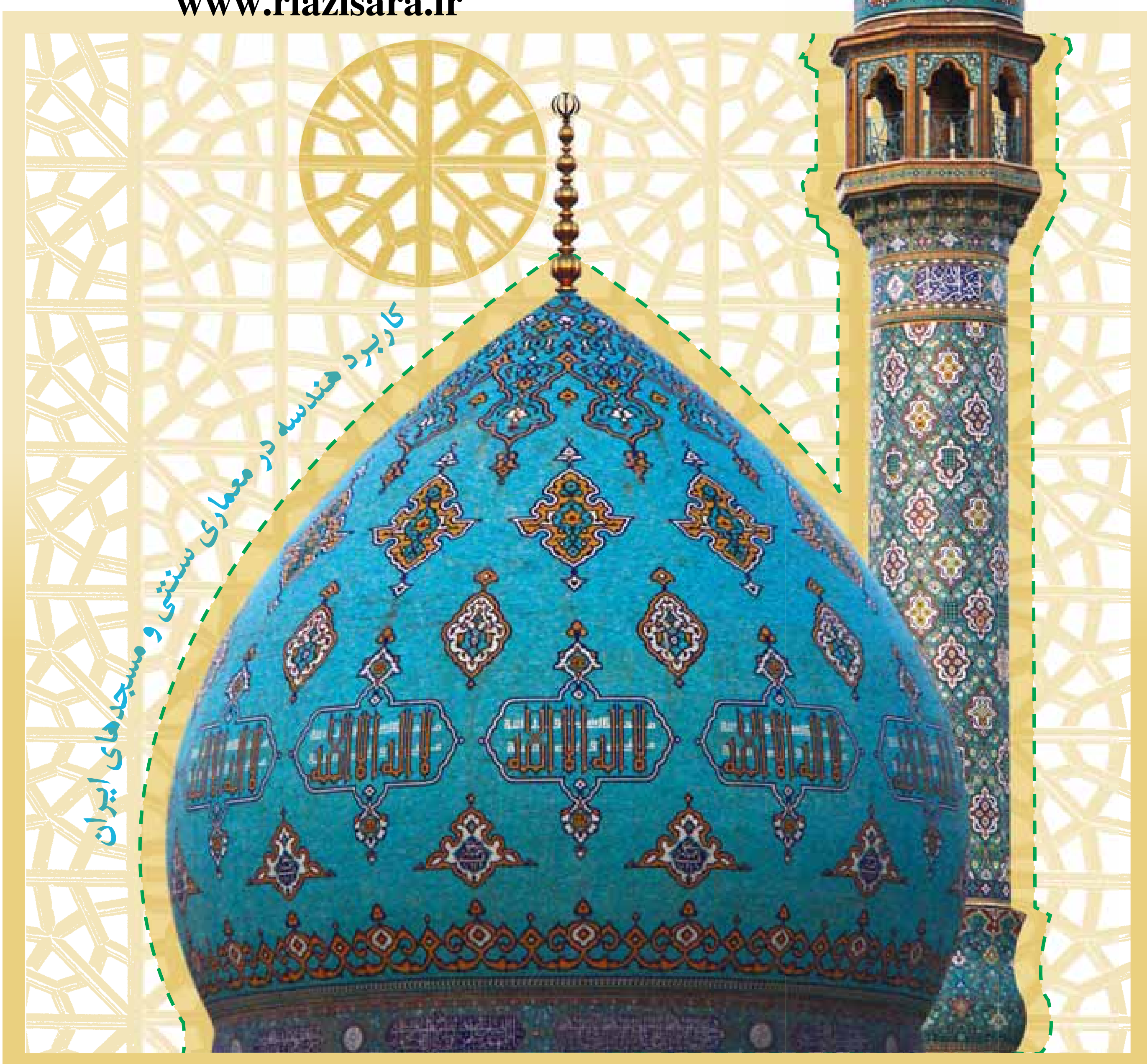
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد ۱

- دورهٔ بیست‌وهفتم
- شمارهٔ ۱۰۳
- مهر ۱۳۹۶
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



- بحثی در باب کاربرد هندسه در صنعت
- «پی» در تنگنایی تعیین‌کننده!
- سه‌گانه‌های فیثاغورس
- شرکت‌های هرمی- واقعیت یا فریب!

زنده‌یاد پروفسور مریم میرزاخانی (۱۳۹۶–۱۳۵۶)

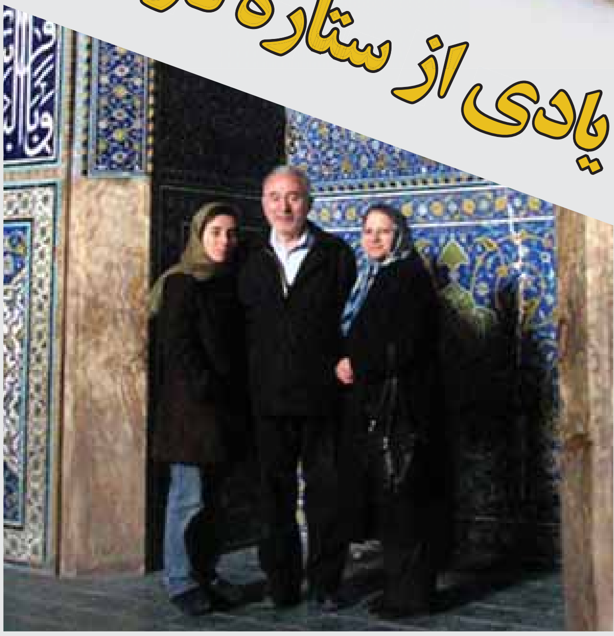
یادی از ستارهٔ درخشان آسمان ریاضی ایران

سه سال پیش همین موقع‌ها بود که داشتیم شماره مهرماه مجله را می‌بستیم که خبری ناگهانی باعث شد، صفحه‌های ۲ و ۳ جلد را در لحظهٔ آخر تغییر بدهیم: «مریم میرزاخانی ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی موفق به دریافت مدال «فیلــدز»، عالی‌ترین جایزهٔ جهانی ریاضیات شد.» با سرعت متنی را تهیه کردیم و این دو صفحه را در شمارهٔ مهرماه ۱۳۹۳ به معرفی او و کارهایش اختصاص دادیم. اما باور نمی‌کردیم که به فاصله‌ای چنین اندک باز هم باید صفحهٔ ۲ جلد مجلهٔ مهرماه همان را به او اختصاص دهیم و این‌بار با خبر تلخ وداع او که نه‌تنها جامعهٔ ریاضی، بلکه کل کشورمان را در غم فقدان این نابغهٔ جوان اندوهگین کرد.

او را از سال‌های ابتدایی دههٔ ۱۳۷۰ که با شایستگی دو سال پیاپی مدال طــلای المپیاد ریاضی دانش‌آموزی جهــان را به گردن آویخت می‌شناختیم، تا هنگامی که از دانشگاه صنعتی شریف در رشتهٔ ریاضی فارغ‌التحصیل شــد. به هاروارد رفت و دکتــرای ریاضی گرفت، و در دانشگاه استنفورد به تدریس ریاضی پرداخت و به قلهٔ افتخار ریاضی دست یافت.

وقتی مدال فیلدز گرفت، یکی از شخصیت‌های علمی دنیا او را با مادام کوری مقایسه کرد که نخستین زن برندهٔ جایزهٔ نوبل بود و مریم نخستین زن برندهٔ مدال فیلدز بود. عجبا که فرجام او هم بی‌شباهت به فرجام همتایش نبود. ریاضی‌دانان بسیاری بوده‌اند که در سنین پایین و در اوج شایستگی از دنیا رفته‌اند. از جمله امی نوتر، ریاضی‌دان آلمانی (۱۹۳۵–۱۸۸۲) که زمانی او را بزرگ‌ترین ریاضی‌دان زن می‌دانستند و فقط ۵۳ سال عمر کرد. ریاضی‌دان بزرگ روس، خانم سونیا کووالنسکی که فقط ۴۱ ســال عمر کرد. وقتی آبل، ریاضـــی‌دان نام‌دار نروژی که بحث‌های بسیاری در ریاضیات مدیون اوست، در ۲۶ سالگی درگذشت، هرمیت، ریاضی‌دان فرانسوی گفت: «از او برای ریاضی‌دانان چیزی باقی مانده است که آن‌ها را ۵۰۰ سال مشغول می‌کند.»

ما معتقدیم میراث مریم میرزاخانی هم تا سده‌ها و هزاره‌ها برای ریاضی‌دانان باقی خواهد ماند. یادش گرامی باد!



رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهفتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۳
■ مهر ۱۳۹۶
■ شمارهٔ ۱
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۸۰۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

حرف اول

احساس دوگانه

همیشه آغاز سال تحصیلی و مهرماه برایم پر از خاطرات تلخ و شیرین بوده است. در دورهٔ ابتدایی رفتن یک دوست و هم‌کلاسی از مدرسه و یا حتی از کلاسی به کلاس دیگر برایم تلخ بود و البته تلخ‌تر از آن اینکه معلمی را که یک‌سال تحصیلی هر روز با او بودیم و با هم یاد می‌گرفتیم و با هم بازی می‌کردیم، دیگر در کنار و در کلاس خودمان نمی‌دیدیم. اما آشنایی با دوستان جدید و معلم جدید بسیار شیرین بود و این احساس دوگانه تا یکی دو هفته با ما بود و کم‌کم قسمت شیرین آن غالب می‌شد.

همیشه بهترین دوست‌های من که هیچ‌گاه از من جدا نمی‌شدند و هیچ‌گاه مرا تنها نمی‌گذاشتند، کتاب‌هایم بودند. بعد از کتاب درسی، کتاب‌های آموزشی استاندارد و مجله‌های علمی، مثل مجله ریاضی «یکان»، از صمیمی‌ترین دوستانم بودند.

امیدوارم «برهان» نیز بتواند جایگاهی را نزد شما به‌عنوان یک دوست صمیمی داشته باشد، و شما در درس ریاضی بتوانید به‌عنوان یک منبع قابل اطمینان و قوی به آن اتکا کنید. با استفاده از مسائل طرح شده مقاله‌های کمک‌درسی و مقاله‌های آموزشی، معماها و سرگرمی‌های ریاضی، مصاحبه‌ها و گزارش‌ها، و خلاصه همهٔ مطالب متنوع موجود در آن، اوقات مطالعهٔ علمی خود را پر کنید. این مجله را از خود بدانید و با آن در ارتباط باشید. برای ما مطلب ارسال کنید، مسائل را حل کنید و با توضیح کافی برای ما بفرستید. ایرادها و اشکال‌های درسی خود را برایمان بفرستید و منتظر جواب‌های ما در شماره‌های بعدی باشید.

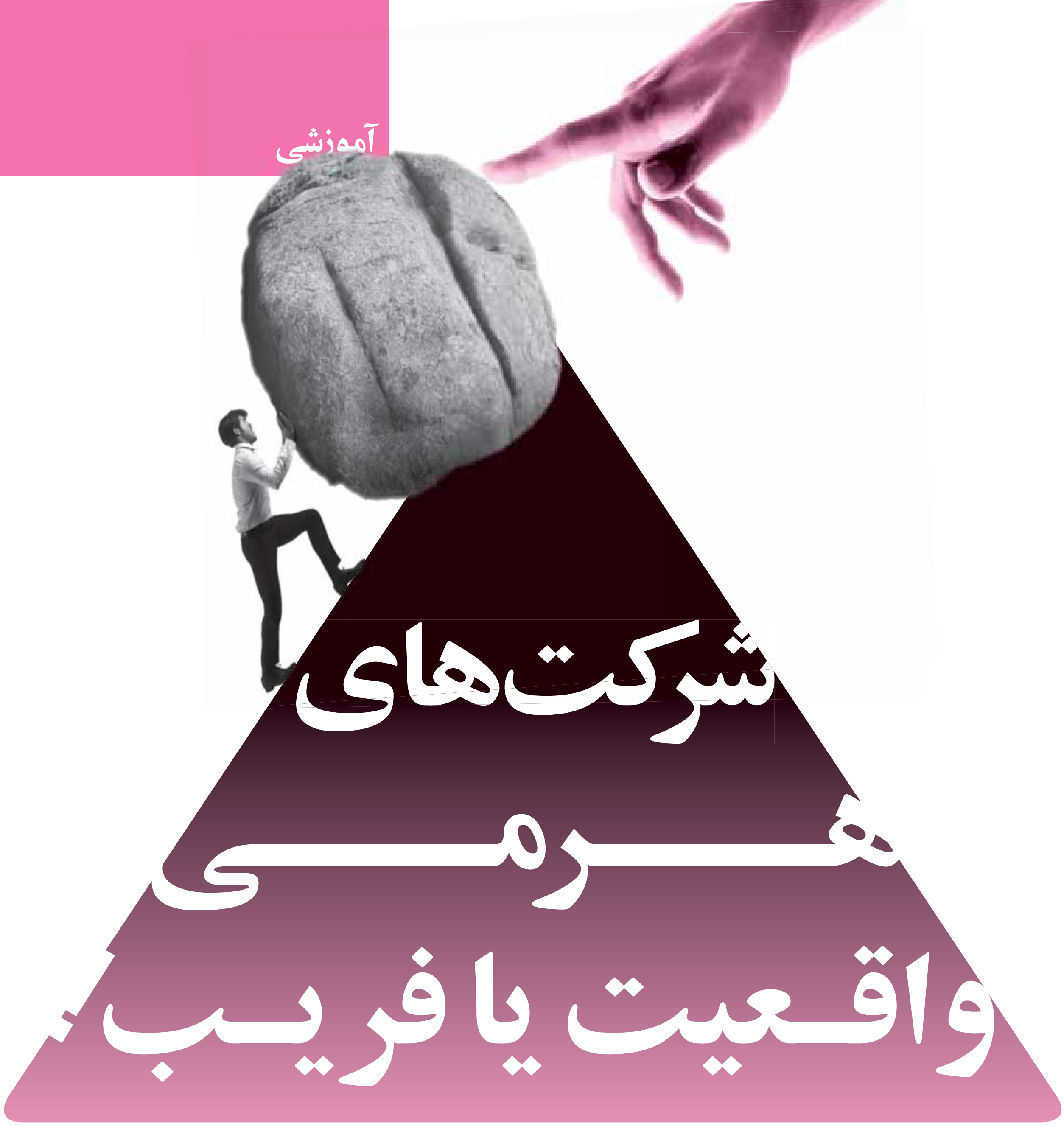
ما از این ماه و هر ماه تا آخر اردیبهشت با شما و در کنار شما هستیم. راه‌های ارتباطی شما با ما به قرار زیر است:

۱. پست الکترونیکی: Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

۲. نامه به آدرس دفتر مجله: تهران صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ مجله رشد برهان متوسطهٔ ۲

حمیدرضا امیری

سردبیر



شرکت‌های هرمی واقعیت یا فریب!

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

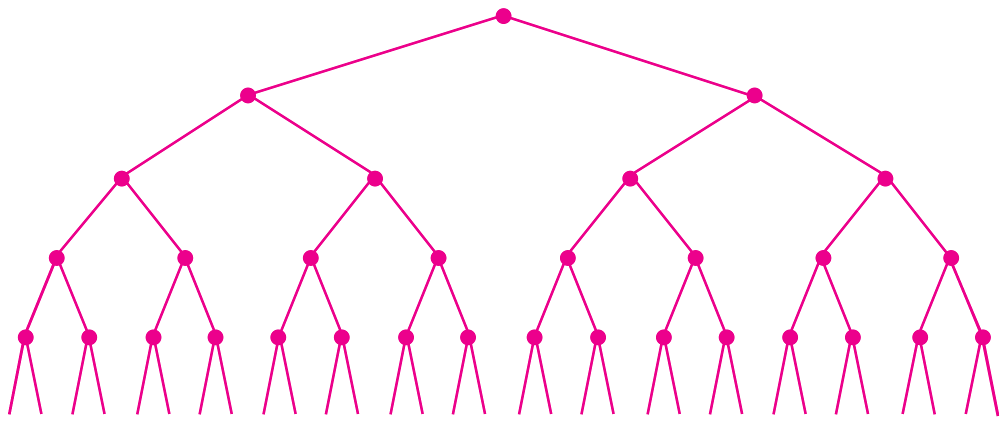
مقدمه

بی‌شـــک دنیای ریاضی دنیای نامحدودی است و زیبایی آن هم شـــاید به‌همین دلیل باشـــد. اما دنیای مـــادی دنیایی محدود و متناهی اســـت. در بســـیاری از مســـائل، اگر این فرض محـــدود و متناهی بودن در نظر گرفته نشـــود، جواب نادرســـتی خواهیم داشت و بی‌شـــک به دنبـــال آن ضرر و زیـــان را در پی خواهد داشت.

در تاکسی یا در یک مهمانی نشسته‌اید که شخصی با شـــما گرم می‌گیرد و صحبتی از شرکتی می‌کند که قرار اســـت همه را پول‌دار کند و فقر را از بین ببرد. به این صورت که شـــما مبلغی را بـــه او می‌دهید و عضو شـــرکت می‌شوید. ســـپس دو نفر (برخی موارد سه یا چند نفر) عضو می‌گیرید و شـــما نیـــز از آن‌ها مبلغی دریافت می‌کنید که به پول خود می‌رسید و بخشی از آن را هم به حساب شرکت و وی می‌پردازید. به این دو نفر زیرشاخهٔ شما گفته می‌شود.

از اینجا به بعد هر کسی که به زیرشاخه‌های شما اضافه شود، به حساب شما مبلغی واریز می‌شود و شما به‌همین ســـادگی پول‌دار می‌شوید. و به‌همین ترتیب، همه پول‌دار می‌شوند و فقر ریشه‌کن می‌شود. معمولاً شکلی شبیه به شکل ۱ هم برای شما رسم می‌شود تا اطمینان شما بیشتر شود.

در این شـــکل، نقطه‌هـــا افراد عضو را مشـــخص می‌کنند و مرحلهٔ یک تا شش نمایش داده شده است که به ترتیب ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و... نفر هستند. تا اینجای کار همه‌چیز منطقی است، اما چرا در عمل چنین اتفاقی نمی‌افتد و بیشـــتر افراد همهٔ اموال خود



شکل ۱. شرکت هرمی با دو زیر شاخه

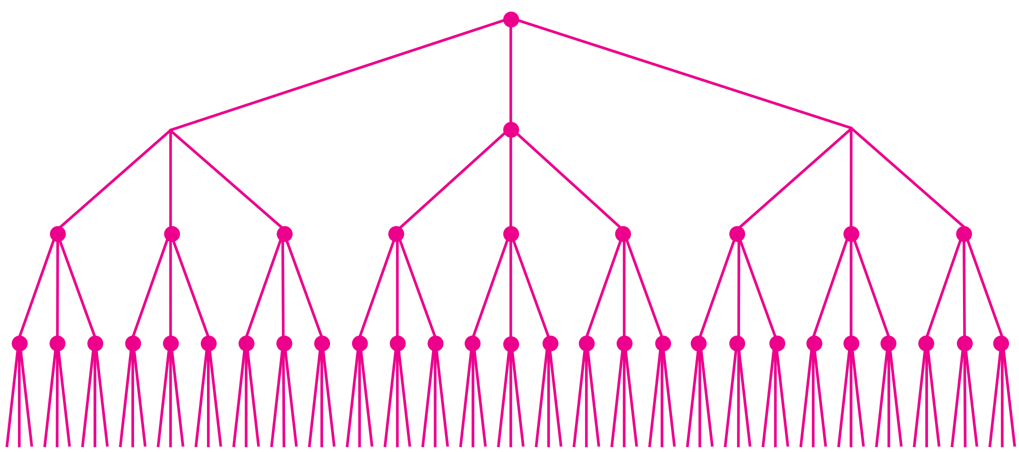
را از دســت می‌دهنــد و بیچاره می‌شــوند. اگر کمی حوصله به خرج دهیم به این نتیجه می‌رسیم که تعداد اعضای جدید در هر مرحله دو برابر می‌شــود پس اگر با ماشین‌حساب جواب‌ها را به‌دست آوریم به عددهای زیر می‌رسیم:

{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, ۱۲۸, ۲۵۶, ۵۱۲, ۱۰۲۴, ۲۰۴۸, ۴۰۹۶, ۸۱۹۲, ۱۶۳۸۴, ۳۲۷۶۸, ۶۵۵۳۶, ۱۳۱۰۷۲, ۲۶۲۱۴۴, ۵۲۴۲۸۸, ۱۰۴۸۵۷۶}

یعنی در مرحلهٔ بیست‌ویکم، ۱/۰۴۸/۵۷۶ نفر باید عضو جدید به شــرکت اضافه شوند. حال اگر شما در یک شهر با جمعیت یک میلیون نفر زندگی کنید، باید علاوه بر جمعیت شــهر، بیش از ۴۸ هزار نفر دیگر هم عضو پیدا کنید. تازه اعضای قبلی هم هســتند که باید در نظر گرفته شــوند. تا اینجا فقط از ماشین‌حســاب اســتفاده کردیم. حال اگر بخواهیم کمی از ریاضیات استفاده کنیم، می‌بینیم که این عددها جمله‌های یک دنبالهٔ هندســی هستند که در آن داریم: $q=۲$ و $a=۱$. پــس جملهٔ عمومــی آن $a_n=۲^{n-۱}$ و تعداد کل اعضای شــرکت تا مرحلهٔ n نیز $s_n=۲^n-۱$ اســت. بنابراین تا مرحلهٔ بیست و یکم تعداد اعضای شرکت ۲/۰۹۷/۱۵۱ نفر می‌شود.

اگر شــما تازه عضو این شبکه شوید، باید از خارج این مجموعهٔ دو میلیون نفری دنبال زیرشاخه بگردید. حال اگر در مرحلهٔ ۲۶ جمعیت شــرکت را حســاب کنیم، جمعیت آن ۶۷/۱۰۸/۸۶۳ نفر اســت که تقریباً معادل جمعیت ایران می‌شــود. در صورتی‌که شــبکه تا مرحلــهٔ ۳۰ ادامه پیدا کند، تعداد اعضای شــرکت $۲^{۳۰}-۱=۱۰۷۳۷۴۱۸۲۳$ نفر می‌شود که تقریباً معادل جمعیت کشور چین است.

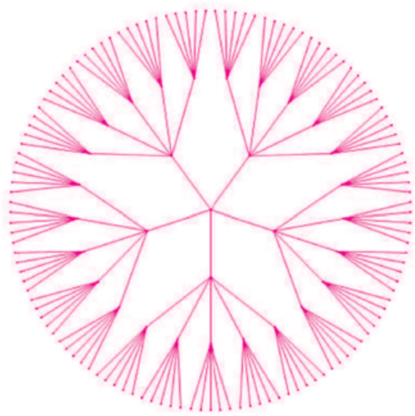
فاجعه وقتی عمیق‌تر می‌شــود که زیرشــاخه‌ها بیشتر شوند. مثلاً اگر شرکت با زیرشاخه‌های سه‌تایی باشد، شبکهٔ۲ به‌وجود می‌آید.



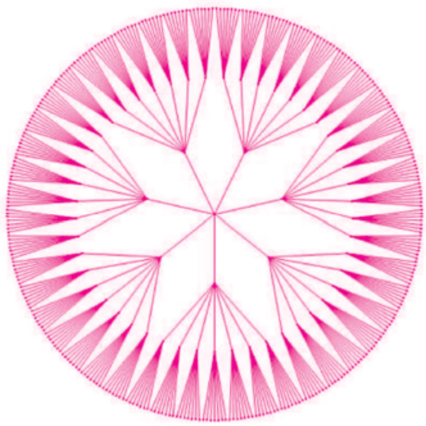
شکل ۲. شرکت هرمی با سه زیرشاخه

این شــرکت اگر تا مرحلهٔ ۲۱ شــرکت جلو برود، جمعیت آن ۵/۲۳۰/۱۷۶/۶۰۱ می‌شــود که برابر جمعیت چند قاره می‌شــود. شکل‌های ۳ و ۴، شــرکت هرمی با ۵ و ۷ زیرشاخه را به نمایش می‌گذارند.

در زیبایی این شــکل‌ها که شــکی نیســت. آن‌ها در هندســهٔ فرکتال بررسی می‌شوند. یکی از ویژگی‌های این شــکل‌ها، شباهت جزء به کل آن‌هاست، یا به عبارت دیگر، خود متشابه بودن. به این معنی که شما هر قسمت آن را که جدا کنید، با رشد کردن، شــکلی شبیه شکل اصلی به‌وجود می‌آورد. این موضــوع در فضای نامحدود ریاضی امکان‌پذیر اســت، ولی در دنیای محدود و تقریباً هفت میلیارد نفری انسان‌ها امکان‌پذیر نیست. در حال حاضر شــرکت‌های دیگری هم وجود دارند که ساختاری شبیه شرکت هرمی دارند و در حال فعالیت هســتند، اما ظاهری متفــاوت دارند. این شــرکت‌ها هم دنیای نامحدود ریاضی را با دنیای محدود انســان‌ها یا دنیای مادی شبیه می‌کنند و اعضــا را فریب می‌دهند و با یک فرض نادرســت مســئله را حل می‌کننــد. در صورتی که اگر اعضا کمی فکر کنند و دست به محاسبه و حل مسئله بزنند، چنین کلاهی سرشان نخواهد رفت.



شکل ۳. **شرکت هرمی با پنج زیرشاخه**



شکل ۴. **شرکت هرمی با هفت زیرشاخه**

مردی که همه‌چیز می‌دانست

- **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان • **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی • **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی • **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
- **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی • **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری • **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت • **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
- **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان • **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان

■ تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

احسان یارمحمدی

اشاره

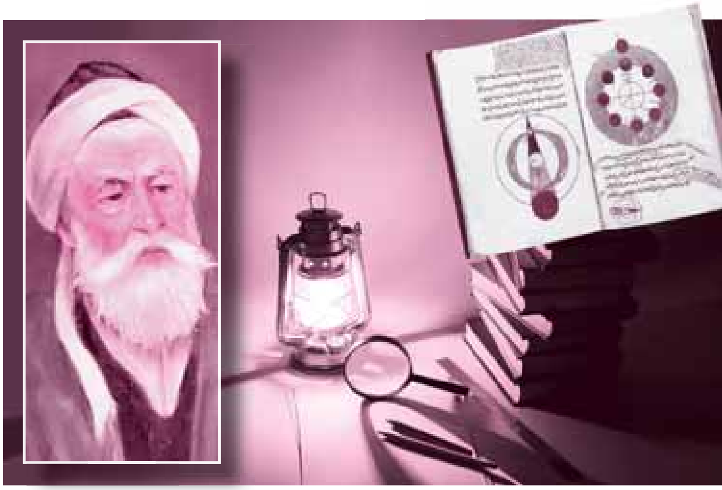
ابوالوفا محمدبن محمدبن یحیی‌بن اسماعیل‌بن عباس زادهٔ ۲۱ خرداد ۳۱۹ خورشیدی در «بوژگان»، از توابع ولایت «جام» در نیشابور، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس شهیر ایرانی است. او روش‌های محاسبه‌ای را که بازرگانان، کارمندان دوایر مالیه، و مساحان زمین در شرق اسلامی در کارهای روزمرهٔ خود به‌کار می‌بردند، به شکل منظم مدون ساخت و همچنین روش‌های متداول را اصلاح کرد. او از بعضی روش‌های ناصحیح نیز انتقاد کرد. در این مقاله با معرفی مستند _ابوالوفا بوزجانی_ از مجموعهٔ مستند «_سرزمین ستاره‌ها_»، قصد داریم تا ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «_نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران_» به قلم زنده‌یاد _پرویز شهریاری_ (۱۳۹۱-۱۳۰۵) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ توسط «انتشارات علمی و فرهنگی» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و در ادامه مطالبی از مستند مزبور ارائه خواهیم کرد.

محمد فرزند محمد فرزند یحیی فرزند اسماعیل فرزند عباس، مشهور به «ابوالوفای بوزجانی»، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ چهارم هجری قمری است که در اول رمضان سال ۳۲۸ در «بوزجان»، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. مقدمه‌های ریاضیات زمان را همان‌جا نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در ۲۵ سالگی به بغداد رفت و به خدمت **شرف‌الدوله** فرزند **عضدالدوله** درآمد. در رصدخانه‌ای که شرف‌الدوله در بغداد ساخته بود، به سرپرستی **ابوسهل بیژن** فرزند **رستم کوهی** مشغول کار شد. امضای **ابوالوفا محمدبن محمد الحاسب** زیر تأییدی که بر رصد بیژن رستم کوهی در روز سه‌شنبه، سه شب مانده به آخر جمادی‌الاخر سال ۳۸۸ هجری قمری، یازدهم شهریور سال ۳۵۷ یزدگردی نوشته شده و به خط خود ابوالوفاست، دیده می‌شود.

ابوالوفا هنگام حیات مشهور بود و با دانشمندان هم‌عصر خود رفت و آمد و مکاتبه داشت. **ابن‌ندیم** که هم‌عصر **ابوریحان** است، در **«الفهرست»** از او به‌عنوان دانشمند نام می‌برد و سیاههٔ نوشته‌های او را می‌آورد. ابوریحان بیرونی او را می‌شناخت و با وی مکاتبه داشت. وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد هم‌زمان ماه‌گرفتگی با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه‌های دو رصد را که در دو نقطهٔ مختلف انجام گرفته بود، برای یکدیگر بفرستند و با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از نوشته‌های اندیشمندان ایرانی و یونانی، مثل «اصول» **اقلیدس**، «جبر و مقابلهٔ» **خوارزمی**، «جبر» **دیوفانت**، «جبر» **هیپارخوس (ابرخس)**، «مجسطی» **بطلمیوس** و غیره، تفسیر نوشت و خود زیجی تنظیم کرد. ابتکارها و نوآوری‌های او در مثلثات و هندسه است. او سوم رجب ۳۸۸ در بغداد درگذشت.

چهار نوشتهٔ اصلی بوزجانی به ما رسیده است که از آن میان، به ویژه «مجسطی» و «اعمال هندسی» اهمیت بسیار دارند. دو کتاب بوزجانی به نام‌های **«آنچه از علم حساب مورد نیاز کاتبان و حسابداران است»** و **«آنچه از اعمال هندسی مورد نیاز صنعتکاران است»**، نمونه‌های مشخصی از گونهٔ کاربردی ریاضیات این دوره هستند. بوزجانی در حساب عملی خود، دو بخش اول را به بحث‌های خالص اختصاص می‌دهد و سپس، از بخش سوم تا هفتم، آمیزه‌ای از ریاضیات نظری و کاربردی را (مانند صرافی، مساحی، کارهای بازرگانی و محاسبه‌ای که مورد نیاز کارگزاران دولتی است) مطرح می‌کند.

در کتاب اعمال هندسی، در آغاز از ابزارهایی که برای ساختمان‌های هندسی لازم است (خط‌کش، پرگار و گونیا) صحبت می‌کند. بعد ساده‌ترین مسائل ساختمانی هندسه را (همچون تقسیم پاره‌خط راست یا تقسیم زاویه به دو بخش برای رسم عمود بر خط راست و بر صفحه، رسم خط‌های راست موازی، رسم مماس بر دایره، و پیدا کردن مرکز دایره) شرح می‌دهد و سپس به رسم شکل‌های پیچیده‌تر (مانند چندضلعی‌هایی با ضلع‌ها یا زاویه‌های برابر، شکل‌های محاطی و محیطی، تقسیم مثلث یا چهارضلعی به دو یا چند بخش هم‌ارز، تبدیل



یک مربع به چند مربع و برعکس، و...) می‌پردازد.

بوزجانی همه‌جا با استدلال و گاه با چند روش، حل مسئله را ارائه می‌دهد و به کاربردهای عملی راه‌حل‌های خود هم توجه دارد. تلفیق نظریه و کاربرد را در جمله‌هایی که برای نمونه از ترجمهٔ فارسی اعمال هندسی بوزجانی انتخاب شده است، به خوبی می‌توان دید: «... اکنون در این باب قسمت کردن و بریدن بعضی شکل‌ها را به چند بخش، آن‌طور که صنعتکاران به‌کار می‌برند، می‌آوریم... اگر از مهندسی بپرسید می‌خواهیم مربعی از چند مربع دیگر بسازیم... اگر بخواهیم زمین مربع شکلی را بین دو نفر به دو بخش برابر تقسیم کنیم و راهی هم برای آن‌ها در نظر بگیریم که پهنای آن به اندازهٔ معلوم باشد...».

بوزجانی در کتاب اعمال هندسی خود، به شکل‌های فضایی هم توجه می‌کند و به‌ویژه دربارهٔ رسم شکل روی کره و ساختن چندوجهی‌های منتظم و نیمه‌منتظم، مسئله‌های متعددی را حل می‌کند. در ضمن شکل‌های زینتی هندسه را هم که در گل‌دوزی، قالی‌بافی و کاشی‌کاری کاربرد دارند، فراموش نمی‌کند.

چهار نوشتهٔ اصلی بوزجانی به ما رسیده است که از آن میان، به ویژه «مجسطی» و «اعمال هندسی» اهمیت بسیار دارند. دو کتاب بوزجانی به نام‌های «آنچه از علم حساب مورد نیاز کاتبان و حسابداران است» و «آنچه از اعمال هندسی مورد نیاز صنعتکاران است» نمونه‌های مشخصی از گونهٔ کاربردی ریاضیات این دوره هستند

از شـــاهکارهای ابوالوفـــای بوزجانی کتابی اســـت با عنوان مجســـطی یـــا **«الکامل»** کـــه آن‌را بر مبنای مجســـطی بطلمیوس نوشته است. برخلاف نظر برخی مورخان، این کتاب تحریـــر تازه‌ای از کتاب بطلمیوس نیســـت. احتمال داده می‌شـــود که **زیج بوزجانی** که نســـخه‌ای از آن به جای نمانده است، همان مجسطی ابوالوفا باشـــد. البته ابوریحان بیرونی آن‌ها را دو نوشتهٔ جداگانه دانســـته اســـت. بوزجانی در کتاب مجسطی خود، آنچه برای توضیح حرکت‌های آسمانی لازم است، می‌آورد که در واقع چیزی جز پایه‌گذاری کامل مثلثات نیســـت. او با روش خود سینوس ۳۰ دقیقه را به کمک یک نابرابری، تا هشـــت رقم بعد از ممیز به‌دست آورده است، ســـپس جدول ســـینوس‌ها را ۳۰ دقیقه به ۳۰ دقیقه تنظیم کرده و بعد از تعریف مفهوم دقیق تانژانت و سکانت، جدول‌های تانژانت‌ها را تشکیل داده است.

بوزجانی در کتاب مجسطی خود، آنچه برای توضیح حرکت‌های آسمانی لازم است، می‌آورد که در واقع چیزی جز پایه‌گذاری کامل مثلثات نیست

بوزجانی در مجســـطی، این رابطه‌های مثلثاتی را ثابت کرده است:

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

او شـــعاع دایره را R می‌گیرد، ولی بلافاصله توضیح می‌دهد، اگر شـــعاع دایره را واحد بگیریم، به رابطه‌های ساده‌تری مانند:

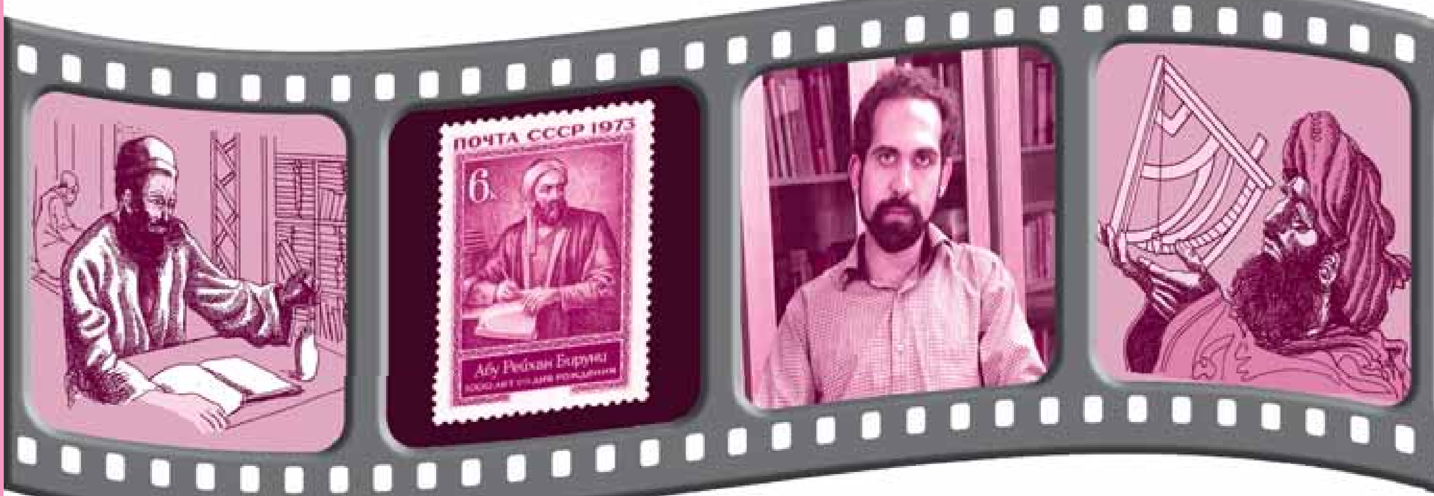
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

می‌رســـیم. ســـپس به مثلث‌های کروی می‌پـــردازد و معادله‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی به‌دست می‌آورد. در مثلث کروی غیرمشخص رابطهٔ سینوس‌ها را پیدا می‌کند: $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$. گرچه **ابونصر عراق**، **خجندی** و **کوشیار گیلانی**، هم‌عصران بوزجانی هم شکل مغنی را (که همان قضیهٔ سینوس‌هاست) به‌دست آورده بودند. آن‌گاه شـــکل ظلی (یعنی قضیهٔ تانژانت‌ها) در مثلث کـــروی را ثابت می‌کند که کار محاســـبه‌های اخترشناسی را بسیار ساده می‌سازد. پیش از آن از شکل قطاع (قضیهٔ هندســـی **منلائوس**) استفاده می‌کردند که کار محاسبه را دشوار و طولانی می‌کرد.

در ادامه بـــه ارائهٔ بخش‌هایی از مســـتند «ابوالوفا بوزجانی» از مجموعهٔ مســـتند «ســـرزمین ستاره‌ها» می‌پردازیم و شـــما ریاضی‌آموزان را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

استدلال‌های هندسی را از اعمال حساب جدا ساختیم تا اگر مهندسان و محاسبانی باشند که هر یک به فن دیگری آشـــنایی نداشته باشند، بتوانند به تنهایی کتاب را به‌کار گیرند و کسی که در هر دو فن دست دارد، از هر دو بهره‌مند شود.
مجسطی ـ ابوالوفا بوزجانی

هر جاده‌ای که ســـاخته می‌شود، هر خرید و فروش زمین، هر آبیاری، و هر ساخت‌وســـاز به اندازه‌گیری نیاز دارد. در گذشته این کار برعهدهٔ «مساحان» بود. مساحی اندازه‌گیری زاویه‌ها و فاصله‌ها روی زمین و اســـتفاده‌ی دقیق از آن‌ها در ترسیم نقشه یا همان نقشه‌برداری است. از مساحی برای طراحی و احداث جاده‌ها، ساختمان‌ها، املاک و مشخص کردن مرز بین املاک و چره‌ها کمک می‌گیرند. رومیان از فناوری‌های ساده در مساحی برای تراز کردن زمین اســـتفاده می‌کردند و این امر برعهدهٔ مسلمانان اســـپانیا بود. آن‌ها تراز مثلث ساده و شاقول را به علم مســـاحی افزودند. در گذشته گروه‌های مساح همانند امروز پروژه‌های بزرگی مانند مساحی مسیرهای آبیاری را به انجام می‌رســـانند. در آندلس یا اســـپانیای



امروز، این گروه‌ها را «مهندس» می‌خوانند و در مشـــرق اسپانیا به آنان مساح می‌گفتند.

امـــروزه برای تعیین محل نقاط ناشـــناخته از قوانین مثلثـــات و فناوری‌هـــای پیشـــرفته‌ای چون «سیســـتم موقعیت‌یاب جهانی»[1] یا «جی‌پی‌اس» اســـتفاده می‌شود. بیشتر ماشین‌های امروزی دارای این سیستم هستند و به کمک آن شما در هر لحظه می‌توانید موقعیتتان را در هر نقطه از زمین شناســـایی کنید. اگر تا پیش از قرن ســـوم هجری شمســـی زنجیره‌ای از اندیشمندان مسلمان سنگ بنای مثلثات را نمی‌گذاشتند و با کارهای خود راه را برای دیگر دانشمندان هموار نســـاخته بودند، امروزه این امکان فراهم نمی‌شد. مثلثات برای استفاده در ستاره‌شناسی ایجاد شده و کاربردهای اولیهٔ آن نیز در همین‌باره بوده است.

واژگان مثلثات در متون فارسی و عربی قدیم با امروز تفاوت داشته است. آنچه یونانی‌ها داشتند، هندسهٔ کره بود. آنچه مسلمانان درست کردند، مثلثات است و کم‌کم مثلثات در دورهٔ اســـلامی خودش را از نجوم جدا کرد و شـــاخهٔ خاصی از ریاضیات شد. مثلثات از بطن نجوم که یکی از نیرومندترین مطالعات علمی مســـلمانان، به‌ویژه برای تعیین وقت نماز اســـت، متولد شـــد. اما منجمان یونانی پیش از مســـلمانان از انـــدازهٔ اضلاع و زاویه‌های مثلث برای محاسبهٔ حرکت خورشید، ماه و پنج سیاره‌ای که در آن زمان شناخته شده بودند، استفاده می‌کردند. یونانیان برای تعیین موقعیت خورشید، ماه و سیارات و حل مسائل هندســـی، جدول‌ها و قواعدی تنظیم کرده بودند. جامع‌ترین نوشـــته‌ها دربارهٔ این موضوع در کتاب مجسطی بطلمیوس که در نیمهٔ نخست قرن میلادی در اسکندریه می‌زیست، وجود داشت. این رسالهٔ بطلمیوس از طریق مسلمانان به دانشمندان اروپایی رسید.

ابوالوفا بوزجانی در سال ۳۲۸ هجری قمری در منطقهٔ بوزجان که در ۱۸ کیلومتری شرق تربت جام کنونی در شرق خراسان ایران قرار دارد، متولد شد. مقدمات علم حساب را نزد عمو و دایی خود فرا گرفت و پس از آن در ۲۰ سالگی راهی بغداد شد که در آن زمان مرکز علمی معتبری محسوب می‌شـــد. او از بزرگ‌ترین دانشمندان زمان خود به‌شمار می‌آمد و این موضوع از ذکر نام او در **الفهرست** ابن‌ندیم که معاصر بوزجانی بوده، پیداست. بخـــش مهمی از اطلاعات مـــا از زندگی بوزجانی نیز از همین کتاب به‌دســـت آمده اســـت. فعالیت‌های علمی بوزجانی پس از مهاجرت وی به بغداد، دامنهٔ وســـیعی از علوم متفاوت چون هندسه، مثلثات و حساب نجوم را دربرمی‌گرفته که در هر کدام از این‌ها، به دستاوردهای بدیع و تازه‌ای رسیده است.

از دوران زندگی بوزجانی در «تربت جام» اطلاعات دقیقی در دســـت نیســـت. براساس شـــواهد تاریخی، بیشتر فعالیت‌های رصدی بوزجانی در منطقه‌ای به نام «**باب‌التبن**» در بغداد انجام می‌شـــد و او ارتباط خوبی با دربار عضدالدوله دیلمی داشت. علاوه بر فعالیت‌های علمی به کارهای دربـــار هم می‌پرداخت و حتی در آن زمان ریاســـت یک بیمارســـتان را هم برعهده داشت. همچنین با ابوریحـــان بیرونی به هم‌فکری می‌پرداخت کـــه قاعدتاً از طریـــق مکاتبه صورت می‌گرفته اســـت. یکی از کارهای نجومی بوزجانی که بســـیار مورد توجه و اهمیت اســـت، همـــکاری او با ابوریحـــان بیرونی در ســـال ۳۸۷ هجری قمری و زمانی است که بوزجانی در بغداد و بیرونی در خوارزم ســـکونت داشتند. آن‌ها یک ماه‌گرفتگی را با هم رصد کردند و براساس مکاتباتی که با هم داشـــتند، از طریق رصد هم‌زمان این ماه‌گرفتگی توانستند که اختلاف طول بین دو شهر خوارزم و بغداد، و براســـاس آن، اختلاف ســـاعت بین نصف‌النهارهای گذرنده از این دو شـــهر را محاسبه کنند. این اختلاف

هر جاده‌ای که ساخته می‌شود، هر خرید و فروش زمین، هر آبیاری، و هر ساخت‌وساز به اندازه‌گیری نیاز دارد

اروپاییان به پاس خدمات بوزجانی به ریاضیات و نجوم، یکی از دهانه‌های ماه را به نام وی نام‌گذاری کرده‌اند

حدود یک ساعت محاسبه شد.

قرن‌ها پیش دانشـــمندان ایرانی با ایجاد رصدخانه به توسعهٔ علم نجوم پرداختند. همچنین ابزارهای مربوط به علم ستاره‌شناسی را جمع‌آوری و توسعه بخشیدند. برای مثال، ابوالوفا بوزجانی حرکات ماه را قرن‌ها پیش کشف و ضبط کرد. ماه برای مسلمانان به‌طور شگفت‌انگیزی اهمیت دارد، زیرا تقویمی که از آن استفاده می‌کنند، یعنی تقویم هجری قمری، با چرخش ماه تنظیم می‌شـــود. یکی از مشکلات مسلمانان در آن زمان این بود که تقریباً دوازده ماه یک سال قمری با ۳۶۵ روز از سال خورشیدی هماهنگ نبود. دوازده ماه قمری در مجموع ۳۴۵ روز می‌شد. مسیحیان و یهودیان هم این مشکل را داشتند. آن‌ها تدبیری اندیشیده بودند که بر کشف **مِتُن**[2]، ستاره‌شناس اهل آتن در حدود سال ۴۳۰ میلادی مبتنی بود. این تقویم از دوازده سال با دوازده ماه قمری و هفت سال با سیزده ماه قمری تنظیم شده بود. به این ترتیب، ماه سیزدهم به بعضی سال‌ها اضافه می‌شد تا روزهای تقویم هماهنگ با فصل‌ها پیش رود. مسلمانان از این چرخه‌ها استفاده می‌کردند.

اما بعضی حاکمان گاهی هر زمان که دلشان می‌خواست، ماه سیزدهم را به سال می‌افزودند. بنابراین خلیفهٔ دوم، **عُمَر** که از سال ۱۰ هجری به مدت ۱۰ سال حکومت کرد، تقویم هجری قمری را پیشنهاد داد که هنوز در کشورهای اسلامی از آن استفاده می‌شود. این تقویم دقیقاً گردش ماه را دنبال می‌کند. یک سال هجری قمری در حدود یازده روز کوتاه‌تر از یک سال خورشیدی است و ماه‌هایی چون «رمضان» به آرامی بین فصل‌ها می‌چرخـــد. بنابراین ماه رمضان در هر سال، یازده روز زودتر از سال قبل آغاز می‌شود و هر ۳۰ سال خورشیدی یک‌بار بر همان روز منطبق می‌شود. ماه رمضان و ماه‌های اسلامی دیگر زمانی شروع می‌شوند که هلال اول رؤیت شـــود. بنابراین هیچ‌کس به‌طور دقیق نمی‌داند که رمضان در چه زمانی شروع می‌شود تا آنکه هلال باریک ماه در آسمان شب نمایان شود.

پیش‌بینی زمان رؤیت هلال ماه برای ستاره‌شناسان و ریاضی‌دانان مســـلمان چالش بزرگی بود. البته فرضیهٔ بطلمیـــوس در مورد حرکات ماه در زمان نزدیک به ماه جدید و ماه غیرقابل رؤیت دقیق بود. او مسیر ماه را تنها به منزلهٔ بخشی از گرفتگی یا مسیر خورشید در مقابل ماه در نظر می‌گرفت. بوزجانی برای تعیین اوقات روز از روی ارتفاع خورشید، رساله‌ای نوشت که نسخه‌ای از آن در هند وجود دارد.

نوآوری‌ها و کوشـــش‌های بوزجانـــی در ریاضیات و نجوم زبانزد و مشـــهور اســـت. اما پژوهش‌های او در موســـیقی از اشـــتهار کمتری برخوردار است. اروپاییان به پاس خدمات بوزجانـــی به ریاضیات و نجوم، یکی از دهانه‌های ماه را به نام وی نام‌گذاری کرده‌اند.

پی‌نوشت‌ها

1. Global Positioning System (GPS)
2. Methon

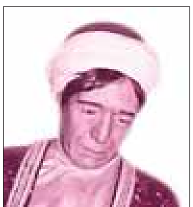
هوشنگ شرقی

جدول نام‌آوران ریاضی!

برای شروع بد نیست کمی سرگرم شویم و در عین حال نام‌های تعدادی از ریاضی‌دانان و اســتادان بنام کهن و معاصر کشورمان را مرور کنیم. شاید از این طریق کنجکاو شویم که شرح حالی از آن‌ها را بیابیم و با زندگی و آثارشان بیشتر آشنا شویم. چرا که برخی از آن‌ها از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان تاریخ علم در کشور ما و حتی در سطح جهان هستند. در جدول زیر نام‌های این اشــخاص (که در بیرون جدول هم آمده است) به‌صورت افقی (از راست به چپ یا برعکس)، عمودی (از بالا به پایین یا برعکس) یا اریب (از دو طرف) به شکل پراکنده آمده است. این نام‌ها را بیابید و دور آن‌ها را مانند نمونه خط بکشید. سپس حرف‌های باقی‌مانده در جدول را بنویسید. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان معاصر کشــورمان به‌دست می‌آید که رمز جدول است. نام این ریاضی‌دان برجسته را به همراه شرح حال وی برای ما ارسال کنید تا به قید قرعه جایزه‌ای تقدیم‌تان کنیم!


جمشید کاشانی


شیخ بهایی


نیریزی


مصاحب

ی	ش	ی	خ	ب	هـ	ا	ی	ی
ن	پ	ل	ی	ز	ی	ر	ی	ن
ا	ن	ی	س	ن	ب	ا	س	ا
ج	ف	گ	و	ی	و	ق	ی	ش
ز	ت	ر	ط	ب	م	م	ی	ا
و	ی	ا	ی	ا	ز	ا	هـ	ک
ب	م	ی	ف	ر	ر	ی	و	د
ح	ا	ش	ا	ا	خ	هـ	ر	ی
ا	ی	و	ر	ف	ی	ف	ف	ش
ص	خ	ک	ر	ج	ی	و	ر	م
م	ی	د	و	ر	ت	ش	هـ	ج

نام‌های نام‌آوران:
جمشید کاشانی،
ابن‌سینا،
کوشیار گیلی،
خوارزمی،
بیرونی،
شیخ بهایی،
فارابی،
کرجی،
بوزجانی،
خیام،
نیریزی،
کوهی،
فخری،
هشترودی،
هورفر،
مصاحب.

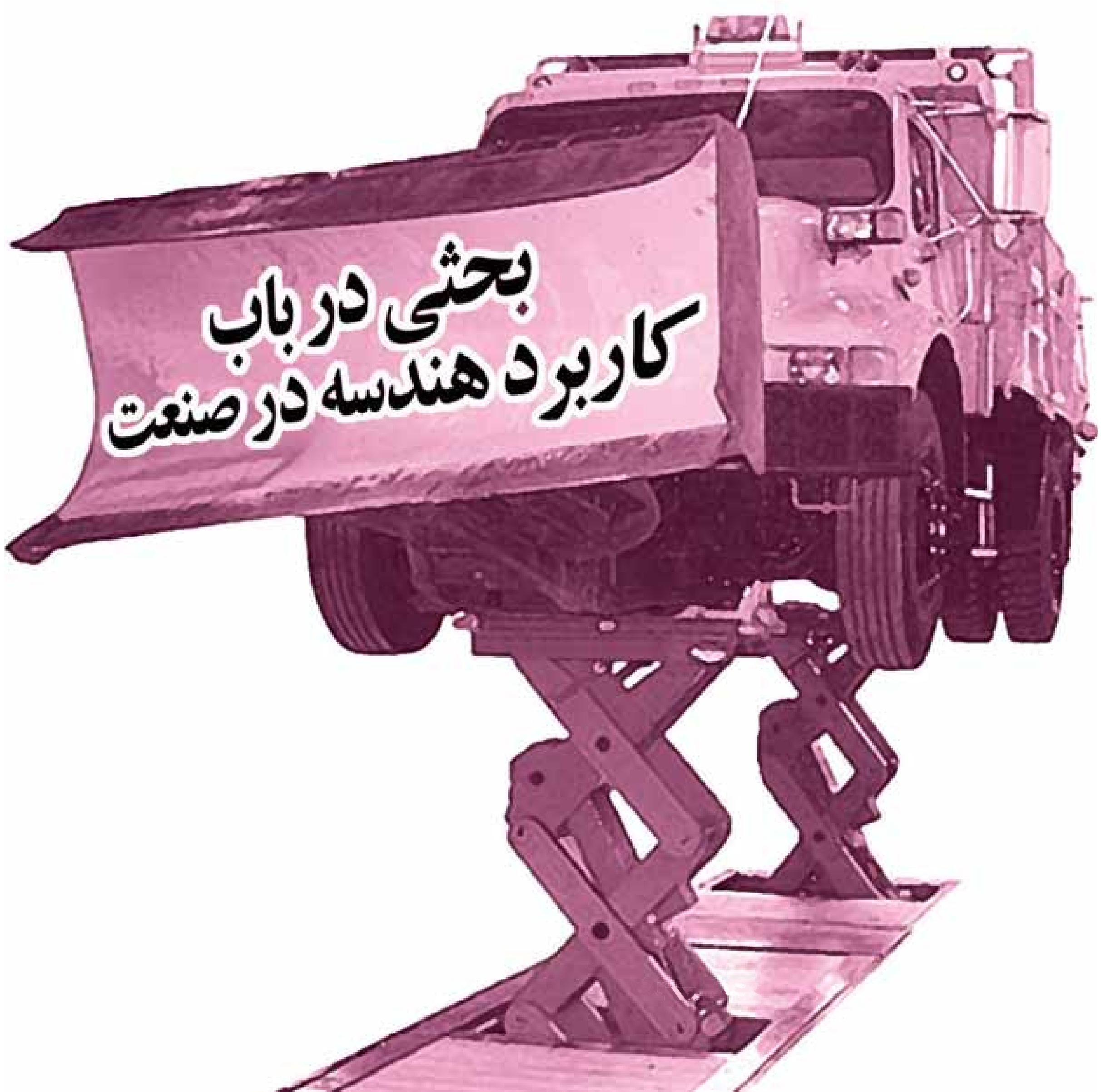
حسین کریمی

چنـــدی قبل یکی از دوســـتانم از جمعی صحبت می‌کـــرد که هر صبح جمعه در پارک جمع می‌شـــوند و پـــس از نرمـــش و ورزش در کنـــار هـــم صبحانـــه می‌خورند. می‌گفت: جمع جالبی هســـتند و هر کدام به کاری مشغول‌اند و از تجربیاتشان صحبت می‌کنند؛ به‌خصوص تجربه‌های کاری و تخصصی خودشـــان که برای همه می‌تواند مفید باشد. صحبت‌های دوستم در مورد آن جمع مرا برای آشنا شدن با آن‌ها مشتاق کرد و خواستم یک جمعه به آن‌ها بپیوندم.

روز موعـــود رســـید و آن‌هـــا با گشـــاده‌رویی مرا به‌عنـــوان مهمان پذیرفتند. در آن جمـــع با فردی به نام **آقا ناصر** آشنا شـــدم که کارش ساخت جک‌های هیدرولیکی به‌عنوان بالابر و صفحه‌های جابه‌جایی بار بود. در صحبت‌هـــای آقا ناصر آنچه که هیچ جایگاهی نداشت، سود و زیان و مشکلات کار بود. در عوض تمام گفتار ایشان نشان از علاقه و خلاقیت در کار بود.

حرف‌های آقا ناصر، مدام مرا به سال‌های حضورم در کلاس درس می‌بـــرد و به این فکر می‌کردم که چرا این‌همه فاصلهٔ بین درس و کار در کتاب‌های درســـی ما زیاد اســـت. آیا می‌توان معلمی و یا دانش‌آموزی را پیدا کرد که در هر سال تحصیلی این جمله را حداقل یک‌بار نشنیده باشد: «آنچه که درس می‌دهیم و آنچه کـــه می‌خوانیم، به چه درد می‌خـــورد؟» چکیده‌ای از صحبت‌هایـــم با آقا ناصـــر را برایتان بازگـــو می‌کنم. امیـــدوارم در دانش‌آمـــوزان مـــا ایجاد انگیـــزه کند و معلم‌های ما را تشویق کند، مقدمات ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزانشان را فراهم آورند.

ناصرخان وقتی متوجه شـــد کـــه من دبیر ریاضی هستم و بیشـــتر روی تدریس هندسه متمرکزم، کلی ذوق کـــرد. از دوران تحصیلش گفـــت و اینکه علاقهٔ شـــدیدی به شـــکل‌های هندسی داشـــته و همان هم اســـاس کارش را در بزرگ‌سالی تشـــکیل داده است.



می‌گفت: مثلاً مـــن از خـــواص متوازی‌الاضلاع خیلی استفاده می‌کنم. خاصیتی مثل ثابت بودن اندازهٔ اضلاع متوازی‌الاضـــلاع، هر چند که انـــدازهٔ زوایای آن تغییر کند. با استفاده از این خاصیت تا به حال چند دستگاه ساخته‌ام.

ناصرخان تأکید می‌کرد: من اختراع نکرده‌ام، ولی از اینکه در صنعت کاربردی از آموخته‌های دبیرســـتانی‌ام را می‌بینم، احساس خوب و لذت‌بخش دارم. او شکل ۱ را نشان داد که اصول کار دستگاهی را نشان می‌داد که برای انتقال بار از سطحی به سطح دیگر از آن استفاده می‌شود، بدون آنکه بار در سطح شیب‌دار قرار گیرد.

در شکل ۱، یک «متوازی‌الاضلاع لولایی» برای انتقال جعبه‌های بار از سکوی A به سکوی B نمایش داده شده اســـت. دو بازوی CD و EF دارای طول‌های مســـاوی‌اند. فاصلـــهٔ دو لولای C و E مســـاوی با فاصلهٔ دو لولای D و F است. بنابراین چهارضلعی CDEF که اضلاع مقابل آن دوبه‌دو مساوی‌اند، یک متوازی‌الاضلاع است.

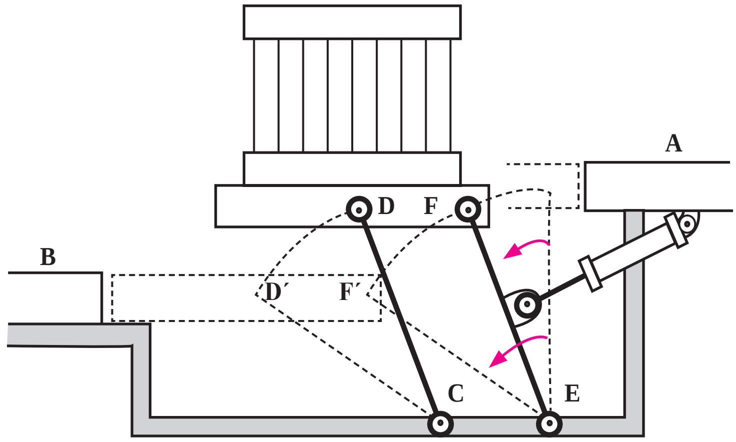
چون خط CE دارای وضعیت ثابت است، پس وقتی متوازی‌الاضلاع لولایی یاد شـــده، تغییر شکل می‌دهد، امتـــداد خط متحرک DF ثابـــت می‌ماند. به علت ثابت ماندن امتـــداد DF و D´F´، صفحهٔ انتقـــال بار همواره موازی سطح زمین باقی می‌ماند و در نتیجه بار نخواهد لغزید.

محرک در این دستگاه انتقال بار، هیدرولیکی است. محرک هیدرولیکی ســـکوی A را به قســـمت بار وصل می‌کند. به‌کارگیری محرک هیدرولیکی برای آن اســـت که انتقال بار به‌طور آرام و آهسته انجام گیرد.

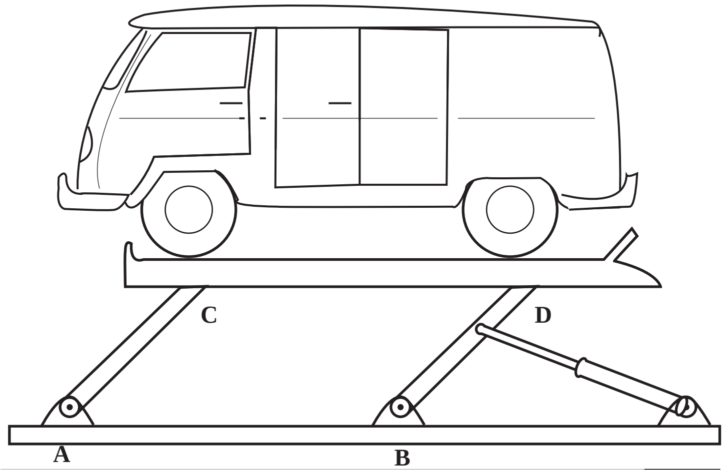
آقا ناصر دومین دستگاهی را که می‌ساخت، «جک بزرگ» نام داشـــت، با نشان دادن شکل ۲ به صورت زیر توضیح داد:

شـــکل ۲ یک جک بزرگ را نشان می‌دهد. A و B دو پایه‌اند و AC و BD دو تســـمه با طول‌های مساوی هســـتند که به‌ترتیب به پایه‌های A و B لولا شده‌اند. دو تسمهٔ AC و BD به کفهٔ بالایی جک لولا شده‌اند، فاصلهٔ دو لـــولای C و D برابر فاصلـــهٔ دو لولای A و B اختیار شده است.

در چهارضلعـــی ABDC اضـــلاع مقابـــل دوبه‌دو مســـاوی‌اند. پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در طرف راست شکل، یک سیلندر روغنی (هیدرولیک) دیده می‌شود. هنگامی که بازوی سیلندر روغنی از استوانه



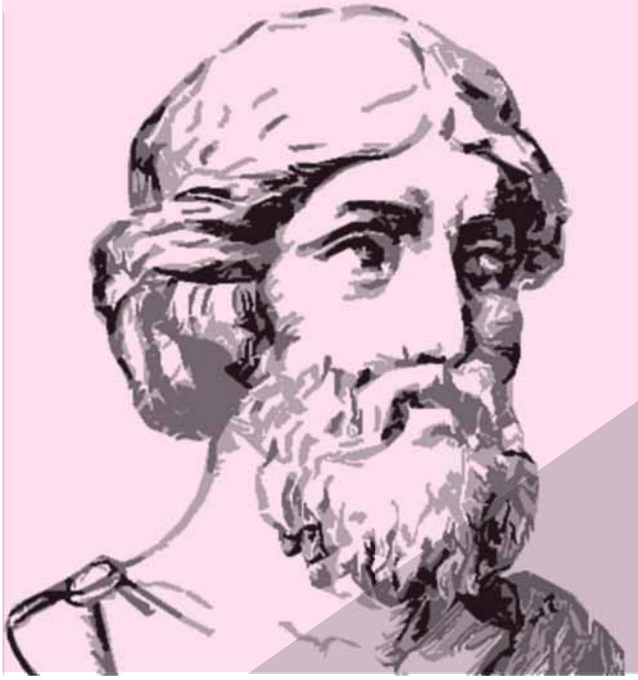
شکل ۱.



شکل ۲.

خارج می‌شود، تسمهٔ BD را دور لولای B می‌چرخاند. در نتیجـــه کـــف بالایی جک بالا مـــی‌رود. چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع اســـت، پس با چرخش تسمهٔ BD، امتـــداد CD همواره موازی با امتداد AB می‌ماند. لذا با تغییر شکل چهارضلعی ABDC، کفهٔ بالایی جک همواره موازی با سطح زمین حرکت می‌کند و در نتیجه خودرویی که روی کفه قرار دارد، نمی‌افتد.

آن روز جمعـــه یکـــی از پرخاطره‌تریـــن روزهای زندگی‌ام بود؛ روزی پربار؛ روزی که درس بزرگی گرفتم. تأســـف خوردم که چه زمان‌هایی را می‌توانســـتم برای دانش‌آموزانم مفیدتر باشم، از دست دادم و چه بسا که می‌توانستم بسترهای لازم را برای شکوفایی علاقه‌ها و استعدادهای بچه‌ها فراهم کنم.



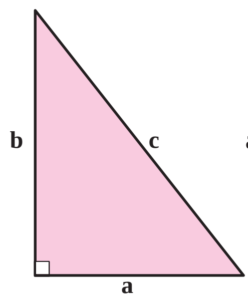
سه‌گانه‌های فیثاغورس

اشاره

این مقاله عمدتاً دربارهٔ جبر است، ولی با مسئله‌ای که نغمهٔ هندسه از آن برمی‌آید، کار را شروع می‌کنیم. این مسئله قضیهٔ *فیثاغورس* است که از زمان *اقلیدس* (۳۰۰ سال پیش از میلاد) سابقه دارد.

عباس قلعه پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که اضلاع آن a، b و c (c وتر است) باشند. رابطهٔ فیثاغورس در مورد این مثلث به شکل زیر خواهد بود:



$$a^2+b^2=c^2$$

شکل ۱.

عددهای صحیح a، b و c را که در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، سه‌گانه‌های فیثاغورس می‌نامیم.

چند نمونه از سه‌گانه‌های فیثاغورس

۱. a=۳، b=۴ و c=۵، چون: $5^2=4^2+3^2$، یا: $25=16+9$.

۲. a=۶، b=۸ و c=۱۰، چون: ...

۳. a=۹، b=۱۲ و c=۱۵، چون: ...

۴. و بی‌شمار سه‌تایی دیگر که مضرب‌هایی از ۳، ۴ و ۵ هستند.

۵. a=۵، b=۱۲ و c=۱۳، چون: $13^2=12^2+5^2$، یا: $169=144+25$.

۶. a=۱۰، b=۲۴ و c=۲۶، چون: ...

۷. و بی‌شمار سه‌تایی دیگر که مضرب‌هایی از ۵، ۱۲ و ۱۳ هستند.

با اندکی معلومات جبری می‌توانیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم:

اگر d عدد صحیحی باشد و m، n و s یک سه‌گانهٔ فیثاغورسی باشند، آن‌گاه dm، dn و ds نیز سه‌گانهٔ فیثاغورسی خواهند بود.

اثبات:

$$(dm)^2+(dn)^2=d^2m^2+d^2n^2=d^2(m^2+n^2)$$
$$=d^2s^2=(ds)^2$$

راستی آیا یافتن سه‌گانه‌های فیثاغورسی تا بی‌نهایت ادامه خواهد داشت؟ به‌عبارت دیگر، آیا بی‌نهایت سه‌گانهٔ فیثاغورسی وجود دارد؟

در واقــع به دنبال همهٔ عددهــای صحیح a، b و c هستیم که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

(٭) $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$

اگر طرفین معادلهٔ (٭) را بر $c^{۲}$ تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(\frac{a}{c})^{۲}+(\frac{b}{c})^{۲}=۱$$

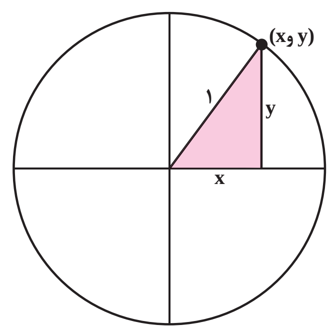
a، b و c عددهای صحیح هستند. بنابراین $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ اعداد گویا خواهند بود. فرض کنیم:

$$x=\frac{a}{c},\ \ y=\frac{b}{c}$$

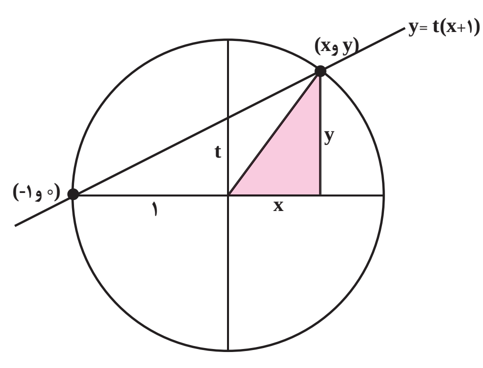
معادلهٔ ما به شکل زیر درمی‌آید:

(٭٭) $x^{۲}+y^{۲}=۱$

مسئله به یافتن عددهای گویای x و y که در معادلهٔ (٭٭) صدق کنند، تبدیل می‌شود. مجموعهٔ این عددها معادلهٔ دایره‌ای به شــعاع یک است که مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع اســت. جواب معادلــه همهٔ نقاط واقع بر دایره است. در واقع به دنبال همهٔ نقاط (x,y) هستیم که x و y عدد گویا هستند و در $x^{۲}+y^{۲}=۱$ صدق می‌کنند. به شکل‌های ۲ و ۳ دقت کنید.



شکل ۲.



شکل ۳.

برای حل معادلهٔ (٭٭) از پارامتری کردن استفاده می‌کنیم. پارامتر در واقع متغیر ســومی چون t است که به دو متغیر x و y وابسته است. اگر با این ایده که چگونه می‌توان این جواب‌ها را به‌دســت آورد، مدتی تفریح کنید، به این فرمول‌ها خواهید رســید (البته در ادامه، این مطلب تحت عنوان یک قضیه مطرح و اثبات خواهد شــد، لیکن فرصت را از دست ندهید و شانس خود را امتحان کنید. ضمن اینکه پارامتر t در شکل ۳ مشخص شده است.):

$$x=\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}},\ \ y=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}$$

اگــر کمی جبــر بلد باشــید، می‌توانید درســتی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ را آزمایــش کنید. حالا فرض کنید t مقادیر معینی را اختیار کند. چندتــا از این مقادیر را امتحان می‌کنیم و پــس از یافتن x و y از $x=\frac{a}{c}$ و $y=\frac{b}{c}$، سه‌گانهٔ فیثاغورسی موردنظر را پیدا می‌کنیم.

مثــال ۱. t=۲. بــا جایگذاری عــدد ۲ به‌جای t در فرمول‌ها خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}=\frac{-۳}{۵}\ \ ,\ \ y=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}=\frac{۴}{۵}$$

پــس $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ این‌ها هســتند و جواب‌های a=۳، b=۴ و c=۵ به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. اگر t مســاوی هفت اختیار شــود، سه‌تایی ۷، ۲۴ و ۲۵ به‌دست خواهد آمد.

حالا نســبت به ابتــدای بحث پیشــرفت زیادی کرده‌ایــم، چون در آغاز حتی اگــر همهٔ نیروی فکری خود را به‌کار می‌بردیم، جواب‌ها را یکی‌یکی با حدس و آزمایش به‌دســت می‌آوردیم. علاوه بــر این، معلوم نبــود که می‌تــوان بی‌نهایت جواب به‌دســت آورد یا نه. ولی حالا بــا قرار دادن مقادیــر متفاوت به‌جای t به این مرحله رســیده‌ایم که عملاً بتوانیم جواب‌های بی‌شماری را بنویسیم. اما سؤال بعدی این است که با این فرمول‌ها آیا همهٔ جواب‌ها به‌دست می‌آیند؟ پاسخ این سؤال و چگونگی به‌دست آمدن فرمول‌ها به‌صورت قضیهٔ زیر بیان و اثبات می‌شود:

قضیه: به‌جز جــواب $x=-۱$ و $y=۰$، همهٔ جواب‌های گویای معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ با قرار دادن مقادیر گویا در فرمول‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}\ ,\quad y=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

برهان: بــا در نظر گرفتن نقاط متفــاوت روی دایره، کمیتی که آن را در شــکل ۳ با t نشان داده‌ایم، تغییر می‌کند. مقدار t برحسب x و y، هم از معادلهٔ خط راست و هــم از قضیهٔ تالس به‌صورت زیر قابل یافتن اســت:

$$t=\frac{y}{x+۱}$$

به‌وضــوح $x=-۱$ مخرج را صفر می‌کند، پس جواب $x=-۱$ و $y=۰$ را کنار می‌گذاریم.

حــال از $x^۲+y^۲=۱$ می‌توانیــم $y^۲=۱-x^۲$ را نتیجه بگیریــم و باز با به‌کار بســتن جبر مراحــل زیر را طی می‌کنیم:

$$t=\frac{y}{x+۱}\Rightarrow y=t(x+۱)\Rightarrow y^۲=t^۲(۱+x)^۲$$

$$y^۲=۱-x^۲\Rightarrow t^۲(۱+x)^۲=(۱+x)(۱-x)$$

$$\Rightarrow t^۲+t^۲x=۱-x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

$$y=t(x+۱)\Rightarrow y=t(\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}+۱)\Rightarrow y=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

تاریخچه

اقلیدس یا ریاضی‌دانان هم‌عصر او، در سه قرن پیش از میلاد، می‌دانســتند که سه‌گانه‌های فیثاغورس a، b و c را با اســتفاده از فرمول‌های $a=m^۲-n^۲$، $b=۲mn$ و $c=m^۲+n^۲$ کــه m و n اعداد صحیح هســتند، می‌توان به‌دســت آورد. به مــدد جبر می‌توانیــد $a^۲+b^۲=c^۲$ را بیازمایید.

ریاضی‌دانان در آن زمان از کار کردن با کسرها اکراه داشتند و بیشتر ترجیح می‌دادند با عددهای صحیح کار کنند. ســه قرن پس از میلاد، **دیو فانتوس** به کسرها روی آورد و دانست که اگر فرمول‌های بالا را بر $m^۲+n^۲$ تقسیم کند و $t=\frac{n}{m}$ قرار دهد، این فرمول‌ها به‌دست خواهند آمد:

$$\frac{a}{c}=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}\qquad \frac{b}{c}=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

با این حساب از اقلیدس تا دیو فانتوس حدود شش قرن طول کشید تا فرمول‌ها به همان صورتی که ما در قضیه بیان کردیم، درآمدند.

تحقیق: شــاید برایتان جالب باشــد که ظاهراً در آغاز ســه‌گانه‌های فیثاغورسی یک عدد صحیح فرد می‌آید. آیا درســت اســت که گفته شــود هر عدد صحیح فردی، اولین عدد چنین ســه‌گانه‌ای است؟ بررسی کنید.

یک روش ساده برای ضرب عدد ۹ در اعـــداد دو رقمی

فرض کنید بخواهیم عدد ۹ را در یک عدد دورقمی ضرب کنیم. ابتـدا عدد دورقمـی را منهای یک واحد بیشتر از رقم دهگان آن می‌کنیم. سپس رقم یکان عدد دورقمی را از ده کم می‌کنیم. بعد دو عدد حاصل را کنار هـم قرار می‌دهیم؛ به‌همین سـادگی! مثلاً فرض کنید بخواهیم ۹ را در ۱۳ ضرب کنیم:

الف) ۱۳ را از یک واحد بیشـتر از رقم دهگان آن، یعنی ۲ کم می‌کنیم:

۱۳-۲=۱۱

ب) ده را از رقم یکان عدد، یعنی ۳ کم می‌کنیم:

۱۰-۳=۷

اکنـون دو عدد حاصل را کنار هم می‌گذاریم: ۱۱۷ یعنی: ۱۱۷=۱۳×۹.

با همین روش ۹ را ضرب در ۴۶ می‌کنیم:

۴۶-۵=۴۱

۱۰-۶=۴

بنابراین: ۴۱۴=۴۶×۹.

اما چرا این‌طور اسـت؟ در حالت کلی درستی این روش را اثبات می‌کنیم.

عدد دورقمی $\overline{ab}$ را که مسـاوی $10a+b$ است در نظر بگیرید. با این روش داریم:

و $10-b$ = ده منهای رقم دهگان = y

عدد منهای یک واحد بیشتر از رقم دهگان = x

$$\overline{ab}-(a+1)=10a+b-a-1=9a+b-1$$

بنابراین به عدد $\overline{xy}$ که مسـاوی $10x+y$ اسـت می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\overline{xy}&=10x+y=10(9a+b-1)+10-b\\&=90a+10b-10+10-b=90a+9b\\&=9(10a+b)=9\overline{ab}\end{aligned}$$

یعنی حاصل، ۹ برابر عدد اولیه است!

توضیح از هیئت تحریریه

این‌گونه روابط عددی بسیارند و طی قرن‌ها، هزاران رابطهٔ این چنین توسـط افراد گوناگون کشف شده‌اند. علاوه بر آن، شاید اگر عدد ۹ را به‌طور مستقیم در عدد دورقمی ضرب کنیم، سـاده‌تر باشد! اما استدلال ارائه شده ارزش بیشتری دارد و یک تمرین خوب در حیطهٔ بحث وسیع «نظریهٔ اعداد» است. به نویسندهٔ محترم و سایر دانش‌آموزان علاقه‌مند ریاضی توصیه می‌شود، به جای تلاش برای کشف استقرایی روابطی این چنین، به مطالعهٔ بیشـتر در زمینهٔ مبانی نظریهٔ اعداد بپردازند تا بتوانند دربارهٔ علت وجود چنین نظم‌ها و الگوهایی خود استدلال کنند.

علی بهادر
دانش‌آموز از کرمان

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۹۱. تابع f از IR به IR در تساوی $f(x)f(y)=f(x-y)$ به ازای هر x و y صدق می‌کند. $f(2017)$ را به دست آورید.

۲۹۲. پانزده رقم ۱ در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌خواهیم با نوشتن چند علامت «+» بین آن‌ها، حاصل جمعی بسازیم که مضرب ۳۰ باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ (برای مثال $S=111+1+11+11+1+1+1+1+1+11$ یکی از پاسخ‌هاست.)

۲۹۳. فرض کنید A، B، C، D، E و F، شش نقطه روی یک دایره باشند (با همین ترتیب). همچنین فرض کنید، X نقطهٔ تقاطع AD و BE، Y نقطهٔ تقاطع AD و CF، و Z نقطهٔ تقاطع CF و BE باشند. اگر X روی پاره‌خط BZ و AY و Y روی پاره‌خط CZ باشند و داشته باشیم: $AX=3$، $BX=2$، $CY=4$، $DY=10$، $EZ=16$ و $FZ=12$، مطلوب است محیط مثلث XYZ.

۲۹۴. تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادلهٔ $6x+10y+15z=3000$ را به دست آورید.

۲۹۵. ABCD یک چهارضلعی محدب است و داریم $AC=7$ و $BD=17$. فرض کنید M، P، N و Q نقاط میانی AB، BC، CD و DA باشند. حاصل MN^2+PQ^2 را بیابید.

۲۹۶. زوج (A و B) از زیرمجموعه‌های $X=\{1, 2, ..., 1396\}$ را ویژه می‌نامیم، هرگاه نه A زیرمجموعهٔ B باشد و نه B زیرمجموعهٔ A. تعداد زوج‌های ویژه را به دست آورید.

۲۹۷. روی تختهٔ سیاه عددهای ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده‌اند. در هر دقیقه، دو عدد a و b را پاک می‌کنیم و دو عدد $\frac{a+b}{2}$ و $2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^{-1}$ را به جای آن‌ها می‌نویسیم. بعد از چند مرحله به وضعیتی رسیده‌ایم که همهٔ عددها به جز یک عدد، برابر ۱ هستند. آن عدد چیست؟

۲۹۸. چند تابع از مجموعهٔ $\{1, 2, ..., n\}$ به مجموعهٔ

$\{۱, ۲, ..., m\}$ می‌توان نوشت، به طوری که برای هر $۱\le k\le n$، $f(k)\ge k-۲$؟

۲۹۹. لاستیک‌های عقب اتومبیل بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های جلو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع باید جای لاستیک‌های جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

۳۰۰. اگر برای هر $n\in N$، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^n+x^{n-۱}+...+x=n+۲$ را a_n بنامیم، ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگراست و حد آن را به دست آورید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۶۱. همهٔ اعداد حقیقی x، y و z را بیابید، به‌طوری‌که:

$$x+\sqrt[۳]{x}=۲y,\ y+\sqrt[۳]{y}=۲z,\ z+\sqrt[۳]{z}=۲x$$

تابع $f(t)=\dfrac{t+\sqrt[۳]{t}}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع روی IR صعودی است. (چرا؟) اگر $\{x, y, z\}$ یک جواب دستگاه باشد، آن‌گاه: $f(x)=y$، $f(y)=z$ و $f(z)=x$. ادعا می‌کنیم: $f(x)=x$. در غیر این صورت، اگر: $f(x)<x$، آن‌گاه: $f(f(x))<f(x)<x$ و در نتیجه: $f(f(f(x)))<f(f(x))<f(x)<x$. از طرف دیگر: $f(f(f(x)))=x$. پس $x<x$ که تناقض است. در نتیجه: $f(x)=x$ و یا $x=\sqrt[۳]{x}$. پس: $x=۰$ یا $x=۱$ و یا $x=-۱$.

بنابراین دستگاه معادلات فوق سه دسته جواب دارد: (۱-، ۱-، ۱-) و (۱، ۱، ۱) و (۰، ۰، ۰).

۲۶۲. چند زوج از اعداد طبیعی می‌توان یافت، به‌طوری‌که مجموع آن‌ها برابر ۱۳۹۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها مضرب ۱۳۹۵ باشد.

با فرض $۱۳۹۵=a+b$ و $ab=۱۳۹۵k$، داریم: $a^۲-۱۳۹۵a+۱۳۹۵k=۰$ که در آن k عددی طبیعی است. با تشکیل Δ داریم: $\Delta=۱۳۹۵(۱۳۹۵-۴k)$ که باید مربع کامل باشد. با تجزیهٔ ۱۳۹۵ به عامل‌های اول، یعنی $۵\times۹\times۳۱$، نتیجه می‌شود که باید $۱۳۹۵-۴k$ نیز بر این اعداد بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست. در نتیجه چنین زوجی وجود ندارد.

۲۶۳. 2n نقطه در صفحه مفروض هستند. ثابت کنید می‌توان با n پاره‌خط دوبه‌دو نامتقاطع، این نقاط را به‌هم وصل کرد، به‌طوری‌که هر نقطه روی دقیقاً یک پاره‌خط باشد.

در میان تمام «n پاره‌خط‌های ممکن» که تعدادشان متناهی است، آن حالتی را در نظر بگیرید که مجموع طول n پاره‌خط، کمترین مقدار ممکن باشد. ثابت می‌کنیم در این حالت هیچ دو پاره‌خطی از این n پاره‌خط، متقاطع نیستند (برهان خلف). فرض کنید دو پاره‌خط AB و CD از این n پاره‌خط متقاطع باشند. با تعویض این دو پاره‌خط با دو پاره‌خط AC و BD به n پاره‌خط جدید می‌رسیم که مجموع طول آن‌ها کمتر است و این تناقض است. پس هیچ دو پاره‌خطی از n پاره‌خط اولیه متقاطع نیستند.

۲۶۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ E روی AB و نقطهٔ F روی AC مفروض‌اند؛ به‌طوری‌که EF و AB موازی‌اند. اگر O مرکز ثقل مثلث AEF و M نقطهٔ میانی EC باشد، مطلوب است اندازهٔ زاویه OBM.

فرض کنید T تقاطع EF و BM باشد. چون دو مثلث MET و MCB همنهشتند، در نتیجه BCTE یک متوازی‌الاضلاع و مثلث CTF متساوی‌الاضلاع است. همچنین، چون دو مثلث OEB و OFT همنهشتند، داریم: $OB=OT$ و $\widehat{FOT}=\widehat{EOB}$. بنابراین مثلث BOT یک مثلث متساوی‌الساقین است و: $\widehat{BOT}=\widehat{EOF}=۱۲۰^\circ$.

OM میانهٔ مثلث BOT است و در نتیجه نیمساز است. پس: $\widehat{BOM}=۶۰^\circ$ و بنابراین: $\widehat{OBM}=۳۰^\circ$.

۲۶۵. همهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که به‌صورت تفاضل دو مکعب کامل باشند.

اگر $P=x^۳-y^۳$ اول باشد، آن‌گاه $P=(x-y)(x^۲+xy+y^۲)$. در نتیجه $x-y=۱$. پس x و y دو عدد متوالی هستند. با فرض $P<۱۰۰$ و با آزمون مقادیر به عددهای ۷، ۱۹، ۳۷ و ۶۱ می‌رسیم که شرایط فوق را دارند.

۲۶۶. مجموع ۲۰ عدد طبیعی برابر است با ۴۶۲. بزرگ‌ترین عامل مشترک این ۲۰ عدد حداکثر چقدر است؟

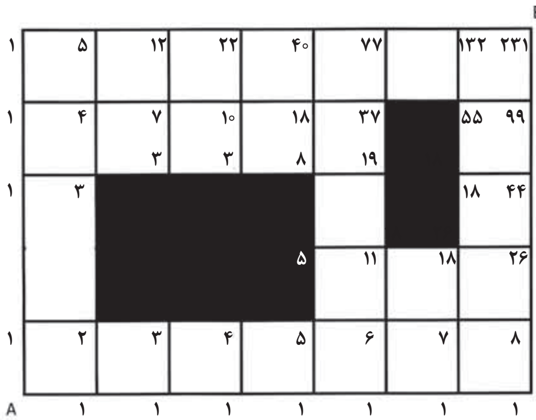
اگر d بزرگ‌ترین عامل مشترک ۲۰ عدد باشد، آن‌گاه با تقسیم عددها بر d به ۲۰ عدد می‌رسیم که مجموعشان حداقل ۲۰ است. پس: $\dfrac{۴۶۲}{d}\ge ۲۰$ و یا $d\le ۲۳$. از طرف دیگر، d باید ۴۶۲ را بشمارد. با توجه به تجزیهٔ $۴۶۲=۲\times۳\times۷\times۱۱$، بیشترین مقدار d، ۲۱ است.

۲۶۷. مقدار a را بیابید، به‌طوری‌که معادلهٔ زیر دقیقاً یک ریشه داشته باشد.

$$|x|+|x-۱|+...+|x-۱۳۹۶|=a$$

اگر x یک ریشهٔ معادله باشد، $۱۳۹۶-x$ هم ریشهٔ دیگر معادله است. پس باید داشته باشیم: $x=۱۳۹۶-x$ و یا $x=۶۹۸$. با جای‌گذاری این مقدار به پاسخ $a=۶۹۸\times۶۹۹$ می‌رسیم.

۲۶۸. در شـــکل یک چند مســـیر از A بـــه B وجود دارد؟ حرکت‌های مجاز پایین به بالا و چپ به راست هستند.

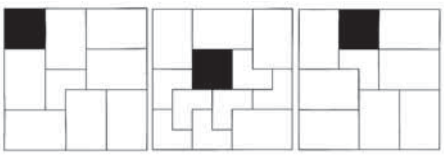


شکل ۱.

در شـــکل تعداد مسیرها از نقطهٔ A تا هر نقطه مشخص شده است. برای این کار کافی است به‌صورت بازگشتی تعداد مسیرها تا هر نقطه را از مجموع تعداد مسیرها تا دو نقطه پایینی و سمت چپی به دست آوریم. پس پاسخ برابر است با: ۲۳۱.

۲۶۹. از یـــک جدول مربعی به ضلع n=۶k+۱ یک خانه ۱×۱ را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید جدول حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل ⊞ فرش کرد.

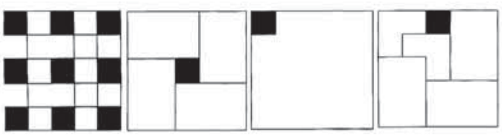
حکم را به روش استقرا ثابت می‌کنیم. برای k=۱ حکم برقرار اســـت. برای k=۱، با توجه به تقارن، سه حالت وجود دارد که در شـــکل ۲ آمده است. در این سه حالت، صفحهٔ ۷×۷ با یک مربع ۲×۲ که شـــامل خانهٔ حذف شده است و مستطیل‌های ۲×۳ و تعدادی موزاییک پر شـــده است و فرش کردن صفحه امکان‌پذیر اســـت. حال فرض کنید حکم برای n=۶k+۱ برقرار باشد. مربعی به ضلع n=۶k+۷ در نظر بگیرید. می‌توان مربعی به ضلـــع n=۶k+۱ چنان از یکی از چهار گوشـــه جدا کرد که شـــامل خانهٔ حذف شده باشـــد. طبق فرض این قسمت قابل فرش کردن اســـت. باقی‌ماندهٔ خانه‌ها دو مستطیل ۶×(۶k+۷) و ۶×(۶k+۱) هستند که به راحتی با مستطیل‌های ۲×۳ فرش می‌شوند و هر مستطیل ۲×۳ نیز با دو موزاییک فرش می‌شود.



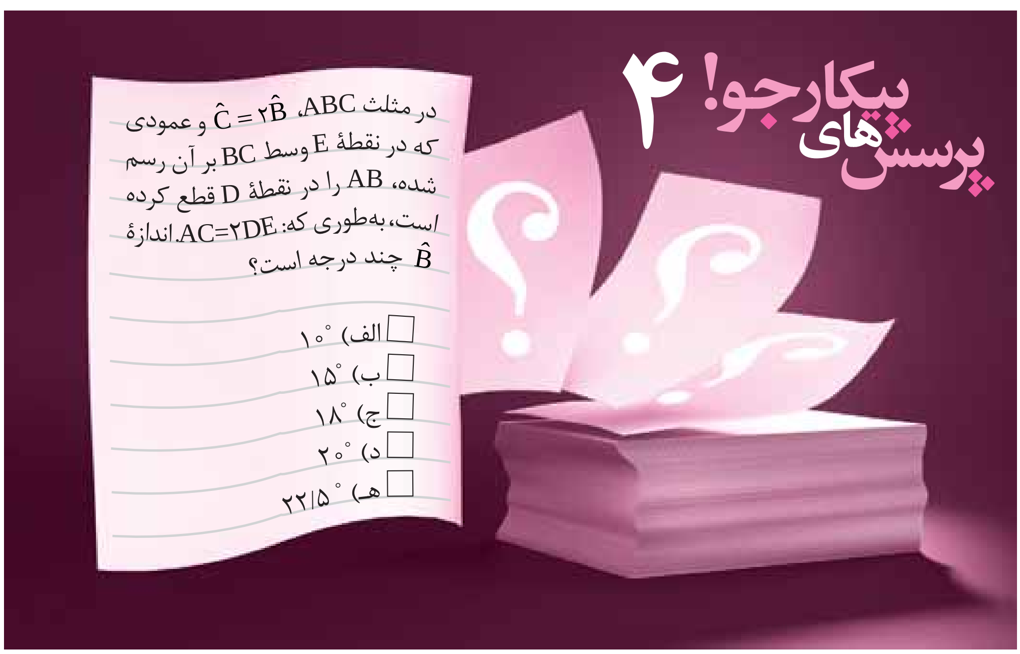
شکل ۲.

۲۷۰. از یک جـــدول ۵×۵، کدام خانهٔ ۱×۱ را اگر حذف کنیم، می‌توانیم بقیهٔ خانه‌ها را با موزاییک‌هایی به شکل ⊞ فرش کنیم؟

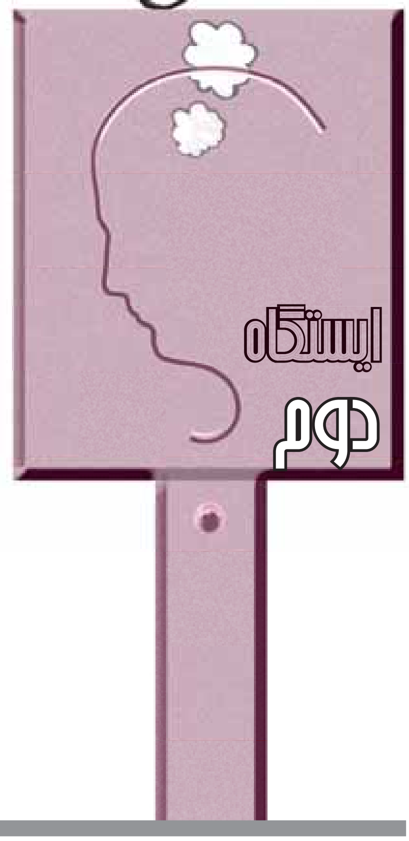
چون از ۸ موزاییک استفاده می‌شود، بنابراین یکی از ۹ خانهٔ رنگ شده پوشیده نمی‌شود. شـــکل ۳ نشان می‌دهد که کدام خانه‌ها ممکن است خانه‌های حذف شده باشند.

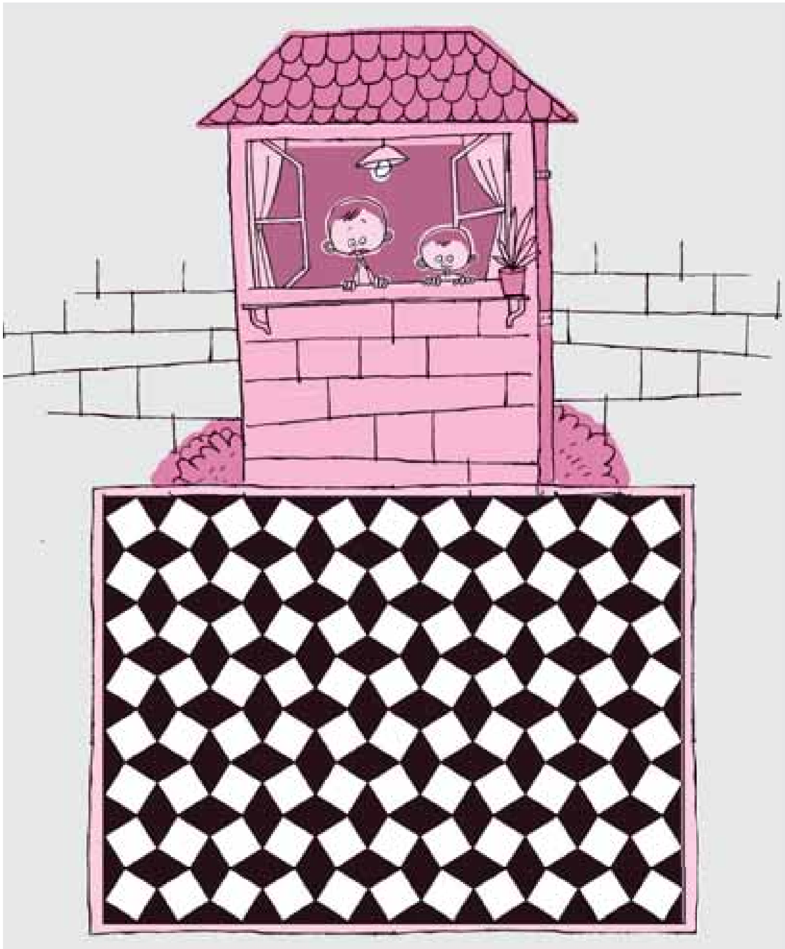


شکل ۳.



یک داستان و یک معما!





فرهاد کوچولو از دوستان خوب من است. با اینکه خیلی کوچک و کم‌سن است! ولی سال‌هاست که با هم دوست هستیم! و در زندگی من حضور دارد. به‌همین دلیل هم می‌خواهم در اینجا به یک معمای بسیار زیبا که توسط او حل شد، اشاره‌ای کنم.

فرهاد امسال در کلاس دهم تحصیل می‌کند. چند روز پیش فرهاد و پدرش از پشت پنجره حیاط خانه را تماشا می‌کردند که ناگهان کاشی‌کاری کف حیاط توجه فرهاد را به خودش جلب کرد. محوطهٔ میانی حیاط خانه با دو نوع کاشی سیاه و سفیدرنگ به زیبایی کاشی‌کاری شده بود. به‌طوری که هر کاشی سیاه‌رنگ که لوزی‌شکل بود، با چهار کاشی سفیدرنگ که مربع‌شکل بودند، احاطه شده بود و چهار رأس آن نیز به چهار رأس چهار کاشی سیاه دیگر وصل بود. به همین صورت تمام آن قطعهٔ مستطیل شکل کاشی‌کاری شده بود. البته بدیهی است که کناره‌های زمین مستطیل‌شکل، با تکه‌های کاشی فرش شده بود که همهٔ آن‌ها هم سیاه‌رنگ بودند.

فرهاد از پدرش پرسید: «پدرجان! چطور شد که اینجا را این‌طوری کاشی‌کاری کردید؟»

پدر گفت: «راستش را بخواهی، می‌دانی که عمویت کاشی‌فروشی دارد و چون ما می‌خواستیم از او کاشی بخریم و او همین دو نوع کاشی را داشت، ما هم این طرح به فکرمان رسید که زیاد هم بد نشد.»

فرهاد پرسید: «چند تا کاشی مصرف کردید؟»

پدر گفت: «یادم نیست. ابعاد این زمین شش متر در هشت متر است و یادم هست که قطر کوچک هر کاشی سیاه با ضلع کاشی‌های سفید برابر بود. تعداد کاشی‌های سفیدی که مصرف کردیم بیشتر بود، ولی برای پرکردن گوشه‌های خالی زمین فقط از کاشی‌های سیاه استفاده کردیم و تعداد درستی کاشی هم مصرف شد و...»

فرهاد صحبت پدر را قطع کرد و گفت: «نه پدر امکان ندارد! حتماً خرده‌کاشی اضافه آوردید.»

پدر گفت: «تو از کجا می‌دانی؟ تو که آن موقع خیلی کوچک بودی و اصلاً هم اینجا نبودی!»

فرهاد گفت: «آری پدر درست می‌گویی، ولی من با دلیل و به کمک هندسه برایت ثابت می‌کنم که امکان ندارد تعداد کاشی‌های سیاه عدد درستی بوده باشد.»

آیا شما هم می‌توانید این موضوع را ثابت کنید؟!

گزارش

هوشنگ شرقی

نقد و نظری
بر مجلهٔ ریاضی برهان متوسطهٔ ۲
در کنار دانش‌آموزان

اشاره

یک صبح بهاری به میان دانش‌آموزان «دبیرستان غیردولتی خاتم» منطقهٔ ۶ شهر تهران رفتیم و با آن‌ها به بحث پیرامون «برهان» نشستیم تا مجله را از نگاه آنان ببینیم؛ کاری که متأسفانه تا این زمان کمتر به آن پرداخته بودیم. جمعی از دانش‌آموزان سال‌های دهم و سوم ریاضی از قبل مجلهٔ شمارهٔ ۷ (ویژهٔ فروردین ۹۶) را مطالعه کرده بودند و در آن روز با هم به مرور نظرهای آنان پرداختیم. ابتدا مقدمه‌ای گفتم و در همان مقدمه هم با بچه‌ها بحثمان شد!

مقدمه

ابتدا به بچه‌ها در مورد اهمیت مطالعهٔ عمومی (غیردرسی) گفتم و اینکه در کشور ما سطح و میزان مطالعه چگونه است. آیا رضایت‌بخش است یا خیر و آیا سطح مطالعه رابطه‌ای با توسعه‌یافتگی یک کشور دارد یا خیر؟ در پاسخ این نظرها را دریافت کردم:

- میزان مطالعه به نوع کار افراد بستگی دارد. کسانی که بیشتر کارهایی انجام می‌دهند که آمیخته با فعالیت‌های فیزیکی است، اصولاً نیاز چندانی به مطالعه احساس نمی‌کنند.
- یک سلسله درس‌های ثابت برای ما گذاشته‌اند که باید با خواندن آن‌ها مسیری مشخص را طی کنیم تا به اصطلاح در زندگی‌مان موفق شویم. در نتیجه از مطالعهٔ غیردرسی دور می‌شویم. در حالی‌که در کشورهای پیشرفته، اطلاعات عمومی اشخاص اهمیت دارد. به‌همین علت سرانهٔ مطالعه در کشور ما پایین می‌آید.
- برای آشنایی با فرهنگ غنی کشورمان، مثلاً آشنایی با ادبیات، شعر و...، باید مطالعه کنیم.
- مطالعه باعث تعالی جامعه می‌شود و از این طریق فرهنگ شهروندی بهبود می‌یابد.

البته نظرهای دیگری هم داشتیم که بعضی از آن‌ها بد نیستند؛ از جمله:

- **آرش فتحی** می‌گوید: «مطالعه باید همراه با عمل باشد. بیشتر ما کتاب می‌خوانیم که بگوییم چیزی خوانده‌ایم و تأثیر آن در زندگی روزمره‌مان محسوس نیست!»

- **فرمهر فارسیان** هم می‌گوید: «با نظرتان در مورد رابطهٔ بین میزان مطالعه و توسعه‌یافتگی موافق نیستیم. جامعه‌ای توسعه یافته است که در آن، هر کس در جایی باشد که شایستگی آن را دارد!»

برایش توضیح دادم که منظور ما این نیست که این تنها عامل توسعه‌یافتگی است، بلکه یکی از نشانه‌های آن است.

بعد از بحثی نسبتاً طولانی دربارهٔ جایگاه و اهمیت مطالعه، به بحث پیرامون مطالعهٔ تخصصی رسیدیم. دربارهٔ نشریات تخصصی توضیحاتی دادم و اشاره کردم که وضع نشریات تخصصی در کشور ما چندان بهتر از نشریات عمومی نیست. در میان نشریات تخصصی، نشریات مرتبط با ریاضیات وضعیت بهتری داشته‌اند و این به‌خاطر اهمیت دانش ریاضی بوده که به نوعی «مادر علوم» خوانده می‌شده

است. یعنی تعداد عنوان و شمارگان نشریات ریاضی در یک قرن اخیر که ســال‌های پایانی آن را می‌گذرانیم، به مراتب بیشـــتر از نشریات مرتبط با علوم دیگر (فیزیک، شیمی، نجوم و...) بوده است.

اشــاره‌ای هم به قدمت و تاریخچهٔ مجــلات ریاضی ایران کردم و به‌طــور خاص از «مجلهٔ یکان» و اثرگــذاری آن بر آموزش ریاضی کشــورمان در زمان انتشار آن، یاد کردم. در نهایت به مجلات ریاضی بعد از انقلاب اشاره کردم و رسیدم به مجلات رشد و نشریات ریاضی که در چارچوب آن منتشر می‌شوند (رشد آموزش ریاضی برای معلمان و دبیران ریاضی، رشد برهان متوسطهٔ ۱ و رشد برهان متوسطهٔ ۲).

تأکید کــردم که مجلهٔ ما تنهــا مجلهٔ دانش‌آموزی در ســطح دبیرستان است که به‌صورت ماهانه منتشر می‌شود. از بچه‌ها پرسیدم به نظر آن‌ها جایگاه مجلهٔ ریاضی دانش‌آموزی چیست و چه تأثیری می‌تواند داشته باشد؟

• **آرش فتحی**: «اگر مجلهٔ ریاضی جذابیت لازم را داشته باشد، حتماً آن را می‌خوانم و فکر می‌کنم دانش‌آموزان هم به آن نیاز دارند.»

• **امیرحسین رستمی**: «برنامه‌های مدرسه آن‌قدر ســنگین اســت که حتی اگر مجله خوبی هم در دسترس ما باشد، اصلاً فرصت پرداختن به آن باقی نمی‌ماند.»

• **شـــایان فهام:** مجله باید طوری طراحی شــود که معلم‌های ریاضی ما مجاب شوند، آن را در کنار برنامهٔ آموزشی‌شــان به بچه‌ها معرفی کننــد. علاوه بر آن، فرهنگ‌ســازی بــرای مطالعهٔ مجلات ریاضی بایــد از دورهٔ اول متوســطه شــروع شــود. مطالب مجله باید راه‌هــای جدید و متنوعی برای یادگیــری ریاضیات ارائه دهند تا دانش‌آموزان احســاس نیاز کنند. ولی اگر بحثی دشــوار همراه با استدلال‌های طولانی و خسته‌کننده ارائه شود، حوصلهٔ تعقیب موضوع از بین می‌رود.

• **فرمهر فارسیان:** کتاب‌های درسی و کمک‌درسی به اندازهٔ کافی دربارهٔ نکته‌ها و فرمول‌های ریاضــی مطلب دارند. مجلهٔ ریاضی باید بیشتر به ســبک مطالعهٔ ریاضی، نوع تفکر ریاضی و شیوهٔ مواجهه با مسئله‌های ریاضی بپردازد.»

همچنین، اغلب بچه‌ها می‌گفتند که گرافیک مجله تأثیر بسزایی در جذابیت مجله و تشــویق دانش‌آموزان به اســتقبال از آن دارد و بیشــتر آن‌ها معتقد بودند که طراحی مجلــه می‌تواند با رنگی بودن خیلی از این بهتر باشد. اگرچه **ناصریان**، یکی از دانش‌آموزان، معتقد بود که گرافیک مجله نقش ثانوی دارد و محتوا مهم‌تر است. همچنین **حیدری**، یکی دیگر از بچه‌ها، هم همین اعتقاد را داشــت و تأکید کرد: «اگر مجله بتواند راه‌حل‌های کوتاه‌تر و ساده‌تری برای مسائل و مشکلات دانش‌آموزان ارائه دهد، می‌تواند موفق باشد.»

در خاتمه بحثی هــم دربارهٔ محتوای مجلهٔ برهان صورت گرفت و عنوان‌هــای مطالب آن مرور شــد و از دانش‌آمــوزان دربارهٔ آن‌ها نظرخواهی کردم. خلاصهٔ این نظرات به شرح زیر است:

• **ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی:** از بهترین بخش‌های مجله اســت. بازی‌ها و معماهای آن به نوعی ریاضیات کاربردی است. پیشنهاد می‌شود که با توجه به جذابیت آن حجمش بیشتر شود و صفحات بیشتری به آن اختصاص یابد.

• **صفحات جلد:** روی جلد این شماره می‌توانست از این جذاب‌تر باشد. طرح روی جلد نقش زیادی در جذب خواننده دارد. صفحهٔ ۲ جلد (نام‌آوران عرصهٔ ریاضی معاصر ایران) کار خوبی اســت. با مطالعهٔ آن با کارهای ریاضی‌دانان ایرانی بیشــتر آشنا می‌شویم. لااقل نام آن‌ها را یاد می‌گیریم و می‌توانیم با تحقیق بیشـــتر در مورد کارهای آن‌ها اطلاعات بیشــتری به‌دست آوریم. صفحهٔ ۳ جلد که در آن جمله‌ای از بزرگان ریاضی آمده، مناسب و آموزنده است. مطلب صفحهٔ ۴ (ریاضیات و گردشگری) هم چندان توجه دانش‌آموزان را جلب نمی‌کند.

• **گفت‌وگــو و مصاحبه:** مصاحبه‌ها کوتاه‌تر باشــد و مخاطب گفت‌وگو کســی باشــد که اکثر دانش‌آموزان او را بشناســند. صحبت‌هایش هم به درد ما بخورد و به لحاظ سنی با ما سنخیت بیشتری داشــته باشــد. مثلاً با رتبه‌های برتر کنکور و المپیاد ریاضی یا نخبگان جوان مصاحبه شــود. همچنین، ممکن است گفت‌وگــو به‌صورت میزگرد با چند نفر باشــد. لطفاً بخش‌های جذاب مصاحبه پررنگ شوند.

• **ریاضیات در ســینمای جهان:** از بخش‌های خوب و جذاب مجله است.

• **آموزش ترجمــه متون:** خوب اســت، ولی ترجیــح دارد نوآوری‌هایی در آن صورت گیرد.

• **مقالات کمک‌درســی:** اگر تکرار مباحث کتاب‌های درسی باشند، مناسب نیستند. به جای آن‌ها بهتر است، بیشتر به مباحث جنب درسی پرداخته شود. به‌خصوص ریاضیات کاربردی شامل کاربرد ریاضیات در فیزیک، شیمی، هواشناسی، زیست‌شناسی، موسیقی و... می‌تواند در مقالات جذاب مورد توجه قرار گیرد.

• **مسائل برای حل:** خوب است، ولی شاید بتوان به جای طرح تعداد زیادی مســئله، یک مسئله را به روش‌های گوناگون حل کرد و روش‌های حل را تحلیل کرد.

• **ریاضیــات در چند دقیقه:** خوب و آموزنده اســت و چون متن‌های آن کوتاه هستند، خواندن آن آسان و مفید است.

کاربرد هندسه در معماری سنتی و مسجدهای ایران

مریم شفیعی
مدرس پژوهش‌سرای
دانش‌آموزی زکریای رازی
ناحیهٔ یک ری

محدثه تاجیک
و حنانه یزدی
دانش‌آموزان پژوهشگر
پژوهش‌سرای دانش‌آموزی
زکریای رازی ناحیهٔ یک ری

مقدمه

هندسه ابزاری مناسب برای نظم بخشیدن به معماری و برقراری روابط آگاهانه میان اجزای بنا با یکدیگر اســت، تا در عین مرکب بودن، یکپارچگی فضا را به عنوان یک ترکیب خلاق و هدفمند میسر سازد. در فضای قانونمند هندسه است که هر چیزی و از آن جمله اجزای یک خانه و حتی یک شهر می‌توانند هویت پیدا کنند.

در فرایند طراحی، اشــراف معمار به علم هندسه و استفادهٔ خلاقانه از آن، تبدیل مفهوم به فضا و شکل را ساده‌تر می‌کند و می‌تواند مفهوم بعد و اندازه را به روشنی بیان کند. حاصل چنین فرایندی نوعی معماری است که به دور از برداشت‌های سلیقه‌ای، از نظم و معماری قابل درک می‌شود. طراحی یک معماری در قالب هندسه است که نمود می‌یابد [عمومی، ۱۳۸۷]. تحلیل روابط هندسی در بناهای ارزشــمند، روش تفکر و تصمیمات معمار را در برخورد با مسئله و یافتن راه‌حل مناسب برای پاسخ‌گویی به آن اثبات می‌کند.

جایگاه علم هندســه در معماری همواره موضوعی جذاب برای تحقیق بوده اســت. پژوهش‌های متعددی درخصوص روش‌های اســتفاده از این ابزار کارامد در فن معماری به انجام رسیده‌اند. در تمامی این مطالعات، فرض بر این بوده است که معماران گذشته از ترسیمات هندســی پایه‌ای، برای شکل دادن به اثر از معماری اســتفاده می‌کردند، یا حداقل از آن برای به‌دست آوردن و تنظیم تناسبات اجزای بنا سود می‌بردند. ساده‌ترین مثال آن استفاده از «پیمون» در طراحی معماری و استفاده از روش‌های هندسی ساده برای ترسیم تاق‌ها و گنبدهاست.

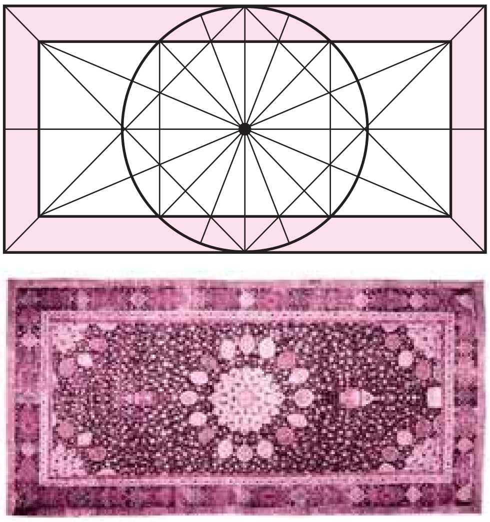
مقالهٔ حاضر با این فرض آغاز می‌شــود که معماری بناها و ساختمان‌ها، به‌خصوص مسجدهای دوران صفوی، نمی‌تواند تنها بر مبنای اصول سازه و به منظور تزئین آن شکل گرفته باشد. حتماً در طراحی آن‌ها از اصول هندسی و ترکیبات خاصی استفاده شده که هدف این مقاله یافتن این تناسبات است. تدوین یک مجموعهٔ اطلاعاتی از کاربرد هندسه در معماری سنتی، به کشف رمز زبان هندسه در معماری ایرانی یاری می‌رساند.

جایگاه هندسه در معماری ایرانی ـ اسلامی

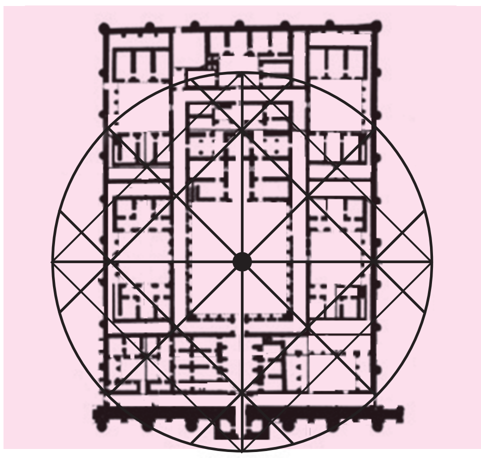
در معماری بناها و مسجدهای ایرانی، از ابزار هندسه متناسب با شرایط زمانی و مکانی و نیازهای هر ساختمان به‌خوبی استفاده شده اســت. لذا با وجود الگوی تقریباً مشابه مسجدها در هر دورهٔ تاریخی ایران، هر ساختمان معماری منحصر به خود را دارد. در این بناها پلان و مقطع قائم در چارچوبــی از مربع و مثلث‌های متســاوی‌الاضلاع طراحی شده است که برخوردگاه‌هــای آن‌ها همــه نقاط ثابت مهم، نظیر عــرض و ارتفاع درها، عرض، طول و ارتفاع سالن‌ها، موقعیت کتیبه‌ها و غیره را مشــخص کرده است. بنابراین،

اندازهٔ هر قسمت به وسیلهٔ تناسب معینی با هر قسمت دیگر مرتبط است. در نتیجه، یک ساختمان مجموعه‌ای از اجزای غیرمتجانس نیست، بلکه ترکیبی هماهنگ از اجزا با ارتباط‌های متناسب است که به فضا حرکت و به چشم آرامش می‌دهد [حجازی، ۱۳۸۷].

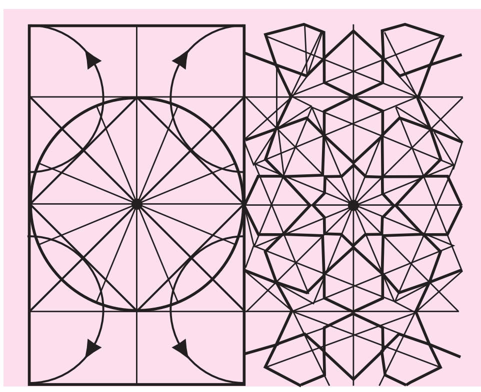
بحث در مبانی کاربرد هندسه در معماری ایرانی ـ اسلامی گسترده است، اما شرح کوتاهی دربارهٔ این مبانی می‌تواند به درک جایگاه هندسه در معماری سنتی ایرانی کمک کند. در این بخش اشاره‌ای خواهیم داشت به آنچه باعث ارزش یافتن هندسه و نظم نزد مسلمانان شده است. در هنر اسلامی، تمامیت کائنات به‌وسیلهٔ هندسه و عددها قابل درک می‌شود [Akkach, 2015]. استفاده از هندسه در شاخه‌های گوناگون هنر اسلامی، به‌خصوص معماری و هنرهای وابسته به آن، دارای جایگاه ویژه‌ای است. نمونه‌هایی از کاربرد هندسه در آثار هنری اسلامی را در تصویر ۱ می‌بینیم.



تصویر ۱ (الف) **تحلیل هندسی فرش مقبرهٔ شیخ صفی‌الدین اردبیلی بر مبنای تقسیم هشت.**



تصویر ۱ (ب) **تحلیل هندسی قصرمشتی در سوریه بر مبنای مربع و مستطیل ۷۲.**



تصویر ۱ (پ). **تحلیل هندسی نوعی گره چینی بر مبنای تقسیم هشت [السعید، ۱۳۱۰].**

دایره که نمادی از حرکت پیوسته و مدور آسمان است، با الوهیت نیز ارتباط دارد

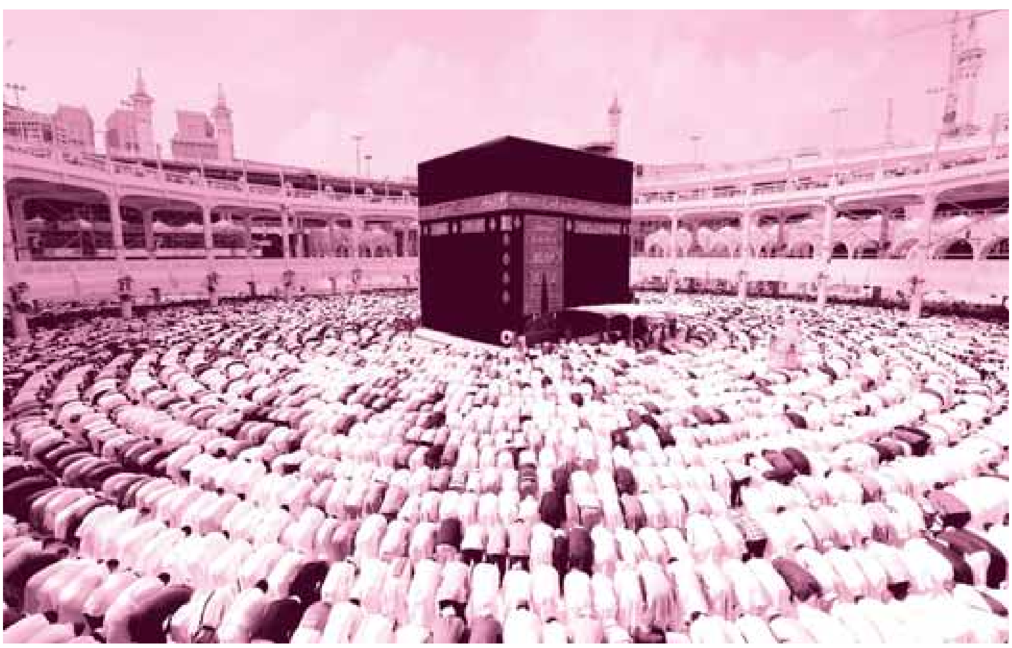
نقش دایره و مربع در اندام‌های معماری ایرانی

دایره در واقع همان نقطه اســـت. نقطه می‌تواند به شکل‌های متفاوت نمود داشته باشد، اما شکل متداول و عام آن دایره است که از تمام جهات به‌صورت یکسان و مساوی رشـــد کرده است. **افلاطون** معتقد بود: دایره شکلی کامل اســـت. در طبیعت هزاران شکل داریم که سطح مقطع آن‌ها دایره است.

دایره که نمادی از حرکت پیوســـته و مدور آسمان اســـت، با الوهیت نیز ارتبـــاط دارد. معمولاً مخاطب و بینندهٔ شکل دایره، به‌طور فطری و ذاتی نقاطی فرضی را روی خـــط محیـــط دایره با مرکز دایره می‌ســـنجد. در مرکز دایره تمام شـــعاع‌ها بـــه نحوی هماهنگ کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. نقطـــهٔ مرکز دایره در برگیرندهٔ تمام خط‌هایی اســـت که از مبانی مشترک هماهنگ با یکدیگر نشئت می‌گیرند. یکپارچگی این خط‌ها در این نقطهٔ مرکزی در اوج کمال خویش است، و چون فاصلهٔ نقاط فرضی روی محیط دایره با مرکز یکســـان است و به‌طور کلی تمامی شرایط در دایره به‌طور یکسان است، پس اعتدال و تعادل کامل را در دایره می‌توان احساس کـــرد. خصوصیات و ویژگی‌های مربوط بـــه دایره را در فرم ســـه‌بعدی، می‌توان در «کره» و «اســـتوانه» یافت. دایره در معماری سنتی نمادی است روحانی که دارای ارزش‌های مقدس و آســـمانی در ارتبـــاط با عالم بالا و ملکوت اعلاست.

شکل مربع از ترکیب و تقاطع دو خط موازی عمودی، و دو خط موازی افقی، به‌وجود می‌آید. دارای چهار ضلع و چهار زاویهٔ مســـاوی اســـت. هر زاویهٔ مربع ۹۰ درجه و مجمـــوع چهار زاویهٔ آن ۳۶۰ درجه اســـت. طبق نظر **فیثاغورس**، مربع نمایندهٔ وحدت‌گونه‌ها و نشان‌دهندهٔ برابری یک چیز با خودش به نحوی نامتناهی است. در نتیجه می‌تواند نمادی از عدالت قانون تلقی شود که همه را به یک چشم می‌نگرد. از نظر افلاطون، مربع نمایندهٔ هماهنگی اســـت که عالی‌ترین فضیلت به‌شمار می‌آید؛ شـــناختی کامل که شـــخص می‌توانـــد از طریق آن به حقیقت مطلق دست یابد. مربع شکلی است ثبات‌گرا که اضلاع و زوایای برابرش احساسی از سکون، استحکام و حصار به بیننده القا می‌کنند و چهارپایهٔ مستحکم برای اشیایی محسوب می‌شوند که به ثبات احتیاج دارند.

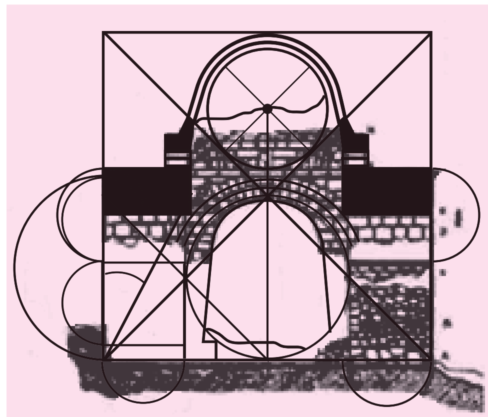
گاهی کمال ایســـتای مربع یا مکعب با نمادگرایی پویای دایره ترکیب می‌شـــود. این امـــر در مورد کعبه مصداق دارد که مرکز مناســـک طواف است و بی‌شک یکی از کهن‌ترین عبادتگاه‌هاست. مناسک طواف با دقت تمام بیانگر رابطهٔ بین عبادتگاه و حرکت آسمانی است. طواف هفت‌بار انجام می‌شود که با تعداد کرات آسمانی هم‌خوانی داشته باشد؛ سه مرتبه شتابان و چهار مرتبه با قدم‌های کوتاه [اردلان، ۱۳۹۲].



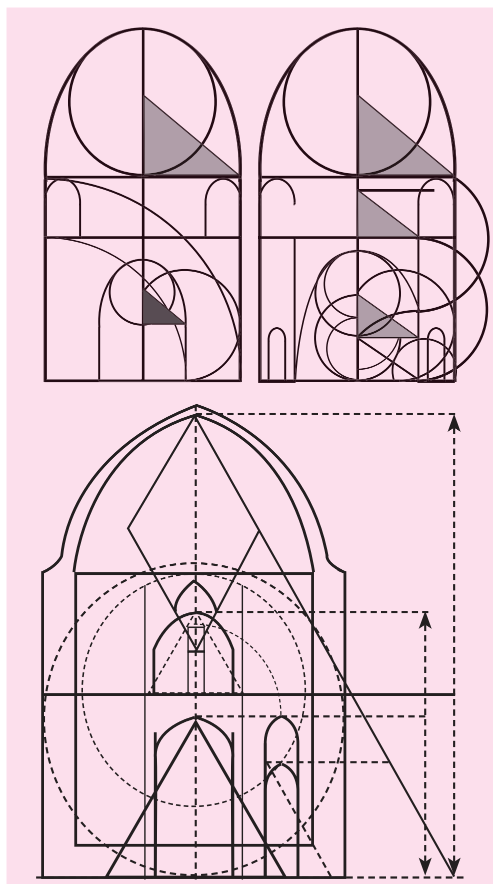
تصویر ۲. کعبه

چهارتاقی

چهارتاقی بنایی چهارگوش با گنبدی اســت که بر مربعی از چهار قوس قرار گرفته است و با یک ورودی در هر طرف، شناخته می‌شود. چهارتاق در شکل‌های پایه‌ای ترکیبی از مربع و دایره است.



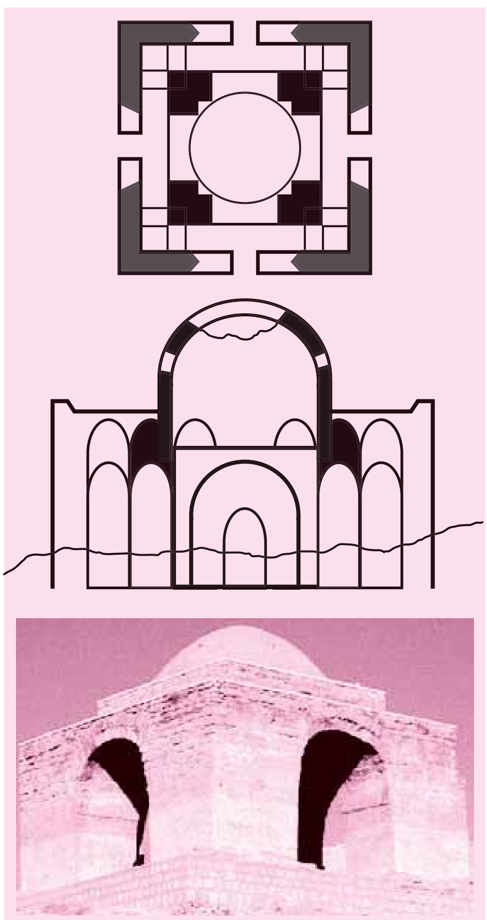
تصویر ۳ (الف). ***بالا:*** **تحلیل هندســـی چهارتاقی نیاسر از هاردی [گدار، ۱۳۸۸]،**



تصویر ۳ (ب). تحلیل هندسی گنبد تاج‌الملک مسجد جامع اصفهان [پوپ، ۱۳۵۶].

در **چهار تاقی،** گنبدی مـــدور یا کروی بر فضای مســـتطیلی قرار داده می‌شود که نشـــان‌دهندهٔ دنیای کیفیت ناب است. چهارتاقی با مفهوم سنتی به گونه‌ای وارد دنیای شـــکل‌های اسلامی شد که اهمیت پیشین خـــود را حفظ می‌کرد. چهارتاقی از دیدگاه درون‌گرایی اســـلامی به نماد یکپارچگی و آفرینش تبدیل شـــده و مانده اســـت. این شکل که نماد سبکی و پویایی مطلق روح اســـت، آغـــاز و پایانی ندارد. تنهـــا نقطهٔ مرجعش مرکزش اســـت که محـــور متافیزیکـــی آن را به محور تکیه‌گاهش متصل می‌کند، از آن می‌گذرد، و دو شکل دایره و مربع را به‌صورت کیفی یکی می‌کند.

بهتریـــن بقایـــای تاریخی آن‌را می‌تـــوان در معابد ساســـانیان که آتش نمادین در مرکزشان می‌سوخت، یا در اورنگ‌گاه‌های شاهنشـــاهی، مانند تخت تاقدیس و شـــاید بهتر از همه در طرح‌های مشـــابه چهارباغ در بهشت‌های ساسانیان یافت. (تصویر ۳و ۴)



تصویر ۴. شکلی دیگر از چهارتاقی نیاسر

در معماری ایرانی به‌ندرت به بشن گرد برمی‌خوریم و معمولاً قسمت انتهایی بشن به شکل مربع و گاهی مستطیل است

گنبد

تعریف هندسی گنبد: گنبد مکان هندسی نقاطی است که از دوران چفدی مشخص حول یک محور قائم به‌وجود می‌آید. اما در زبان معماری، گنبد پوششی است که روی زمینه‌ای گرد برپا شود.

تعریف کاربردی گنبد: سقفی است نیم کروی یا مقعر که معمولاً بالای پلان‌های مدور یا مربع و کثیرالاضلاع، که با کمک گوشوار مدور می‌شوند، تعبیه می‌شود.

اجزای تشکیل‌دهندهٔ ساختمان گنبد

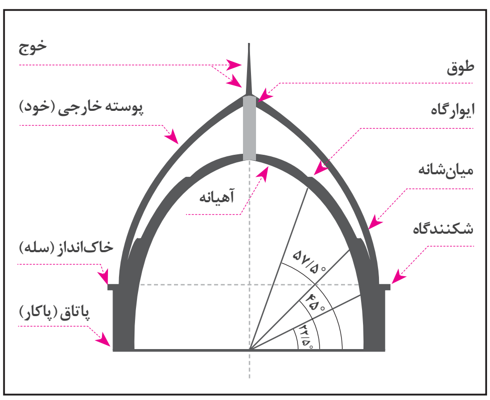
گنبد از سه قسمت تشکیل می‌شود:

۱. گنبدخانه = زمینهٔ گنبد

۲. بَشن = هیکل. یعنی قسمتی از گنبد که روی زمینه به‌صورت مکعب بالا می‌آید و یک یا دو طرف آن باز است (در گنبدهای قبل از اسلام هر چهار طرف به دهانه‌های باز منتهی می‌شد).

۳. چپیره = جمع شده

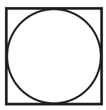
از آنجا که در معماری ایرانی به‌ندرت به بشن گرد برمی‌خوریم و معمولاً قسمت انتهایی بشن به شکل مربع و گاهی مستطیل است، با چپیره کردن آن‌را به دایره تبدیل می‌کنند و بعد گنبد روی آن سوار می‌شود. به‌همین دلیل، مرحلهٔ چپیره‌شدن در گنبدسازی شایان توجه است. زیرا امکان داشتن زمینهٔ گرد است که اجرای نهایی پوشش گنبد را میسر می‌سازد. معمولاً در نقشه‌هایی که پوشش به‌صورت گنبد طراحی می‌شود، زمینه را به شکل مربع در نظر می‌گیرند تا به سادگی بتوان آن را به ۸، ۱۶، ۳۲ضلعی و... و بالاخره دایره تبدیل کرد [پیرنیا، ۱۳۷۰]. (تصویر۵)



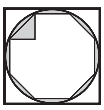
تصویر ۵. برخی از اجزای گنبد

یافته‌ها

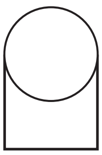
در معماری مسجدها، به‌خصوص مسجدهای دورهٔ صفوی، هندسه دارای تناسبات خاصی است که در ادامه به بررسی و تحلیل چند نمونه از آن‌ها می‌پردازیم (جدول ۱). مشاهده می‌شود که در تمامی برش‌های افقی (پلان)، قطره دایره مماس شده برابر است با ضلع مربع محاطی (تصویر۶). در تقسیماتی که توسط هشت‌ضلعی مماس بر دایره است، رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید (تصویر ۷). در برش عمودی (مقطع) نیز همین رابطه برقرار است؛ با تفاوت اینکه در اینجا ضلع مربع بر قطر دایره مماس است (تصویر ۸).



تصویر ۶

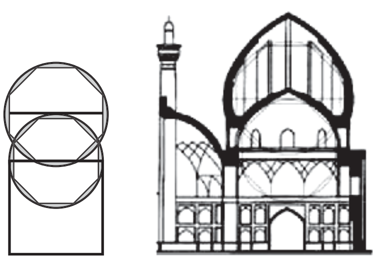


تصویر ۷



تصویر ۸

در مسجد شیخ لطف‌الله، برش عمودی (مقطع) با مماس کردن ضلع مربع بر قطر دایره، ارتفاع گنبد تا کف را نشان می‌دهد. در مسجد امام که دارای گنبد دو پوستهٔ گسسته است، برش عمودی (مقطع)، با مماس کردن ضلع مربع بر قطر دایرهٔ پوستهٔ داخلی، ارتفاع گنبد تا کف را نشان می‌دهد. ضلع پایینی هشت‌ضلعی پوستهٔ خارجی؛ مماس بر قطر دایرهٔ پوستهٔ داخلی است.



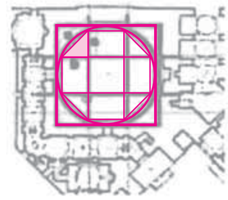
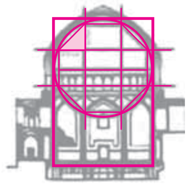
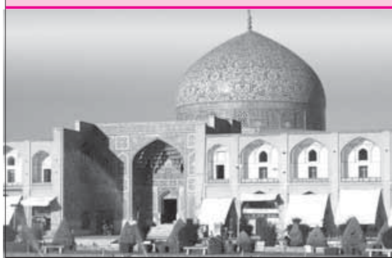
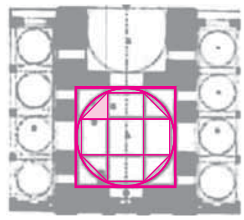
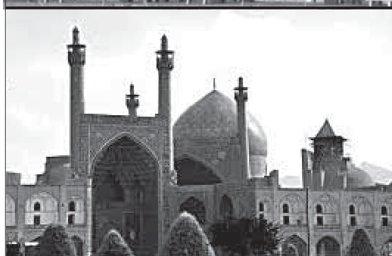
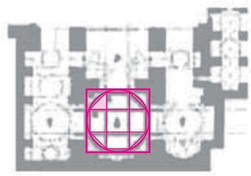
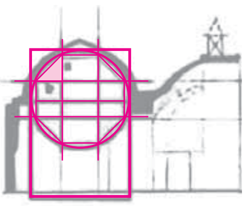
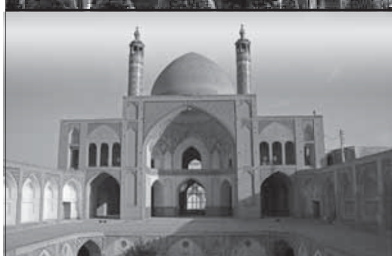
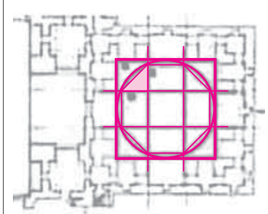
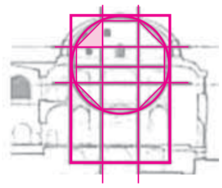
تصویر ۹. گنبد دو پوستهٔ مسجد امام

در مسجد آقانور و مسجد علی که دارای گنبد تک پوسته با انحنای کمتر هستند، برش عمودی (مقطع)، با مماس کردن ضلع مربع بر قطر دایره، ارتفاع کمتر گنبد تا کف را نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

ترکیب‌بندی و تناسبات هندسی در تاریخ معماری سنتی ایران به شیوه‌های گوناگون وجود دارد. در معماری مساجد، به دلیل کاربرد ایده‌ها، تفسیر هندسه به شیوه‌های مقدس ارائه شده است.

جدول ۱. **تحلیل چند نمونه از معماری سنتی**

نام بنا	ترکیب شکل در پلان	ترکیب شکل در مقطع	ارتباط مربع به دایره	تصویر
مسجد شیخ‌لطف‌الله (اصفهان)			قطر دایره= ضلع مربع $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=c$	
مسجد امام (اصفهان)			قطر دایره= ضلع مربع $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=c$	
مسجد آقانور (اصفهان)			قطر دایره= ضلع مربع $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=c$	
مسجد علی (اصفهان)			قطر دایره= ضلع مربع $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=c$	

با بررســـی‌های انجام شـــده به این نتیجه می‌رسیم که هندســـه در معماری مسجدها، به‌خصوص در دوران صفوی، از الگوهایی که از ترکیب شکل‌های مربع و دایره شکل می‌گرفت، ایجاد می‌شد. حس این ترکیب‌بندی در پلان‌های افقی و عمودی در محـــدودهٔ گنبد خانه‌ها به کرّات دیده می‌شود و از نوع یک رابطهٔ هندسی متناسب است. این رابطه در تقسیم‌بندی از کف تا بطن (بشن) در محدودهٔ گوشه‌ســـازی (ناحیهٔ انتقال)، و در ناحیهٔ ارتفاع گنبد و ارتفاع نهایی (خیز گنبد) وجود دارد. آنچنان که بررسی‌های تطبیقی نشـــان می‌دهند، در گنبدهای دو پوستهٔ گسســـته، به علت ارتفاع زیاد، هر پوسته به‌طور جداگانه هندسهٔ خود را دارد.

***منابع**

۱. اردلان، نادر (۱۳۹۲). **حس وحدت**. انتشارات علم معمار رویال. تهران. چاپ چهارم.

۲. پـوپ، آرتـور (۱۳۵۶). **معماری ایران، پیروزی شـــکل و رنگ**. ترجمهٔ کرامت‌الله افسر. انتشارات یساولی. تهران.

۳. رضازاده اردبیلی، مجتبی و ثابت فرد، رضا (۱۳۹۲). «بازشناسی کاربرد اصول هندسی در معماری سنتی». **نشریهٔ هنرهای زیبا**. شمارهٔ ۱. بهار.

۴. حجازی، مهرداد (۱۳۸۷). «هندســـهٔ مقدس در طبیعت و معماری ایرانی». **مجلهٔ تاریخ علم**. شمارهٔ ۷.

۵. لولـر، رابرت (۱۳۶۸). **هندســـهٔ مقدس**. ترجمهٔ هایده معیری. مؤسســـهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی. تهران.

۶. رضازاده اردبیلی، مجتبی (۱۳۹۰). **مرمت آثار معماری: شناخت، آسیب‌شناسی و فن‌شناسی**. انتشارات دانشگاه تهران.

7. Akkach, Samer (2005), Cosmology and Architecture in Premodern Islam, State University of New York Press, New York.

8. Donato, Sandro (1990), IRAN, La Ricostruzione Delle Aree Distrutte Dalla Guerra, Gangemi Editore, Roma, Reggio C.

حمیدرضا امیری

عملگرهای (رابط‌های) منطقی اصلی

این بخش سه عمل منطقی عطف، فصل و نقیض را مطرح می‌کند که به ترتیب معادل با کلمات «و»، «یا» و «نه» هستند.

عطف (ترکیب عطفی)، $p \wedge q$

هر دو گزاره می‌توانند با کلمهٔ «و» با هم ترکیب شوند و یک گزارهٔ مرکب تشکیل دهند که ترکیب عطفی از دو گزارهٔ اصلی نامیده می‌شود. ترکیب عطفی p و q با $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود و می‌خوانیم: «p و q». از آنجا که $p \wedge q$ یک گزاره است، دارای ارزش راستی است و ارزش راستی آن به ارزش راستی p و q بستگی دارد. به‌ویژه داریم:

تعریف: اگر p و q راست باشند، آن‌گاه $p \wedge q$ راست است. در بقیهٔ حالت‌ها $p \wedge q$ دروغ است.

به‌طور معادل، ارزش راستی $p \wedge q$ در جدول ۱ تعریف شده است.

در این جدول، سطر اول یک راه کوتاه است برای بیان اینکه اگر p راست و q راست باشد، آن‌گاه $p \wedge q$ راست است. دومین سطر می‌گوید اگر p راست و q دروغ باشد، آن‌گاه $p \wedge q$ دروغ است. به‌همین ترتیب برای بقیهٔ سطرها.

مشاهده می‌شود که در جدول ۱، چهار سطر وجود دارند که متناظرند با چهار حالت ممکن در ترکیب‌های T و F برای دو گزارهٔ p و q. توجه دارید، $p \wedge q$ فقط وقتی راست است که p و q هر دو راست باشند.

مثال: چهار عبارت زیر را در نظر بگیرید:

۱. پاریس در فرانسه است و: ۴=۲+۲.
۲. پاریس در فرانسه است و: ۵=۲+۲.
۳. پاریس در انگلستان است و: ۴=۲+۲.
۴. پاریس در انگلستان است و: ۵=۲+۲.

فقط اولین عبارت راست است. بقیهٔ عبارت‌ها دروغ‌اند، زیرا حداقل یکی از دو گزاره دروغ است.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول ۱

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Logical Operation .... عملگرهای منطقی ـ رابط‌های منطقی
2. Discusses .... مطرح کردن ـ اشاره کردن
3. Conjunction .... عاطف
4. Disjunction .... فاصل
5. Negation .... نقیض
6. Compound Propositions .... گزاره‌های ترکیبی
7. Since .... از آنجا که
8. Otherwise .... در غیر این‌صورت
9. Equivalently .... به‌طور معادل ـ هم‌ارز
10. Corresponding .... متناظراً

4.3 BASIC LOGICAL OPERATIONS

This section discusses three basic logical operation of conjunction, disjunction, and negation which correspond, respectively, to the English words "and", "or", and "not".

Conjunction, $p \wedge q$

Any two propositions can be combined by the word "and" to form a compound proposition called the **conjunction** of the original propositions. Symbolically,

$$p \wedge q$$

read "p and q", denotes the conjunction of *p* and *q*. Since $p \wedge q$ is a proposition it has a truth value, and this truth value, and this truth value depends only on the truth values of p and q. Specifically:

Definition 4.1: If p and q are true, then $p \wedge q$ is true; otherwise $p \wedge q$ is false.

The truth value of $p \wedge q$ may be defined equivalently be the table in Fig. 4-1(a). Here, the first line is a short way of saying that if p is true and q is true, the $p \wedge q$ is true. The second line says that if p is ture and q is false, then $p \wedge q$ is false. And so on. Observe that there are four lines corresponding to the four possible combinations of T and F for the two subpropositions p and q. Note that $p \wedge q$ is true only when both p and q are true.

EXAMPLE 4.2 Consider the following four statements:

(i) Paris is in France and 2+2=4.
(ii) Paris is in France and 2+2=5.
(iii) Paris is in England and 2+2=4.
(iv) Paris is in England and 2+2=5.

Only the first statement is true. Each of the other statements is false, since at least one of its substatements is false.

ترجمه برای دانش‌اموزان

Disjunction, $p \vee q$

Any two propositions can be combined by the word "or" to form a compound proposition called the *disjunction* of the original propositions. Symbolically,

$$p \vee q$$

read "*p or q*", denotes the disjunction of *p* and *q*. The truth value of $p \vee q$ depends only on the truth values of *p* and *q* as follows.

Definition 4.2: If *p* and *q* are false, then $p \vee q$ is false; otherwise $p \vee q$ is false.

The truth value of $p \vee q$ may be defined equivalently by the table in Fig. 4-1(b). Observe that $p \vee q$ is false only in the fourth case when both *p* and *q* are false.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(a) "p and q"

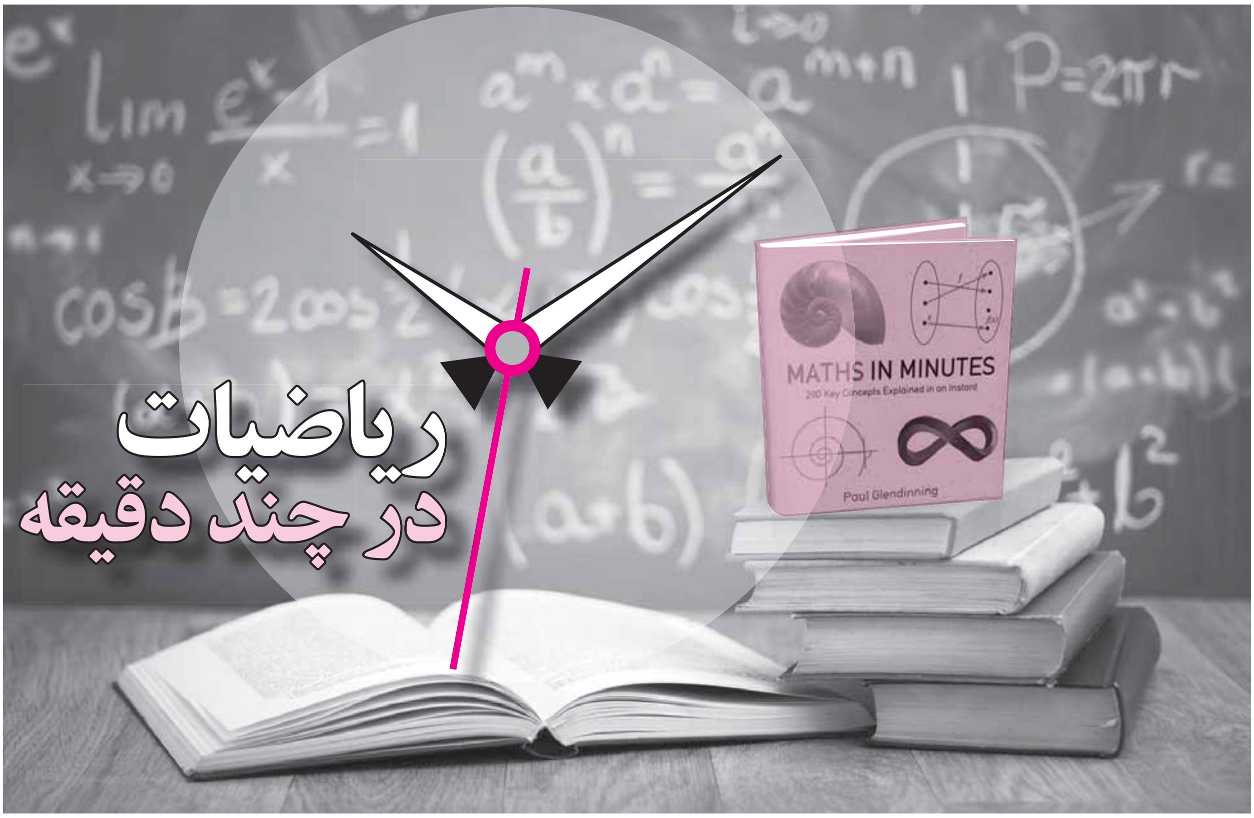
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

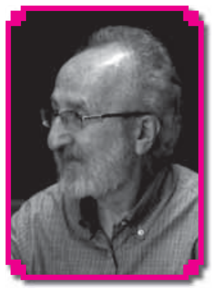
(b) "p or q"

p	~p
T	F
F	T

(c) "not p"

پال گِلندینینگ





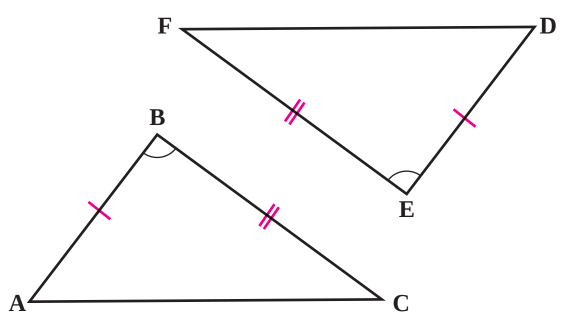
ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور**

هم‌نهشتی

دو شیء را «هم‌نهشت» (congruent) می‌گویند اگر یک‌شکل و یک‌اندازه باشند. بنابراین دو مثلث هم‌نهشت‌اند اگر مشابه ـ یک شکل ـ باشند و طول اضلاع متناظرشان برابر یا یک اندازه باشد. یعنی عامل مقیاس‌بندی بین آن‌ها ۱ باشد.

توجه داشته باشید که هم‌نهشتی لزوماً به این معنی نیست که می‌توان یک مثلث را صرفاً توسط تبدیلات واقع در صفحه، طوری روی دیگری حرکت داد که کاملاً برهم منطبق شوند. دو مثلث هم‌نهشت می‌توانند تصویرهای آینه‌ای یکدیگر باشند و تنها به‌طور فیزیکی با برداشتن کامل یکی از آن‌ها به خارج از صفحه، می‌توانند برهم منطبق شوند.

دو مثلث در حالت کلی هم‌نهشت‌اند، اگر هر یک از سه مجموعهٔ این مقدارها در هر دو یکسان باشند: طول‌های سه ضلع؛ طول‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها؛ یا طول یک ضلع و زاویه‌های تشکیل شده با اضلاع دیگر دو طرف آن. به این ترتیب هر یک از این سه معیار برای مشخص کردن یک مثلث کافی است.



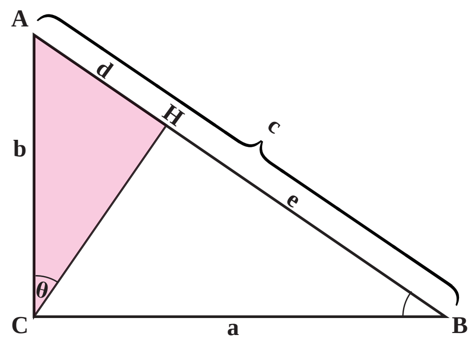
یک جفت مثلث هم‌نهشت را می‌توان با استفاده از آزمون‌هایی، از قبیل دانستن دست کم دو ضلع برابر و یک زاویهٔ برابر مطابق شکل فوق شناخت. با این حال، این دو مثلث هم‌نهشت نمی‌توانند روی یکدیگر قرار گیرند.

قضیهٔ فیثاغورس

گرچه این قضیه از اواخر قرن ششم ق.م. به نام فیثاغورس (Pythagras)، ریاضی‌دان یونانی، نامیده شده است، این ارتباط مشهور بین طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، با یقین بسیار، قرن‌ها پیش از این نزد بابلی‌ها شناخته شده بوده است.

طبق این قضیه، مربع بزرگ‌ترین ضلع، که به نام وتر شناخته می‌شود، برابر مجموع مربعات طول‌های دو ضلع دیگر آن است. اثبات سادهٔ آن مبتنی بر نسبت‌های اضلاع مثلث‌های متشابه را در شکل مقابل نشان داده‌ایم، اما آن را می‌توان با در نظر گرفتن سطوح مربع‌های هندسی ساخته شده بر هر ضلع مثلث نیز به اثبات رساند.

قضیهٔ فیثاغورس یکی از ابزارهای مهم هندسه است، و بسیاری از تعاریف فاصله در هندسهٔ مختصاتی مبتنی بر این رابطه‌اند. این قضیه را می‌توان برحسب رابطهٔ بین توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس نیز بیان کرد.



تشابه مثلث‌های ABC و CHB از یک طرف، و ABC و ACH از طرف دیگر، مستلزم این است که:

$$\frac{a}{c}=\frac{e}{a} \quad \text{و} \quad \frac{b}{c}=\frac{d}{b}$$

در نتیجه: $a^2=ec$ و $b^2=dc$ و داریم:

$$a^2+b^2=(e+d)c=c^2$$

سینوس، کسینوس و تانژانت

مثلث‌های قائم‌الزاویه این امکان را به‌دست می‌دهند که توابع را با زاویه‌ها، از طریق نسبت‌های طول‌های اضلاع آن‌ها، وابسته کنیم. این‌ها به «*توابع مثلثاتی*» (trigonometric functions) موسوم‌اند، و توابع اساسی تعریف شده به این طریق عبارت‌اند از توابع «سینوس» (sine)، «کسینوس» (cosine) و «تانژانت» (tangent).

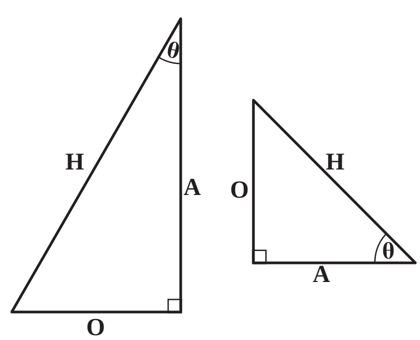
برای تعریف این توابع، یکی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه، به‌نام θ را که 90° نباشد، انتخاب می‌کنیم. این زاویه از برخورد وتر مثلث به‌طول H، و ضلع دیگر، موسوم به ضلع مجاور، به طول A تشکیل می‌شود. ضلع باقی‌مانده، مقابل زاویهٔ مزبور، دارای طول O است. در این صورت، توابع سینوس، کسینوس و تانژانت توسط نسبت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin\theta=\frac{O}{H} \quad \text{و} \quad \cos\theta=\frac{A}{H} \quad \text{و} \quad \tan\theta=\frac{O}{A}$$

از آنجا که دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ θ متشابه یکدیگرند، توابع مذکور، بی‌توجه به اندازهٔ مثلث، به پاسخ یکسان منجر می‌شوند. گذشته از این، از آنجا که:

$$\frac{O}{A}=\frac{O}{H}/\frac{A}{H}$$

می‌توان ملاحظه کرد که: $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.



در حالی‌که وتر یک مثلث قائم‌الزاویه همواره بزرگ‌ترین ضلع است، اضلاع مقابل و مجاور آن در رابطه با زاویهٔ مورد بررسی تعریف می‌شوند.

«پی» در تنگنای تعیین‌کننده!

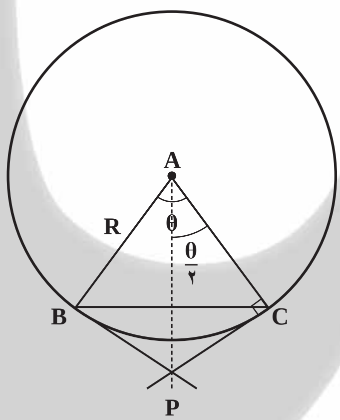
محمد طبیعی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

عدد پی (π) یک ثابت ریاضی است که از تقسیم محیط دایره بر قطر آن به‌دست می‌آید. یافتن مقدار دقیق این عدد، در طول تاریخ مورد توجه ریاضی‌دانان بسیاری بوده و هر یک از آن‌ها سعی داشته است تا تقریب دقیق‌تری از عدد پی را ارائه دهد. *غیاث‌الدین جمشید کاشانی*، ریاضی‌دان ایرانی قرن‌های هشتم و نهم، توانسته بود عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار به درستی محاسبه کند. باید در نظر داشت که در آن دوران روش مناسبی برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی (همچون بسط تیلور و...) وجود نداشت و تنها راه، به‌کارگیری اتحادهای مثلثاتی بود.

در این مقاله قصد داریم با استفاده از مفاهیم مقدماتی روشی را برای به‌دست آوردن عدد π ارائه دهیم.

در گام اول یک مثلث متساوی‌الساقین حاده‌الزاویه رسم می‌کنیم (مانند ABC) که زاویهٔ رأس آن برابر θ (برحسب درجه) باشد. سپس به مرکز A و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم. در نقاط B و C بر این دایره مماس‌هایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. روشن است که داریم:



$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} \le \text{مساحت قطاع } ABC \le \text{مساحت چهارضلعی } ABPC$$

اگر طول AB را برابر R بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta$$

$$\text{مساحت قطاع } ABC = \frac{\theta}{360}\pi R^2$$

برای به‌دست آوردن مساحت ABPC نخست باید توجه داشت که دو مثلث ABP و ACP هم‌نهشت هستند.

پس:

$$\text{مساحت } APBC = 2\times\frac{R\times R\tan\frac{\theta}{2}}{2} = R^2\tan\frac{\theta}{2}$$

و $\text{مساحت } ABPC = 2\times \overset{\Delta}{APC}$

در نتیجه با استفاده از نامساوی (۱) داریم:

$$\frac{1}{2}R^2\sin\theta \le \frac{\theta}{360}\pi R^2 \le R^2\tan\frac{\theta}{2}$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \rightarrow \text{اگر } \theta \text{ حاده باشد}$$

$\tan\theta \ge 2\tan\frac{\theta}{2}$ با جای‌گذاری نامساوی اخیر در نامساوی بالا داریم:

$$\frac{1}{2}R^2\sin\theta \le \frac{\theta}{360}\pi R^2 \le \frac{1}{2}R^2\tan\theta$$

با تقسیم طرفین بر $\frac{\theta}{360}\times R^2$ داریم:

$$\frac{180}{\theta}\sin\theta \le \pi \le \frac{180}{\theta}\tan\theta \quad (2)$$

نامساوی بالا به ازای هر θ حاده برقرار است، بدیهی است که هرچه θ به صفر نزدیک‌تر باشد، کران بالا و پایین دقیق‌تری برای π به‌دست می‌آید. به‌همین سبب برای اینکه θ رشد سریعی به سمت صفر داشته باشد، می‌گیریم: $\theta = \frac{180}{n^2}$. پس:

$$2^n \sin\frac{180}{2^n} \le \pi \le 2^n \tan\frac{180}{2^n}$$

اکنون فرض کنید:
$b_n = \tan\frac{180}{2^n}$ و $a_n = \sin\frac{180}{2^n}$.

می‌دانیم: $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ [1]

در نتیجه:

$$\tan\frac{180}{2^n} = \frac{2\tan\frac{180}{2^{n+1}}}{1-\tan^2\frac{180}{2^{n+1}}}$$

لذا: $b_n = \frac{2b_{n+1}}{1-b_{n+1}^2} \leftarrow b_{n+1}^2 b_n + 2b_{n+1} - 1 = 0 \leftarrow$

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{b_{n+1}^2 - 1}}{2b_n} \quad (3)$$

$n \ge 2 \quad b_2 = 1$

از طرف دیگر می‌دانیم: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ [2]

یا در صورت حاده بودن x: $\sin 2x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$

یعنی: $\sin\frac{180}{2^n} = 2\sin\frac{180}{2^{n+1}}\sqrt{1-\sin^2\frac{180}{2^{n+1}}}$.

لذا: $a_n = 2a_{n+1}\sqrt{1-a_{n+1}^2}$

پس:

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } n \ge 2,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{-\sqrt{1-a_n^2}+1}{2}} \quad (4)$$

توجه کنید که عبارت‌های (۳) و (۴) با فرض مثبت‌بودن b_iها و a_iها به‌دست آمده‌اند.

اکنون به‌طور خلاصه داریم:

$$2^n a_n \le \pi \le 2^n b_n$$
$$n \ge 2 \qquad n \ge 2$$

که b_n از دنبالهٔ بازگشتی $b_{n+1} = \frac{\sqrt{b_{n+1}^2 - 1}}{b_n}$ و $b_2=1$ پیروی می‌کند و a_n از دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1} = \sqrt{\frac{-\sqrt{1+a_n^2}+1}{2}}$ و $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به‌دست می‌آید.

اکنون اگر تا b_{12} و a_{12} پیش برویم، داریم:

$2^{12}a_{12} \le \pi \le$ ۳/۱۴۱۵۹۳۲

۳/۱۴۱۵۹۲۳ $\le \pi \le$ ۳/۱۴۱۵۹۳۲

لذا می‌توان دریافت که π تا ۵ رقم اعشار عبارت است از: ...۳/۱۴۱۵۹ با این اوصاف هنوز ۱۱ رقم از **پیر کاشان** عقب‌تریم!

توجه کنید که می‌توان با افزایش n و همچنین افزایش دقت ارقام اعشاری در هر مرحله از استفاده از روابط بازگشتی، به تقریب‌های بسیار دقیق‌تر هم دست یافت.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی قرن‌های هشتم و نهم، توانسته بود عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار به‌درستی محاسبه کند

پی‌نوشت

۱ و ۲. توجه کنید که این اتحاد اثبات‌های مقدماتی و هندسی فراوانی دارد که به برخی از آن‌ها در «مجلهٔ برهان» اشاره شده است.

منابع

۱. دانشنامهٔ آزاد ویکی‌پدیا «عدد پی».
۲. وب‌سایت کانون فرهنگی آموزش، «غیاث‌الدین جمشید کاشانی».

محمدحاجی‌محمدحسینی
دانش‌آموز سال چهارم
رشتهٔ ریاضی و فیزیک
از دماوند

بسط دوجمله‌ای و بخش‌پذیری عددها

مقدمه

ممکن است وقتی شـــاخه‌های گوناگون ریاضی را مطالعه می‌کنیم، در نگاه اول هیچ ارتباطی میان آن‌ها مشـــاهده نکنیم. اما در حقیقت چنین نیست. در این مقاله قصد داریم به ذکر یک رابطهٔ جالب در مورد بسط دوجمله‌ای و مبحث بخش‌پذیری عددها بپردازیم.

«مثلث **خیام**» در طول تاریخ ریاضیات همواره مورد توجه بوده و بسط «دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال» نیز یکی از مباحث شیرین دورهٔ دبیرستان اســت. ابتدا توضیحی کوتاه در مورد این بسط می‌دهیم:

برای هر مجموع یا تفاضل دو جمله رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\dots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

■**تذکر ۱:** نماد ! (فاکتوریل) برای هر عدد طبیعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n!=1\times2\times3\times\dots\times n$$

■**تذکر ۲:** $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

در بسط $(a-b)^n$ ضریـب جمـلات ردیـف زوج (جملات دوم، چهـارم و...) منفی است. به مثال زیر دقت کنید:

$$(x-y)^4=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$$

اکنون بسط دوجمله‌ای را در نظر بگیرید. اگر مقدار باز شدهٔ $(a+b)^n$ را بنویسیم و در آن از a فاکتور بگیریم، به عبارت زیر می‌رسیم:

$$(a+b)^n = a(a^{n-۱}+na^{n-۲}b^۱+...+na^۰)+b^n = aQ+b^n$$

با فرض صحیح بـــودن a و b در عبارت بالا Q یک عدد صحیح است.

نتیجه: برای به‌دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+b)^n$ بر a کافی است، باقی‌ماندهٔ تقسیم b^n بر a را بیابیم.

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۰^۵$ بر ۱۸ را بیابید.

حل: $۲۰^۵$ را می‌توان به‌صورت $(۱۸+۲)^۵$ نوشـــت. پس برای به‌دســـت آوردن باقی‌ماندهٔ این تقسیم کافی اســـت، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^۵$ بر ۱۸ را بیابیم که ۱۴ است. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم اصلی نیز ۱۴ است.

اکنون به ســـراغ عددها و مبناها در کتاب ریاضیات گسستهٔ سال چهارم می‌رویم:

اگر A یک عدد در مبنای n باشد، آن‌گاه برای بردن این عدد به مبنای ۱۰ از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$A=(a_k a_{k-۱}...a_۱a_۰)_n = a_۰n^۰+a_۱n^۱+...+a_{k-۱}n^{k-۱}+a_kn^k$$

پس اگر یک عدد در مبنای ۱۰ نیز باشـــد، می‌توان فرمول فوق را در مورد آن به‌کار برد.

مثال: عدد ۲۳۴ را در نظر بگیرید:

$$۲۳۴ = ۴(۱۰)^۰+۳(۱۰)^۱+۲(۱۰)^۲ = ۴+۳۰+۲۰۰ = ۲۳۴$$

اکنون می‌خواهیم ببینم عدد $A=(a_ka_{k-۱}...a_۱a_۰)_{۱۰}$ که در مبنای ۱۰ اســـت، آیا به یک عـــدد دلخواه x که $x\in Z$ و $۱<x<۲۰$ بخش‌پذیر است یا خیر؟

$$A=a_۰(۱۰)^۰+a_۱(۱۰)^۱+...+a_{k-۱}(۱۰)^{k-۱}+a_k(۱۰)^k$$

حـــال در عبارت فوق می‌توانیـــم به جای ۱۰ مقدار x+y را قرار دهیم؛ به‌طوری‌که:

$x+y=۱۰$ و $x,y\in Z$:

$$A=a_۰(x+y)^۰+a_۱(x+y)^۱+...+a_k(x+y)^k$$

حال با توجه به نتیجهٔ قسمت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r=y^۰a_۰+ya_۱+...+y^ka_k$$

تذکر: در عبارت $y^m\geq x$ می‌توان برای سهولت در محاسبه، به جای y^m باقی‌مانده y^m/x را جای‌گذاری کرد.

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۳۵۹۶ بر ۷ را بیابید.

$$x=۷,\ \ x+y=۱۰ \Rightarrow y=۳$$

$$r=۳^۰a_۰+۳^۱a_۱+۳^۲a_۲+...+۳^۵a_۵$$

$$=a_۰+۳a_۱+۲a_۱+۶a_۳+۴a_۴+۵a_۵$$

$$\Rightarrow ۶+۲۷+۱۰+۱۸+۲۴+۵=۹۰$$

باقی‌مانـــدهٔ تقســـیم ۹۰ بر ۷ برابر ۶ اســـت، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم اصلی نیز ۶ است.

حال با روش فوق می‌خواهیم بدانیم، کدام عددهای سه رقمی بر ۸ بخش‌پذیرند:

$$A=a_۲a_۱a_۰ = a_۰(۱۰)^۰+a_۱(۱۰)^۱+a_۲(۱۰)^۲$$

$$=a_۰+a_۱(۸+۲)+a_۲(۸+۲)^۲$$

یعنـــی مقدار باقی‌ماندهٔ عدد A بر ۸ برابر مقدار زیر است:

$$۲^۰a_۰+۲^۱a_۱+۲^۲a_۲ = a_۰+۲a_۱+۴a_۲$$

پس عددهایی مثل ۱۲۸ که حاصل جمع یکان و دو برابر دهگان و چهار برابر صدگان آن‌ها بر ۸ بخش‌پذیر باشد، بر ۸ بخش‌پذیرند.

تمرین

ـ کدام عددهای سه رقمی بر ۱۲ بخش‌پذیرند؟

هوشنگ شرقی، حمیدرضا امیری، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

هندسهٔ ۱

(پایهٔ دهم)

۱. چهار نقطهٔ متمایز A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. شرط وجود این نقطه چیست؟ (بحث کنید.)

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۰^\circ$. نیم‌ساز زاویهٔ B ضلع AC را در D قطع کرده است. از D عمود DH را بر BC رسم کرده‌ایم. اندازه زاویهٔ DAH چند درجه است؟

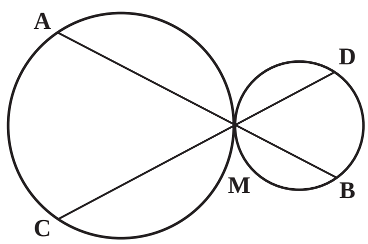
۳. یک ذوزنقه رسم کنید که اندازهٔ ساق‌های آن ۶ و ۴ و اندازهٔ قاعده‌های آن ۷ و ۱۰ واحد باشد.

۴. ثابت کنید در هر ذوزنقه، مجموع اندازه‌های قاعدهٔ بزرگ و هر ساق، از مجموع اندازه‌های قاعدهٔ کوچک و ساق دیگر بزرگ‌تر است.

هندسهٔ ۲

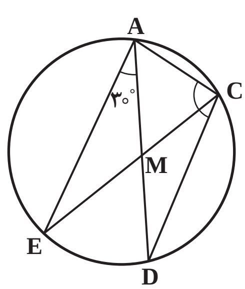
(پایهٔ یازدهم)

۱. در شکل ۱ دو دایرهٔ C_1 و C_2 در نقطهٔ M برهم مماس‌اند. ثابت کنید: AC||BD.



شکل ۱.

۲. در شکل ۲، MA=ME، $E\hat{A}D = ۳۰^\circ$ و $\widehat{CD} = ۷۰^\circ$. اندازهٔ $A\hat{C}D$ را به‌دست آورید.



شکل ۲.

۳. اگر در یک دایره، مرکز دایره از وتری به طول ۸ سانتی‌متر، به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد، از وتری به طول ۶ سانتی‌متر چه فاصله‌ای دارد؟

سؤالات درس حسابان
(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

۱. در محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا $2n-1$ اشتباهی رخ داده و یکی از اعداد دوبار جمع و حاصل ۱۰۰۰ شده است. مشخص کنید کدام عدد دوبار جمع شده است؟

۲. مستطیلی به مساحت S داریم. ابتدا $\frac{1}{3}$ آن را رنگ می‌زنیم. سپس $\frac{1}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌زنیم. به‌همین ترتیب در هر مرحله $\frac{1}{3}$ از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۰ درصد سطح شکل رنگ می‌شود؟

۳. اگر هر دو جواب معادله درجهٔ دوم $x^2+ax+b=0$ عددهای صحیح باشند، نشان دهید:

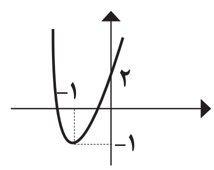
الف) اگر هر دو جواب فرد باشند، a عددی زوج و b فرد است.

ب) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد، a عددی فرد و b زوج است.

۴. در شکل ۳ نمودار تابع درجهٔ دوم (سهمی) $f(x)=ax^2+bx+c$ رسم شده است.

الف) صفرهای تابع را به‌دست آورید.

ب) معادلهٔ $f^2(x)-7f(x)=8$ را حل کنید.



شکل ۳.

ریاضی دهم

۱. مجموعهٔ اعداد گویا بین دو عدد ۲ و ۳، متناهی است یا نامتناهی؟ چرا؟

۲. آیا جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر از درجهٔ دوم است؟ چرا؟ جملهٔ عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,...

۳. مجموع سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی ۳ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۶۰ است. این جمله‌ها را به‌دست آورید.

۴. عددهای a، b و c را طوری تعیین کنید که عددهای زیر، جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ هندسی (غیرثابت) باشند.
۳, a, b, c, ۲۷

آمار و احتمال
(پایهٔ یازدهم)

۱. اگر p گزاره‌ای راست (درست) و q گزاره‌ای دروغ (نادرست) و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف) $(p\Rightarrow q)\wedge r$ ب) $(r\Rightarrow p)\vee q$

پ) $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow r$

۲. با استفاده از جدول ارزش‌ها درستیِ هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

ب) $\sim(p\vee q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)$

پ) $([(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow p)\equiv T$

۳. با توجه به هم‌ارزی (ب) در تمرین ۲، نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید:
«۵ عددی اول است یا عدد ۹ مربع کامل نیست.»

ریاضی ۲ تجربی

۱. معادلات اضلاع مثلثی عبارت‌اند از: $AB: y=x+2$، $AC: y=-x+4$ و $BC: y=2x+5$. معادلهٔ عمودمنصف ضلع AB را به‌دست آورید.

۲. معادلهٔ درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$ax^2+bx+c=0$

معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن:

الف) قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ بالا باشند.

ب) معکوس ریشه‌های معادلهٔ بالا باشند.

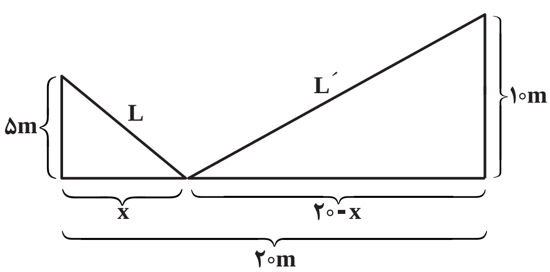
پ) n واحد بیشتر (یا کمتر) از ریشه‌های معادلهٔ بالا باشند.

ت) n برابر (یا $\frac{1}{n}$ برابر) ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند.

۳. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=5$$

۴. دو تیر به ارتفاع‌های ۵ متر و ۱۰ متر مطابق شکل ۴ به فاصلهٔ ۲۰ متر از هم قرار دارند که باید سیمی از دو سر آن‌ها به زمین وصل شود. این سیم را کجا به زمین وصل کنیم تا جمع مربعات طول سیم‌ها کمترین مقدار باشد؟



شکل ۴.

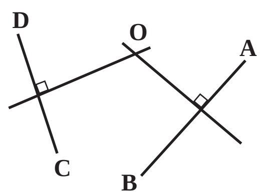
۵. مریم یک کتاب ۴۸۰ صفحه‌ای را این‌طور مطالعه کرد که هر روز تعداد صفحاتی یکسان را خواند. اگر او هر روز ۱۶ صفحه بیشتر می‌خواند، ۵ روز زودتر کتاب را تمام می‌کرد. مریم این کتاب را چند روزه خوانده است؟

۶. معادلهٔ زیر را حل کنید.

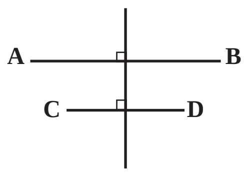
$$\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x+1}=1$$

هندسهٔ ۱

۱. می‌دانیــــم که مجموعه نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB را تشکیل می‌دهند و مجموعه نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف CD قرار دارند. پس عمودمنصف‌های AB و CD را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن‌ها، هم از A و B به یک فاصله است و هم از C و D. یعنی در شـــکل ۱ نقطهٔ O جواب اســـت. حال اگر AB و CD موازی باشند، این دو عمودمنصف یا برهم منطبق می‌شوند که در این صورت همهٔ نقاط روی این خط جواب مسئله هستند. یعنی مسئله بی‌شمار جواب دارد:

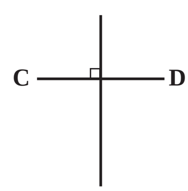


شکل ۱.

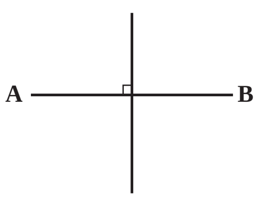


شکل ۲.

و یـــا اینکه دو عمودمنصف با هم موازی‌اند که در این حالت مســـئله جوابی ندارد:



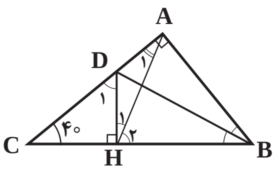
شکل ۳.



شکل ۴.

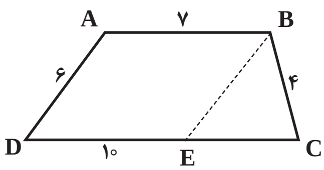
۲. چـــون نقطـــهٔ D روی نیمســـاز B اســـت، پـــس از اضـــلاع زاویـــه به یـــک فاصلـــه اســـت. بنابرایـــن: DA=DH و از آنجـــا: $\hat{A}_1=\hat{H}_1$. در مثلـــث DCH نیـــز داریـــم: $\hat{C}=۴۰^\circ$ و $\hat{H}=۹۰^\circ$.

در نتیجه: $\hat{D}_1=۵۰^\circ$ و $\hat{D}_1=\hat{A}_1+\hat{H}_1=۲\hat{A}_1=۵۰^\circ$ و بنابراین:
$\hat{A}_1=D\hat{A}H=۲۵^\circ$



شکل ۵.

۳. اگر این ذوزنقه به‌صورتی باشـــد که در شـــکل ۶ می‌بینیم، با رســـم خط BE موازی AD، متوازی‌الاضلاع ABED تشـــکیل می‌شـــود و در نتیجه: BE=AD=۶، DE=AB=۷ و EC=DC-DE=۱۰-۷=۳. لـــذا در مثلـــث BEC اندازهٔ اضلاع را داریم و می‌توانیم آن را رســـم کنیم و از آنجا ذوزنقه را بنا کنیم.

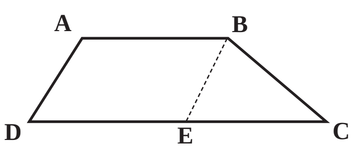


شکل ۶.

طریقهٔ رســـم: ابتدا پاره‌خط EC را به طول ۳ واحد رسم می‌کنیم. ســـپس به مرکز C کمانی به شـــعاع ۴ و به مرکز E کمانی به شـــعاع ۶ می‌زنیم. نقطهٔ برخورد دو کمان فوق نقطهٔ B اســـت و از آنجا مثلث BEC را رسم می‌کنیم.

سپس از B پاره‌خطی موازی CE به طول ۷ واحد رسم می‌کنیم و CE را نیز از طرف E به همین طول ادامه می‌دهیم. نقطه‌های انتهایی این دو پاره‌خط را به‌هم وصل می‌کنیم تا ذوزنقه رسم شود.

۴. از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند.



شکل ۷.

در متوازی‌الاضلاع ABED داریم:

AD=BE, DE=AB

بنابراین با فرض: CD=a، AB=b، BC=c و AD=d در مثلث BEC داریم: BC=c و CE=a-b و BE=d و با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

BC+CE>BE, BE+BC>CE, BE+CE>BC

c+a-b>d , d+c>a-b , d+a-b>c

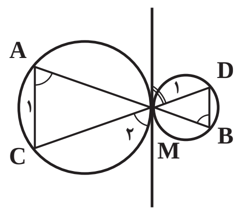
$\Rightarrow$ a+c>b+d, a+d>b+c

هندسهٔ ۲

۱. در نقطهٔ M مماس مشــــترک دو دایره را رســـم می‌کنیم. به کمک ویژگی زاویه‌های ظلی و محاطی داریم:

$$\begin{cases} \hat{M}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{MD}}{۲}, \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{MD}}{۲} \Rightarrow \hat{B} = \hat{M}_۱ \\ \hat{M}_۲ = \dfrac{\overset{\frown}{MC}}{۲}, \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{MC}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \hat{M}_۲ \end{cases}$$

$$, \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow AC \parallel BD$$

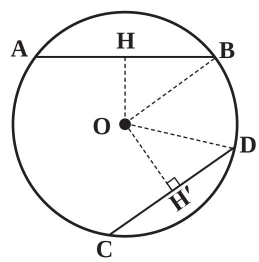


شکل ۸.

۲. با توجه به شکل داریم:

$$MA = ME \Rightarrow \hat{E} = \hat{A} = ۳۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{AC} = ۶۰^\circ, \overset{\frown}{CD} = ۷۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{ACDE} = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ + ۷۰^\circ = ۱۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = ۳۶۰^\circ - ۱۹۰^\circ = ۱۷۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AED} = ۱۷۰^\circ + ۶۰^\circ = ۲۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AED}}{۲} = ۱۱۵^\circ$$

۳. می‌دانیم که خطی که از مرکز دایره بر یک وتر عمود می‌شود، وتر را نصف می‌کند. بنابراین در شکل ۹ داریم:



شکل ۹.

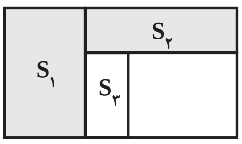
$$AB = ۸ \Rightarrow AH = HB = ۴$$
$$\Delta OHB : OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow OB = OD = R = ۵, CD = ۶$$
$$\Rightarrow \Delta ODH' : DH' = CH' = ۳, OD = ۵,$$
$$OD^۲ = OH'^۲ + DH'^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + OH'^۲ \Rightarrow OH' = ۴$$

یعنی فاصلهٔ مرکز دایره از وتر ۶ سانتی‌متری، ۴ سانتی‌متر است.

حسابان

۱. داریـــم: $۱+۳+۵+...+(۲n-۱) = n^۲$، پس مجموع اعـــداد، مربع کامل است. نزدیک‌ترین عدد به ۱۰۰۰ که به‌صورت مربع کامل و از آن کوچک‌تر اســـت، ۹۶۱ اســـت؛ یعنی $۳۱^۲$. در این حالت عددی که دوبار جمع شده برابر ۳۹=۹۶۱-۱۰۰۰ و جواب مسئله است. اگر بخواهیم عدد مربع کامل بعدی، یعنی ۹۰۰ را در نظر بگیریم، اختلافش با ۱۰۰۰ عدد ۱۰۰ اســـت که عددی فرد نیست.

۲. مساحت قسمت‌هایی از مستطیل که در هر مرحله رنگ می‌شوند، تشکیل دنباله‌ای هندســـی با قدرنســـبت $\frac{۲}{۳}$ می‌دهند.



شکل ۱۰.

$$\frac{۱}{۳}S, \frac{۲}{۹}S, \frac{۴}{۲۷}S, ...$$

$$S_n = \frac{۱}{۳}S\left(\frac{۱-(\frac{۲}{۳})^n}{۱-\frac{۲}{۳}}\right) > \frac{۹۰}{۱۰۰}S$$

$$۱-(\frac{۲}{۳})^n > \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰} > (\frac{۲}{۳})^n$$

$$\Rightarrow ۱۰ < (\frac{۳}{۲})^n$$

با آزمایش و خطا جواب مســـئله $n \geq ۶$ به‌دســـت می‌آید. یعنی بعد از حداقل ۶ مرتبه، حداقل ۹۰ درصد شکل رنگ می‌شود.

۳. الف) اگر هر دو جواب فرد باشند، حاصل جمع آن‌ها عددی زوج و حاصل ضرب آن‌ها عددی فرد است. پس a زوج و b فرد است.

ب) اگـــر یک جواب زوج و دیگری فرد باشـــد، مجموع آن‌هـــا عددی فرد و حاصل‌ضرب آن‌ها عددی زوج است، پس a عددی فرد و b عددی زوج است.

۴. الف)

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow \boxed{c = ۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{طول نقطه مینی‌مم} : x = \dfrac{-b}{۲a} \Rightarrow -۱ = \dfrac{-b}{۲a} \\ (x = -۱, y = -۱) \Rightarrow -۱ = a - b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a - b + ۲ = -۱ \\ b = ۲a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - ۲a + ۲ = -۱ \Rightarrow a = ۳ \quad b = ۶$$
$$f(x) = ۳x^۲ + ۶x + ۲ \Rightarrow f(x) = ۰$$
$$\Rightarrow x = \frac{-۶ \pm \sqrt{۱۲}}{۶} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۳}}{۳}$$

ب)

$$f\ \ (x) - ۷(f(x) - ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -۱ \Rightarrow ۳x\ \ + ۶x + ۲ = -۱ \\ f(x) = ۸ \Rightarrow ۳x\ \ + ۶x + ۲ = ۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x\ \ + ۶x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ ۳x\ \ + ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

ریاضی دهم

۱. اعداد گویای بین ۲ و ۳ نامتناهی‌اند، زیرا می‌توانیم دنبالهٔ زیر از اعداد گویا را بین این دو عدد بنویسیم:

$$۲+\frac{۱}{۲},۲+\frac{۱}{۳},۲+\frac{۱}{۴},۲+\frac{۱}{۵},...$$

۲. در دنبالهٔ داده شده، دنبالهٔ تفاضل جمله‌های متوالی را به‌دست می‌آوریم:

۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,...

۴ ۶ ۸ ۱۰

دنبالهٔ حاصل، یعنی دنبالهٔ ...,۴,۶,۸,۱۰، یک دنبالهٔ حسابی است، پس دنبالهٔ اولیه از درجهٔ دوم است:

$$a_n = an^۲ + bn + c \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۲ \\ a_۲ = ۶ \\ a_۳ = ۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=۲ \\ ۴a+۲b+c=۶ \\ ۹a+۳b+c=۱۲ \end{cases} \Rightarrow a=۱, b=۱, c=۰$$

بنابراین: $a_n=n^۲+n$

۳. سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی را به‌صورت a+r و a و a−r در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$(a-r)+a+(a+r)=۳۰ \Rightarrow ۳a=۳۰ \Rightarrow a=۱۰$$

از سوی دیگر داریم:

$$(a-r).a.(a+r)=۳۰ \Rightarrow a(a^۲-r^۲)=۳۶۰$$
$$\Rightarrow ۱۰(۱۰۰-r^۲)=۳۶۰ \Rightarrow ۱۰۰-r^۲=۳۶$$
$$\Rightarrow r^۲=۶۴ \Rightarrow r=\pm ۸$$
$$\begin{cases} a=۱۰, r=۸ \Rightarrow a-r, a, a+r: ۲,۱۰,۱۸ \\ a=۱۰, r=-۸ \Rightarrow a-r, a, a+r: ۱۸,۱۰,۲ \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت، این سه جمله ۲، ۱۰ و ۱۸ هستند.

۴. می‌دانیم که اعداد m، n و p سه جملهٔ متوالی از دنباله‌ای هندسی هستند، اگر و تنها اگر: $n^۲=mp$. بنابراین اگر اعداد ۲۷، c، b، a و ۳، جملات متوالی از دنباله‌ای هندسی باشند، پس:

$a^۲=۳b,\ b^۲=ac,\ c^۲=۲۷b$

از حاصل‌ضرب اولین و آخرین تساوی داریم: $a^۲c^۲=۸۱b^۲$ و چون: $ac=b^۲$، پس: $b^۴=۸۱b^۲$. بنابراین:

$$b^۴-۸۱b^۲=۰ \Rightarrow b^۲(b^۲-۸۱)=۰ \Rightarrow b^۲=۰ \text{ یا } b^۲=۸۱$$
$$\Rightarrow b=۰ \text{ یا } b=\pm ۹$$

b=۰ قابل قبول نیست، زیرا با وجود b=۰، داریم a=۰ و c=۰ و دنبالهٔ هندسی ثابت می‌شود. همچنین b=−۹ نیز قابل قبول نیست، زیرا با جایگذاری در تساوی بالا داریم: $a^۲=-۲۷$ و این معادله جواب ندارد. پس b=۹. با جایگذاری این مقدار در تساوی‌های بالا داریم: $a=۳\sqrt{۳}$ و $c=۹\sqrt{۳}$، و یا $a=-۳\sqrt{۳}$ و $c=-۹\sqrt{۳}$.

آمار و احتمال

۱. الف) چون p درست و q نادرست است، پس (p⇒q) نادرست و ارزش گزارهٔ $(p\Rightarrow q)\wedge r$ نادرست است.

ب) چون p درست است، پس (r⇒q) همواره درست است و لذا $(r\Rightarrow q)\vee q$ دارای ارزش درست است.

ج) چون p و q هم‌ارزش نیستند، بنابراین (p⇔q) نادرست است و لذا گزارهٔ شرطی $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است.

۲.

الف)

p	q	p∧q	p∨(p∧q)
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ب)

p	q	~p	~q	p∨q	~(p∨q)	~p∧~q
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

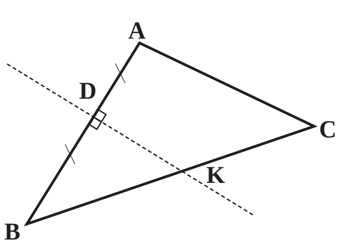
ج)

p	q	p⇒q	(p⇒q)∧p	[(p⇒q)∧p]⇒p
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۳. «۵ عددی اول نیست و عدد ۹ مربع کامل است.»

ریاضی ۳ تجربی

۱. ابتدا مختصات نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم تا بتوانیم مختصات وسط آن‌ها را به‌دست آوریم:



جای شکل

$$\text{مختصات A}\begin{cases} AB: y = x+۲ \\ AC: y=-x+۴ \end{cases} \Rightarrow x=۱, y=۳ \Rightarrow A(۱,۳)$$

$$m_{AB} = \frac{-۱-۳}{-۳-۱} = ۱$$

$$\text{مختصات B}\begin{cases} AB: y = x+۲ \\ BC: y=۲x+۵ \end{cases} \Rightarrow x=-۳, y=-۱ \Rightarrow B(-۳,-۱)$$

اگر وسط ضلع AB را D و عمودمنصف آن را DK بنامیم، داریم:

$$m_{AB} \times m_{DK} = -۱ \Rightarrow ۱ \times m_{DK} = -۱ \Rightarrow m_{DK} = -۱,$$

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱-۳}{۲} = -۱,\ \ y_D = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳-۱}{۲} = ۱$$

$$DK: y - y_D = m_{DK}(x - x_D) \Rightarrow y - ۱ = -۱(x+۱)$$

$\text{معادلهٔ عمودمنصف ضلع AB} = y = -x$

۲. ریشه‌های معادلهٔ مفروض را $x_۱$ و $x_۲$ و معادلهٔ مطلوب را $x^۲+px+q=۰$ فرض می‌کنیم. در این صورت داریم:

الف)

$$\begin{cases} p = -(-(x_۱ + x_۲)) = -\frac{b}{a} \\ q = (-x)(-x_۲) = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x^۲ - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰$$

$$ax^۲ - bx + c = ۰$$

ب)

$$\begin{cases} p = -(\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲}) = \frac{-(x_۱+x_۲)}{x_۱x_۲} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} \\ q = \frac{۱}{x_۱}.\frac{۱}{x_۲} = \frac{۱}{x_۱.x_۲} = \frac{۱}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = ۰ \Rightarrow cx^۲ + bx + a = ۰$$

پ)

$$\begin{cases} p = -(x_۱ + x_۲ + ۲n) = -(-\frac{b}{a} + ۲n) = \frac{b}{a} - ۲n \\ q = (x_۱+n)(x_۲+n) = x_۱x_۲ + n(x_۱+x_۲) + n^۲ \\ \quad = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + (\frac{b}{a} - ۲n)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ax^۲ + (b - ۲an)x + (an^۲ - bn + c) = ۰$$

ت)

$$\begin{cases} p = -n(x_۱ + x_۲) = \frac{nb}{a} \\ q = n^۲x_۱x_۲ = \frac{n^۲c}{a} \end{cases} \Rightarrow x^۲ + \frac{nb}{a}x + \frac{n^۲c}{a} = ۰$$

$$\Rightarrow ax^۲ + nbx + n^۲c = ۰$$

۳.

$$(x - \frac{۱}{x})^۲ + ۲ + \frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{x}) = ۵$$

$$x - \frac{۱}{x} = A \Rightarrow A^۲ + \frac{۱}{۲}A - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲A^۲ + A - ۶ = ۰ \Rightarrow A_۱, A_۲ = \frac{۳}{۲}, -۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{۱}{x} = \frac{۳}{۲} \quad (۱) \\ x - \frac{۱}{x} = -۲ \ (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = ۲, -\frac{۱}{۲}$$

$$(۲) \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x_۳, x_۴ = -۱ \pm \sqrt{۲}$$

۴.

$$\begin{cases} l^۲ = ۵^۲ + x^۲ \\ l'^۲ = ۱۰^۲ + (۲۰ - x)^۲ \end{cases}$$

$$l^۲ + l'^۲ = ۲۵ + x^۲ + ۱۰۰ + ۴۰۰ - ۴۰x + x^۲$$

$$= ۲x^۲ - ۴۰x + ۵۲۵ \Rightarrow x_{min} = \frac{-b}{۲a} = -\frac{-۴۰}{۲(۲)} = ۱۰$$

پس به ازای x=۱۰ مجموع مربعات طول سیم‌ها، کمترین مقدار می‌شود.

۵. اگر x را تعداد صفحاتی از کتاب فرض کنیم که مریم هر روز خوانده است، داریم:

$$(\frac{۴۸۰}{x} = \frac{۴۸۰}{x+۱۶} + ۵)$$

$$۴۸۰(x+۱۶) = ۴۸۰x + ۵x(x+۱۶)$$

$$\Rightarrow ۴۸۰x + ۷۶۸۰ = ۴۸۰x + ۵x^۲ + ۸۰x$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ + ۸۰x - ۷۶۸۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۶x - ۱۵۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۳۲ \Rightarrow \frac{۴۸۰}{۳۲} = ۱۵ \ \text{روز}$$

۶. دو طرف معادله را به کمک اتحاد $(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$ به توان می‌رسانیم:

$$\Rightarrow (۲x) + (x+۱) + ۳(\sqrt[۳]{۲x})(\sqrt[۳]{x+۱})(\underbrace{\sqrt[۳]{۲x} + \sqrt[۳]{x+۱}}) = ۱$$

$$\Rightarrow ۳x + ۱ + ۳(\sqrt[۳]{۲x})(\sqrt[۳]{x+۱})(۱) = ۱$$

$$\Rightarrow ۳x + ۱ + ۳\sqrt{۲x \quad + ۲x} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt[۳]{۲x^۲ + ۲x} = -۳x \Rightarrow \sqrt[۳]{۲x^۲ + ۲x} = -x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۲x = -x^۳ \Rightarrow x^۳ + ۲x^۲ + ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow x(x \quad + ۲x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰,$$

$$x \quad + ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰$$

نویسندگان: پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری و...

ناشر: انتشارات کانون فرهنگی آموزش

چاپ اول: ۱۳۹۰

دانش‌نامه ریاضی

این کتاب همچنان که از نامش برمی‌آید، یک فرهنگ موضوعی ریاضیات است و هدف از انتشار آن، ارائهٔ مجموعهٔ منظمی از واژه‌های مرتبط با دانش ریاضی، همراه با معرفی، توضیح و تعریف واژه‌هاست و به نوعی می‌توان آن را یک واژه‌نامهٔ ریاضی هم دانست. با این تفاوت که اولاً دربارهٔ مفاهیم به سبک یک دایرةالمعارف (دانش‌نامه) توضیح مفصل و کافی داده شده است، و ثانیاً رابطهٔ طولی مفاهیم حفظ شده است. بهتر است به جای هر توضیحی بخش‌هایی از مقدمهٔ کتاب را بیاوریم:

«کتابی که پیش‌رو دارید، اولین و تنها دانش‌نامهٔ موضوعی ریاضیات با ویژگی‌های منحصر به فردی است که تاکنون در ایران به چاپ رسیده است. چینش موضوع‌های ریاضی در این دانش‌نامه طوری است که رابطهٔ طولی بین آن‌ها رعایت شده است. برای مثال، واژهٔ تابع در جایی قرار گرفته است که برای فهم آن به همهٔ واژه‌ها و موضوع‌های قبل از آن وابسته‌ایم. در عین حال این کتاب طوری تدوین شده است که دستیابی به واژهٔ «تابع» به شکلی مستقل و به شکل الفبایی نیز میسر است.

در انتهای کتاب یک واژگان فارسی به انگلیسی و یک واژگان انگلیسی به فارسی قرار دارد و روبه‌روی هر واژه یک شماره به چشم می‌خورد که این شماره صفحه‌ای را که واژهٔ موردنظر در آن قرار دارد، نشان می‌دهد. در واقع هر مؤلف، دبیر یا کارشناس ریاضی، هم می‌تواند واژه‌ای را به‌صورت موضوعی تعقیب کند و آن را در جای خودش (که البته می‌تواند از قبل حدس بزند) پیدا کند، و هم می‌تواند به شکل الفبایی آن را بیابد.

برای هر واژه به‌صورت مستقل حتی‌الامکان تاریخچه یا فلسفه‌ای بیان کرده‌ایم و پس از تعریف مناسب، یک مثال کلیدی آورده شده است. در مورد بسیاری از واژه‌ها یا قضیه‌ها، نکات و نتیجه‌های مهم و حتی فرمول‌ها یا رابطه‌های مربوط به آن واژه آمده است. روبه‌روی هر واژه یا اصطلاح معادل انگلیسی آن ثبت شده است. در هر صفحهٔ این دانش‌نامه تعدادی از کلمات داخل متن شماره خورده‌اند که معادل انگلیسی آن‌ها در پایین و به همراه شمارهٔ صفحه‌ای که در آن قرار دارد، آورده شده است. این کار دستیابی به کلیدواژه‌های هر صفحه را به آسانی میسر می‌سازد.»

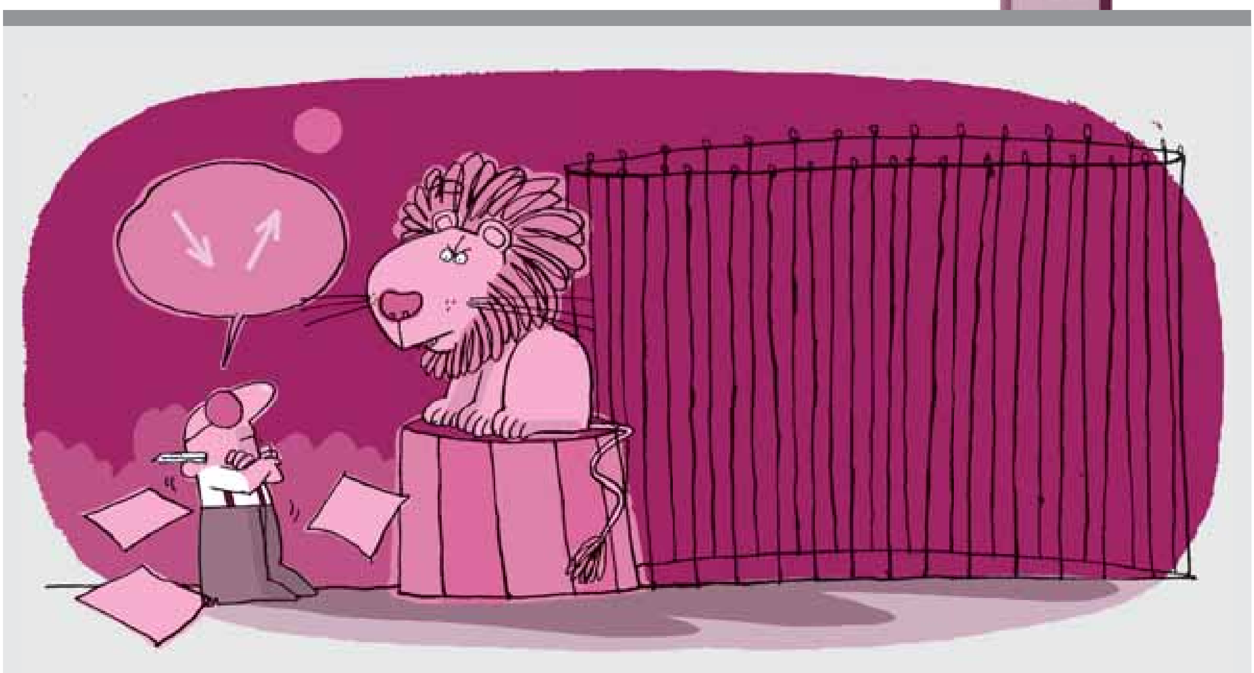
با توصیف‌هایی که شد، بدیهی است که کتاب می‌تواند برای دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی، معلمان و دبیران و دانشجویان ریاضی کتابی مناسب و مفید باشد و مطالعهٔ آن را به همهٔ علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی توصیه می‌کنیم.

چهار نفر، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، شیمی‌دان و پزشک در یک مهمانی حضور داشتند. فیزیک‌دان رو به پزشک گفت: «گفته‌های شما پزشک‌ها اصلاً قطعیت ندارد. امروز چیزی می‌گویید و فردا چیز دیگری! مثلاً فرض کنید امروز مریضی که سرماخوردگی سختی دارد، پیش شما بیاید و شما به او بگویید با خوردن آش ساده حالش بهتر خواهد شد. او نیز به دستور شما عمل کند و حالش خوب شود. فوراً همه‌جا اعلام می‌کنید که خوردن آش ساده در درمان آنفولانزا مؤثر و مفید است. اما اگر فردا مریض دیگری که او هم آنفولانزای حاد داشته باشد، پیش شما بیاید و به او هم دستور خوردن آش ساده بدهید و بعداً پس از اجرای دستور شما حالش بدتر شود، فوراً اعلام می‌کنید: تحقیقات پزشکی نشان می‌دهد که خوردن آش ساده در درمان ۵۰ درصد موارد آنفولانزای حاد مؤثر است!»

در اینجا شیمی‌دان رو کرد به فیزیک‌دان و گفت: «خود شما فیزیک‌دان‌ها چطور؟ بعد از یک محاسبهٔ طولانی می‌گویید: اگر جسمی به جرم دلخواه از ارتفاع ۱۲۵ متری سقوط کند، بعد از ۵ ثانیه به زمین می‌رسد. بعد وقتی در عمل چنین نمی‌شود، می‌گویید: البته شتاب جاذبهٔ زمین در نقاط متفاوت فرق می‌کند و من شتاب جاذبه را در قطب در نظر گرفتم! و البته از مقاومت هوا هم نباید غافل شد!»

در این لحظه ریاضی‌دان رو کرد به شیمی‌دان و گفت: «شیمی‌دان‌ها چه؟ جلوی چشم ده‌ها نفر از دانشجویانتان آزمایشی را انجام می‌دهید و می‌گویید: حالا باید گاز دی‌اکسید کربن از محلول خارج شود. و چون هیچ علامتی مبنی بر این اتفاق مشاهده نمی‌کنید، می‌گویید: البته باید شرایط متعارفی آزمایشگاه را در نظر گرفت! همچنین از وجود ناخالصی‌ها و غلظت و درجهٔ خلوص مواد نیز نباید غفلت کرد!»

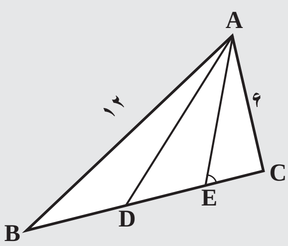
در اینجا پزشک به ریاضی‌دان گفت: «خود شما ریاضی‌دان‌ها چه؟ شما از همهٔ ما بدترید! با هم به باغ‌وحش می‌رویم، جلوی قفس شیر از شما می‌پرسیم: درون این قفس چه جانوری قرار دارد؟ می‌گویید: اول درون و بیرون را تعریف کنید تا بعد...!»



پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. تعداد همهٔ اعداد پنج‌رقمی به کمک اصل ضرب برابر است با: 9×10^4 اما بدیهی است، از هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ است. پس یک سوم این اعداد مضرب ۳ هستند. یعنی 3×10^4 عدد پنج‌رقمی مضرب ۳ داریم. (این عددها از ۱۰۰۰۰ که به فرم $3k+1$ است، شروع می‌شوند و به ترتیب به فرم $3k+2$ و $3k$ می‌رسند و همین ترتیب تا عدد ۹۹۹۹۹ که به فرم $3k$ است، ادامه دارد.) اما رقم یکان عددهای مضرب ۳ هم به‌صورت تناوبی عبارت است از: ۳، ۶، ۹، ۲، ۵، ۸، ۱، ۴، ۷ و ۰. پس یک‌دهم این عددها هم به رقم ۶ ختم می‌شوند؛ یعنی 3×10^3 که برابر است با ۳۰۰۰ عدد (گزینهٔ الف).

۲. روی ضلع BC به طول ۹ واحد، دو نقطهٔ D و E وجود دارند که آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند. بدیهی است که در این صورت: BD=DE=EC=۳ حال در مثلث‌های AEC و AEB به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$\begin{cases} AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2AC.EC.\cos\alpha \\ AB^2 = AE^2 + EB^2 - 2AE.EB.\cos(180-\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\begin{cases} 36 = AE^2 + 9 - 6AE.\cos\alpha \\ 144 = AE^2 + 36 + 12AE.\cos\alpha \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 72 = 2AE^2 + 18 - 12AE.\cos\alpha \\ 144 = AE^2 + 36 + 12AE.\cos\alpha \end{cases}$$

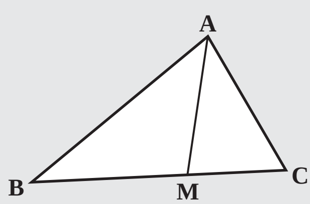
$$216 = 3AE^2 + 54$$

$$\Rightarrow 3AE^2 = 162,\ \ AE^2 = 54 \Rightarrow AE = 3\sqrt{6}$$

و اگر همین محاسبه را در مثلث‌های ADB و ADC انجام دهیم، نتیجه می‌شود: $AD = 3\sqrt{10}$. یعنی فاصلهٔ این نقطه تا رأس A مساوی $3\sqrt{6}$ یا $3\sqrt{10}$ است (گزینهٔ ج).

پی‌نویس: به کمک قضیهٔ موسوم به استوارت نیز می‌توانیم طول AD (و AE) را به سادگی محاسبه کنیم:

قضیهٔ استوارت:



برای نقطهٔ دلخواه M روی ضلع BC از مثلث ABC داریم:

$$AM^2.BC = AC^2.MB + AB^2.MC - MB.MC.BC$$

۳. بدیهی است که a و b با هم صفر نیستند. پس با فرض $a\neq 0$ از فرض مسئله داریم: $c = -\dfrac{bd}{a}$ و از آنجا داریم:

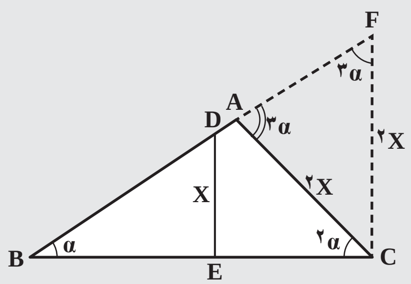
$$c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow \frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = 1 \Rightarrow \frac{d^2(\overbrace{a^2+b^2}^{1})}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow d^2 = a^2,\ \ ab + cd = ab - \frac{bd^2}{a} = \frac{a^2b - bd^2}{a}$$

$$= \frac{b(a^2-d^2)}{a} = 0$$

(گزینهٔ ب)

۴. مطابق شکل با فرض $\hat{B}=\alpha$، داریم: $\hat{C}=2\alpha$.



و با فرض DE=x داریم: AC=۲x. AB را امتداد می‌دهیم و نقطهٔ F را روی امتداد آن طوری در نظر می‌گیریم که: CA=CF. حال با توجه به اندازهٔ زاویه‌های خارجی داریم:

$$C\hat{A}F = C\hat{F}A = 3\alpha$$

چون: CF=CA، پس: CF=۲x و چون: BE=EC لذا داریم:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE \parallel FC,\ \ F\hat{C}B = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{F} + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow 4\alpha = 90^\circ, \alpha = 22/5^\circ$$

(گزینهٔ هـ)

۵. بدیهی است که توان‌های ۲ زوج‌اند. بنابراین این عدد فرد است. اما چون عدد ۲ به پیمانهٔ ۳ با ۱- هم‌نهشت است و توان ۲ در این عدد، عددی فرد است، پس این عدد به پیمانهٔ ۳ هم‌نهشت با صفر است و لذا مضرب ۳ هم هست. اما توان این عدد در تقسیم بر ۳ مساوی ۴۱۱۵۲۲۶۳ می‌شود. یعنی این عدد به فرم $2^{3k}+1$ و k عددی فرد است. بنابراین:

$$2^{3k} + 1 = 8^k + 1 \overset{9}{\equiv} (-1)^k + 1 = 0$$

پس این عدد مضرب ۹ هم هست. اما می‌دانیم توان‌های ۲ به‌صورت تناوبی به رقم‌های ۲، ۴، ۸ و ۶ ختم می‌شوند. با توجه به اینکه توان ۲ در این عدد به صورت $4k+1$ است، پس رقم یکان این عدد ۳ است و این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد. پس سه‌تا از ویژگی‌ها را دارد (گزینهٔ د).

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

دوســـتان و یاران مجلهٔ برهان، سلام و عرض ادب ما را پذیرا باشید. با عرض تبریک به مناسبت آغاز ســال نوی تحصیلی، در این نخستین شمارهٔ مجله، شــمارهٔ ویژهٔ مهرماه، پیــام مهرآفرین ما را بپذیرید. ابتدا نکاتی چند را یادآور می‌شویم:

۱. مجلهٔ برهان متوسطهٔ ۲ به جامعهٔ دانش‌آموزان و سپس معلمان رشتهٔ ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تعلــق دارد و ما به‌عنــوان خدمت‌گزاران این دو گروه وظیفهٔ ســامان‌دهی مطالب آن را برعهده داریم. پس شــما به‌عنوان صاحبان اصلی مجله جویای احوال آن باشــید. مطالبتــان را برای ما بفرستید و نظرات، انتقادات و پیشنهادهایتان را از طریق مجاری ارتباطی ما که در شناس‌نامهٔ مجله آمده اســت، به ما انعکاس دهید. تنها چیزی که برای ما ملاک پذیرش یا رد مطالب است، ارزش محتوای آن‌ها و انطباق آن‌ها با معیارهایمان است و نه چیز دیگر.

۲. معیارهایمان برای پذیرش مقالات را بارها و بارها در شمارهٔ‌های دوره‌های گذشته یادآور شده‌ایم. اکیداً تقاضا می‌کنیم با مراعات این معیارها حتماً و حتماً برایمان مقاله و مطلب بفرســتید. به‌طور خلاصه باز هــم یادآوری می‌کنیــم: **مخاطبان مجله ما فقط و فقط دانش‌آموزان هســـتند. از پذیرش مقالاتی که ســـطح آن‌ها خیلی بالاتر از سطح دبیرستان است (و به کار علاقه‌مندان رشـــتهٔ ریاضی و داوطلبان المپیاد ریاضی هم نمی‌آید)، مقالات دانشگاهی و مقالات مرتبط با آموزش ریاضی یا نقد و بررسی کتاب‌های درسی جداً معذوریم. همچنین، جایگاه مجلهٔ ریاضی با جایگاه کتاب‌های کمک‌درسی تفاوت‌های ماهوی بسیار دارد. از ارسال مطالبی که شبیه جزوه‌های درســـی و یا کتاب‌های کنکوری هســـتند نیز خودداری کنید و شأن و منزلت مجلهٔ خودتان را ماورای آن‌ها بدانید.**

۳. با ارسال مطالبی پیرامون سرگرمی‌های ریاضی، بازی و ریاضی، لطیفه‌های ریاضی، جدول و معما، و خواندنی‌های دیگر، و نیز کاریکاتور، نقاشـــی و حتی عکس‌های مرتبط با ریاضیات، به ما در غنی کردن محتوای مجله یاری رسانید.

با سپاس از دوستان، به بعضی از پیام‌ها و نامه‌های رسیده تا این زمان، پاسخ‌های کوتاهی می‌دهیم:

- همکار گرامی، آقای **اسفندیار ملیح ملکی**، از شهرستان ملکان، استان آذربایجان شرقی
  مطلبتان به دستمان رسید. با سپاس از لطفتان به اطلاع می‌رساند که تلاش کنید مطالبی که در رابطه با مباحث کتاب‌های درسی می‌نویسید، با زبانی دیگر (غیر از کتاب‌های رایج کمک‌درسی) بیان شوند. همچنین سعی کنید به کاربردهای ریاضیات بپردازید.

- دوست دانش‌آموز، آقای **علی بهادر** از راین کرمان
  مطلبتان با عنوان «روشی برای ضرب عدد ۹ در اعداد دورقمی» را در این شماره به چاپ رساندیم. اما دوست عزیز، این الگوها در نظریهٔ اعداد بسیارند و بهتر است به جای پرداختن به آن‌ها، اصول و مبانی ریاضیات را فرابگیرید و توانایی استدلال را در خود بالا ببرید. در این صورت در مسیر صحیح آموزش ریاضی قرار می‌گیرید.

- همکار گرامی، سرکار خانم **خدیجه اقدامی مقدم** از شهرستان بندر انزلی
  کاریکاتورهایتان به دست ما رسید. با سپاس فراوان از شما حتماً از کارهایتان استفاده می‌کنیم. باز هم برای ما از کارهای خوبتان ارسال کنید.

- همکار محترم، آقای **صالح دامن افشان** از کرمان
  مقاله‌تان با عنوان «تعیین جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ غیرخطی خاص» به دســـتمان رســـید. با تشکر از زحمتتان به اطلاع می‌رســـد که مقاله‌تان بدون ورود به مطلب و بی‌مقدمه وارد مثال‌های محاســـباتی شده است و از این حیث به یک مقاله منسجم شباهتی ندارد. ابتدا با یک مقدمهٔ ساده و عامه‌پسند که مورد توجه دانش‌آموزان واقع شـــود، هدفتان را از نگارش این مقاله روشن کنید. سپس با مثال‌های ساده بحث را شروع کنید تا دانش‌آموزان به آرامی وارد بحث شوند. ضمن اینکه توجه کنید که از نمادهایی که دانش‌آموزان با آن‌ها آشنایی ندارند (مانند نمادهای جمع و ضرب: Σ و π) استفاده نکنید. تا می‌توانید لحن مقاله‌تان را ساده‌تر و همه فهم‌تر کنید. با این بازنگری و اصلاح می‌توانیم از مطلبتان استفاده کنیم.

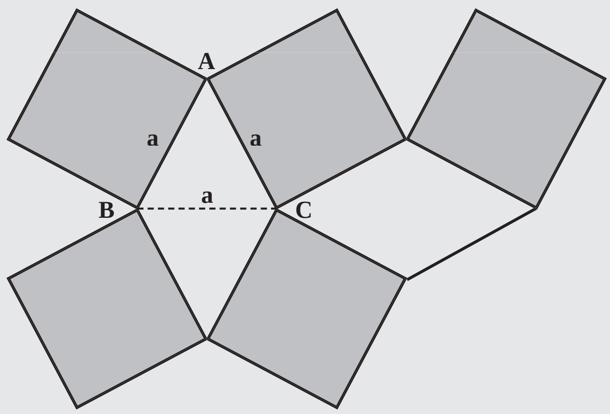
- همکار محترم، آقای **سیداحمد شفعتی** از خوانسار، استان اصفهان
  بارها گفته‌ایم که مقالاتی مثل مقاله‌ای که فرســـتاده‌اید را به مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» ارسال کنید. مخاطبان اصلی ما فقط دانش‌آموزان هستند.

در خاتمه ضمن پوزش از عزیزانی که مجال پاسخ‌گویی به آنان فراهم نشد و پاسخ‌گویی به شماره آینده موکول شد، یادآور می‌شویم که مسائل بخش پای تخته منحصراً مربوط به دانش‌آموزان است و همکاران محترم از ارسال پاسخ خودداری کنند. با سپاس از همهٔ عزیزان تا شمارهٔ بعد همگی را به خدای مهربان می‌سپاریم.

ایستگاه دوم
اندیشه و ادب ریاضی

یک داستان و یک معما!

شبکهٔ کاشی‌های خانهٔ فرهاد به‌صورت زیر است:



طبق فرض مسئله، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه زوایای داخلی لوزی 60° و 120° است و مساحت لوزی‌ها مساوی می‌شود با: $2(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. مساحت هر مربع هم مساوی a^2 است. اگر از x عدد کاشی سفید و y عدد کاشی سیاه برای فرش کردن زمین استفاده شده باشد، با توجه به مساحت زمین می‌توان نوشت:

$$6\times 8 = xa^2 + y(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2)$$

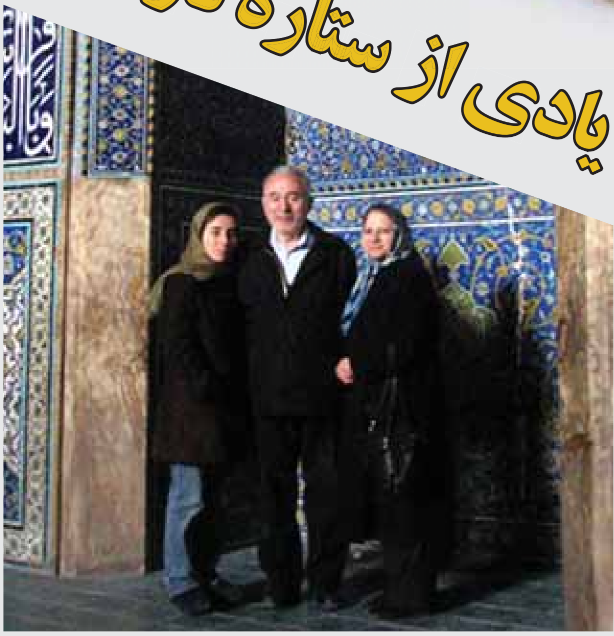
اگر گفتهٔ پدر فرهاد درست باشد، $x,y\in N$ و از تساوی بالا داریم:

$$\frac{48 - xa^2}{ya^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و این تساوی غیرممکن است، زیرا کسر سمت چپ یک کسر گویا و کسر سمت راست یک عدد گنگ است!

زنده‌یاد پروفسور مریم میرزاخانی
(۱۳۹۶-۱۳۵۶)

یادی از ستارهٔ درخشان آسمان ریاضی ایران



سه سال پیش همین موقع‌ها بود که داشتیم شماره مهرماه مجله را می‌بستیم که خبری ناگهانی باعث شد، صفحه‌های ۲ و ۳ جلد را در لحظهٔ آخر تغییر بدهیم: «مریم میرزاخانی ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی موفق به دریافت مدال «فیلـــدز»، عالی‌ترین جایزهٔ جهانی ریاضیات شد.» با سرعت متنی را تهیه کردیم و این دو صفحه را در شمارهٔ مهرماه ۱۳۹۳ به معرفی او و کارهایش اختصاص دادیم. اما باور نمی‌کردیم که به فاصله‌ای چنین اندک باز هم باید صفحهٔ ۲ جلد مجلهٔ مهرماه همان را به او اختصاص دهیم و این‌بار با خبر تلخ وداع او که نه‌تنها جامعهٔ ریاضی، بلکه کل کشورمان را در غم فقدان این نابغهٔ جوان اندوهگین کرد.

او را از سال‌های ابتدایی دههٔ ۱۳۷۰ که با شایستگی دو سال پیاپی مدال طـــلای المپیاد ریاضی دانش‌آموزی جهـــان را به گردن آویخت می‌شناختیم، تا هنگامی که از دانشگاه صنعتی شریف در رشتهٔ ریاضی فارغ‌التحصیل شـــد. به هاروارد رفت و دکتـــرای ریاضی گرفت، و در دانشگاه استنفورد به تدریس ریاضی پرداخت و به قلهٔ افتخار ریاضی دست یافت.

وقتی مدال فیلدز گرفت، یکی از شخصیت‌های علمی دنیا او را با مادام کوری مقایسه کرد که نخستین زن برندهٔ جایزهٔ نوبل بود و مریم نخستین زن برندهٔ مدال فیلدز بود. عجبا که فرجام او هم بی‌شباهت به فرجام همتایش نبود. ریاضی‌دانان بسیاری بوده‌اند که در سنین پایین و در اوج شایستگی از دنیا رفته‌اند. از جمله امی نوتر، ریاضی‌دان آلمانی (۱۹۳۵-۱۸۸۲) که زمانی او را بزرگ‌ترین ریاضی‌دان زن می‌دانستند و فقط ۵۳ سال عمر کرد. ریاضی‌دان بزرگ روس، خانم سونیا کووالنسکی که فقط ۴۱ ســـال عمر کرد. وقتی آبل، ریاضـــی‌دان نام‌دار نروژی که بحث‌های بسیاری در ریاضیات مدیون اوست، در ۲۶ سالگی درگذشت، هرمیت، ریاضی‌دان فرانسوی گفت: «از او برای ریاضی‌دانان چیزی باقی مانده است که آن‌ها را ۵۰۰ سال مشغول می‌کند.»

ما معتقدیم میراث مریم میرزاخانی هم تا سده‌ها و هزاره‌ها برای ریاضی‌دانان باقی خواهد ماند. یادش گرامی باد!

ریاضیات دلپذیر

لابیرنت‌ها و مازها

«لابیرنت»[1] و «ماز»[2] دو مفهوم مستقل هستند که در زبان فارسی برای هر دوی آن‌ها معادل «هزارتو» به‌کار برده می‌شود. هزارتوها مجموعه‌ای از مسیرهای پیچ‌درپیچ و تودرتو هستند که افراد در آن‌ها گیر می‌افتند و باید از آن خارج شوند. این پدیده در تاریخ سابقه‌ای دیرینه دارد، به‌طوری که لابیرنت کرتی در اساطیر یونان باستان جایگاه ویژه‌ای دارد و قدمت آن به ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد مسیح (ع) برمی‌گردد. براساس افسانه‌های یونانی، *مینوس‌شاه*، دستور احداث این بنا را داده بود و هیولایی موسوم به *مینوتور* را در آن زندانی کرده بود. محکومان به مرگ را در این هزارتو رها می‌کردند تا راه را گم کنند و قربانی مینوتور شوند!

اما لابیرنت‌ها در سال‌های بعد و در تمدن‌های مختلف حضور داشتند. از جمله در کشورهای اروپایی در ابتدای هزارهٔ دوم ده‌ها لابیرنت ساخته شدند که امروزه از جمله مکان‌های دیدنی برای گردشگران هستند.

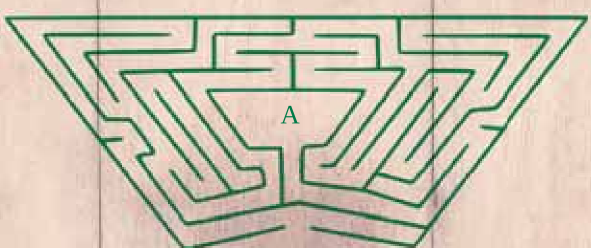
امروزه لابیرنت‌ها و مازها کارکرد تفریحی دارند و معمای آن‌ها ورود به درون و خروج از جایی دیگر است. گاهی هم دو نفر وارد هزارتو می‌شوند و باید یکدیگر را پیدا کنند.

ایدهٔ ریاضی خروج از ماز (یا لابیرنت) بسیار ساده است: برای خروج از ماز کافی است از هر نقطهٔ دلخواه شروع به حرکت کنید و در ضمن حرکت، دست راست خود را به دیوار تکیه دهید و هرگز از آن جدا نکنید! در این صورت یکی از دو اتفاق زیر می‌افتد:

۱. به مرکز ماز می‌رسید و از آنجا به خارج هدایت می‌شوید.

۲. بدون رسیدن به مرکز، از یک خروجی دیگر، از ماز خارج می‌شوید.

اکنون این ایده را روی این ماز معروف که موسوم به ماز «همپتون کورت» است (و در سال ۱۶۹۰ در نزدیکی لندن بناشد) به‌کار ببرید. فرض کنید مثلاً در نقطهٔ A قرار دارید. با ایدهٔ دست راست، از ماز خارج شوید!



پی‌نوشت‌ها

1. Labyrinth
2. Maze

(تفاوت آن‌ها در این است که مازها یک میسر محتوم (ناگزیر) دارند و فقط از آن مسیر می‌توان وارد و خارج شد. اما لابیرنت‌ها در پیچ‌های گوناگون برای حرکت دارای انتخاب‌های متفاوت منطقی هستند. البته این دو مفهوم خیلی وقت‌ها به جای هم به‌کار می‌روند.)