دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

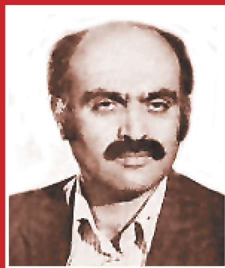
رشد

- دورهٔ بیست و ششم
- شمارهٔ ۱۰۲
- اردیبهشت ۱۳۹۶
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

- کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطهٔ کره
- قضیهٔ لولا در هندسه و اثبات آن در حسابان
- مسائل برای حل
- از قضیه پیک و نتایج آن بیشتر بدانیم!
- یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$
- پای تخته

دکتر مسعود فرزان



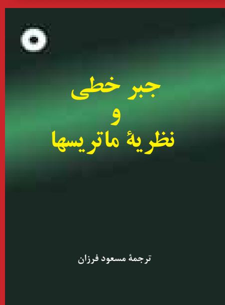
زنده‌یاد، دکتر مسعود فرزان در اردیبهشت‌ماه ۱۳۲۲ در «شهرکرد» دیده به جهان گشود. پس از طی تحصیلات ابتدایی و متوسطه در شهر زادگاهش در کنکور رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران پذیرفته شد و در این رشته به ادامهٔ تحصیل پرداخت و در سال ۱۳۴۴ با اخذ درجهٔ کارشناسی ریاضی فارغ‌التحصیل شد. ایشان پس از انجام خدمت وظیفهٔ عمومی به شهرکرد بازگشت و به‌عنوان دبیر ریاضی به تدریس در دبیرستان‌های آن شهر مشغول شد. در سال ۱۳۴۷، استاد فرزان به «مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه تربیت معلم» (که حاصل تلاش‌های زنده‌یاد دکتر غلامحسین مصاحب بود) راه یافت و پس از طی دو سال تحصیل به اخذ دانش‌نامهٔ فوق‌لیسانس نائل آمد.

زنده‌یاد دکتر فرزان پس از ازدواج در سال ۱۳۵۱ برای ادامهٔ تحصیل راهی کشور انگلستان شد و با اخذ درجهٔ دکترا در نظریهٔ گراف، در سال ۱۳۵۶ به ایران بازگشت و به تدریس در دانشگاه‌ها پرداخت. در پی انقلاب فرهنگی و تعطیلی موقت دانشگاه‌ها، استاد فرزان به خدمت در «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش‌وپرورش مشغول شد و در تدوین برنامهٔ جامع آموزش ریاضی آن زمان و تصحیح کتاب‌های درسی (از دبستان تا دبیرستان) اهتمام ویژه‌ای ورزید و کارهای ارزنده و ماندگاری را نیز به انجام رساند.

نام زنده‌یاد دکتر فرزان در کنار نام استادان و صاحب‌نظران دیگر (در دفتر تألیف کتاب‌های درسی وزارت آموزش‌وپرورش) روی کتاب‌های درسی آن سال‌ها، یادآور تلاش‌های بی‌شائبه و خالص ایشان است؛ از جمله کتاب‌های ریاضی دوم دبستان، ریاضی چهارم دبستان و راهنمای معلم این کتاب‌ها و کتاب‌های ریاضی سه سالهٔ دورهٔ راهنمایی تحصیلی. این استاد فرزانه همچنین به تألیف و ترجمهٔ کتاب‌های دانشگاهی نیز پرداخت که از جملهٔ آن‌هاست:

جبر خطی، جبر خطی و نظریهٔ ماتریس‌ها و نخستین درس در جبر مجرّد

کتاب اخیر به‌عنوان کتاب سال در رشتهٔ ریاضی مورد تقدیر قرار گرفت.



دکتر فرزان همچنین مقالاتی نیز در «مجلهٔ رشد آموزش ریاضی» و جراید ریاضی دیگر به چاپ رساند.

از استاد فرزان، سه پسر و یک دختر به یادگار مانده است که دکتر آزادبه فرزان، فرزند ارشد ایشان، در حال حاضر عضو شورای برنامه‌ریزی ریاضی «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» و ادامه دهندهٔ راه پدر است.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

رشد
برهان ریاضی
ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

دورهٔ بیست‌وششم
شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۲
اردیبهشت ۱۳۹۶
شمارهٔ ۸
۴۸ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
محمدعلی قربانی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن بازرگانی: ۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۹۳۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲ :
شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:
نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

«اِنّی بُعِثتُ مُعلِّما»

پیامبر اکرم(ص)

نـگاه بـه معلم باید همان نگاه اسـلامی باشـد که در آن متعلـم در مقابل معلـم در اوج ادب، سپاس‌گزاری و خضوع قرار دارد و آحاد مردم نیز به معنای حقیقی برای معلم احترام و ارزش قائل‌اند.

(مقام معظم رهبری)

در آموزه‌های دینی ما، احترام به معلم و اسـتاد بسـیار پررنگ و از جایگاه ویژه‌ای برخوردار اسـت. این جایگاه رفیع برای مقام معلم ارزشـی اسـت که هم در «قرآن مجید» و هم در روایات معصومین(ع) بر آن تأکید شده است. در ماجرای حضرت موسی(ع) و حضرت خضر(ع)، خداوند به پیامبر اولوالعزم خود، فرمان می‌دهد که به خدمت خضر(ع) برسد و از علم و سیرهٔ او بهره‌مند شـود. از آیات قرآن و روایات اسـتنباط می‌شود که تا چه حد حضرت موسی(ع) با احترام نسبت به حضرت خضر(ع) رفتار می‌کرده و اینکه حضرت موسی(ع) برای رسیدن به حضرت خضر(ع) و استفاده و تلمّذ از محضر استاد سختی‌های فراوان متحمل شده است.

حضرت موسی(ع) درخواست خود را برای شاگردی حضرت خضر(ع) چنین مطرح می‌کند: «آیا اجازه می‌دهید در پی شما بیایم تا از آنچه برای رشـد و کمال به شـما آموخته‌اند، به من بیاموزی؟» در واقع حضرت موسی(ع) شاگردی خود را با اجازه گرفتن از استاد آغاز می‌کند. خود را شاگرد و حضرت خضر(ع) را استاد معرفی می‌کند و در محضر استاد بودن را مایهٔ رشد و تعالی خود می‌داند.

امام سجاد(ع) در باب حقوق شاگرد نسبت به معلم می‌فرماید: «حق کسی که عهده‌دار تعلیم توست، آن است که او را بزرگ شماری و مجلس او را سنگین بداری و نیکو به وی گوش فرادهی و روی خود را بر او کنی و با او بلند سخن نگویی و کسی را که از او چیزی می‌پرسد، تو پاسخ ندهی و بگذاری که خود او پاسخ‌گو باشد و در مجلس او با هیچ‌کس به صحبت ننشینی و در محضر او بدگویی از کسی نکنی و اگر از او نزد تو بدگویی شد، از او دفاع کنی و عیب پوشش باشی و فضایل و مناقب او را آشکار کنی و با دشمنش هم‌نشینی نکنی و با دوستش دشمنی نورزی و...»

هفتهٔ بزرگداشت مقام معلم و روز معلم را به همهٔ معلمان دلسوز، صدیق و بزرگوارم تبریـک می‌گویـم و از درگاه خداونـد متعال برای همـهٔ این عزیزان سـلامتی، سـربلندی و طول عمر باعزت خواستارم.

حمیدرضا امیری
سردبیر

کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطهٔ کره

حسین کریمی

اشاره

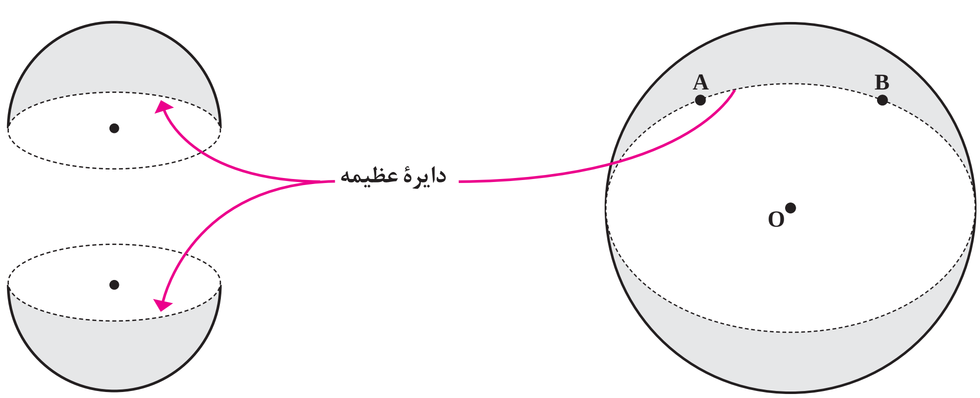
به کرهٔ جغرافیایی خیره شده بودم و مدارها توجهم را به خودشان جلب کرده بودند. «مالدیو» و «سومالی» هر دو تقریباً روی مدار صفر درجه (خط استوا) قرار داشتند و از طرف دیگر مسکو و لندن نزدیک به مداری کمی مانده به قطب واقع بودند. آیا کوتاه‌ترین مسیر، همان مسیر روی مدارهاست؟ روی کره دو سوزن ته‌گرد را در مکان‌هایی که به‌نام «ماله» (پایتخت مالدیو) و «موگادیشو» (پایتخت سومالی) مشخص شده بودند، فرو بردم و به کمک نخ آن دو سوزن را به‌هم وصل کردم. نخ را محکم کشیدم، به‌طوری‌که روی کرهٔ جغرافیایی به‌طور کامل خوابیده شود. مسیر به‌دست آمده همان خط استوا بود. همین آزمایش را بین مسکو و لندن انجام دادم.. مسیر به‌دست آمده کاملاً با مدار بین آن دو شهر متفاوت بود. دو آزمایش با نتایج متفاوت!

سؤال‌هایی برایم پیش آمد:

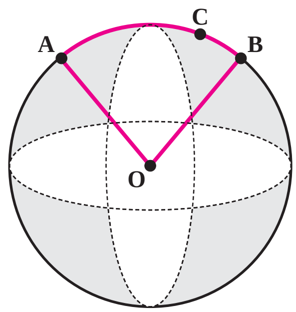
- کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه از کره چه مسیری است؟
- هواپیماها برای پرواز بین دو شهر چه مسیری را انتخاب می‌کنند؟
- انتخاب آن‌ها بر چه مبنایی است؟ ...

محصول پاسخ به آن سؤال‌ها همین مقاله شد که خدمت دوستان عرضه می‌شود.

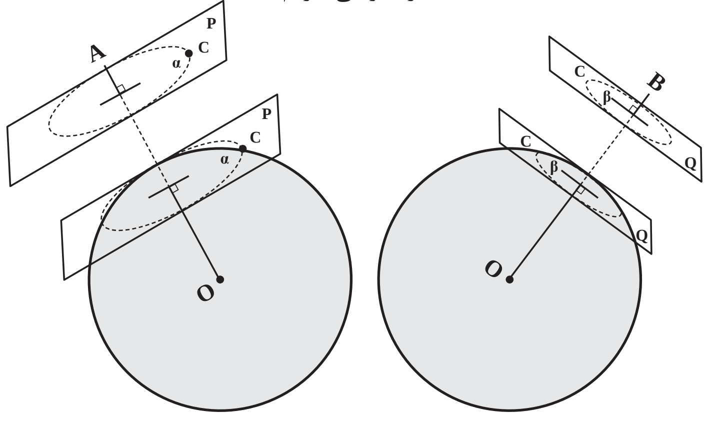
ادعا می‌کنیم کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطهٔ A و B واقع بر کره، مسیری است که روی دایرهٔ گذرا از آن دو نقطه که مرکزش همان مرکز کره است، قرار دارد. دایرهٔ مزبور را دایرهٔ عظیمه می‌نامند. در واقع دایرهٔ عظیمه دایره‌ای است که کره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر کره دارای بی‌شمار دایرهٔ عظیمه است، اما فقط یکی از آن‌هاست که از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد.



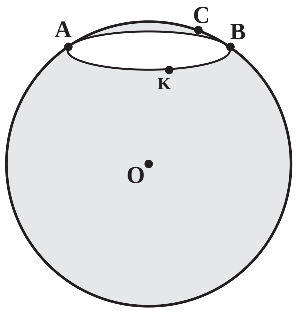
برای سهولت در تجسم، کره را چنان می‌چرخانیم که دایرهٔ عظیمهٔ گذرا از نقاط A و B همان نمای روبه‌روی کره باشد. برای اثبات ادعای خود، یعنی اینکه کمان ACB جواب مسئله است (C نقطهٔ دلخواهی است برای آنکه کمان AB بهتر مشخص شود)، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



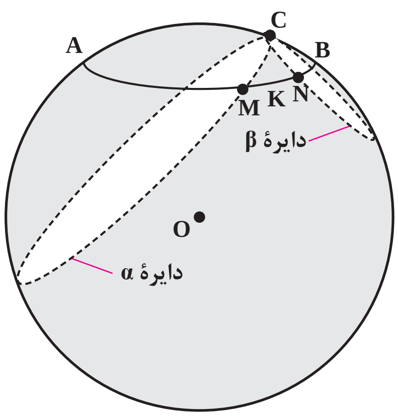
صفحهٔ P گذرا از نقطهٔ C و عمود بر شعاع OA، با کره دارای فصل مشترکی است که آن را دایرهٔ α می‌نامیم. صفحهٔ Q گذرا از نقطهٔ C و عمود بر شعاع OB را که با کره دارای فصل مشترکی به‌نام دایرهٔ β است، در نظر می‌گیریم.



اکنون در ادامه برای اینکه نشان دهیم کوتاه‌ترین مسیر، کمان ACB است، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\overset{\frown}{ACB}$ کوتاه‌ترین مسیر نباشد و کمانی مانند AKB کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطهٔ A و B واقع بر کره باشد.



نقطهٔ تلاقی دایرهٔ α را با کمان $\overset{\frown}{AKB}$ و نقطهٔ تلاقی دایرهٔ β با همان کمان را به‌ترتیب M و N می‌نامیم.



در عرقچینی به رأس A و به قاعدهٔ α، نقاط C و M روی قاعده قرار دارند و چون $\overset{\frown}{AC}$ را از کرهٔ اصلی داشتیم، بنابراین کوتاه‌ترین مسیر طی شده روی عرقچین از رأس تا قاعده، همان کمان AC است و داریم: $\overset{\frown}{AC} \le \overset{\frown}{AM}$. به‌همین ترتیب در مورد عرقچینی به رأس B و به قاعدهٔ β داریم: $\overset{\frown}{CB} \le \overset{\frown}{NB}$.

پس به وضوح دیده می‌شود که:

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} \le \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{NB} < \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{AKB}$$

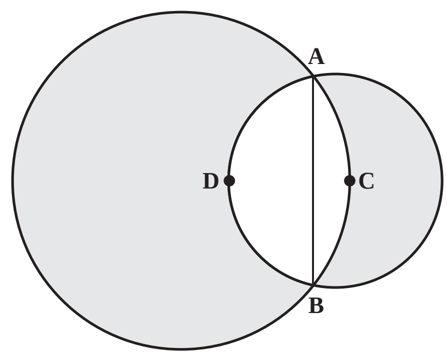
بنابراین فرض کوتاه بودن مسیر $\overset{\frown}{AKB}$ منتفی است و همان کمان ACB واقع بر دایرهٔ عظیمهٔ گذرا از A و B، مسیر موردنظر است.

اما واقعیت تعیین مسیر پرواز هواپیما پیچیده‌تر از مطالب فوق است. شاید اگر چاه‌های هوایی نبودند و اگر زمین حرکت نمی‌کرد، بسیار راحت می‌توانستیم یک دالان کوتاه برای پرواز هواپیما از شهر A به شهر B داشته باشیم. دقت کنید که کرهٔ زمین در حرکت است (از غرب به شرق) و به‌همین دلیل، مدت پرواز

هواپیمـــا از تهران تا پاریس حدود ۵/۵ ســاعت و مدت زمان برگشت حدود ۶ ســاعت است. اگر هواپیما را در لحظهٔ معین در نقطهٔ C واقع بر کمان AB فرض کنیم، در لحظه‌ای دیگر، تغییر فاصله از C تا A برابر با تغییر فاصله از C تا B نخواهد بود و همین عامل سبب تغییر دایرهٔ عظیمه خواهد شد و از این‌رو کار تعیین مســیر پرواز به راحتیِ ارائهٔ مطالب فوق نیست.

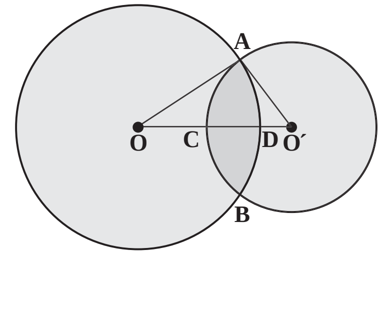
توضیح تکمیلی*

بــه طریق دیگری هــم می‌توان مســئلهٔ کوتاه‌ترین مســیر بین دو نقطه روی محیط کره را حل کرد. به‌طور شــهودی روشن است که هرگاه یک دســته دایره از دو نقطهٔ ثابت و مشترک A و B بگذرند (یعنی در وتر AB مشترک باشند)، هر چقدر دایره‌ها بزرگ‌تر شوند، کمان حاوی وتر، کوچک‌تر می‌شــود و طــول آن به طول وتر AB نزدیک‌تر می‌شــود. برای مثال در شکل زیر، کمان ACB از کمان ADB کوچک‌تر است (طول آن به طول وتر AB نزدیک‌تر اســت) و اگر شعاع دایره بزرگ‌تر هم بشــود، طول کمان فوق کوچک‌تر می‌شود و این موضوع را به‌صورت دقیق‌تر اثبات می‌کنیم:



دایره‌های C(O,R) و C´(O´,R´) را مطابق شــکل زیــر در نظر می‌گیریــم. با فــرض R>R´ (OA>O´A) می‌خواهیم نشان دهیم:

$\overset{\frown}{ADB} < \overset{\frown}{ACB}$



اما می‌دانیم که اندازهٔ هر کمان در دایره برابر اســت با حاصل‌ضرب شعاع دایره در اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به دایره (برحســب رادیــان). یعنی باید نشــان دهیم:

$2OA.\hat{O} < 2O'A.\hat{O}'$ و یا: $OA.\hat{O} < O'A.\hat{O}'$

با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث AOO´ داریم:

$OA = 2r.\sin\hat{O}'$ و $O'A = 2r\sin\hat{O}$

(r شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AOO´ است)

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$2r\sin\hat{O}'.\hat{O} < 2r\sin\hat{O}.\hat{O}'$$

$$\Rightarrow \hat{O}.\sin\hat{O}' < \hat{O}'.\sin\hat{O} \Rightarrow \frac{\hat{O}}{\sin O} < \frac{\hat{O}'}{\sin\hat{O}'}$$

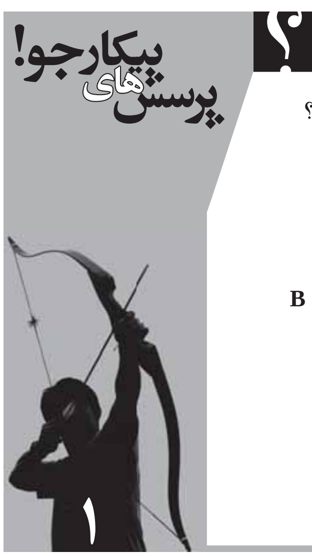
امــا بــا توجــه بــه اینکــه OA>O´A داریــم: $\hat{O} > \hat{O}'$. پــس با فــرض $\hat{O}' > \hat{O}$ باید نشــان دهیم: $\frac{\hat{O}'}{\sin\hat{O}'} > \frac{\hat{O}}{\sin\hat{O}}$ و ایــن یعنــی تابع $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ تابعــی صعــودی اســت. ایــن موضوع بــا توجــه به علامــت مشــتق تابــع (بــا فــرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$) به‌راحتی قابل اثبات است:

$$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\tan x - x)}{\sin^2 x} > 0$$

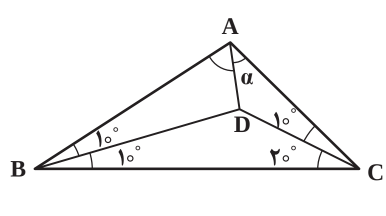
زیرا می‌دانیم: tanx>x. (چرا؟) حالا با توجه به این موضوع، اثبات قضیهٔ اصلی آســان می‌شــود. اگر A و B دو نقطــهٔ ثابت روی محیط کره باشــند، از بین دســته دوایری که از A و B می‌گذرند، کوتاه‌ترین آن‌ها مربوط به بزرگ‌تریــن دایره روی محیط کره اســت که همان دایرهٔ عظیمهٔ کره است.

*پی‌نوشت‌ها

*تــوضــیح تــکمیلی از هوشنگ شرقی است.



در شکل زیر اندازهٔ α چند درجه است؟



الف) ۳۰°   ب) ۲۰°

ج) ۲۵°   د) ۱۵°

هـ) ۳۵°

- **کارگردان و محقق:** مینا کشاورز
- **تهیه کننده:** سعید رشتیان
- **تصویربردار:** شاهو خوانگر
- **صدابردار:** فرشید زرمهر
- **تدوین و صداگذاری:** کاوه مظاهری
- **گفتار متن:** مینا کشاورز
- تهیه شـــده در گروه فرهنگ، تاریخ و هنر شبکهٔ اول سیمای جمهوری اسلامی ایران در سال ۸۹-۱۳۸۸

احسان یارمحمدی

اشاره

ابوریحان بیرونی یکی از بزرگ‌ترین مردان و دانشمندان ایران‌زمین است که خدمات بسیار بزرگی در زمینهٔ ریاضیات، اخترشناسی، تاریخ، جغرافیا و... به ایرانیان و جهانیان عرضه داشته است. در کتاب فارسی پایهٔ چهارم دورهٔ ابتدایی در دههٔ ۱۳۶۰ خورشـیدی درسی به نام «زگهواره تا گور دانش بجوی» وجود داشت که اشاره‌ای به ابوریحان بیرونی و خلق‌وخوی یادگیری و فراگیری علوم در وی داشـت. مینا کشـاورز به‌عنوان کارگردان فیلم مسـتند «مردی که همه‌چیز می‌دانسـت» از این موضوع بهره برده و فیلم خودش را با اشـاره به این مورد آغاز کرده اسـت. در این مقاله پس از آوردن درس زگهواره تا گور دانش بجوی از کتاب فارسـی سـال چهارم دبستان دههٔ ۱۳۶۰، به مقدمهٔ فیلم مینا کشـاورز اشـاره می‌کنیم و سپس به ارائهٔ موارد دیگری از فیلم مردی که همه‌چیز می‌دانست می‌پردازیم. در نهایت امیدواریم که شما نیز دست به تهیه این فیلم بزنید و از تماشای آن لذت ببرید.

زگهواره تا گور دانش بجوی

پیرمردی که سال‌های عمرش به ۷۸ رسیده بود، در بستر بیماری، واپسـین لحظات زندگی را می‌گذراند. بسـتگانش با چشـمان اشـکبار نگران حال وی بودند. آن‌گاه که نفس او به شماره افتاد، دوستی دانشمند بر بالین وی حاضر شد و با اندوهی بسیار حال او را جویا شد.

مرد بیمار با کلماتی بریده و کوتاه از دوست دانشمند خود خواهش کرد که یکی از مسائل علمی را که زمانی با وی در میان گذاشته بود، باز گوید. دانشمند گفت: «ای دوست گرامی! اکنون در چنین حالت ضعف و بیماری چه جای این پرسش است؟»

بیمار با ناراحتی پاسخ داد:

«کدام‌یک از این دو بهتر است، این مسئله را بدانم و بمیرم یا نادانسته و جاهل درگذرم؟»

مرد دانشمند مسئله را باز گفت. سپس از جای برخاست و دوست بیمار را ترک کرد. هنوز چند قدمی دور نشده بود که شیون از خانهٔ بیمار برخاست. چون سراسیمه بازگشت، بیمار چشم از جهان فرو بسته بود!

نام مردی که تا دم مرگ نیز تشنهٔ فراگیری و دانش‌اندوزی بود، ابوریحان بیرونی است. او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و فیلسوفان ایرانی است که از افتخارات کشور ماست. همهٔ زندگی ابوریحان در تألیف و تحقیق و دانش‌اندوزی گذشت. تا سال ۴۲۷ هجری که ۶۵ سال از عمرش می‌گذشت، ۱۱۳ جلد کتاب نوشته بود. این کتاب‌ها در مسائل گوناگون از قبیل ستاره‌شناسی، پزشکی، ریاضیات، تاریخ، جغرافیا، داروشناسی، آداب و رسوم ملل و دیگر دانش‌هاست.

با وجود آنکه نزدیک به هزار سال از عصر ابوریحان می‌گذرد، بیشتر آثار و کتاب‌های او از نظر فکری تازه می‌نماید. به نظر می‌رسد که اندیشه و روش تحقیق او در مسائل علمی به اندیشه و روش دانشمندان امروز بیشتر نزدیک بوده است تا با روش و فکر دانشمندان زمان خود.

پیوسته به علت حوادث می‌اندیشید و به تحقیق و بررسی و کشف چیزهای ناشناخته عشق می‌ورزید. دربارهٔ دین‌های گوناگون و آداب و رسوم ملت‌های مختلف تحقیق می‌کرد و اطلاعاتی را که به‌دست می‌آورد، به‌صورت کتاب می‌نوشت. دشمن سرسخت جهل و دوستدار دانش و بینش بود. از این لحاظ در قرن‌های گذشته کمتر می‌توان برای او نظیر پیدا کرد.

اولین تصویری که با شنیدن نام ابوریحان در ذهن من و هم‌نسلی‌های من شکل می‌گیرد، تصویر مرد مریضی است در بستر مرگ که در کتاب چهارم دبستان آمده بود و این جمله که می‌گفت: «بدانم و بمیرم بهتر است یا ندانسته بروم؟» اما واقعاً ابوریحان کیست؟ تا چه اندازه بین مردم امروزی شناخته شده است؟ اولین جایی که برای جست‌وجو به ذهنم رسید، اینترنت بود. با صفحات زیادی روبه‌رو شدم که تقریباً همهٔ آن‌ها محتوای یکسانی داشتند و کلیتی بودند از زندگی ابوریحان. اینکه بیرونی در اواخر قرن چهارم در «بیرون» از خوارزم متولد شده، در ۱۸ سالگی به رصد پرداخته، از آغاز جوانی به تحقیق و تألیف مشغول شده و از بزرگ‌ترین دانشمندان جهان اسلام و همهٔ اعصار در زمینه‌هایی مثل نجوم، ریاضی، جغرافیا و تاریخ بوده است. تنها نشانه‌ای که از ابوریحان در شهر به ذهنم می‌رسد، مجسمه‌ای است که ابوریحان صورت‌های فلکی را روی سرش نگه داشته و به آسمان خیره شده است.

در همان مسیر اولیهٔ تحقیق متوجه نقش مهم بیرونی در علم جغرافیا شدم و فکر کردم برای پیدا کردن ردپایی از بیرونی سری به «گیتاشناسی» بزنم؛ جایی که پر از نقشه‌های جغرافیایی است. آنجا نقشه‌ای را به من نشان دادند که نقشهٔ ابوریحان بیرونی از زمین بود و همان‌جا بود که با دکتر **گنجی**، دکتر **صفی‌نژاد** و آقای **سحاب** که از بزرگ‌ترین جغرافی‌دانان ایران هستند، آشنا شدم.

سبک نگارش بیرونی از جهان، آمیزه‌ای است از شیوهٔ اخترشناسان و منجمان یونانی و شیوه‌های بلدان‌شناسان غرب. یکی از اندیشمندان آلمانی دربارهٔ کیفیت نقشه‌های بیرونی گفته است: «بیرونی قوهٔ تخیل و محاسبه را در ترسیم نقشه‌ها با هم دارد.» دکتر گنجی معتقد است: با وجود آنکه نقشهٔ زمین بیرونی نسبت به نقشه‌های هم‌دورهٔ خودش جزئیات کمتری دارد، ولی شبیه‌ترین نقشه به زمین امروزی است. شیوهٔ بیرونی چه بوده است؟ در اینترنت به تصویر دیگری برخوردم که شکل دیگری از همین نقشه بود، ولی نه یک عکس یا تصویر تخت، بلکه یک مجسمه بود؛ مجسمه‌ای سه بعدی از نقشهٔ زمین بیرونی که **سیمین اکرامی** ۲۰ سال پیش آن را ساخته بود و حالا در پارک گفت‌وگوست.

سری هم به تنها چاپخانه‌ای زدم که در تهران نقشه

ابوریحان بیرونی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و فیلسوفان ایرانی است که از افتخارات کشور ماست. همهٔ زندگی ابوریحان در تألیف و تحقیق و دانش‌اندوزی گذشت


زگهواره تا گور دانش بجوی

پیرمردی که سالهای عمرش بهشتاد و هشت رسیده بود، در بستر بیماری، واپسین* لحظات زندگی را می‌گذرانید. بستگانش با چشمان اشکبار نگران حال وی بودند. آن‌گاه که نفس او به شماره افتاد،دوستی دانشمند بر بالین وی حاضر شد و با اندوهی بسیار حال او را جویا شد.

مرد بیمار با کلماتی بریده و کوتاه از دوست دانشمند خود خواهش کرد که یکی از مسائل علمی را که زمانی با وی در میان گذاشته بود باز گوید. دانشمند گفت: ای دوست گرامی! اکنون در چنین حالت ضعف و بیماری چه جای این پرسش است؟

بیمار با ناراحتی پاسخ داد:

کدام‌یک از این دو بهتر است: این مسئله را بدانم و بمیرم یا نادانسته و جاهل* درگذرم؟!

مرد دانشمند مسئله را باز گفت. سپس از جای برخاست و دوست بیمار را ترک کرد. هنوز چند قدمی دور نشده بود که شیون از خانهٔ بیمار برخاست. چون سراسیمه بازگشت. بیمار چشم از جهان فرو بسته بود!

***

نام مردی که تا دم مرگ نیز تشنهٔ فراگیری* و دانش‌اندوزی بود، ابوریحان بیرونی است. او یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان و فیلسوفان* ایرانی است، که از افتخارات کشور ماست. همهٔ زندگی ابوریحان در تألیف* و تحقیق* و دانش‌اندوزی گذشت.

۷۱

چاپ می‌کند. این نقشـــه‌ها که روزانه در حجم زیادی چاپ می‌شـــود و بین مردم می‌چرخند، چگونه محاسبه و ترسیم شـــده‌اند؟ بیرونی برای ترسیم نقشـــه‌هایش چه می‌کرده؟ بیرونـــی در کتاب «**تحدیدالنهایـــات الاماکن**» که دربارۀ جغرافیا و محاسبۀ نقشه‌هاست، می‌گوید: «بر آن بودم راهی را که **بتلمیـــوس** در کتاب جغرافیا و دیگران در کتاب‌های مصالح آورده‌اند، یکجا بیاورم تا پراکنده‌ها فراهم و دشواری‌ها آسان شود.»

به روحیۀ محقق بودن بیرونی فکر می‌کنم و اینکه این نقشـــه را با سفر کردن کشیده یا براساس تصور و تخیلش و جمع کردن اطلاعات دیگران از سفرهایی که کرده‌اند. بیرونی می‌گوید: «نخست به تصحیح مســـافت‌ها و نام‌های جاها و شـــهرها پرداخته‌ام و این کار را با پرســـیدن از کسانی که به آنجاها رفته بودند و محک زدن و درســـت کردن گفته‌های آنان با یکدیگر به انجام رسانیدم.»

بیرونـــی با تســـطیح کـــره از یک تصویر ســـاده شـــدۀ «رسم‌الجسمی» اســـتفاده می‌کرد. ولی مطرح‌ترین روشش در کشیدن نقشه‌های جغرافیایی، «روش استوانه‌ای» است. او نیم‌کره‌ای با قطر ۱۰ ذراع ســـاخت که طول‌ها و عرض‌ها را از روی مســـافت بیرون آورده بود و اسامی سرزمین‌ها را با مختصات جغرافیایی و فواصل آن‌ها از یکدیگر روی آن ثبت کرد. بیرونی برای رســـم و محاسبۀ طول و عرض جغرافیایی بعضی شهرها خودش به سفر رفت. از «غزنه» در افغانستان شروع کرد و به «توس» و از آنجا به «ری» و بعد «بغداد» و از بغداد به «شیراز» و بعد به «کرمان» و «زوزن» رفت و دوباره به غزنه برگشـــت. او پیمایشی مســـدود انجام داد و مسیری بیضوی شکل را طی کرد و در مواردی که قادر به سفر نبود، با رصدکـــردن دو نقطۀ متفاوت ولی هم‌زمان، طول و عرض جغرافیایی را محاسبه می‌کرد. مثل زمانی که در سال ۳۸۷ هجری با **ابولوفای بوزجانی** قرار گذاشتند که او در بغداد و بیرونی در خوارزم کسوف ماه را رصد کنند. از مقایسۀ نتیجۀ این رصدها، اختلاف ساعت میان نصف‌النهارهای این دو شهر معلوم شد.

ابوریحان پس از ترسیم نقشۀ زمین، زمین را به‌صورت تقسیم‌بندی سنتی، به هفت کشور یا اقلیم که به‌صورت هفت دایرۀ مماس و برابر با هم، مثل افلاک سبعۀ سماوات، تقسیم کرد. او این تقســـیم‌بندی را نه براســـاس نجوم و محاسبات ریاضی که دقیقاً براساس رفتار، کردار و خصوصیات مردمان این ســـرزمین‌ها انجام داد. در «تحدیـــد النهایات الاماکن» می‌نویســـد: «آبادانی زمین از جهت سیاســـی و گســـترش فرمان‌روایی به هفت قاره گرد برابر تقسیم شد، بدان‌گونه که شش دایرۀ برابر، دایرۀ هفتم برابر با آن‌ها را در میان گیرد که همانا ایران شهر اســـت و سبب این بخش کردن این است که پادشاهان بزرگ در ایران شهر جایگاه داشتند، که همان عراق، فارس، خراسان و جبال است.»

ابوریحان ایرانی اســـت و مورخان، دوره‌ای از تاریخ علم را به‌دلیل اهمیت بیرونی و آثارش عصر بیرونی نامیده‌اند. اما آنچه که در همۀ این مدت ذهن مرا به خودش مشغول کرده و هنوز جوابی برایش نگرفته‌ام، این اســـت که: چرا بیرونی با این همه تألیف و خدمات بزرگی که به علم کرده، این همه در ایران غریب و ناشناخته است؟ و مدام این جملۀ ابوریحان از کتاب «**مال الهند**» از برابر چشـــمانم می‌گذرد: «**طبیعت دل‌ها بر عشق به دانش استوار است و خمیر وجود آدمی از ضدعلم، یعنی جهل، متنفر است. ولی در روزگار ما چنین نیســـت و وارون آن رواج دارد. چگونه ممکن است دانشی به‌وجود آید یا دانشمندی نوخواسته پدید آید؟**»

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ایستگاه اول

جدول‌های عددی ویژهٔ نوروز را که یادتان هست؟! برای یادآوری و برای آگاهی آن دسته از خوانندگانی که آن شماره را ندیده‌اند، کمی توضیح می‌دهیم. گفتیم که در این جدول‌ها عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و... طوری قرار می‌گیرند که با شروع از عدد ۱ و حرکت خانه به خانه (به‌صورت افقی، عمودی یا مورب در هر دو جهت) به‌طور متوالی بتوان مسیری از اعداد به سمت بزرگ‌ترین عدد جدول پیدا کرد. برای مثال، عددهای ۱، ۲، ... و ۱۶ به‌صورت روبه‌رو در جدولی از این دست مرتب شده‌اند و مسیر عبور از ۱ تا ۱۶ هم مشخص شده است:

۱۱	۱۲	۳	۴
۱۰	۱۳	۵	۲
۱۴	۹	۱	۶
۱۶	۱۵	۸	۷

معمای ما این است که تعدادی از عددهای این جدول (به استثنای عددهای ابتدا و انتها) را در جدول مشخص نمی‌کنیم و رمز جدول پیدا کردن جای این عددهاست. در شمارهٔ ویژه نوروزی، تعدادی از این جدول‌ها را در چهار سطح ابتدایی، آسان، متوسط و دشوار ارائه کردیم. اینک در این شماره به چند نمونهٔ چالش‌برانگیز و متفاوت (به لحاظ شکلی) توجه کنید:

۱

	۴		۳۶			
		۱			۳۲	
	۷	۴۵	۳۹			۲۸
	۱۰				۴۱	۲۷
۱۲	۱۱			۴۲		
		۴۸				
	۴۹		۱۹	۱۸	۲۴	۲۳

۲

۵۵				۶۰			۶۳
		۱۶				۹	۶۴
				۱۴		۷	
		۲۰		۴۷		۵	
۵۱		۴۹				۴۰	
				۳۴	۴۱		
				۳۳			۳۸
		۲۹				۳۷	۱

۳

		۶۰		۷	۸	۱۷		
	۶۲		۴			۱		
۶۳			۴۹			۱۰	۱۹	۱۳
	۶۴		۵۲		۲۹			
		۵۳					۲۷	۲۱
	۶۷			۴۶		۳۱		
۴۱		۴۳			۳۳		۲۴	
۳۸		۷۰		۷۳				۸۱
	۳۷				۷۶			۷۹

۴

				۲۲		
		۲۶	۲۳			
۳۳			۲۷	۲۰	۱۷	۱۸
۳۰		۶	۳	۱		
۳۱			۷		۱۴	
		۱۰	۸	۱۳		

۵

	۳۱		۳۵		۸	۶	۴
	۳۲	۳۴		۳۶			۵
۲۸	۲۷				۳۷	۱	
۱۳	۱۲						۴۳
	۱۵	۲۵			۴۰	۴۲	
	۱۷					۴۵	۵۲
۱۹		۲۳			۴۶	۵۱	۵۰

راه‌های گوناگون حل یک مسئله و اهمیت یکتایی جواب

فریده طاهری
دبیر ریاضی منطقهٔ ۸ تهران

سیمین افروزان
دبیر ریاضی منطقهٔ ۲

اشاره

مسئله‌ای که به آن خواهیم پرداخت، مسئله‌ای از کتاب هندسهٔ ۲ است که با راه‌حل‌های گوناگون برای آن به یک جواب منحصربه‌فرد و یکتا خواهیم رسید. در این مسئله برای اثبات یکتایی جواب از روش برهان خلف استفاده خواهد شد.

مسئله ۷ صفحهٔ ۱۵۳

ثابت کنید اگر L و L' دو خط متنافر باشند، از هر نقطهٔ مانند A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L' عمود باشد.

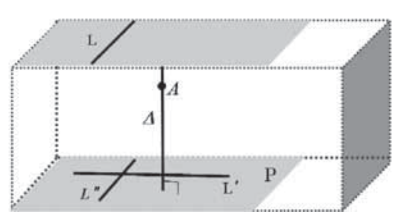
■**راه‌حل اول:** دو خط متنافر را در دو صفحهٔ موازی قرار می‌دهیم. از نقطهٔ A خط Δ را بر یکی از دو صفحه عمود می‌کنیم. از آنجا که این خط به علت موازی‌بودن دو صفحه بر صفحهٔ دیگر نیز عمود است، بر دو خط متنافر مفروض عمود می‌شود و جواب مسئله است (شکل ۱).

■**اثبات یکتایی جواب:** از نقطهٔ دلخواهی روی L' خط L'' را موازی L رسم می‌کنیم. چون L با صفحه P موازی است، L'' به تمامی در صفحهٔ P قرار دارد. اگر Δ' گذرا از A را جواب دیگر مسئله در نظر بگیریم، Δ' متمایز از Δ عمود دیگری بر P است (تناقض).

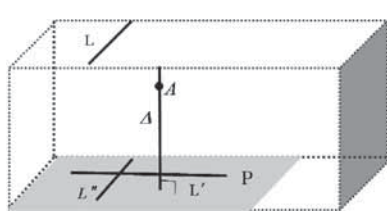
■**راه‌حل دوم:** از نقطهٔ دلخواهی روی L' خط L'' را موازی L رسم می‌کنیم. صفحهٔ P شامل دو خط متقاطع L' و L'' را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A، خط Δ را عمود بر صفحه مذکور رسم می‌کنیم. Δ جواب مسئله است (شکل ۲). زیرا:
$\Delta\perp L''$ و $\Delta\perp L' \Leftrightarrow \Delta\perp P$ و چون L با L'' موازی است، در نتیجه: $\Delta\perp L$.

■**اثبات یکتایی:** فرض کنیم Δ' نیز از نقطهٔ A گذشته و بر دو خط متنافر L و L' عمود باشد. چون L'' با L موازی است، پس Δ' بر L'' نیز عمود است. Δ' بر دو خط متقاطع از صفحهٔ P عمود است و در نتیجه بنابر «قضیهٔ اساسی تعامد» بر صفحهٔ مزبور عمود خواهد بود. اما از یک نقطه خارج از یک صفحه مانند P، یک و تنها یک خط می‌تواند بر صفحه عمود رسم کرد. پس Δ' و Δ یکی هستند.

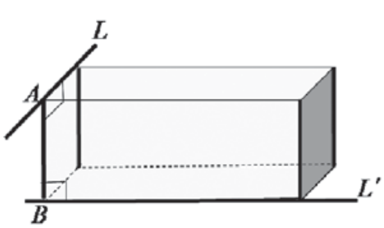
نکته: توجه کنید که دو خط عمود برهم در فضا الزاماً یکدیگر را قطع نمی‌کنند. بنابراین خط Δ که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر دو خط متنافر L و L' عمود است، امکان دارد L یا L' یا هر دو را قطع نکند. در حالت خاصی که Δ هر دو را قطع کند، عمود مشترک دو خط متنافر نامیده می‌شود. در مکعب مستطیل شکل ۳، با وجودی که تمام یال‌های جانبی مکعب مستطیل بر دو خط متنافر L و L' عمود هستند، ولی در میان این یال‌های موازی تنها یال AB است که عمود مشترک دو خط مذکور محسوب می‌شود.



شکل ۱.

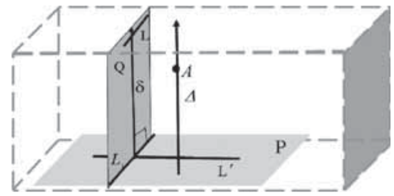


شکل ۲.



شکل ۳.

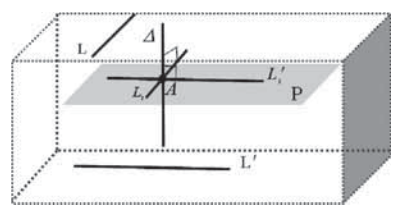
■**راه‌حل سوم:** δ عمود مشترک دو خط متنافر مفروض را، مطابق روش کتاب که در درس صفحهٔ بعد کتاب هندسهٔ ۲ توضیح داده شده است، رسم می‌کنیم. از نقطهٔ A در فضا خط Δ را موازی δ می‌کشیم. Δ جواب مسئله است. زیرا Δ با خطی موازی است که بر هر دو خط متنافر مذکور عمود است (شکل ۴).



شکل ۴.

■**اثبات یکتایی جواب:** اگر Δ' نیز از نقطهٔ A گذشته و بر دو خط متنافر L و L' عمود باشد، Δ' بر L_1 نیز که با L موازی است، عمود خواهد بود. در نتیجه بر صفحهٔ دو خط متقاطع L' و L، یعنی بر صفحهٔ P عمود است. از آنجا که دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند، پس Δ' با δ موازی خواهد شد. اما از نقطهٔ A خارج از خط δ، بنابر اصل توازی، یک و تنها یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد. پس Δ' همان Δ است.

■**راه‌حل چهارم:** از نقطهٔ A دو خط به موازات دو خط متنافر مفروض رسم می‌کنیم (L_1, L'_1). صفحهٔ P شامل دو خط متقاطع را در نظر می‌گیریم. خط Δ که از نقطهٔ A عمود بر صفحهٔ P رسم می‌شود، جواب مسئله است. زیرا: $\Delta\perp P\Rightarrow\Delta\perp L_1, L'_1$. در نتیجه Δ بر L و L' که به ترتیب با L و L'_1 موازی‌اند نیز عمود است (شکل ۵).



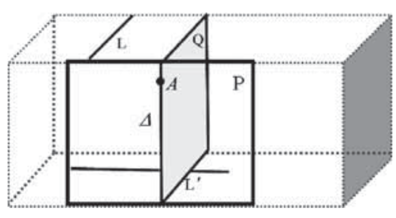
شکل ۵.

■**اثبات یکتایی جواب:** اگر Δ' که از نقطهٔ A می‌گذرد نیز بر L و L' عمود باشد، آن‌گاه Δ' بر L_1 و L'_1 هم که به ترتیب با L و L' موازی هستند، عمود است. پس Δ' بر صفحهٔ گذرنده از آن‌ها، یعنی P عمود است. در این صورت از نقطهٔ A دو خط عمود بر یک صفحه خواهیم داشت (تناقض).

■**راه‌حل پنجم:** از نقطهٔ A صفحهٔ P را عمود بر خط L و همچنین از نقطهٔ A صفحهٔ Q را عمود بر خط L' رسم می‌کنیم. Δ، فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q، جواب مسئله است (شکل ۶). زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} L\perp P\to L\perp\Delta \\ L'\perp P\to L'\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow$$ Δ بر دو خط عمود است.

صفحه‌های P و Q که هر دو شامل نقطهٔ A هستند، برهم منطبق نیستند. زیرا در صورت منطبق بودن، L و L' که بر آن دو صفحه عمودند، در واقع بر یک صفحه عمود می‌شدند و موازی بودند که این خلاف متنافر بودنشان است.



شکل ۶.

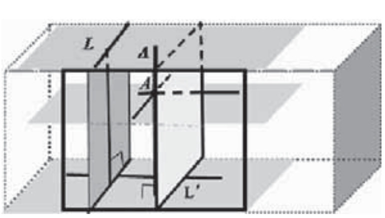
خط Δ منحصربه‌فرد یعنی یکتاست، زیرا:

■**روش اول برای اثبات یکتایی جواب:** فرض می‌کنیم دو خط Δ و Δ' جواب مسئله باشند. یعنی Δ' نیز از نقطهٔ A گذشته و بر دو خط متنافر مفروض عمود است. در این صورت چون: $L\perp P$ و $\Delta'\perp P$، با توجه به مسئلهٔ ۵ همان صفحهٔ کتاب هندسهٔ ۲، Δ' موازی P خواهد بود. به طریق مشابه Δ' موازی Q نیز هست. از آنجا که اگر خطی با دو صفحهٔ متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است، در نتیجه Δ' و Δ موازی خواهند بود. نتیجه می‌گیریم که دو خط شامل A هستند، پس برهم منطبق‌اند و این نشان از یکتایی Δ دارد.

■**روش دوم برای اثبات یکتایی:** فرض می‌کنیم دو خط Δ و Δ' جواب مسئله باشند. یعنی Δ' نیز از نقطهٔ A گذشته و بر دو خط متنافر مفروض عمود است. پس Δ' که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر L عمود است، بنابر مسئلهٔ ۶ همان صفحه، در داخل صفحه‌ای قرار می‌گیرد که شامل A است و بر L عمود است. یعنی Δ' داخل P خواهد بود. به‌دلیل مشابه چون Δ' بر L' نیز عمود است، داخل صفحهٔ Q واقع خواهد شد. در نتیجه Δ' فصل مشترک دو صفحه و بر Δ منطبق است.

یکتایی جواب و معادلهٔ خط مطلوب

یکتایی جواب مسئله که به روش برهان خلف در هر راه‌حل ارائه شده است، نشان می‌دهد از همهٔ راه‌حل‌ها تنها به یک جواب خواهیم رسید و همهٔ راه‌ها به یک جواب Δ ختم می‌شوند (شکل ۷). تنها یک خط است که از نقطهٔ مفروض A می‌گذرد و بر دو خط متنافر داده شده عمود است. معادلهٔ این خط منحصربه‌فرد را می‌توان پس از فراگیری معادلهٔ خط در فضا در هندسهٔ تحلیلی سال چهارم (پیش‌دانشگاهی) به آسانی نوشت. پیش‌نیاز هندسهٔ تحلیلی سال آینده، فصل هندسهٔ فضایی در کتاب هندسه ۲ است. این فصل را با تعمق بیشتری بخوانید تا درک مطالب برایتان آسان‌تر شود.



شکل ۷.

از قضیه پیک و نتایج آن بیشتر بدانیم!

خشایار کاویانپور
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی
دانشگاه تربیت مدرس

اشاره

«قضیهٔ پیک» که در کتاب جدید هندسهٔ۱ (پایهٔ دهم) برای نخستین‌بار مطرح شده است، در محاسبهٔ مساحت شکل‌های مختلف هندسی و به‌خصوص شکل‌های نامنظم کاربردهای زیادی دارد که در کتاب درسی نیز نمونه‌هایی از آن آمده است. اما باید بدانید که کاربردهای قضیهٔ پیک به این‌ها محدود نمی‌شود و نمونه‌هایی که در این مقاله به آن‌ها اشاره شده، بیانگر کاربردهایی غیرمعمول از این قضیه است.

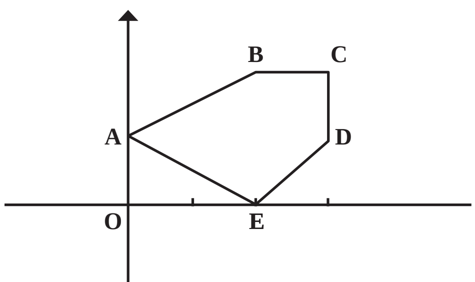
پیش از ورود به بحث، نکات زیر را یادآوری می‌کنیم:

۱. هر چندضلعی شبکه‌ای را می‌توان درون یک دستگاه مختصات قرار داد که مختصات رئوس آن‌ها اعدادی صحیح است.

۲. مربع طول هر ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای را باید بتوان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

مثلاً در شکل ۱، اگر O مبدأ مختصات باشد، با توجه به $A(\circ,y_1)$ و $E(x_2,\circ)$ که در آن‌ها y_1 و x_2 عددهای صحیح‌اند، داریم:

$$AE^2=(y_E-y_A)^2+(x_E-x_A)^2=\underbrace{y_1^2+x_2^2}_{\text{مجموع مربع‌های دو عدد صحیح}}$$



شکل ۱.

برای مثال، $\sqrt{7}$ نمی‌تواند طول ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، زیرا ۷ را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت. اما $\sqrt{18}$ می‌تواند طول ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، زیرا: $3^2+3^2=18$.

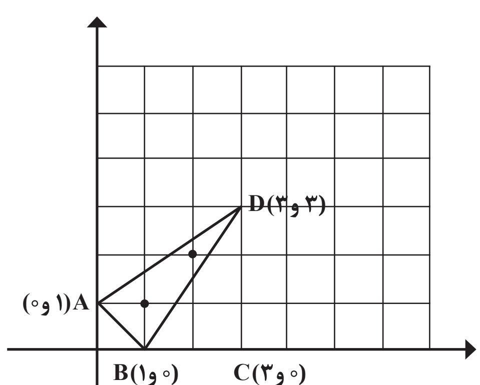
حال به مثال‌هایی از کاربردهای قضیهٔ پیک توجه کنید:

■ **مثال ۱.** درون مثلثی به اضلاع $\sqrt{13}$، $\sqrt{13}$ و $\sqrt{2}$ که مختصات رئوسش عددهای صحیح است، چند نقطه با مختصات صحیح می‌توان پیدا کرد؟

■ **حل:**

$$(\sqrt{13})^2=13=3^2+2^2$$

$$(\sqrt{2})^2=2=1^2+1^2$$



شکل ۲.

از مبدأ مختصات، یک واحد به سمت بالا می‌رویم تا به A برسیم و یک واحد به سمت راست می‌رویم تا به B برسیم. $AB=\sqrt{۲}$ حال از B دو واحد به سمت راست می‌رویم تا به C برسیم و از C، سه واحد به سمت بالا می‌رویم تا به D برسیم. $AD=\sqrt{۱۳}$ اگر از D به A وصل کنیم، مثلث ساخته می‌شود. با توجه به شکل، تنها دو نقطه با مختصات صحیح درون این مثلث می‌توان یافت (۲ نقطهٔ درونی دارد).

■ **مثال ۲.** چند نوع مستطیل شبکه‌ای با مساحت ۶ می‌توان یافت؟

■ **حل:** طول و عرض مستطیل‌ها باید اعداد صحیح باشند، یا اگر رادیکالی هستند، مربع آن‌ها باید به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح باشند:

$$۶=\underbrace{۱\times۶}_{(۱)}=\underbrace{۲\times۳}_{(۲)}=\underbrace{\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}}_{(۳)}=\underbrace{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}_{(۴)}=\underbrace{\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}}_{(۵)}$$

موارد (۱) و (۲) قابل قبول‌اند. حال موارد (۳)، (۴) و (۵) را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}\rightarrow(۳\sqrt{۲})^۲=۱۸=۳^۲+۳^۲$$

$$\downarrow$$

قابل قبول است: $(\sqrt{۲})^۲=۲=۱^۲+۱^۲$

$۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}$ غیرقابل قبول‌اند، زیرا مربع دو عدد را جداگانه نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

بنابراین شش نوع مستطیل شبکه‌ای می‌توان یافت که مساحت آن‌ها ۶ است:

$\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}$ یا $۳\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$ و ۲×۳ یا ۳×۲ و ۱×۶ یا ۶×۱

■ **مثال ۳.** در چهارضلعی ABCD با رئوسی به مختصات صحیح، طول اضلاع به‌ترتیب $BA=۲\sqrt{۲}$، $AC=\sqrt{۱۷}$، $CD=۲\sqrt{۲}$ و $DB=\sqrt{۱۷}$ است. روی بزرگ‌ترین قطر این چهارضلعی چند نقطهٔ دیگر (به جز D و B) با مختصات صحیح قرار می‌گیرد؟

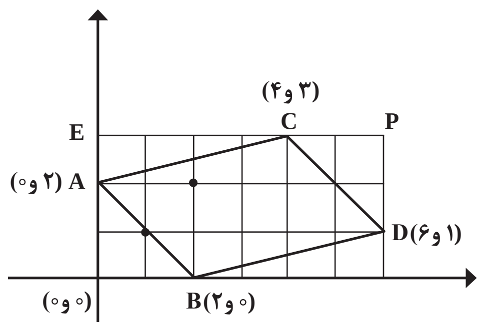
■ **حل:** چون مختصات رئوس صحیح است، چهارضلعی شبکه‌ای است. پس می‌توان چهارضلعی مفروض را در یک دستگاه مختصات قرار داد. چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.

مربع طول دو ضلع نیز باید مجموع مربعات دو عدد صحیح باشد:

$$(\sqrt{۱۷})^۲=۴^۲+۱^۲ \quad \text{و} \quad (۲\sqrt{۲})^۲=۲^۲+۲^۲$$

از مبدأ مختصات دو واحد به بالا و دو واحد به سمت راست می‌رویم تا به A و B برسیم: $AB=۲\sqrt{۲}$.

از A یک واحد به بالا و از E چهار واحد به سمت راست می‌رویم تا به C برسیم: $AC=\sqrt{۱۷}$. از C، دو واحد به راست می‌رویم تا به P و از P دو واحد به پایین می‌رویم تا به D برسیم: $CD=۲\sqrt{۲}$.



شکل ۳.

و در نهایت از D به B وصل می‌کنیم. $BD=\sqrt{۱۷}$ خواهد بود. در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABDC به‌دست می‌آید.

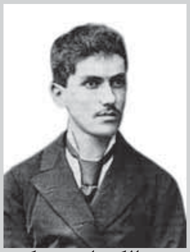
بزرگ‌ترین قطر، AD است. (چرا؟) با توجه به مختصات رئوس، معادلهٔ خط AD را می‌نویسیم.

$$AD: y-۲=\frac{۲-۱}{۰-۶}(x-۰)\Rightarrow y-۲=-\frac{۱}{۶}x$$
$$\Rightarrow x+۶y=۱۲$$

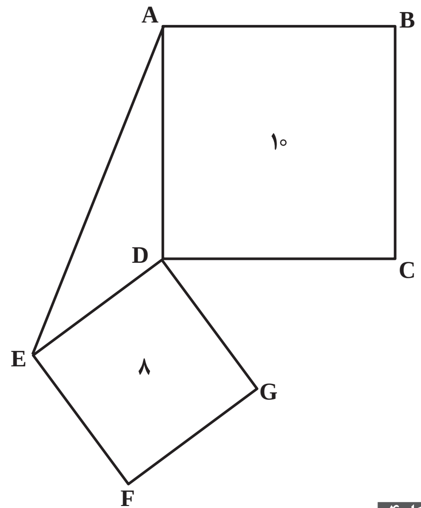
به‌طوری‌که: $۰\le x\le ۶$ و $۱\le y\le ۲$ (چرا؟) چون y صحیح دیگری نداریم، پس AD نقطهٔ درونی ندارد.

■ **تمرین ۱.** قطر کوچک چند نقطه با مختصات صحیح دربردارد؟

■ **مثال ۴.** در شکل ۴، ABCD مربعی به مساحت ۱۰ و DGFE مربع به مساحت ۸ است. اگر مختصات رئوس این دو مربع اعداد صحیح باشند، مساحت مثلث ADE چقدر است؟



جرج الکساندر پیک



شکل ۴.

■ **حل:** چون مختصات رأس‌های مربع‌ها اعداد صحیح هستند، بنابراین شبکه‌ای هستند.

حال دقت کنید به مراحل حل سؤال:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD}=۱۰ \Rightarrow \text{ضلع مربع}=\sqrt{۱۰} \\ ۱۰=۳^۲+۱^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

درون یک مربع ۴×۴ مربعی رسم می‌کنیم که اضلاع مربع ۴×۴ را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کند.

$$\left.\begin{array}{l} S_{DGFE}=۸ \Rightarrow \text{ضلع مربع}=\sqrt{۸} \\ ۸=۲^۲+۲^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

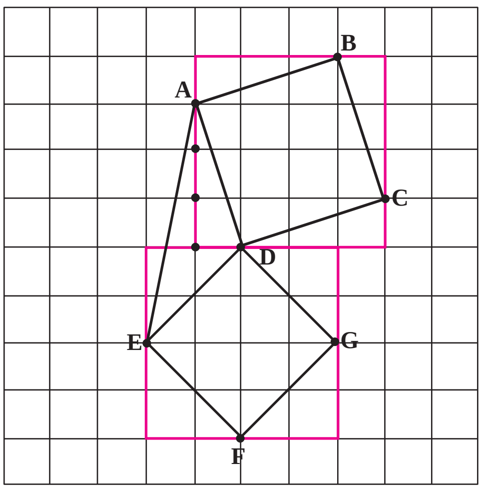
درون یک مربع ۴×۴ مربعی رسم می‌کنیم که اضلاع مربع ۴×۴ را به نسبت مساوی ۲ به ۲ تقسیم کند

البته توجه کنید دو مربع ۴×۴ در یک رأس مشترک‌اند. حال از A به E وصل می‌کنیم.

مثلث ADE، ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطهٔ درونی دارد، لذا مساحت مثلث از دستور پیک به‌دست می‌آید.

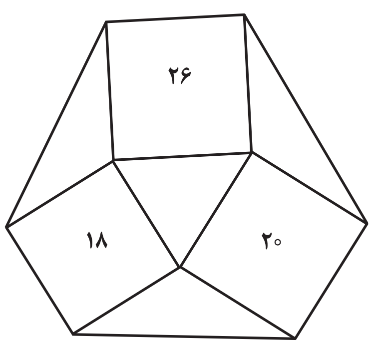
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۴}{۲}+۳-۱$$

$$S_{\overset{\Delta}{ADE}}=۴$$



شکل ۵.

■ **تمرین ۲.** در شکل ۶ مختصات تمامی رئوس اعداد صحیح است مساحت بزرگ‌ترین ۶ ضلعی چقدر است؟



شکل ۶.

■ **جواب:** ۱۰۰

■ **تمرین ۳.** در یک شبکهٔ ۸×۸ چند مستطیل شبکه‌ای به مساحت ۱۲ می‌توان رسم کرد؟
(مسابقات IMC، ۲۰۱۰ با تغییر)

*منبع
«Amusements in Mathematics», First edition, 1917.

اگر x+y=۲ باشد، حاصل کسر $\frac{x^۳+۲xy^۲+۳y^۳}{x^۲+y^۲}$ در کدام فاصلهٔ زیر قرار می‌گیرد؟

☐ الف) $(-\sqrt{۵},\sqrt{۵})$

☐ ب) $(-۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})$

☐ ج) $(-۲-\sqrt{۵},-۲+\sqrt{۵})$

☐ د) $[-۴-\sqrt{۵},-۴+\sqrt{۵}]$

☐ هـ) $[-۸-\sqrt{۵},-۸+\sqrt{۵}]$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه از ابتدا تا ...

(تقدیر شده در سیزدهمین جشنوارهٔ کتاب‌های رشد)

نویسنده: ارشک حمیدی **ناشر:** مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی **چاپ اول:** ۱۳۹۴

نویسندهٔ کتاب، دانش‌آموخته و معلم باتجربهٔ رشتهٔ ریاضی (و به‌خصوص هندسه) است و در کارنامهٔ وی تألیف، ترجمه و ویراستاری کتاب‌های متعدد و متنوع ریاضی به‌چشم می‌خورد که یکی از معروف‌ترین آن‌ها ترجمهٔ کتاب مشهور «مسائلی در هندسهٔ مسطحه» نوشتهٔ **ای. اف. شاریگین** است. نویسنده از تجربهٔ خود در تدوین مسائل این کتاب به نحو شایسته‌ای استفاده کرده است. در مقدمهٔ کتاب گفته شده که کتاب برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم، هفتم و هشتم مناسب است، اما به‌نظر می‌رسد که منظور، دانش‌آموزان علاقه‌مند این پایه‌ها (و شاید دانش‌آموزان مدارس خاص) باشد. این موضوع باعث شده است که در واقع کتاب برای دانش‌آموزان سال‌های بالاتر و دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه نیز کاملاً مفید و قابل استفاده باشد.

کتاب در پنج فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

فصل اول: مسئله حل کردن که به روش‌های حل مسئله و استدلال (بدون تأکید بر هندسه) تمرکز دارد.

فصل دوم: مفهوم‌های اولیه و تعریف‌ها که شامل تعریف‌های ابتدایی (چون نقطه، خط، زاویه و...) است.

فصل سوم: هم‌نهشتی که به قضایای اصلی هم‌نهشتی مثلث‌ها و ویژگی‌های مثلث‌های متساوی‌الساقین می‌پردازد.

فصل چهارم: نابرابری مثلثی و نتایج آن که این موضوع را شرح می‌دهد.

فصل پنجم: توازی که به بررسی زوایای بین خطوط موازی و مورب و نتایج آن می‌پردازد.

در پایان کتاب نیز تمرین‌های تکمیلی که سطح بالاتری دارند، به تفکیک فصل‌ها ارائه شده‌اند. همان‌طور که اشاره شد، کتاب سرشار از مسائل متنوع و بسیار زیباست که از المپیادها و مسابقات ریاضی متفاوت (همچون مسابقهٔ کانگورو، مسابقهٔ ریاضی دبیرستان‌های آمریکا، انگلستان، کانادا و جشنوارهٔ ریاضی و المپیاد ناحیه‌ای مسکو و...) انتخاب یا توسط مؤلف طراحی شده‌اند.

نقدهایی هم البته بر کتاب وارد است، از جمله آنکه نویسنده تعریف‌هایی کاملاً شخصی را در کتاب خود آورده است که در متون رایج هندسه بی‌سابقه‌اند. برای مثال، دو زاویهٔ مکمل را همواره مجاور در نظر گرفته و یا ذوزنقه را یک چهارضلعی دانسته است که دو ضلع روبه‌رویش موازی‌اند (صفحهٔ ۶۹). حال آنکه طبق تعریف رایج، ذوزنقه یک چهارضلعی است که «فقط» دو ضلع موازی داشته باشد. حتی در تعریف‌ها هم این خوداتکایی مشاهده می‌شود، مانند مثلث حاده (به‌جای حاده‌الزاویه یا حاده‌الزوایا) و یا این قضیه که: «نیم‌سازهای مثلث از یک نقطه رد می‌شوند» (به‌جای آنکه نوشته شود در یک نقطه همرس‌اند).

با همهٔ این‌ها همان‌طور که گفتیم، کتاب برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه که با کتاب هندسهٔ ۱ پایهٔ دهم سروکار دارند، می‌تواند کتاب بسیار مفیدی باشد و مطالعهٔ آن را توصیه می‌کنیم.

هوشنگ شرقی

گفت‌وگو با دکتر سیدمحمدکاظم نائینی

استاد ریاضی یار دبستانیِ شهید رجاییَ!

اشاره

محمدکاظم نائینی در عرصهٔ ریاضیات کشور ما، به‌خصوص برای دست‌اندرکاران حوزهٔ ریاضیات پژوهشی و آشنایان با فعالیت‌های «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش‌وپرورش چهره‌ای آشناست که نزدیک به شش دهه فعالیت فرهنگی مرتبط با ریاضیات، از معلمی تا استادی دانشگاه، مدیرکل دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تألیف کتاب و مقالات آموزشی و عضویت در هیئت امنای چند مؤسسهٔ آموزشی و فرهنگی را در کارنامهٔ خود دارد. رفاقت، آشنایی و همکاری نزدیک با زنده‌یاد شهید رجایی که خود معلم ریاضی نمونه بود و تقارن این شماره از مجلهٔ ریاضی برهان با هفتهٔ گرامی‌داشت مقام معلم، بهانهٔ اصلی ما برای گفت‌وگو با این استاد فرزانه بود. لذا با هماهنگی با ایشان، دیداری در دفتر کارشان به تاریخ هشتم دی‌ماه ۱۳۹۵ دست داد. حاصل گفت‌وگوی ما (سردبیر، مدیرداخلی و یکی از اعضای هیئت تحریریه مجله) با ایشان در پی می‌آید.

■ **شرقی:** اگر اجازه بدهید برای سؤال اول، برگشتی به ۳۰ سال قبل کنیم. در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» شمارهٔ تابستان ۱۳۶۵، جناب‌عالی مقاله‌ای داشتید با عنوان «**محمدعلی رجایی، معلم ریاضی نمونه و موفق**». من از همین تیتر شروع می‌کنم. آیا هنوز هم همین عقیده را دارید و شهید رجایی را معلم ریاضی نمونه و موفق می‌دانید؟ اگر این‌طور است، چه دلیل یا دلایلی برای این نظرتان دارید؟

● **نائینی:** بله هنوز هم همین عقیده را دارم. انتخاب این عنوان، به‌هیچ وجه تصادفی و یا به‌خاطر موقعیت سیاسی و انقلابی ایشان نبود. من برای این نظرم مستندات، شواهد و مدارکی دارم که در صورت لزوم می‌توانم شما را به آن‌ها ارجاع دهم.

روابط من با مرحوم شهید رجایی برمی‌گردد به دوران کودکی‌مان. ما در شهر قزوین، خیابان مولوی همسایهٔ دیوار به دیوار بودیم و من از چهار سالگی با ایشان هم‌بازی بودم. به‌همین دلیل، بعضی‌ها می‌گفتند این عقیدهٔ من به‌خاطر دوستی قدیم ما بوده است، ولی این واقعیت بود. همهٔ آن‌ها که با ما هم‌دوره بودند، وضعیت ما را می‌دانند. من دانشکدهٔ فنی قبول شده بودم و می‌خواستم در آنجا ادامهٔ تحصیل بدهم و در دانشکدهٔ کشاورزی ثبت‌نام کردم. یک ماهی در آنجا بودم و درخشش خوبی هم داشتم. به‌خصوص در درس‌های ریاضی هم موفقیت‌هایی به‌دست آورده و مورد توجه بودم. یک شب مرحوم رجایی به خوابگاه ما آمدند و به من گفتند: فلانی، من شب جمعه در مسجد هدایت رفته بودم پای منبر آقای **طالقانی**[1] (که خود من هم بعضی وقت‌ها آنجا می‌رفتم). ایشان توصیه کردند که به دوستانتان بگویید بروند معلم شوند. من دانشکدهٔ علوم ـ رشتهٔ ریاضی ـ قبول شده‌ام[2]. تو هم بیا برویم آنجا و دوتایی با هم لیسانس ریاضی بگیریم و معلم بشویم. ما رفتیم آنجا.

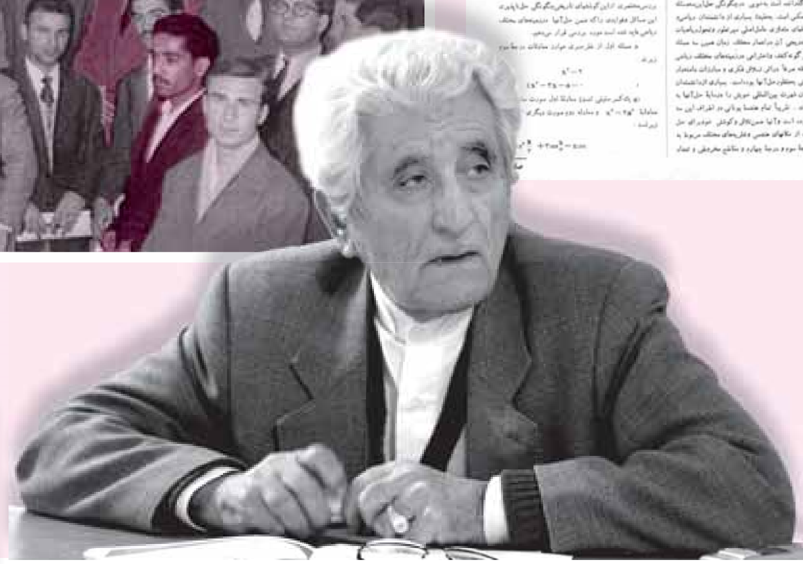
حدود ۹۰ نفر بودیم که در دانشکدهٔ علوم در رشتهٔ ریاضی درس می‌خواندیم. تقریباً هم‌زمان، از طرف وزارت آموزش‌وپرورش آمدند و از ما آزمون گرفتند و از بین ۹۰ نفر، ۴۰ نفر را انتخاب کردند که ما هم جزو آن‌ها بودیم. با ما قرارداد بستند که پس از فراغت از تحصیل حتماً معلم شویم. برای این منظور، علاوه بر درس‌های ریاضی رشتهٔ خودمان، باید ۱۶ ساعت در هفته می‌رفتیم دانش‌سرای عالی و درس‌های تربیتی (روان‌شناسی، روش تدریس و...) می‌خواندیم. به ما قول داده بودند در پایان تحصیل به ما دو مدرک بدهند: یکی لیسانس ریاضی و دیگری لیسانس دبیری. پس می‌بینید که مقدمات آن بحث، یعنی معلم نمونهٔ ریاضی، از همین‌جاها در آن مرحوم شکل گرفت. چرا که ما علاوه بر درس‌های تخصصی خودمان، ۱۶ ساعت در هفته هم درس‌های تربیتی برای آموزش معلمی خوانده بودیم.

علاوه بر آن، استادان بنام و فرهیخته‌ای

مسائل افسانه‌ای

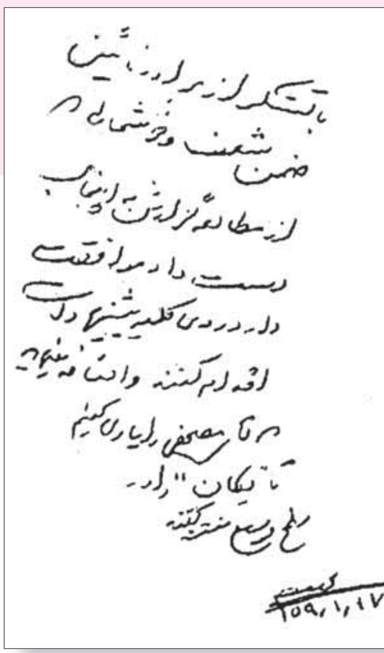
تضعیف مکعب — تثلیث زاویه — تربیع دایره

سیدمحمد کاظم نائینی



پایین تصویر: **شهید رجایی**
بالا، سمت‌راست: **پروفسور هشترودی**
بالا، سمت‌چپ: **محمدکاظم نائینی**

توصیهٔ شهید رجایی برای احیای مجدد مجلهٔ ریاضی یکان



تا «یکان» را در
سطح وسیع منتشر کنند
۱۳۵۹/۱/۱۷

هم داشـــتیم کــه از جمله شــاخص‌ترین آن‌هــا زنده‌یاد پروفســور **تقــی فاطمی**[۳]، اســتاد تمرین معلمی بود. ما کارآموزی و کارورزی داشــتیم. کارآموزی عبارت بود از آموزش روش تدریس در محیط دانشــگاه و کارورزی آمــوزش عملــی کار در محیط بیرون (مدرسه) و زیرنظر مدیر مدرسه بود. مسئول کارورزی ما دکتر **جلالی** و مسئول کارآموزی ما در دانشــگاه مرحوم پروفسور فاطمی بود. ایشــان کارهایی را مشــخص می‌کردنــد و موضوعاتی را به دانشــجویان می‌دادنــد تا آن‌ها در یک فرصت مثلاً یک ماهــه، روی آن‌ها تحقیق کننــد. بعد هم به‌طور عملی آن‌ها را در حضور خود ایشان برای دانشــجویان تدریس کننــد و آن‌ها کارشان را نقد و داوری و ایرادهای کارشان را مشخص می‌کردند.

وقتی نوبت مرحوم شهید رجایی شد، ایشان موضوع «حساب استدلالی» را باید تدریس می‌کردند و وقتی کارشان را انجام دادند و سر کلاس به‌طور عملی آن را برای سایر دانشــجویان تدریس کردند، مرحوم پروفســور فاطمی گفتند: «من بیشــترین نمــره را به شــما می‌دهم و بــه همه هم می‌گویم، ایشان بهترین معلم ریاضی ایران خواهد شــد.» این جمله مربوط به ایشان اســت و نه من. هم‌دوره‌ای‌های ما که از آن زمان تعدادی هنوز هستند، می‌توانند این موضــوع را گواهی دهند. حتی از این بابت ما قدری به ایشان حسادت هم می‌کردیم! البته به من هم ایشــان گفتند تو هم معلم خوبی می‌شــوی، ولی باید از کلاس رفتن نترسی و از شاگردان هراس نداشته باشی!

خُــب می‌بینید که این تعبیر ایشــان در مورد آقای رجایی بود. البته پروفســور فاطمــی به هیچ‌وجــه اهل تعــارف و این حرف‌ها نبود. مثلاً به دو نفر از هم‌دوره‌های ما گفت شــما به درد معلمی نمی‌خورید و نباید معلم شــوید. اگر هم بخواهید معلم شوید، من نمی‌گذارم و نگذاشت آن‌ها معلم شوند. برخورد اســتادهای ما با ما این‌طور بــود. خاطره‌ای از این موضوع بگویم: وقتی در دانشــکدهٔ علوم بودیم، از ما ۹۰ نفر در یکی از درس‌ها امتحان شــفاهی گرفتند و اســتاد این درس، زنده‌یاد دکتر **منوچهر وصــال**[۴] بود. همــه یکی‌یکــی می‌رفتند پیــش ایشــان و امتحانشــان حداکثر ۱۰ دقیقــه طول می‌کشــید و وقتی می‌آمدند بیرون می‌پرســیدیم: نمره‌تان چه شــد؟ و می‌گفتند مثلاً ۱۵ شــدیم. تا نوبت به من رســید. من دیدم ایشان پشت‌سرهم سؤال می‌پرسد و نزدیک یک ساعت مرا سؤال‌پیچ کرد طوری که من ناراحت شــدم و گفتم: اســتاد آیا به نمرهٔ کتبی من ـ که ۱۸ شده بود ـ مشکوک هســتید که این‌طور سؤال

پروفسور فاطمی گفتند: ایشان (شهید رجایی) بهترین معلم ریاضی ایران خواهند شد!

می‌کنید؟! ایشان گفتند: خیر. گفتم: پس چرا از آن‌ها ۱۰ دقیقه پرسش کردید و از من این همه می‌پرسید؟! گفتند: تو با آن‌ها فرق داری. تو می‌خواهی معلم شوی! من اصلاً روی تو مثل آن‌ها حساب نمی‌کنم.

بعد از پایان تحصیلات مرا فرستادند زنجان که نرفتم و رئیس ادارهٔ فرهنگ قزوین مرا به آنجا برد. آقای رجایی هم به خوانسار رفته بود، ولی از محیط آنجا به دلایلی خیلی راضی نبود. ما با هم مشورت کردیم و تصمیم گرفتیم ادامهٔ تحصیل بدهیم. رفتیم و در رشتهٔ آمار در دانشگاه تهران ثبت‌نام کردیم و فوق‌لیسانسمان را در این رشته از آن دانشگاه گرفتیم. بعد از آن هر دو برای ادامهٔ خدمت به قزوین برگشتیم.

■ **شرقی:** در همان مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌اید، که آقای رجایی به روش تدریس مرحوم **موسی آذرنوش**[۵] علاقه داشت و سعی می‌کرد روش‌های او را تقلید کند. ایشان شاگرد آقای آذرنوش بودند؟

● **نائینی**: بله ایشان و بنده هر دو شاگرد مرحوم آذرنوش بودیم. آقای آذرنوش در عین حال که در ظاهر خشن به‌نظر می‌رسید، ولی در باطن بسیار آرام بود. وقتی سؤال می‌کرد باید با متانت، دقت و حوصله به سؤال پاسخ می‌دادیم، وگرنه باید سکوت می‌کردیم! من در «مدرسهٔ دارالفنون» و آقای رجایی در دوره‌های شبانهٔ «آموزشگاه خزائلی» شاگرد ایشان بودیم.

■ **امیری:** ما در شمارهٔ ۴ برهان در سال ۱۳۷۱ مصاحبه‌ای از ایشان به چاپ رساندیم و ایشان یک ماه بعد از آن از دنیا رفتند. ایشان خاطرات خوبی از دوران معلمی‌شان نقل کردند.

● **نائینی:** بله ایشان جذبهٔ خاصی داشتند و ما از ایشان ترس توأم با احترام خاص داشتیم که حتی بعد از فارغ‌التحصیلی‌مان هم ادامه داشت! من معلم بودم و شهرت خوبی در تدریس مثلثات داشتم و به دعوت ایشان در گروه فرهنگی آذر که ایشان خود مؤسس آن بودند، تدریس می‌کردم. یک روز می‌خواستم پلی‌کپی بنویسم، خودکار نداشتم. ایشان قلم مخصوصی را که همیشه همراه داشتند، به من دادند و گفتند: با خودت ببر، ولی فردا باید بیاوری! فردای آن روز با عجله رفتم مدرسه و فراموش کردم قلم را با خودم ببرم. وارد مدرسه که شدم، تمام مدت سعی می‌کردم با ایشان رودررو نشوم تا موضوع قلم منتفی شود! تا اینکه یکدفعه داشتم از پله‌ها بالا می‌رفتم که صدای آقای آذرنوش را شنیدم که می‌گفت: آقای نائینی قلم چه شد؟!

■ **شرقی:** نوشته‌اید که در قزوین مرحوم شهید رجایی برای نخستین‌بار گروه‌های آموزشی را تشکیل داد. آیا خود شما هم در این جلسات شرکت می‌کردید؟ آیا این ابتکار خود ایشان بود؟

● **نائینی:** بله این ابتکار آقای رجایی بود. ایشان معلمی به معنای واقعی بود. می‌خواست نه‌تنها خودش، بلکه همهٔ ما همکارانش هم در کار خودمان موفق باشیم. به ابتکار ایشان، ما معلم‌های ریاضی روزهای چهارشنبه عصر در جایی جمع می‌شدیم و هر جلسه یک نفر می‌آمد و شیوهٔ تدریس خودش را در یک موضوع ـ مثلاً مشتق ـ انتگرال و... ـ برای بقیه توضیح می‌داد و بعد کارش مورد نقد و بررسی بقیه قرار می‌گرفت. رئیس فرهنگ قزوین، آقای **کجوری** که آقای رجایی را می‌شناخت و کارش را قبول داشت، به ایشان توصیه کرد که این کار را به همهٔ حوزه‌های آموزشی تعمیم بدهد. یعنی دبیران فیزیک، شیمی، ادبیات و... هم در جلساتی تبادل تجربه داشته باشند. این در واقع نخستین زمینه‌های تشکیل گروه‌های آموزشی بود. این کار باعث رشد و پیشرفت شایان در میان دانش‌آموزان شهر شد و جوان‌های بسیار توانمند و خوبی تربیت شدند که بعدها آقای رجایی در دوران نخست‌وزیری‌شان از وجود آنان در وزارتخانه‌هایشان بسیار استفاده کردند.

کار بسیار خوب دیگری هم که آقای رجایی در قزوین پایه‌گذار آن بود، راه‌اندازی نهضت مدرسه‌سازی بود. در آن زمان در قزوین میدان‌گاهی‌هایی بود که در اصطلاح خود قزوینی‌ها به آن می‌گفتند: «کُلُک». مردم تمام زباله‌هایشان را وسط این میدان‌ها می‌ریختند و زباله‌ها آنجا می‌ماند و انباشته می‌شد.

آقای رجایی به اتفاق رئیس ادارهٔ فرهنگ می‌رفتند شهرداری و این میدان‌ها

من با تست و روال کنکور تستی کاملاً مخالفم و معتقدم تست وسیلهٔ سنجش است نه آموزش

را از شهرداری می‌گرفتند و آن‌ها را به مدرسه تبدیل می‌کردند. این هم ابتکار مرحوم رجایی و ناشی از تفکر ایشان بود.

■ **امیری:** من فکر می‌کنم آقای رجایی به این باور و اعتقاد رسیده بود که اگر بخواهیم در جامعه اصلاح و تحول رخ بدهد، باید از آموزش‌وپرورش شروع کنیم.

● **نائینی:** بله همین‌طور است. ایشان معلمی را تصادفی انتخاب نکرده بود، بلکه هدفمند و با برنامه و برای اصلاح جامعه‌ای که در آن زندگی می‌کرد، به آن رسیده بود.

■ **شرقی:** جملهٔ معروفی هم داشتند: معلمی شغل نیست، عشق است، هنر است. اگر به‌عنوان شغل انتخابش کرده‌ای، رهایش ساز و اگر عشق تو است، بر تو مبارک باد.

● **نائینی:** بله شهید رجایی بودند که مرا معلم کردند و من از معلمی‌ام راضی بوده و هستم و از شاگردانم هم خاطرات خوبی دارم.

■ **امیری:** از ادامهٔ تحصیل‌تان هم برایمان بگویید.

● **نائینی:** فوق‌لیسانسم را که گرفتم، تقاضا کردم که به دانشگاه ـ به وزارت علوم ـ بروم. تقاضایم را قبول کردند و مرا به دانشکدهٔ کشاورزی کرج فرستادند و تا مدت‌ها در آنجا تدریس می‌کردم. بعد از انقلاب آقای رجایی مرا به عنوان مدیرکل «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» منصوب کردند و در همان دوران قرار بود برای ادامهٔ تحصیل و اخذ مدرک دکترا به خارج از کشور اعزام شوم که آقای رجایی گفتند: اینجا بمان و ان‌شاءالله امکانات ادامهٔ تحصیل فراهم می‌شود. تا اینکه بعداً در سال‌های ۱۳۶۵ و ۱۳۶۶ به دانشگاه تربیت مدرس رفتم و از آنجا دکترا گرفتم و در هیئت علمی دانشگاه تهران به کارم ادامه دادم.

■ **شرقی:** در دورانی که مدیرکل بودید، نامه‌ای به مرحوم شهید رجایی نوشتید و در آن از لزوم انتشار یک مجلهٔ ریاضی سخن گفتید. آقای رجایی هم در پاسخ نوشتند که به آقای **مصحفی**[۶] کمک کنید تا «مجلهٔ یکان» را دوباره منتشر کند. پس با یکان از قبل آشنایی داشتید، همین‌طور است؟

● **نائینی:** بله. من برای مجلهٔ یکان قبلاً ده دوازده مقاله نوشته بودم و در دورهٔ معلمی‌ام مجلهٔ یکان را می‌خریدم و می‌خواندم. مقاله‌ای با عنوان «مسائل افسانه‌ای» دربارهٔ مسئله‌های تاریخی ریاضیات (مثل تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و...) نوشتم و برای یکان فرستادم و در آن چاپ شد. یک روز از طرف آقای **شمس آوری**، مدیرداخلی مجلهٔ یکان، نامه‌ای به دستم رسید که در آن نوشته بود، اگر به تهران آمدی بیا دفتر مجله ـ در خیابان لاله‌زار ـ تا شما را ببینم. من آمدم تهران و رفتم دفتر مجله و با ایشان صحبت کردم. ایشان گفتند: من در شما استعداد خوبی در تألیف و تحقیق می‌بینم و کارهایتان را برای ما بفرستید. در آنجا با آقای مصحفی هم آشنا شدم.

بعد از انقلاب، آقای مصحفی هم به دفتر برنامه‌ریزی آمد و در آنجا با هم همکاری داشتیم. وقتی پیشنهاد مرحوم رجایی را با آقای مصحفی در میان گذاشتم، چندان ذوق و علاقه‌ای در ایشان برای ادامهٔ انتشار یکان ندیدم، با اینکه خودم کارهای زیادی را آماده کرده بودم و برای ده‌دوازده شماره، مطلب داشتم و گفتم آماده هستیم تا کمک کنیم مجله دوباره منتشر شود.

■ **شرقی:** در همان سال‌های ابتدای دههٔ پنجاه شما کتابی نوشتید با عنوان «هزار نکته در هزار تست». جریان این کتاب چه بود و شما از تألیف آن‌چه هدفی داشتید؟

● **نائینی:** همهٔ شاگردان من می‌دانستند که من با تست و روال کنکور تستی کاملاً مخالفم و معتقدم که تست وسیلهٔ سنجش است و نه آموزش. نکتهٔ دیگر اینکه همهٔ معلومات دانش‌آموزان را نمی‌توان در قالب تست درآورد. مثلاً معتقد بودم، فقط ۳۰ درصد کل مباحث مثلثات را می‌توان به شکل تست درآورد. بنابراین دانش‌آموزی ممکن است فقط ۳۰ درصد مطلب را بداند و بتواند همهٔ تست‌ها را پاسخ دهد و قبول شود! بر این اساس سعی کردم تمام مباحث را به شکل تست درآورم و راه‌حل هم ندادم. با این حال خیلی مورد استقبال قرار گرفت. تست‌های آن دقیقاً از روی کتاب درسی طرح شده بود. در کلاس‌های کنکور معلم‌ها تست‌های سختی طراحی و تدریس می‌کردند که دانش‌آموزان آن‌ها را پاسخ می‌دادند، ولی نمی‌توانستند تست‌های ساده را پاسخ بدهند! کتاب من از این نظر نوآوری بود.

■ **شرقی:** به‌عنوان آخرین سؤال می‌خواستم باز به شروع مصاحبه برگردم. خبر شهادت شهید رجایی چگونه به شما رسید و وقتی از آن باخبر شدید، احساستان چه بود؟

● **نائینی:** شب که خبر انفجار از رادیو و تلویزیون اعلام شد، باور نمی‌کردم که ایشان شهید شده باشد. اما صبح که وارد دفتر برنامه‌ریزی شدم، خبر شهادتشان را شنیدم و البته خیلی متأثر شدم و خاطرات بیش از ۴۰ سال دوستی و آشنایی با ایشان برایم زنده شد.

■ **امیری:** تشکر از لطفتان و وقتی که در اختیار ما گذاشتید.

● **نائینی:** من هم از شما سپاس‌گزارم.

***پی‌نوشت‌ها**

۱. آیت‌الله سیدمحمود طالقانی (۱۳۵۸-۱۲۸۹) نخستین امام جمعهٔ تهران پس از پیروزی انقلاب اسلامی و از مبارزان دوران ستم‌شاهی و یاران اصلی امام خمینی(ره) در مبارزات انقلاب.

۲. ایشان با مدرک سیکل وارد نیروی هوایی شده بود و با شرکت در کلاس‌های شبانهٔ آموزشگاه خزائلی مدرک دیپلم گرفته و پس از جدایی از نیروی هوایی، کنکور داده بود.

۳. پروفسور تقی فاطمی (۱۳۶۹-۱۲۸۳)، از استادان بنام ریاضی معاصر ایران. دربارهٔ وی در صفحهٔ ۲ جلد مجلهٔ برهان شمارهٔ ۸۷ (مهر ۹۴) توضیحاتی داشته‌ایم.

۴. دکتر منوچهر وصال (۱۳۹۱-۱۲۹۱)، استاد بنام ریاضی معاصر ایران. دربارهٔ وی در صفحهٔ ۲ جلد مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۸ (تابستان ۹۲) مطلبی داشتیم.

۵. موسی آذرنوش (۱۳۷۱-۱۲۹۰)، از دبیران نام‌آور ریاضی ایران و از مؤلفان کتاب‌های درسی قدیم. دربارهٔ وی در صفحهٔ ۲ جلد شمارهٔ ۹۲ (فروردین ۹۵) مجله برهان مطلبی داشتیم.

۶. عبدالحسین مصحفی (۱۳۹۲-۱۳۰۳)، مدیر مسئول مجلهٔ مشهور یکان و دبیر صاحب‌نام ریاضی ایران. در مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۵ (پائیز ۹۳) ویژه‌نامه‌ای برای تجلیل از ایشان داشتیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حمیدرضا امیری

منطق و حساب گزاره‌ها

مقدمه

بســیاری از اثبات‌ها در ریاضیات و بســیاری از الگوریتم‌ها در علوم رایانه از عبارت‌هــای منطقی مانند «اگــر p آن‌گاه q» یا «اگر p_1 یا p_2، آن‌گاه q_1 یا q_2» بهره می‌گیرند.

بنابراین ضروری اســت که حالت‌های درســتی یا نادرســتی این عبارات را بدانیم: ارزش درستی این گونه عبارات را از کجا بدانیم. ما در این بخش دربارهٔ این موضوع‌ها بحث می‌کنیم. همچنین ارزش درســتی عبارت‌های ســوری را بررســی خواهیم کرد که در آن‌ها از ســورهای منطقی مانند «به ازای هر...» و «وجود دارد...» استفاده شده است.

گزاره‌ها و گزاره‌های ترکیبی

گزاره (یا عبارت) جمله‌ای اســت خبری که درست یا نادرست (و نه هردو) باشد. برای مثال، هشت جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

i) پاریس در فرانسه است.

ii) ۱+۱=۲

iii) ۲+۲=۳

iv) لندن در دانمارک است.

v) ۹<۶

vi) یک جواب (معادلهٔ) $x^2=4$، $x=2$ است.

vii) شما کجا می‌روید؟

viii) تکالیفت را انجام بده.

به جز دو مورد (vii) و (viii) همهٔ جملات ما گزاره‌اند.

عــلاوه بــر آن، (i)، (ii) و (vi) درســت‌اند، در حالی‌کــه (iii)، (iv)، و (v) نادرست هستند.

ترکیب گزاره‌ها

بسیاری از گزاره‌ها مرکب هستند، یعنی ترکیبی از زیر گزاره‌ها (گزاره‌های ساده) و ادات گوناگون ربط‌اند که به ترتیب بحث خواهند شد. چنین گزاره‌های ترکیبی را **گزاره‌های مرکب** می‌نامند. یک گزاره را ساده می‌نامیم اگر نتوانیم آن را به گزاره‌های ســاده‌تر خُرد کنیم (به گزاره‌های ســاده‌تر شکسته نشود). یعنی گزاره‌ای مرکب نباشد.

ترجمه برای دانش‌آموزان

Basic Logical Operations

This section discusses the three basic logical operations of conjunction, disjunction, and negation which correspond, respectively, to the English words "and", "or", and "not".

Conjunction, p^q

Any two propositions can by combined be the word "and" to form a compound proposition called the *conjunction* of the original proposition. Symbolically,

$$p \wedge q$$

read "*p* and *q*", denotes the conjunction of *p* and *q*. Since *p^q* is a proposition it has a truth value, and this truth value depends only on the truth valuse of *p* and *q*. Specifically:

Definition 4.1: If *p* and *q* are true, then *p^q* is true; otherwise *p^q* is false.

The truth value of *p^q* may be defined equivalently by the table in Fig. 4-1 (a). Here, the first line is a short way of saying that if *p* is true and *q* is true, then *p^q* is ture. The second line says that if *p* is true and *q* is false, then *p^q* is false. And so on. Observe that there are four lines corresponding to the four possible combinations of T and F for the two subpropositions *p* and *q*. Note that *p^q* is true only when both *p* and *q* are true.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. proof .... اثبات	2. Algorithm .... الگوریتم
3. Computer Sciences .... علوم‌رایانه	4. Logical .... منطقی
5. Necessary .... ضروری	6. Expressions .... عبارت‌ها
7. Discuss .... بحث	8. Inverstigate .... بررسی کردن
9. Logical quantifiers .... سورهای منطقی	10. Propositional calculus .... حساب گزاره‌ها
11. Sentences .... جمله‌ها	12. True .... درست
13. False .... نادرست	

Logic and Propositional Calculus

4.1 Introduction

Many proofs in mathematics and many algorithms in computer sciencs use logical expressions such as

"IF p THEN q" of "IF p_1 AND p_2, THEN q_1 OR q_2"

It is therefore necessary to know the cases in which these expressions are either TRUE or FALSE: what we refer to as the truth valuse of such expressions. Whe discuss these issue in this section.

We also investigate the truth value of quantified statements, which are statements which use the logical quantifiers "for every" and "there exists".

4.2 Propositions and Compound Propositions

A *proposition* (or *statement*) is a declarative sentence wich is true or false, but not both. Consider, for example, the following eight sentences:

(i) Paris is in France.

(ii) 1+1=2.

(iii) 2+2=3.

(iv) London is in Denmark.

(v) 9<6.

(vi) $x=2$ is a solution of $x^2=4$.

(vii) Where are you going?

(viii) Do your homework.

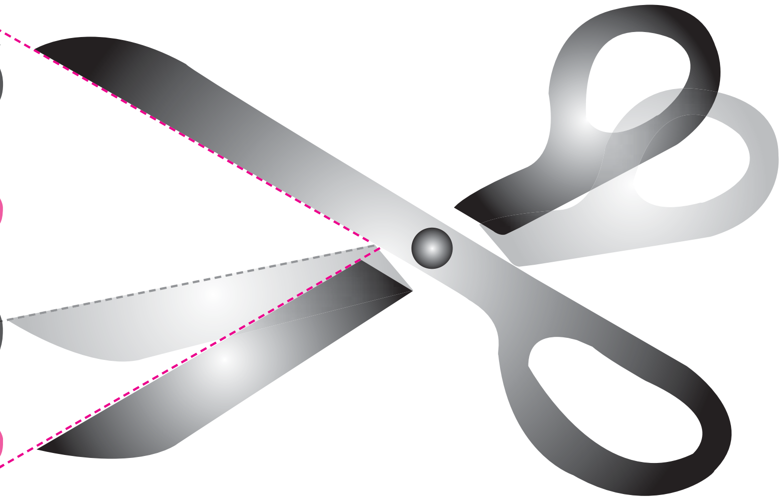
All of them are propositions except (vii) and (viii). Moreover, (i), (ii), and (vi) are true, whereas (iii), (iv), and (v) are false.

Compound Propositions

Many propositions are *composite*, that is, composed of *subpropositions* and various connectives discussed subsequently. Such composite propositions are called *compound propositions*. A proposition is said to be *primitive* if it connot be broken down into simpler propositions, that is, if it is not composite.

سیمین افروزان، دبیر ریاضی منطقهٔ ۲

قضیهٔ لولا در هندسه و اثبات آن در حسابان

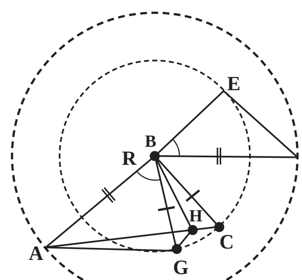


قضیهٔ لولا

اگر در دو مثلث دو ضلع یک زاویه، نظیربه‌نظیر برابر باشند و زاویهٔ بین آن دو ضلع در مثلث اول، بزرگ‌تر از زاویهٔ نظیرش در مثلث دوم باشد، ضلع سوم مثلث اول که روبه‌روی زاویهٔ بزرگ‌تر است، از ضلع سوم مثلث دوم که روبه‌روی زاویهٔ کوچک‌تر است، بزرگ‌تر خواهد بود.

$$AB = BD, BC = BE, A\hat{B}C > E\hat{B}D \Rightarrow AC > ED$$

توجه کنید که فرض و حکم قضیه با توجه به شکل ۱ نوشته شده است. در این شکل دو رأس از هر مثلث روی دو دایرهٔ هم مرکز قرار گرفته و زاویهٔ مورد بحث مرکز این دو دایره است. تساوی ضلع‌های موردنظر قضیه با توجه به تساوی شعاع‌های یک دایره بهتر دیده می‌شود و ضمناً ثابت می‌شود که هرچه زاویهٔ B بزرگ‌تر شود، ضلع مقابلش هم بزرگ‌تر خواهد بود.[۱]

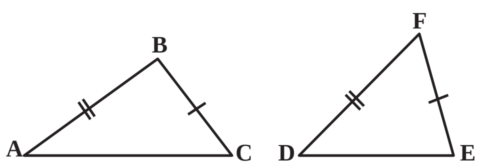


شکل ۱.

■ **برهان:** مثلث ABG، هم‌نهشت با مثلث BED را در نظر می‌گیریم (مثل این است که یک کپی از مثلث BED در موقعیت جدید ساخته‌ایم تا مقایسهٔ ضلع سوم آن‌ها آسان‌تر شود). از H پای نیم‌ساز زاویهٔ GBC به G وصل می‌کنیم تا دو مثلث هم‌نهشت GBH و HBC به‌وجود آیند. با نوشتن نامساوی در مثلث AGH به حکم قضیه خواهیم رسید:

$$\overbrace{AH + \underbrace{HG}_{HC}}^{AC} > \underbrace{AG}_{ED}$$

اثبات جبری قضیهٔ لولا به کمک قانون کسینوس‌ها

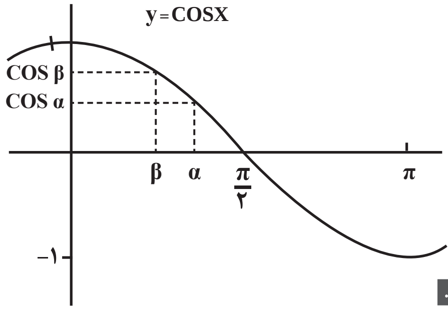


شکل ۲.

$$AB = FD, BC = FE, \hat{B} > \hat{F} \Rightarrow AC > ED$$

■ **برهان:** اگر $\underbrace{\hat{B}}_{\alpha} > \underbrace{\hat{F}}_{\beta}$، BC=FE=b و AB=FD=a، در این صورت طبق قانون کسینوس‌ها در هر مثلث داریم:

$AC^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\alpha$ و $DE^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\beta$. چون اندازهٔ هر کدام از زاویه‌های یک مثلث از ۱۸۰ درجه کمتر است و مقدار کسینوس در فاصلهٔ صفر تا ۱۸۰ درجه نزولی است، یعنی با زیاد شدن زاویه مقدارش کم می‌شود، لذا از $\alpha>\beta$ داریم: $\cos\alpha<\cos\beta$ (شکل۵).



شکل ۳.

از آنجا که a و b اعداد مثبتی هستند، پس: $2ab\cos\alpha<2ab\cos\beta$ و در نتیجه: $AC^2>ED^2$، یعنی: $AC>ED$.

بیان دیگری از قضیهٔ لولا

اگــر در یک مثلث، زاویهٔ بین دو ضلع دلخواه را افزایش دهیم، ضلع سوم نیز افزایش می‌یابد. به‌همین ترتیب، کاهش زاویهٔ بین آن دو ضلع موجب کاهش ضلع مقابل می‌شود.

اثبات قضیهٔ لولا به کمک آهنگ تغییر

اثبات قضیه را با حل مسئله‌ای که در کتاب حسابان آمده است، دنبال می‌کنیم:

مثلثی ســاخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویهٔ بین این دو ضلع α اســت که قابل تغییر از صفر تا π رادیان اســت. طول ضلع سوم را l بنامید.

الف) l را برحسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ب) α را برحســب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟

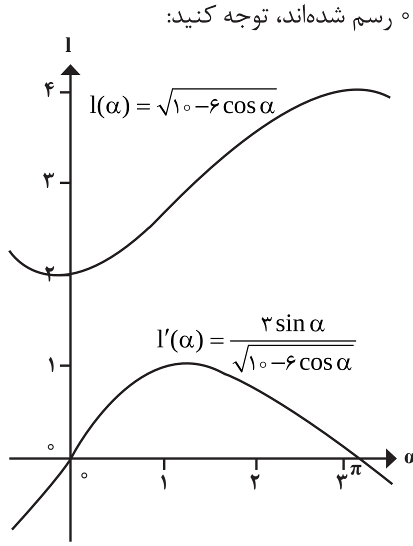
حل الف)

$$l^2=1^2+3^2-2\times3\times\cos\alpha=10-6\cos\alpha$$

$$\Rightarrow l(\alpha)=\sqrt{10-6\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha)=\frac{6\sin\alpha}{2\sqrt{10-6\cos\alpha}}=\frac{3\sin\alpha}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}>0$$

مثبــت بــودن آهنــگ تغییر نشــان می‌دهــد که بــا افزایش زاویــهٔ α، l یعنی ضلع روبه‌رو نیز افزایش پیدا می‌کند. این نشــان می‌دهد که $l(\alpha)$ صعودی است. به شکل ۶ که $l(\alpha)$ و مشتق آن در بازهٔ $0<\alpha<\pi$ رسم شده‌اند، توجه کنید:



شکل ۴.

اگر این مســئله را در حالت کلی حل کنیم، یعنی اضلاع مثلث را دو عــدد حقیقی مثبت دلخــواه a و b در نظر بگیریم، قضیهٔ لولا ثابت خواهد شد:

$$l'(\alpha)=\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},\ 0<\alpha<\pi\Rightarrow l'(\alpha)>0$$

حل ب)

$$l^2-10=-6\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{10-l^2}{6}$$

$$\Rightarrow\alpha(l)=\cos^{-1}\left(\frac{10-l^2}{6}\right)$$

$$\Rightarrow\alpha'(l)=-\frac{\frac{-2l}{6}}{\sqrt{1-\left(\frac{10-l^2}{6}\right)^2}}=\frac{l}{3\sqrt{1-\left(\frac{10-l^2}{6}\right)^2}}$$

مثبــت بودن آهنگ تغییر نشــان می‌دهد که بــا افزایش ضلع l، α یعنی زاویهٔ روبه‌رو نیز افزایش پیدا می‌کند. بیان این مطلب در حالت کلی، اثبات عکس قضیهٔ لولا است:

$$\alpha'(l)=\frac{2l}{ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-l^2}{ab}\right)^2}}>0$$

پی‌نوشت‌ها

۱. شکل رسم شده حالت خاص نیست و خللی در اثبات قضیه در حالت کلی ایجاد نمی‌کند.

پرسش‌های بیکارجو!

؟

هرگاه مجموع ارقام عدد 1396^{1396} مساوی n باشـد، باقی‌مانـدهٔ تـقسیم 3^n بر ۲۶ کدام است؟

الف) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

هـ) ۹

۳

محاسبهٔ حد
به روش بازآفرینی!

عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی، شیراز

اشاره

در توابع کسری مثلثاتی، هرگاه در همسایگی نقطه داده شده، صورت و مخرج کسر به سمت صفر میل کنند، با یکی از مهم‌ترین حالت‌های حدی روبه‌رو هستیم. رفع ابهام از چنین حدهایی دارای روش‌های متفاوت است و غالباً به کمک تغییر متغیر یا استفاده از دستورها و اتحادهای مثلثاتی امکان‌پذیر است. اما در مقالهٔ کوتاه اخیر، مؤلف به دو نمونهٔ خاص می‌پردازد که با چشم‌پوشی از روش‌های تستی (و قاعدهٔ هوپیتال) و تنها با اتکا به مطالب درسی، راه‌حل دور از دست می‌نماید!

حد دو تابع $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^۳}$ و $g(x)=\frac{x-\tan x}{x^۳}$ وقتی x به صفر می‌گراید، با کنار نهادن روش‌های معمول، چالش‌برانگیز است.

در روش حل ارائه شده، خواهیم دید حد تابع به نوعی خودش در محاسبهٔ خودش نقش دارد؛ به‌گونه‌ای که آن را بازآفرینی می‌کند!

نمونهٔ ۱. نشان دهید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\frac{۱}{۶}$$

حل: با انتخاب $x=۳t$ و توجه به اینکه وقتی $x\to ۰$، آن‌گاه $t\to ۰$ و با فرض $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\alpha$ داریم:

$$\alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-\sin ۳t}{۲۷t^۳}=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۳\sin t+۴\sin^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۳\sin t}{۲۷t^۳}+\lim_{t\to ۰}\frac{۴\sin t^۳}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\lim_{t\to ۰}\frac{t-\sin t}{t^۳}+\frac{۴}{۲۷}\lim_{t\to ۰}(\frac{\sin t}{t})^۳$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha+\frac{۴}{۲۷}(۱)^۳$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۶}$$

نمونهٔ ۲. محاسبهٔ $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\tan x}{x^۳}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\tan x}{x^۳}=\alpha\ ;\ \ x=۳t\ (x\to ۰\Leftrightarrow t\to ۰)$$

$$\alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-\tan ۳t}{۲۷t^۳}=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-\frac{۳\tan t-\tan^۳ t}{۱-۳\tan^۲ t}}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{۱-۳\tan^۲ t}\times\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۹t.\tan^۲ t-۳\tan t+\tan^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=(۱)\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۳\tan t}{۲۷t^۳}-\lim_{t\to ۰}\frac{۹t\tan^۲ t-\tan^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha-\lim_{t\to ۰}\frac{۹t\tan^۲ t}{۲۷t^۳}+\lim_{t\to ۰}\frac{\tan^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha-\frac{۱}{۳}\lim_{t\to ۰}(\frac{\tan t}{t})^۲+\frac{۱}{۲۷}\lim_{t\to ۰}(\frac{\tan t}{t})^۳$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha-\frac{۱}{۳}(۱)+\frac{۱}{۲۷}(۱)$$

$$\Rightarrow \alpha-\frac{۱}{۹}\alpha=-\frac{۸}{۲۷}\Rightarrow\frac{\cancel{۸}\alpha}{۹}=\frac{-\cancel{۸}}{۲۷}$$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{۱}{۳}$$

● چه تابعی؟ چه تغییر متغیری؟!

سؤالی که ممکن است در حاشیه مقاله اخیر مطرح باشد، این است که این روش (روشی که حد تابع به نوعی خودش در محاسبهٔ خودش نقش دارد) اولاً برای چه توابعی قابل استفاده است و دیگر اینکه برای محاسبه، چه تغییر متغیری مناسب است. در پاسخ به سؤال نخست می‌توان انتظار داشت که تنها در توابعی

روش بازآفرینی را بتوانیم به‌کار ببندیم که در مراحل محاسبه (و پس از استفاده از اتحادها، روابط و محاسبات) به نوعی به‌صورت اولیه سؤال (تابع) داده شده بازگردیم (که در ۲ نمونهٔ اخیر مشاهده شد). در پاسخ سؤال دوم باید متذکر این نکته شد که تغییر متغیر باید هدف ما را که **تکرار صورت مسئله** است (بازآفرینی) دربرگیرد.

در مثال $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^۳}$، با تغییر $x=۳t$ و توجه به اینکه $\sin ۳t = ۳\sin t - ۴\sin^۳ t$، وجود ۳t و ۳sint را در صورتِ کسرِ تغییر یافته، به‌دنبال دارد که خود دسترسی به هدف را تضمین می‌کند.

در تلاش برای تکمیل موضوع و پاسخ به پرسش «چه تابعی؟ چه تغییر متغیری؟»

آموزنده است که حتی تغییر متغیر $x=۲t$ برای محاسبهٔ $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}$ نیز به بازآفرینی و دریافت پاسخ می‌انجامد!

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\beta,\quad x=۲t$$

$$\beta=\lim_{t\to ۰}\frac{۲t-\sin ۲t}{۸t^۳}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲t-۲\sin t\cos t}{۸t^۳}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{t-\sin t\cos t}{۴t^۳}$$

$$\beta=\lim_{t\to ۰}\frac{t-\sin t(۱-۲\sin^۲\frac{t}{۲})}{۴t^۳}$$

$$\Rightarrow \beta=\lim_{t\to ۰}\frac{(t-\sin t)+(۲\sin t\sin^۲\frac{t}{۲})}{۴t^۳}$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{۱}{۴}\underbrace{\boxed{\lim_{t\to ۰}\frac{t-\sin t}{t^۳}}}_{\beta}+\frac{۱}{۲}\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t.\sin^۲\frac{t}{۲}}{t^۳}$$

$$\beta=\frac{۱}{۴}\beta+\frac{۱}{۲}(\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t})(\lim_{t\to ۰}\frac{\sin\frac{t}{۲}}{t})^۲$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{۱}{۴}\beta+\frac{۱}{۲}(۱)(\frac{۱}{۴})\Rightarrow \frac{۳}{۴}\beta=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \beta=\frac{۱}{۶}$$

تمرین:

$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\tan x}{x^۳}$ را به روش بازآفرینی و با تغییر متغیر $x=۲t$ به‌دست آورید.

آموزشی

غلامرضا یاسی‌پور

حل یک قضیهٔ قدیمی و مهم از راهی بسیار ساده

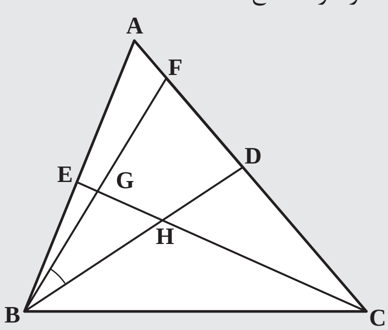
در مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌سازهای داخلی نظیر زاویه‌های قاعده با هم برابرند.

اثبات این قضیه بسیار ساده است. اما عکس این قضیه یعنی: «اگر در مثلثی دو نیم‌ساز داخلی برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است»، اصلاً آسان نیست. در واقع بیش از ۲۰ قرن این قضیه حل نشده باقی ماند تا اینکه در قرن هفدهم مهندسی فرانسوی به‌نام **دسکوپ** آن را حل کرد. پس از این راه‌حل نیز به‌نظر می‌رسید که راه‌حل دیگری برای آن به‌دست نیاید، اما چنین نبود. بعدها چندین راه‌حل برای این قضیه یافت شد.

در ایران مترجم نامی، مرحوم **احمد آرام** آن را حل کرده است. در اینجا راه‌حلی را که شاید ساده‌ترین راه اثبات این قضیه باشد، می‌آوریم و می‌خواهیم این نکته را مطرح کنیم که غالباً اثبات یک قضیه، به‌عنوان نتیجهٔ یک قضیهٔ قبلاً اثبات شده، از اثبات مستقیم آن آسان‌تر است.

■ **در هر مثلث نیم‌ساز زاویهٔ بزرگ‌تر، از نیم‌ساز زاویهٔ کوچک‌تر، کوچک‌تر است.**

● **حل:** اگر در مثلث ABC زاویهٔ B بزرگ‌تر از زاویهٔ C و اضلاع BD و CE نیم‌ساز این زاویه‌ها باشند، از B و روی BD زاویه‌ای مساوی زاویه $\frac{C}{۲}$ جدا می‌کنیم تا AC را در F قطع کند.

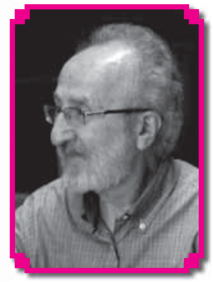


اگر H و G نقاط برخورد BD و BF با CE باشند، دو مثلث FBD و FCG متشابه‌اند (زیرا زاویه‌هایشان مساوی است) و داریم: BF: CF=BD: CG. اما در مثلث BFC زاویهٔ رأس C از زاویهٔ رأس B کمتر است، پس: BF<CF. نظر به تناسب فوق باید BD<CG باشد و چون CG<CE است، پس BD<CE می‌شود.

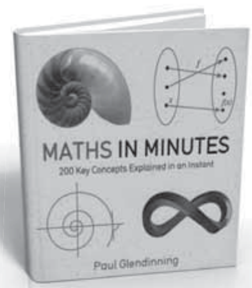
نتیجه: اگر در مثلثی دو نیم‌ساز مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین است. (چگونه؟ از برهان خلف استفاده کنید.) مسئله برای دو نیم‌ساز خارجی صدق نمی‌کند.

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



ریاضیات در چند دقیقه



دنبالهٔ فیبوناتچی

«دنبالهٔ فیبوناتچی» (Fibonacci sequence) الگویی ساده است که با جمع دو عدد، عدد سوم به‌دست می‌آید. این دنباله که به‌نام ریاضی‌دان ایتالیایی که آن را در سال ۱۲۰۱ به غرب معرفی کرد، نامیده شده است، در حوزه‌های متعددی از ریاضیات و نیز در مشاهدهٔ دنیای فیزیکی و طبیعی آشکار می‌شود.

دنبالهٔ مورد بحث برحسب جمله‌های ریاضی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

(با $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$)

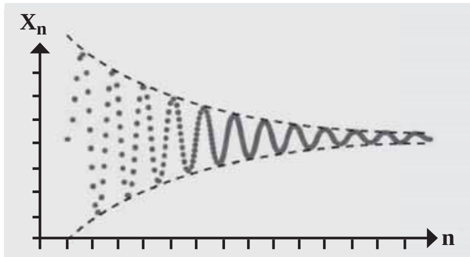
قاعدهٔ به‌کار رفته در زنجیره‌ای از اعداد با آغاز از ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ... به‌دست می‌آید. اعداد مورد بحث در زیست‌شناسی در رابطهٔ بین پیچش‌های یک گیاه و تعداد برگ‌های واقع در امتداد ساقهٔ آن، در ترتیب مارپیچ دانه‌های گل آفتاب‌گردان و در بسیاری از الگوهایی که به‌طور طبیعی رخ می‌دهند، منعکس شده‌اند. دنبالهٔ فیبوناتچی در حوزه‌ای از زمینه‌های ریاضی، از جمله حل الگوریتم اقلیدس نیز مفید است. این دنباله با نسبت طلایی نیز مرتبط است.

دنباله‌های هم‌گرا

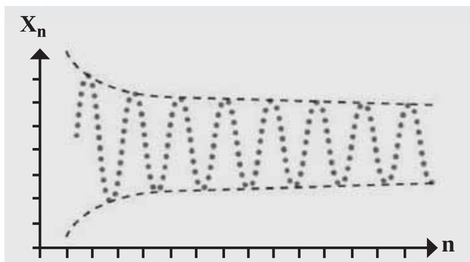
جمله‌های واقع در یک فهرست مرتب از اعداد، در صورتی‌که به‌تدریج در یک مقدار معین یا حد محصور شوند، هم‌گرا هستند. اما در حالی‌که ممکن است ملاحظه کنیم که دنباله‌ای به حدی هم‌گرا می‌شود، چگونه می‌توانیم بدانیم که این حد چیست؟ برای مثال، روش‌های تخمین π غالباً بر نزدیک شدن دنباله متکی است. در این مورد، همین‌طور که دنباله‌مان به عددی نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شود، مناسب است که بگوییم این عدد مقدار واقعی π است.

اگر عدد Lی معلوم باشد، آن‌گاه در صورتی دنباله‌ای به L میل می‌کند که با معلوم بودن هر سطح از خطای ε، مرحله‌ای از آن دنباله موجود باشد که پس از آن جمیع جمله‌های باقی‌مانده فاصله‌ای کمتر از ε از L داشته باشند. **کارل وایراشتراوس** (Karl Weierstrass) و دیگران کشف کردند که دانستن L به‌خاطر تعیین این مطلب که دنباله‌ای هم‌گرا می‌شود یا نه، لزومی ندارد.

یک «دنبالهٔ کوشی» (Cauchy sequence) دنباله‌ای است که در آن، با معلوم بودن هر سطح از خطای ε، مرحله‌ای در دنباله وجود دارد که پس از آن هر دو نقطهٔ باقی‌مانده در دنباله، فاصله‌ای کمتر از ε از یکدیگر داشته باشند. در مورد اعداد حقیقی، این موضوع با داشتن حد هم‌ارز است.



نمودار دنباله‌ای در یک سری هم‌گرا (بالا)
و یک سری ناهم‌گرای نوسان‌کننده (پایین).



سری هم‌گرا

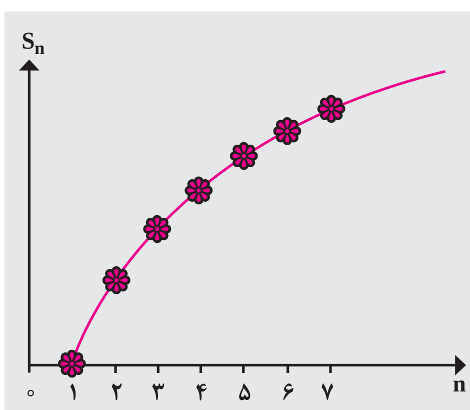
مجموع یک فهرست مرتب اعداد، هم‌گراست اگر به مقداری معین یا حدی میل کند. به‌طور شهودی، می‌توان تصور کرد که یک‌سری متمرکز می‌شود اگر تفاوت بین مجموع‌های جزئی متوالی آن، یعنی جمع سری در تعدادی مشخص از جملات، کوچک‌تر و کوچک‌تر شود.

برای مثال، اگر دنبالهٔ مجموع‌های جزئی چنین باشد: $\{۱, S_۱, S_۲, S_۳, ...\}$ که در آن:

$$S_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{n}$$

آن‌گاه تفاوت بین S_n و $S_{n+۱}$ برابر $\frac{۱}{n+۱}$ می‌شود، و هنگامی‌که n بسیار بزرگ شود، $\frac{۱}{n+۱}$ بسیار کوچک می‌شود. اما آیا این وضع برای اینکه گفته شود، این سری، که به‌عنوان «سری هم‌ساز» (harmonic sery) معروف است، واقعاً به حدی متمرکز می‌شود، کافی است؟

آشکار می‌شود که S_n در این حالت متمرکز نمی‌شود، و سری «واگرا» (divergent) است. بنابراین، حتی اگر توان‌های متوالی، مانند یک دنبالهٔ هم‌گرای کوشی، کوچک شوند، این موضوع به خودی خود برای تضمین هم‌گرا بودن یک‌سری کافی نیست.



نمودار سری هم‌ساز ـ گرچه مجموع‌های آن به‌تدریج به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند، هیچ‌گاه به یک حد هم‌گرا نمی‌شوند.

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۸۱. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که میزان نیست (در حالی‌که هیچ وزنه یا شیئی روی کفه‌ها نیست، دو کفه در یک ارتفاع نیستند). از طرف دیگر، وزنه یا سنگ ترازو به هر میزانی که بخواهیم در اختیار داریم. راهی برای وزن کردن یک شیء با وزن مجهول پیدا کنید.

۲۸۲. در کشوری که ۵۰ شهر دارد، می‌خواهیم بین شهرها خطوط هوایی برقرار کنیم؛ به‌طوری که بتوانیم از هر شهر به شهر دیگر با حداکثر ۱ توقف مسافرت کنیم. حداقل تعداد خطوط مستقیم بین شهرها را به‌دست آورید.

۲۸۳. از ظرفی که ۱۰ لیتر آب دارد، می‌خواهیم ۶ لیتر آب برداریم. دو پیمانه با اندازه‌های ۵ لیتری و ۹ لیتری در اختیار داریم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۲۸۴. نقطهٔ A خارج دایرهٔ C مفروض است. نقطهٔ متحرک B را روی دایره و M را نقطهٔ میانی AB در نظر بگیرید. با حرکت B روی C، مکان هندسی M را بیابید.

۲۸۵. در یک کلاس تعداد دانشجویان دختر بیش از ۴۰ درصد و کمتر از ۵۰ درصد است. حداقل تعداد دانشجویان کلاس را بیابید.

۲۸۶. با چوب کبریت یک جدول ۸×۸ ساخته‌ایم که شامل ۶۴ خانه یک‌دریک است. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم، به‌طوری که بتوانیم از هر خانه جدول به هر خانهٔ دیگر جدول حرکت کنیم و مسیر حرکت هیچ چوب کبریتی را قطع نکند؟

۲۸۷. یک جعبهٔ در باز با ابعاد صحیح داریم که قاعدهٔ آن مربع شکل و مساحت کل آن ۴۲۹ سانتی‌متر مربع است. ابعاد جعبه را بیابید، به‌طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

۲۸۸. دو دایره به شعاع ۲ و ۴ در صفحه مفروض‌اند و فاصلهٔ مراکز آن‌ها برابر است با ۱۰. نقطهٔ متحرک A روی دایرهٔ اول و نقطهٔ

متحرک B روی دایرهٔ دوم به‌طور مستقل می‌توانند حرکت کنند. مکان هندسی M وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

۲۸۹. با فرض $a=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt[۳]{x+a}=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{x-a}$$

۲۹۰. با فرض $x_۱,x_۲,x_۳>۰$ و $\frac{۱}{۱+x_۱}+\frac{۱}{۱+x_۲}+\frac{۱}{۱+x_۳}=۱$ کمترین مقدار $P=x_۱x_۲x_۳$ را به‌دست آورید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۵۱. اگر x و y دو زاویهٔ حاده باشند، به‌طوری که: ۲=(۱−cotx)(۱−coty)، مطلوب است مقدار x+y.

با تغییر در فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$(\sin x-\cos x)(\sin y-\cos y)=۲\sin x\sin y$$

$$\Rightarrow \cos x\cos y-\sin x\sin y=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)=\sin(x+y)\Rightarrow \tan(x+y)=۱$$

$$\Rightarrow x+y=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

چون: $۰<x+y<\pi$، پس: $x+y=\frac{\pi}{۴}$.

۲۵۲. در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_۱+a_۳+a_۵+a_۷=۵۱۰۲$ و $a_۲+a_۴+a_۶=۲۰۱۵$. مطلوب است مقدار:

$$S=a_۱^۲+a_۲^۲+\ldots+a_۷^۲$$

در هر دنبالهٔ هندسی داریم: $a_n^۲=a_{n-k}a_{n+k}$. بنابراین:

$$(a_۱+a_۳+a_۵+a_۷)^۲=a_۱^۲+a_۳^۲+a_۵^۲+a_۷^۲+۲a_۱a_۳$$
$$+۲a_۱a_۵+۲a_۱a_۷+۲a_۳a_۵+۲a_۳a_۷+۲a_۵a_۷$$
$$=a_۱^۲+a_۳^۲+a_۵^۲+a_۷^۲+۲a_۲^۲+۲a_۳^۲+۲a_۴^۲+۲a_۴^۲+۲a_۵^۲+۲a_۶^۲$$
$$=a_۱^۲+۲a_۲^۲+۳a_۳^۲+۴a_۴^۲+۳a_۵^۲+۲a_۶^۲+a_۷^۲$$

به‌همین صورت داریم:

$$(a_۲+a_۴+a_۶)^۲=a_۲^۲+۲a_۳^۲+۳a_۴^۲+۲a_۵^۲+۲a_۶^۲$$

با تفاضل این دو رابطه داریم:

$$a_۱^۲+a_۲^۲+\ldots+a_۷^۲=(a_۱+a_۳+a_۵+a_۷)^۲-(a_۲+a_۴+a_۶)^۲$$
$$=۵۱۰۲^۲-۲۰۱۵^۲=۲۱۹۷۰۱۷۹$$

۲۵۳. فرض کنید n+1 عددی اول باشد. ثابت کنید kاُمین جمله از سطر nام مثلث خیام ـ پاسکال مضرب k است (۱≤k≤n).

می‌خواهیم ثابت کنیم $\binom{n}{k-۱}$ مضرب k است. رابطهٔ زیر یک اتحاد است:

$$k\binom{n+۱}{k}=(n+۱)\binom{n}{k-۱}$$

$$\Rightarrow k\left|(n+۱)\binom{n}{k-۱}\right.\Rightarrow k\left|\binom{n}{k-۱}\right.$$

نتیجه‌گیری آخر به‌دلیل اول بودن n+1 است.

۲۵۴. چند عدد ده رقمی مانند x وجود دارند که چهار رقم سمت راست آن‌ها ۱۳۹۵ باشد و $x^۲$ عددی باشد که چهار رقم سمت چپ آن ۱۳۹۵ باشد؟

$$۱۰^۹\le x\le ۱۰^{۱۰}\Rightarrow ۱۰^{۱۸}\le x^۲\le ۱۰^{۲۰}$$

$$\text{فرض}\ \Rightarrow ۱۳۹۵\times ۱۰^{۱۶}\le x^۲<۱۳۹۶\times ۱۰^{۱۶}$$

$$\text{یا}\ ۱۳۹۵\times ۱۰^{۱۵}\le x^۲<۱۳۹۶\times ۱۰^{۱۵}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳۷۳۴۹۶۹۸۷۹<x\le ۳۷۳۶۳۰۸۳۳۸\\ ۱۱۸۱۱۰۱۱۸۱<x\le ۱۱۸۱۵۲۴۴۳۹\end{cases}$$

چون چهار رقم اول x، ۱۳۹۵ است، پس:

$x\in\{۳۷۳۴۹۷۱۳۹۵, ۳۷۳۴۹۸۱۳۹۵, \ldots, ۳۷۳۶۳۰۱۳۹۵\}$

یا:

$x\in\{۱۱۸۱۱۰۱۳۹۵, ۱۱۸۱۱۱۱۳۹۵, \ldots, ۱۱۸۱۵۲۱۳۹۵\}$

که تعداد آن‌ها برابر است با:

$(۳۷۳۶۳۰-۳۷۳۴۹۶)+(۱۱۸۱۵۲-۱۱۸۱۰۹)=۱۷۷$

۲۵۵. همهٔ جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲-x[x]=۹۵$ را به‌دست آورید.

با فرض $[x]=n$ به معادلهٔ $x^۲-nx-۹۵=۰$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارت‌اند از: $\frac{n\pm\sqrt{n^۲+۳۸۰}}{۲}$. چون: $x(x-[x])=۹۵$ و $۰\le x-[x]<۱$، پس: $x>۹۵$. در نتیجه مجموعه جواب‌های معادله به‌صورت $\frac{n+\sqrt{n^۲+۳۸۰}}{۲}$ است که در آن: $x>۹۵$.

۲۵۶. با فرض $S=\cos ۷۲^\circ+\cos ۱۴۴^\circ$ و $T=\cos ۷۲^\circ-\cos ۱۴۴^\circ$، ثابت کنید: $۲ST=-T$. سپس مقدار $\cos ۷۲^\circ$ را به‌دست آورید.

$$۲ST=(۲\cos^۲ ۷۲-۱)-(۲\cos^۲ ۱۴۴-۱)$$
$$=\cos ۱۴۴-\cos ۲۸۸=-T$$

چون: $T\neq ۰$، پس: $۲S+۱=۰$. در نتیجه:

$$۲\cos ۷۲+۴\cos^۲ ۷۲-۲+۱=۰$$

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم $4\cos^2 72 + 2\cos 72 - 1 = 0$، به جواب $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ می‌رسیم.

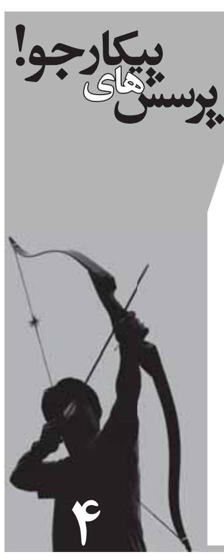
۲۵۷. موزاییک‌هایی به شکل در اختیار داریم. ثابت کنید در یک زمین ۸×۸، حداکثر ۸ تا از این موزاییک‌ها را می‌توانیم قرار دهیم، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم نیفتند.

چهارخانهٔ گوشه را نمی‌توان با موزاییک‌ها پر کرد. روی هر ضلع ۶ خانه دیگر باقی می‌مانند که حداکثر دوتا از ۶ خانه را می‌توان با موزاییک‌ها پر کرد. در نتیجه ۴+۴(۶-۲)=۲۰ خانه را نمی‌توان با موزاییک‌ها پر کرد و ۴۴ خانه باقی می‌ماند. هر موزاییک ۵ خانه را پر می‌کند. پس حداکثر موزاییک‌هایی که می‌توان در صفحه قرار داد، از $\frac{44}{5}$ کمتر است. پس حداکثر ۸ موزاییک می‌توان در صفحه قرار داد.

۲۵۸. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{2}{101}+\frac{4}{10001}+\frac{8}{100000001}+\dots+\frac{1024}{1000\dots001}=\frac{2}{99}-\frac{2048}{999\dots99}$$

در طرف اول، هر کسر صورتی برابر 2^k دارد و تعداد صفرها در مخرج همان کسر، 2^k-1 است. در طرف دوم و در کسر دوم، مخرج ۲۰۴۸ رقم ۹ دارد.



چند عدد پنج‌رقمی وجود دارد که خارج‌قسمت آن‌ها بر ۱۳۹۶ مساوی رقم یکان آن‌ها باشد؟

- الف) ۱۴۰
- ب) ۲۹۷
- ج) ۳۸۷
- د) ۳۹۷
- هـ) ۳۷۷

هر جملهٔ سمت راست به فرم $\frac{2^k}{10^{2^k}+1}$ است. از طرف دیگر:

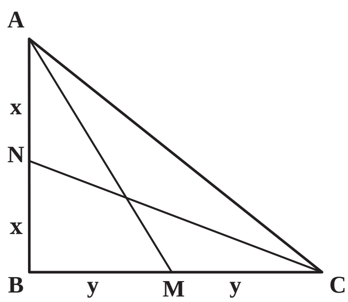
$$\frac{2^{k+1}}{10^{2^{k+1}}-1}=\frac{2^k}{10^{2^k}-1}-\frac{2^k}{10^{2^k}+1}$$

در نتیجه: $\frac{2^k}{10^{2^k}+1}=\frac{2^k}{10^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{10^{2^{k+1}}-1}$. بنابراین با جای‌گذاری در سمت راست و ساده کردن جملات به طرف دوم می‌رسیم.

۲۵۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (B قائمه است)، طول میانهٔ AM برابر ۵ و طول میانهٔ CN برابر $2\sqrt{10}$ است. طول وتر مثلث را به‌دست آورید.

با فرض AN=NB=x و BM=MC=y، داریم:

$$x^2+(2y)^2=(2\sqrt{10})^2,\ (2x)^2+y^2=5^2$$
$$\Rightarrow x^2+4y^2=40,\ 4x^2+y^2=25$$
$$\Rightarrow 5(x^2+y^2)=65 \Rightarrow x^2+y^2=13$$



برای پیدا کردن طول وتر داریم:

$$(2x)^2+(2y)^2=4(x^2+y^2)=4\times 13=AC^2$$
$$\Rightarrow AC=2\sqrt{13}$$

۲۶۰. الان سن من سه برابر سن پسرم است. چند سال پیش هم مجموع سن من و پسرم ۴۴ بود. پسرم الان چند سال دارد؟

اگر x و y به‌ترتیب سن من و پسرم باشد، داریم: x=3y. از طرف دیگر، اگر k سال قبل، مجموع سن من و پسرم را حساب کنیم، به x-k+y-k می‌رسیم. در نتیجه: 2y-k=22. یعنی k عددی زوج مانند 2m است و: y=11+m. بنابراین: x=33+3m. در نتیجه سن پسرم در حال حاضر هر عددی بزرگ‌تر از ۱۱ مانند y=11+m خواهد بود.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ایستگاه دوم

در اینجا می‌خواهیم شما را به چالش با چند معمای منطقی دعوت کنیم. پس این شـما و این هم معماهای زیبای منطقی این شـماره:

۱. باغ گل!

در یک باغ گل، هر گل، قرمز، زرد یا آبی بود و از هر سـه رنگ، گلی وجود داشت. یک‌بار ریاضی‌دانی از این باغ گل دیدن کرد و گفت: «از هر سه گلی که شما انتخاب کنید، لااقل یکی از آن‌ها قرمز است.»

ریاضی‌دان دومی هم از باغ دیدن کرد و گفت: «از هر سه گلی که شما انتخاب کنید، لااقل یکی زرد است.»

دو دانش‌آموز که این‌ها را شـنیدند وارد بحث شدند. اولی گفت: «از اینجا برمی‌آید که از هر سه گلی که شما انتخاب کنید، لااقل یکی از آن‌ها باید آبی باشد.»

و دومی گفت: «نه این‌طور نیست!»

کدام دانش‌آموز درست می‌گفت و چرا؟

۲. سه جایزه!

سـه جایزه به شما پیشنهاد شده اسـت: جایزهٔ ۱۰ هزار تومانی، جایزهٔ هزار تومانی و جایزهٔ صدتومانی! آن هم تنها در مقابل ارائهٔ یک

جمله! اگر این جمله درست باشد، من به شما جایزه ۱۰ هزار تومانی یـا جایزهٔ هزار تومانی را (به انتخاب خودم) می‌دهم. اما اگر جمله‌تان نادرست باشـد، جایزهٔ صدتومانی را می‌برید که کم‌ارزش‌ترین جایزه است. البته به سادگی می‌توانید مثلاً بگویید «دو به اضافهٔ دو مساوی چهار است» و در این صورت یکی از دو جایزهٔ هزارتومانی یا ۱۰ هزار تومانی را ببرید. اما می‌توانید جمله‌ای بگویید که حتماً جایزهٔ ۱۰ هزار تومانی را ببرید! آن کدام جمله است؟

۳. رنگ کلاه

سه نفر، دو نفر بینا و یک نفر نابینا، وارد اتاقی تاریک می‌شوند که در آن سـه کلاه قرمز و دو کلاه آبی وجود دارد. هر یک از آن‌ها یک کلاه برمی‌دارد، برسـر می‌گذارد و از اتاق بیرون می‌آید. بیرون از اتاق هیچ‌کس کلاه خودش را نمی‌بیند. بینای اول می‌گوید: «من نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است.»

بینـای دوم هم می‌گویـد: «من هم نمی‌دانـم کلاهم چه رنگی است.» اما نابینا می‌گوید: «من می‌دانم کلاهم چه رنگی است!»

چگونه چنین چیزی ممکن است و کلاه او چه رنگی است؟

سیده کوثر میرمحمدی، دانش‌آموز پایه هشتم مدرسه نمونه
دولتی شهید بهداشت شهرستان قائم‌شهر، مازندران

بازی با ارقام عدد سال!

$1=9-6-3+1$

$2=(9-6)/3+1$

$3=6-(9/3)\times 1$

$4=6-(9/3)+1$

$5=9-6+3-1$

$6=(9-6)+3\times 1$

$7=9-6+3+1$

$8=(9-6)\times 3-1$

$9=(9-6)\times 3\times 1$

$10=(9-6)\times 3+1$

$11=9+6-3-1$

$12=9+(6-3)\times 1$

$13=9+6-3+1$

$14=\sqrt{9}\times 3+6-1$

$15=\sqrt{9}\times 3+6\times 1$

$16=\sqrt{9}\times 3+6+1$

$17=9+6+3-1$

$18=9+6+3\times 1$

$19=9+6+3+1$

$20=9+6+3!-1$

$21=9+6+3!\times 1$

$22=9+6+3!+1$

$23=9+3^2+6-1$

$24=9+3^2+6\times 1$

$25=9+3^2+6+1$

$26=9\times(6-3)-1$

$27=9\times(6-3)\times 1$

$28=9\times(6-3)+1$

$29=3^3+(6/\sqrt{9})\times 1$

$30=3^3+(6/\sqrt{9})+1$

$31=3^3+6-\sqrt{9}+1$

$32=(9\times 3)+6-1$

$33=(9\times 3)+6\times 1$

$34=(9\times 3)+6+1$

$35=3^3+\sqrt{9}+6-1$

$36=3^3+\sqrt{9}+6\times 1$

$37=3^3+\sqrt{9}+6+1$

$38=3^3+\sqrt{9}!+6-1$

$39=3^3+\sqrt{9}!+6\times 1$

$40=3^3+\sqrt{9}!+6+1$

$41=3^3+9+6-1$

$42=3^3+9+6\times 1$

$43=3^3+9+6+1$

$44=6^2+\sqrt{9}\times 3-1$

$45=\sqrt{9}\times 3\times(6-1)$

$46=9\times 6-3^2+1$

$47=9\times 6-3!-1$

$48=9\times 6-3!\times 1$

$49=9\times 6-3!+1$

$50=9\times 6-3-1$

$51=9\times 6-3\times 1$

$52=9\times 6-3+1$

$53=\sqrt{9}\times 3\times 6-1$

$54=\sqrt{9}\times 3\times 6\times 1$

$55=\sqrt{9}\times 3\times 6+1$

$56=9\times 6+3-1$

$57=9\times 6+3\times 1$

$58=9\times 6+3+1$

$59=9\times 6+3!-1$

$60=9\times 6+3!\times 1$

$61=9\times 6+3!+1$

$62=9\times 6+3^2-1$

$63=9\times 6+3^2\times 1$

$64=9\times 6+3^2+1$

$65=6^2+3^3+\sqrt{9}-1$

$66=(9+3-1)\times 6$

$67=(3^2-1)^2+9-6$

$68=(\sqrt{9})^3+6^2+3!-1$

$69=(\sqrt{9})^3+6^2+3!\times 1$

$70=(\sqrt{9})^3+6^2+3!+1$

$71=(\sqrt{9})^3+6^2+3^2-1$

$72=(\sqrt{9})^3+6^2+3^2\times 1$

$73=(\sqrt{9})^3+6^2+3^2+1$

$74=9\times 3^2-6-1$

$75=9\times 3^2-6\times 1$

$76=9\times 3^2-6+1$

$77=9^2-6+3-1$

$78=9^2-6+3\times 1$

$79=9^2-6+3+1$

$80=9^2-(6/3)+1$

$81=9\times(6+3)\times 1$

$82=9\times(6+3)+1$

$83=9^2+6/3\times 1$

$84=9^2+6/3+1$

$85=9^2+6-3+1$

$86=9\times 3^2+6-1$

$87=9\times 3^2+6\times 1$

$88=9\times 3^2+6+1$

$89=9^2+6+3-1$

$90=9^2+6+3\times 1$

$91=9^2+6+3+1$

$92=9^2+6+3!-1$

$93=9^2+6+3!\times 1$

$94=9^2+6+3!+1$

$95=9^2+6+3^2-1$

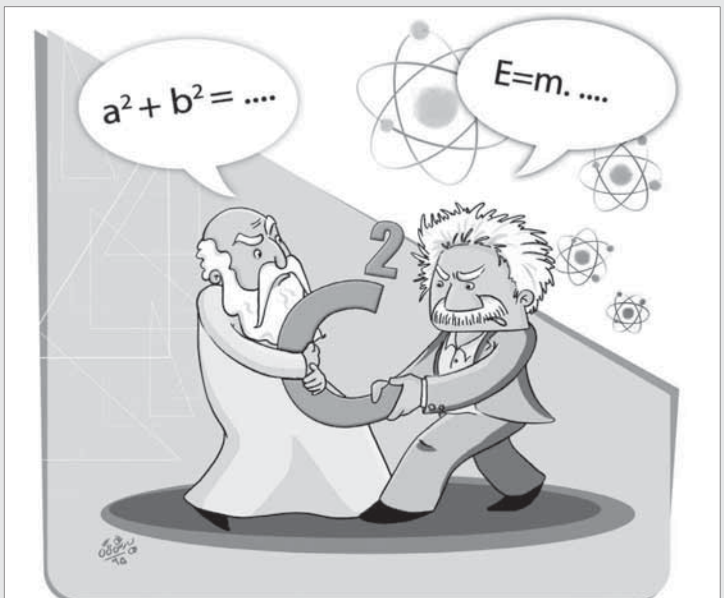
$96=9^2+6+3^2\times 1$

$97=9^2+6+3^2+1$

$98=9^2+6\times 3-1$

$99=9^2+6\times 3\times 1$

$100=9^2+6\times 3+1$



کاریکاتور از پرشنگ امانی، دبیر ریاضی (شهرستان سقز ـ استان کردستان)

یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$

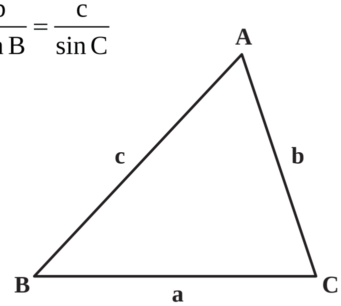
امین کشاورز، شیراز

اشاره

برای رسیدن به حاصل $\sin(\alpha+\beta)$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های α و β (با فرض حاده بودن α و β) به قضایای مقدماتی زیر نیازمندیم:

■ **قضیهٔ ۱.** در هر مثلث ABC با اضلاع a، b و c داریم:

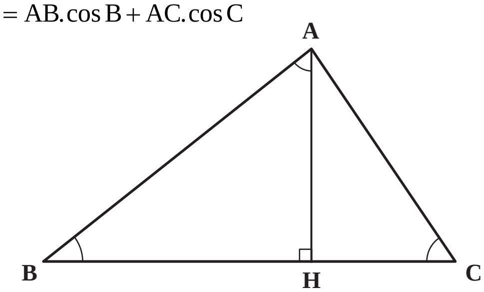
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



درستی این قضیه که به قضیهٔ سینوس‌ها موسوم است، در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از جمله کتاب ریاضی ۲ دبیرستان (سال تحصیلی ۹۵-۹۴) اثبات شده است.

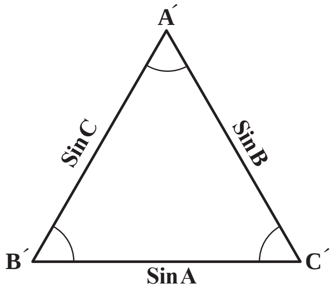
■ **قضیهٔ ۲.** در هر مثلث، هر ضلع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع دیگر در کسینوس‌های زاویه‌های بین آن ضلع‌ها و این ضلع. مثلاً در شکل زیر داریم:

$$BC = AB.\cos B + AC.\cos C$$



اثبات به عهدهٔ خواننده (از تعریف‌های cosB و cosC در مثلث‌های قائم‌الزاویه استفاده کنید).

حال با توجه به قضیهٔ (۱) روشن است که اندازه‌های sinA، sinB و sinC با اندازه‌های a، b و c متناسب‌اند. پس اگر a، b و c طول اضلاع مثلثی باشند، مثلثی با اضلاع به طول‌های sinA، sinB و sinC وجود دارد که با مثلثی به اضلاع a، b و c متشابه است:



بنابراین: $\hat{A}'=\hat{A}$ و $\hat{B}'=\hat{B}$ و $\hat{C}'=\hat{C}$. حال در مثلث A´B´C´ طبق قضیهٔ (۲) داریم:

$$B'C' = A'B'.\cos\hat{B}' + A'C'.\cos\hat{C}'$$
$$\Rightarrow \sin A = \sin C.\cos B + \cos C.\sin B$$

و چون: $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}$ بنابراین $\sin(B+C)=\sin A$ و در نتیجه:

$$\sin(B+C)=\sin B.\cos C+\cos B.\sin C$$

به راحتی می‌توان نشان داد، اگر B و C زاویه‌های منفرجه‌ای هم باشند، باز این اتحاد برقرار است و در حالت کلی داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$$

پرسش‌های بیکارجو!

؟

۵

دایرهٔ C(O,R) و نقطهٔ A در بیرون آن مفروض‌اند. اگر M نقطه‌ای دلخواه روی محیط دایره باشد، مکان هندسی نقطهٔ برخورد خط مماس بر دایره در نقطهٔ M و عمودمنصف AM کدام است؟

- ☐ الف) دو خط راست موازی
- ☐ ب) یک خط راست عمود بر OA
- ☐ ج) محیط یک دایره
- ☐ د) قسمتی از محیط یک دایره
- ☐ هـ) یک خط راست موازی OA

مسائل برای حل
ویژه امتحانات پایانی

این آخرین بخش از «مسائلی برای حل» در سال تحصیلی ۹۶-۱۳۹۵ است. بنابراین تصمیم گرفتیم به روال سال‌های قبل، در این شماره مسائل امتحانات نهایی سال گذشته (برای پایه سوم ریاضی) و نمونهٔ سؤال پایانی امتحانات درس‌های ریاضی و هندسه پایهٔ دهم را همراه با راه‌حل آن‌ها بیاوریم.

امتحان پایانی درس ریاضی (۱) ـ پایهٔ دهم

۱. از ۳۰ نفر دانش‌آموزان یک کلاس، ۱۶ نفر عضو انجمن ریاضی، ۱۲ نفر عضو انجمن فیزیک و ۶ نفر عضو هیچ‌یک از آن‌ها نیستند.

الف) چند نفر عضو هر دو انجمن هستند؟

ب) چند نفر فقط عضو انجمن فیزیک هستند؟

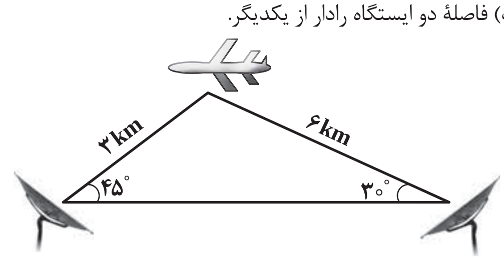
ج) چند نفر فقط عضو انجمن ریاضی هستند؟

۲. یک دنبالهٔ هندسی را به گونه‌ای تشکیل دهید که حاصل‌ضرب جملات چهارم و پنجم آن ۳۲۰۰ و جملهٔ سوم آن ۲۰ باشد.

۳. یک هواپیما از دو ایستگاه رادار با زاویه‌های 30° و 45° رؤیت می‌شود. اگر هواپیما از ایستگاه دورتر به فاصلهٔ ۶km باشد، مطلوب است تعیین:

الف) فاصلهٔ هواپیما از ایستگاه نزدیک‌تر

ب) فاصلهٔ دو ایستگاه رادار از یکدیگر.



۴. برای زاویهٔ α، با فرض معنی‌دار بودن کسرها، ثابت کنید:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\cos\alpha}$$

۵. نشان دهید: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $(m,n\in N, a>0)$

۶. کسر $\frac{x^5-13x^3+36x}{x^4-x^3-6x^2}$ را ساده کنید.

۷. در یک مهمانی عده‌ای شرکت داشتند و همه با هم دست دادند و معلوم شد، ۲۱بار عمل دست دادن انجام شده است. تعداد افراد شرکت‌کننده در مهمانی را به‌دست آورید.

۸. یک تولیدکنندهٔ اسباب‌بازی نوعی اسباب‌بازی را که قیمت تمام شدهٔ آن ۳۰۰۰ تومان است، ۶۰۰۰ تومان می‌فروشد و با این قیمت، در هر ماه ۱۰۰۰ عدد از آن را می‌تواند بفروشد. اگر به ازای هر ۲۰۰ تومان تخفیف، فروش ماهانهٔ او ۱۰۰ واحد بیشتر شود، او چه قیمتی برای اسباب‌بازی بگذارد تا حداکثر سود را ببرد؟

۹. به ازای چه مقادیر m نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{mx^2+mx+1}{x^2+1}$ همواره بالای محور xهاست؟

۱۰. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x>0\\ x+2 & x\le 0\end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد f را مشخص کنید. همچنین حاصل $f(f(f(1)))$ را به‌دست آورید.

۱۱. ضابطهٔ تابع خطی g را به‌گونه‌ای به‌دست آورید که نیم‌ساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند.

۱۲. از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=x^2-x$ را رسم کنید.

۱۳. با حروف کلمهٔ «گل پیرا» چند کلمهٔ چهار حرفی بدون نقطه می‌توان نوشت؟

۱۴. مجموعهٔ $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی دارد که شامل a و فاقد f باشد؟

۱۵. از یک کیسه شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز، ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که:

الف) هیچ‌یک از دو مهره سفید نباشد.

ب) دو مهره همرنگ نباشند.

۱۶. نوع هر یک از متغیرهای زیر را به‌طور دقیق مشخص کنید:

الف) تعداد تلفن‌های زده شده به یک مرکز در یک شبانه‌روز.

ب) گروه خون دانش‌آموزان یک کلاس درس.

ج) مقدار آب مصرف شده در روز توسط اعضای یک خانواده.

د) گروه سنی ساکنان یک ساختمان مسکونی.

امتحان پایانی درس هندسهٔ (۱) ـ پایهٔ دهم

۱. الف) طریقهٔ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

ب) طریقهٔ رسم خط راستی عمود بر یک خط از یک نقطهٔ خارج از آن را شرح دهید.

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند.

۳. ثابت کنید در هر مثلث اندازهٔ لااقل یکی از زوایای داخلی کوچک‌تر یا مساوی 60° است.

۴. در یک مثلث به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱ واحد، اندازهٔ کوتاه‌ترین ارتفاع مساوی ۸ واحد است. اندازه‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید.

۵. در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه D (بین M و C) خطی موازی AM می‌کشیم تا AC را در E و امتداد AB را در F قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}$$

۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، ارتفاع رأس A روی وتر BC دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر جدا کرده است. طول‌های اضلاع زاویهٔ قائمه مثلث را به‌دست آورید.

۷. در مثلث ABC، میانهٔ AM رسم شده است و نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB اضلاع AC و AB را در نقاط P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.

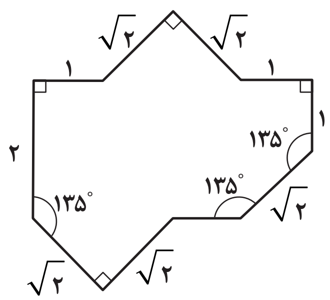
۸. ثابت کنید هر ذوزنقه‌ای که دو قطر آن برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۹. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

۱۰. درون مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ واحد، نقطه‌ای داریم که از دو ضلع کوچک‌تر مثلث به فاصله‌های ۱ و ۲ واحد قرار دارد. این نقطه تا ضلع بزرگ‌تر مثلث چه فاصله‌ای دارد؟

۱۱. مساحت چندضلعی زیر را به‌دست آورید.

(زوایای داخلی چندضلعی همگی 90°، 135° و 225° هستند.)



۱۲. خط d در نقطهٔ A بر صفحهٔ P عمود است و خط ´d در نقطهٔ B خط d را قطع کرده و بر آن عمود است. اگر C نقطه‌ای در صفحهٔ P باشد، دو خط ´d و AC نسبت به‌هم چه وضعی دارند و چرا؟

۱۳. قاعدهٔ هرمی مثلث ABC و رأس آن نقطهٔ O است. اگر صفحهٔ P بر ارتفاع OH از هرم عمود باشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P و هرم چه شکلی است؟ اگر مساحت این سطح مقطع یک نهم مساحت مثلث ABC باشد، نقطهٔ برخورد آن با OH، OH را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱۴. مربعی به ضلع a را یک‌بار حول قطر آن و بار دیگر حول ضلع آن دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل در مرتبهٔ اول چند برابر حجم شکل دیگر است؟

امتحان پایانی درس هندسهٔ (۲) ـ سوم ریاضی

۱. الف) یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید. وسط ضلع‌های آن را بیابید و به‌هم وصل کنید.

ب) سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.

این فرایند را روی سه مثلث دیگر تکرار کنید.

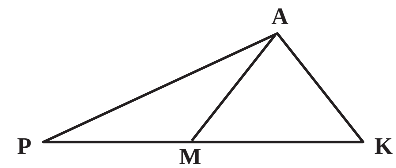
ج) اگر مساحت مثلث در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، مساحت باقی‌مانده را در مراحل بعدی با استفاده از استدلال استقرایی به‌دست آورید و جدول زیر را کامل کنید.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
مساحت باقی‌مانده	۱	؟	؟	...	؟

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به‌دست آورید.

۳. قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.

۴. در مثلث PAK، نقطهٔ M روی ضلع PK قرار دارد.
ثابت کنید اگر: PM=AK، آن‌گاه: AP>MK.

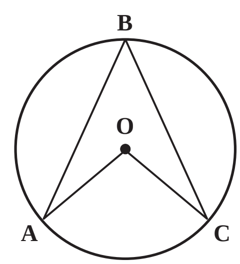


۵. مکان هندســی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از خط داده شدهٔ L به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ باشد.

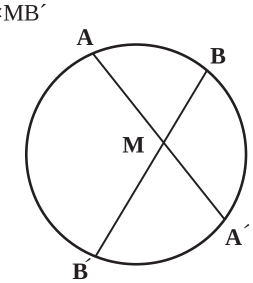
۶. در سؤالات زیر گزینهٔ درست را انتخاب کنید:
الف) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.
۱) ارتفاع‌های اضلاع
۲) عمودمنصف‌های اضلاع
۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی
۴) میانه‌های اضلاع
ب) مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.
۱) ارتفاع‌های اضلاع
۲) عمودمنصف‌های اضلاع
۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی
۴) میانه‌های اضلاع

۷. قضیــه: ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

۸. در دایــرهٔ به مرکــز O، اگر $A\hat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^{\circ}$ و $A\hat{B}C = (\alpha + ۱۶)^{\circ}$ باشــد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.



۹. قضیــه: از نقطــهٔ M واقع در داخل دایــرهٔ C دو وتر دلخواه ´AA و ´BB رسم شده‌اند، ثابت کنید:
MA×MA´=MB×MB´



۱۰. مقــدار x را چنان بیابیــد که اندازهٔ مماس مشــترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین d=۱۳، برابر ۵x-۸ باشد.

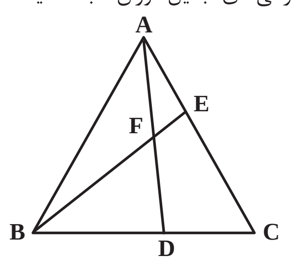
۱۱. واژه‌های زیر را تعریف کنید:
الف) چندضلعی محاطی
ب) ایزومتری
ج) دو خط متنافر

۱۲. تحــت یک انتقال نقطهٔ (۳,-۱) روی نقطهٔ (-۲,۱) تصویر شــده اســت، ضابطهٔ انگاشت انتقال را بنویسید.

۱۳. نقاط A(۱,۲)، B(۰,۱)، C(۱,۰) و D(۲,۱) رأس‌های یک مربع هستند.
الــف) مربع ABCD و تصویر مجانس آن را بــا در نظر گرفتن O(۰,۰) به‌عنوان مرکز تجانس و عدد ۲ به‌عنوان مقیاس تجانس رسم کنید.
ب) نسبت مساحت تصویر مربع ABCD را به مساحت مربع ABCD بنویسید.
ج) این تجانس انقباض است یا انبساط؟

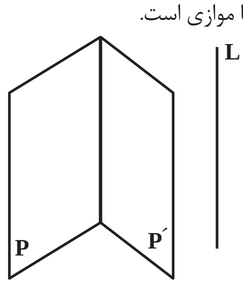
۱۴. تحت یک بازتاب، تصویر خط x+y-۳=۰، خط x+y+۳=۰ است، معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

۱۵. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و: BD=CE.
با استفاده از ویژگی‌های تبدیل دوران، ثابت کنید: AD=BE.



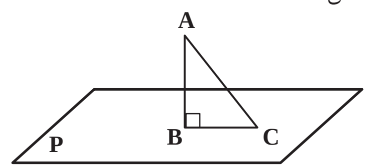
۱۶. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید:
الف) اگر دو نقطهٔ متمایز از خطی، در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.
ب) اگر ســه خط L_1، L_2 و L_3 دوبه‌دو متقاطع باشــند، این سه خط لزوماً در یک صفحه قرار دارند.
ج) قضیهٔ تالس در فضا یک قضیهٔ دو شرطی است.
د) در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.
هـ) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط از آن صفحه نیز عمود است.

۱۷. قضیه: ثابت کنید اگر خطی با دو صفحهٔ متقاطع، موازی باشد، آن‌گاه با فصل مشترک آن‌ها موازی است.



۱۸. از نقطهٔ A روی خط L، صفحه‌ای بر خط L عمود کنید. (رسم شکل و توضیح روش رسم الزامی است.)

۱۹. ثابت کنید که فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه، کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.



امتحان پایانی درس جبر و احتمال ـ سوم ریاضی

۱. در هر مورد نوع استدلال ریاضی را مشخص کنید.

الف) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

ب) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

ج) روش اثباتی که در آن با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم.

۲. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲,\ (n\in N)$$

۳. حکم درست را اثبات کنید و برای رد حکم نادرست مثال نقض ارائه دهید.

الف) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

ب) حاصل جمع دو عدد گنگ عددی گنگ است.

۴. شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰۷۳ نفر هستند. حداقل چند شرکت‌کننده وجود دارند که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

۵. جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) مجموعهٔ $A=\{\{\},\{\varnothing\}\}$ دارای .... زیرمجموعه است.

ب) دو زوج مرتب $((x+۲)^۲, y^۲-۱)$ و $(۰,۳)$ با هم برابرند. مقدار y برابر با .... است.

ج) دو مجموعهٔ $A=\{-۱,۰,۱,۲\}$ و $B=\{-۳,-۲,۱,۲,۳\}$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ $A\times B$ دارای .... عضو است.

۶. اگر A و B دو مجموعه باشند، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:
$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

۷. نمودار این رابطه را رسم کنید:

$$A=\{(x,y)\,|\,x,y\in R, x^۲+y^۲\le ۱, y\ge |x|\}$$

۸. چهار افراز متفاوت برای مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ بنویسید.

۹. رابطهٔ R بر روی $R^۲$ به‌صورت روبه‌رو تعریف شده است:
$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a=c$

الف) ثابت کنید R تعدی است.

ب) رابطهٔ R رابطه‌ای هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی $[(۲,۱)]$ را بنویسید.

۱۰. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد «تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.» را نمایش دهید.

۱۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت یک‌بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی **چند عضو** دارد؟

ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا بنویسید.

۱۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم. احتمال آن را بیابید که مجموع اعداد ظاهر شده روی تاس‌ها برابر ۶ شود.

۱۳. در ظرفی ۷ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ سفید داریم. به تصادف ۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه دو مهره هم‌رنگ باشند را محاسبه کنید.

۱۴. سکه‌ای را ۲۰بار می‌اندازیم. احتمال آنکه ۸بار رو ظاهر شود را بیابید.

۱۵. سه اسب a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. اسب‌های a و c دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس b، دو برابر شانس بردن a است. احتمال آنکه دو اسب a یا b ببرند را به‌دست آورید.

۱۶. دو عدد مانند x و y به تصادف از بازهٔ $[۰,۴]$ انتخاب می‌شوند. احتمال آنکه $|x-y|<۳$ باشد را محاسبه کنید.

۱۷. عددی را به تصادف از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,...,۴۰\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد را بیابید.

امتحان پایانی درس حسابان ـ سوم ریاضی

۱. در چندجمله‌ای $p(x)=x^۳+ax^۲+x+b$ مقدار a و b را چنان بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۴ و بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۲x-۱=۰$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $\frac{۱}{\beta+۱}$ باشند.

۳. نامعادلهٔ $|x-۱|\le\sqrt{x+۱}$ را به روش هندسی حل کنید.

۴. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) چندجمله‌ای x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

ب) بیشترین مقدار تابع $f(x)=-\frac{x^۲}{۲}+۲۰x$ برابر ۲۰ است.

ج) وارون تابع $f(x)=\frac{۷}{x}+۳$ برابر $g(x)=\frac{۷}{x-۳}$ است.

د) تابع $f(x)=\sqrt{۱-\cos^۲ x}$ با تابع $g(x)=\sin x$ مساوی است.

۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<۰ \\ ۲ & ۰\le x\le ۲ \\ x-۱ & ۲<x \end{cases}$$

۶. اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ دو تابع باشند:

الف) دامنهٔ تابع fog را به‌دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

ج) مقدار (g-f)(۲) را حساب کنید.

۷. زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\frac{x^۲-\cos x}{|x|}$ را بررسی کنید.

۸. درستی اتحاد روبه‌رو را ثابت کنید:

$\cos ۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha$

۹. معادلهٔ $۲\sin^۲x-\sin x=۰$ را حل کنید.

۱۰. مقدار $\cos(\sin^{-۱}(\frac{۳}{۵}))$ را حساب کنید.

۱۱. آیا تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ در a=۰ حد دارد؟ چرا؟

۱۲. حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^۳+۳x+۴}{۲x^۲-۲}$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ ۲x}{۱-\cos x}$

۱۳. پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ را در نقطهٔ a=۱ بررسی کنید.

۱۴. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطهٔ a>۰ به‌دست آورید.

۱۵. مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست.)

الف) $f(x)=(x^۳-x^۲-۱)^۵$ **ب)** $g(x)=\frac{x^۴-\sin x}{۱+\cos x}$

ج) $h(x)=(x-\sqrt{x}+۵)(\tan^{-۱}x)$

۱۶. نقاطی از نمودار تابع $f(x)=x^۳-۲x-۶$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد.

یک خبر مسرت‌بخش

تولد یک مجلهٔ ریاضی الکترونیکی

نخستین شمارهٔ مجلهٔ الکترونیکی «منشور» در زمستان ۱۳۹۵ منتشر شد. این مجله که در شهر ارومیه (استان آذربایجان‌غربی) توسط جمعی از دبیران ریاضی و استادان دانشگاه انتشار می‌یابد، روی لوح فشرده عرضه می‌شود و نخستین شمارهٔ آن به‌صورت رایگان در ۴۰۰ نسخه به دانش‌آموزان، دانشجویان و دبیران ریاضی آن شهر تقدیم شده است. قرار است که از شمارهٔ دوم به بعد آن به قیمت ۲۰۰۰ تومان توزیع شود. مدیر مسئول این مجله (که فصل‌نامهٔ ریاضیات استان آذربایجان‌غربی خوانده شده) آقای دکتر **علیرضا وحیدی** و سردبیر آن آقای **عباس قلعه‌پور اقدم** است که پیش از این مقالاتی از ایشان را در برهان دیده‌ایم. اعضای هیئت تحریریه عبارت‌اند از: **احمد یوسفیان دارانی، علیرضا وحیدی، رضا سبزچی، غلامرضا رفعت‌نشان، فرزاد جوادی، غلامرضا خضرلوی‌اقدم، مریم خورشید، حمید پولادی، عباس قلعه‌پور اقدم** و **محراب ایوبی**.

عنوان برخی مقالات شمارهٔ نخست مجله عبارت‌اند از: دنبالهٔ حسابی (مریم خورشید)؛ معمای سه ماهیگیر با انصاف (عباس قلعه‌پور)؛ تفکر ریاضی چیست؟ (هوشنگ شرقی)؛ نوار موبیوس (معصومه قاسمی)؛ اثبات چند نامساوی مثلثاتی (عنایت‌الله راستی‌زاده)؛ اصل استقرای ریاضی (فرزاد جوادی)؛ اعداد مختلط (علیرضا وحیدی).

آدرس ایمیل و وبلاگ مجله به شرح زیر است:

manshoor.mathmag@yahoo.com

www.manshoormag.blogfa.com

اعضای هیئت تحریریه «مجلهٔ برهان متوسطهٔ ۲»، ضمن ابراز خوش‌حالی از این خبر مسرت‌بخش، برای دست‌اندرکاران این نشریهٔ ریاضی آرزوی توفیق دارند و به همهٔ دانش‌آموزان و علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی، تهیه و مطالعهٔ این مجله را توصیه می‌کنند.

حکایت‌های خواندنی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر

در ایـن قسـمت می‌خواهیم به زندگـی ریاضـی‌دان، فیلسـوف، فیزیک‌دان، مهندس و دانشـمند نام‌دار فرانسـوی، هنری پوآنکاره (۱۹۱۲-۱۸۵۴) بپردازیم. شـهرت و اثرگذاری او در فیزیک، مکانیک و ریاضیات چنان اسـت که در این اندک شرح آن نمی‌گنجد، ولی به‌طور خلاصه می‌گوییم که تأثیر نظرات او در مکانیک اجرام آسـمانی بی‌نظیر بوده است. همچنین در ریاضیات می‌توان او را از معماران نظریهٔ «توپولوژی و معادلات دیفرانسیل» دانست. بعضی از حدس‌هـای او در ریاضیـات تا سـال‌های ابتدایی قرن بیسـت‌ویکم لاینحل باقی مانده اسـت. بـه این حکایت‌هـا از دوران‌های گوناگون زندگی او توجه کنید.

ایستگاه سوم

حکایـت اول: پوآنکاره از ابتدای نوجوانی کوچک‌ترین توانایی و علاقه‌ای به نقاشـی نداشت و بنابراین همیشه در درس هنـر و نقاشـی کمتریـن نمره‌هـای کلاس را می‌گرفـت. در یکـی از سـال‌های ابتدایی تحصیل، وقتـی در ایـن درس نمرهٔ صفر گرفت، هم‌کلاسـانش برای تفریح و شوخی، نمایشـگاهی عمومی از آثار وی در مدرسه تشـکیل دادند و نقاشی‌هایش را به نمایش گذاشتند!

همیـن بی‌علاقگی و ناتوانی در نقاشـی و ترسـیم باعث شـد که در درس هندسه که در آن تسلط کافی داشت، نتواند رتبهٔ نخست را به‌دست آورد و دوم شد!

حکایت دوم: وقتی پوآنکاره ۱۷ سال داشت، در آزمون ورودی دورهٔ لیسانس در دو رشتهٔ علوم و ادبیات شرکت کرد، اما او در بیشـتر امتحانات ریاضی ناموفق بود! چرا کـه غالباً دیر به آزمون می‌رسـید و دچـار اضطراب و دستپاچگی می‌شد. همین موضوع باعث شد که یک‌بار او حتـی نتواند مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسـی را به‌درسـتی محاسبه کند! اما شـهرت خوبی که داشت نجات‌دهندهٔ او شد و رئیس امتحان‌کنندگان اعلام کرد که از نظر آن‌ها پوآنکاره قبول شده است!

همین شـهرت باعث شـد، بعدها که می‌خواسـت در آزمـون ورودی پلی‌تکنیـک پاریس شـرکت کند، امتحان‌کننـدگان کـه از توانایی‌هـای او باخبر بودند، ناگهان سـطح سؤالات را به‌شدت بالا ببرند. اما او بدون نگرانـی در آزمـون شـرکت کرد و به تمامی سـؤالات به‌درستی پاسـخ داد و رتبهٔ نخست آزمون را به‌راحتی به‌دست آورد!

حکایت سوم: هنری پوآنکاره پسر عمویی داشت به‌نام **ریموند** که از جوانی وارد سیاست شد و در زمان جنگ جهانی اول یک دوره رئیس‌جمهور فرانسه شد.

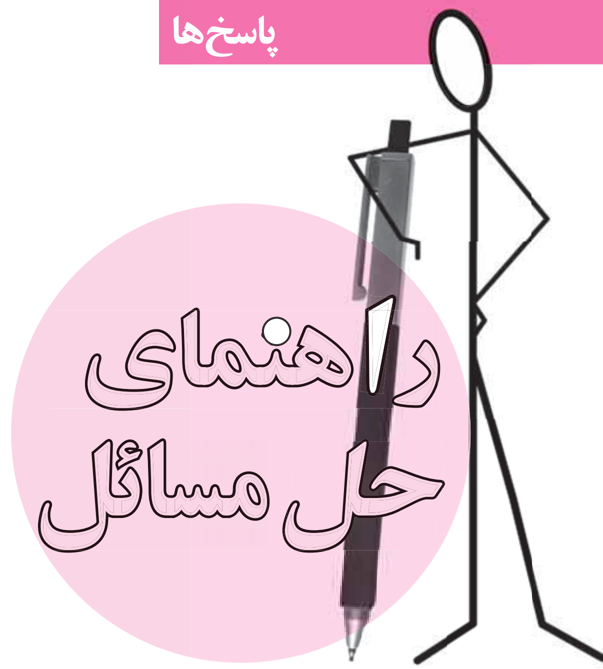
در همان دوران روزی شـخصی از **برتراند راسل**[1] پرسید که به نظر او بزرگ‌ترین افتخار فرانسهٔ نوین چه کسی است؟ و او بی‌درنگ پاسخ داد: «البته، پوآنکاره!»

آن شـخص گفت: «خب بله، رئیس‌جمهور شخص مهمی است!»

و راسل ادامه داد: «البته هنری پوآنکاره!»

پی‌نوشت‌ها

۱. برتراند آرتور ویلیام راسـل، منطق‌دان، فیلسوف، ریاضی‌دان، جامعه‌شناس و فعال صلح‌طلب بریتانیایی دارای شهرتی جهانی است و برخی کتاب‌های او به زبان فارسـی ترجمه شده‌اند. وی در سال ۱۹۵۰ جایزهٔ نوبل ادبیات را گرفت. در ریاضیات پارادوکس مشهور او در نظریهٔ مجموعه‌ها بسیار معروف است.



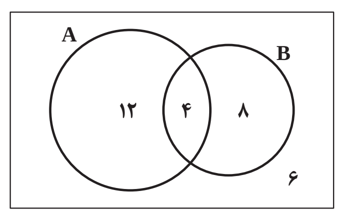
ریاضی دهم

۱. الف)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A)=16\quad n(B)=12,\ n(A\cup B)=30-6=24$$
$$\Rightarrow 24=16+12-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=4$$

ب) تعداد افرادی که فقط عضو انجمن فیزیک هستند: ۱۲−۴=۸

ج) تعداد افرادی که فقط عضو انجمن ریاضی هستند: ۱۶−۴=۱۲

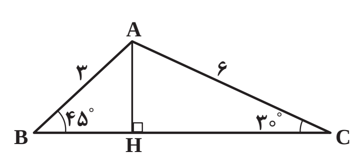


۲.

$$t_4.t_5=3200,\ t_3=20\Rightarrow\begin{cases}(t_1.r^3)(t_1.r^4)=3200\\ t_1.r^2=20\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}t_1^2.r^7=3200\\ t_1^2.r^4=400\end{cases}\Rightarrow\frac{t_1^2.r^7}{t_1^2.r^4}=\frac{3200}{400}$$
$$\Rightarrow r^3=8,\ r=2,\ t_1=5$$
$$5,10,20,\ldots$$

۳. الف)

$$\Delta AHC:\sin C=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{AH}{6}\Rightarrow AH=3$$
$$\Delta ABH:\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{AB}\Rightarrow AB=3\sqrt{2}$$



ب)

$$\Delta AHC:\cos C=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{CH}{6}\Rightarrow CH=3\sqrt{3}$$
$$\Delta AHB:\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{BH}{3\sqrt{2}}\Rightarrow BH=3$$
$$\Rightarrow BC=BH+CH=3+3\sqrt{3}\approx 8/1\ \text{km}$$

۴.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha+1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$
$$=\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\cos\alpha}$$

۵.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

۶.

$$\frac{x^5-13x^3+36x}{x^4-x^3-6x^2}=\frac{x(x^4-13x^2+36)}{x^2(x^2-x-6)}$$
$$=\frac{x(x^2-9)(x^2-4)}{x^2(x-3)(x+2)}=\frac{x(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{x^2(x-3)(x+2)}$$
$$=\frac{(x+3)(x-2)}{x}$$

۷. اگر تعداد افراد x باشد، هر نفر با x-1 نفر دست داده و تعداد عمل دست دادن $\frac{x(x-1)}{2}$ است. (چرا؟) پس:

$$\frac{x(x-1)}{2}=21\Rightarrow x^2-x-42=0$$
$$\Rightarrow(x-7)(x+6)=0\xRightarrow{x>0}x=7$$

۸. اگر تولیدکننده x تومان تخفیف بدهد، فروش او $\frac{x}{2}$ افزایش می‌یابد (زیرا به ازای هر ۲۰۰ تومان تخفیف ۱۰۰ تا بیشتر می‌فروشد). در نتیجه اگر قیمت فروش او x−۶۰۰۰ باشد، تعداد فروش ماهانهٔ او $1000+\frac{x}{2}$ است و قیمت تولید او نیز $3000(1000+\frac{x}{2})$ خواهد بود. پس سود خالص او برابر است با:

$$y=(6000-x)(1000+\frac{x}{2})-3000(1000+\frac{x}{2})$$
$$\Rightarrow y=6000000+3000x-1000x-\frac{1}{2}x^2-3000000-1500x$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+500x+3000000$$

نمودار این تابع سهمی است که طول رأس آن $x=\frac{-b}{2a}=500$ است. پس به ازای x=۵۰۰ ماکزی‌مم می‌شود. یعنی فروشنده باید ۵۰۰ تومان تخفیف بدهد و اسباب‌بازی را به قیمت ۵۵۰۰ تومان بفروشد که در این صورت می‌تواند ۱۲۵۰ عدد از آن را بفروشد و از آنجا سود او در ماه ۳/۱۲۵/۰۰۰ تومان خواهد بود که حداکثر سود ممکن است.

۹. $y>۰ \Rightarrow \frac{mx^۲+mx+۱}{x^۲+۱}>۰, x^۲+۱>۰$

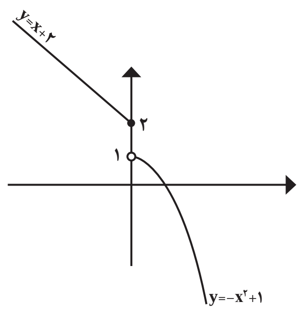
$\Rightarrow mx^۲+mx+۱>۰ \quad \Delta=m^۲-۴m<۰, a=m>۰$

$m^۲-۴m=۰ \Rightarrow m(m-۴)=۰ \Rightarrow m=۰$ یا $m=۴$

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m^۲-۴m$		+	۰	−	۰	+	

$\Rightarrow ۰<m<۴$

۱۰.



$D_f=R,\ R_f=R-[۱,۲)$

$f(۱)=-۱+۱=۰ \Rightarrow f(f(۱))$

$=f(۰)=۲ \Rightarrow f(f(f(۱)))$

$=f(۲)=-۴+۱=-۳$

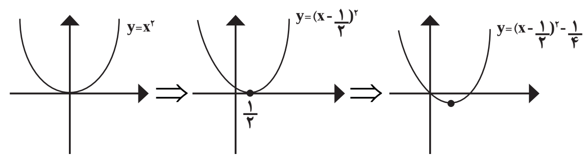
۱۱. $g(x)=ax+b, f(x)=x \Rightarrow f(۲)=۲$

$\Rightarrow (۲,۲)\in g \Rightarrow ۲a+b=۲, g(-۱)=۰ \Rightarrow -a+b=۰$

$\Rightarrow a=b \Rightarrow ۲a+a=۲, a=\frac{۲}{۳}, b=\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{۲}{۳}x+\frac{۲}{۳}$

۱۲. $f(x)=x^۲-x=(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$



۱۳. الف) کلمات بدون حرف «ی» از چهار حرف گ، ل، ر و ا تشکیل می‌شوند:

۴	۳	۲	۱

$۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

ب) کلمات با حرف «ی» که باید ی در آخر باشد:

ی			
۱	۲	۳	۴

$۱\times۴\times۳\times۲=۲۴$

پس در مجموع ۲۴+۲۴، یعنی ۴۸ کلمه می‌توان نوشت.

۱۴. باید دو حرف را از میان حروف b، c، d و e انتخاب و حرف a را به آن‌ها اضافه کرد:

$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$

۱۵. الف) دو مهره باید از بین مهره‌های سیاه و قرمز انتخاب شوند:

$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۰}{۲۸}=\frac{۵}{۱۴}$

ب) احتمال همرنگ بودن دو مهره:

$P(B')=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳+۳+۱}{۲۸}=\frac{۱}{۴}$

احتمال همرنگ نبودن:

$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

۱۶. الف) کمی گسسته **ب)** کیفی اسمی

ج) کمی پیوسته **د)** کیفی ترتیبی

هندسهٔ دهم

۱. الف) کتاب درسی صفحهٔ ۱۴

ب) کتاب درسی صفحهٔ ۱۵

۲. کتاب درسی صفحهٔ ۲۰

۳. اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم در یک مثلث ABC، هیچ‌یک از زوایا کوچکتر یا مساوی °۶۰ نباشند، بنابراین هر سه زاویه بزرگتر از °۶۰ هستند. پس:

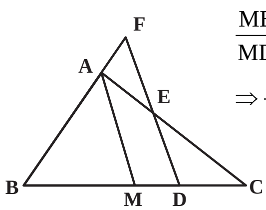
$\hat{A}>۶۰^\circ, \hat{B}>۶۰^\circ, \hat{C}>۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>۱۸۰^\circ$

و این نامکن است.

۴. کوتاه‌ترین ارتفاع متناظر با بلندترین ضلع است. بنابراین داریم:

$\frac{۸}{h_۱}=\frac{۱۷}{۲۱}, \frac{۸}{h_۲}=\frac{۱۰}{۲۱} \Rightarrow h_۱=\frac{۱۶۸}{۱۷}, h_۲=\frac{۱۶۸}{۱۰}=\frac{۸۴}{۵}$

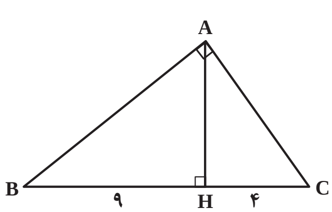
۵. به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های BFD و AMC می‌توان نوشت:



$\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{AF}, \frac{MC}{MD}=\frac{AC}{AE}, MB=MC$

$\Rightarrow \frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}$

۶.



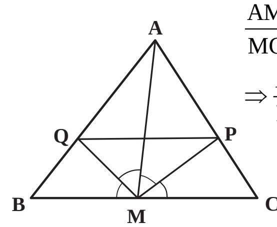
$AH^۲=BH.CH=۹\times۴=۳۶ \Rightarrow AH=۶$

$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۳۶+۸۱=۱۱۷$

$AC^۲=AH^۲+CH^۲=۱۶+۳۶=۵۲$

$\Rightarrow AB=\sqrt{۱۱۷}=۳\sqrt{۱۳}, AC=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$

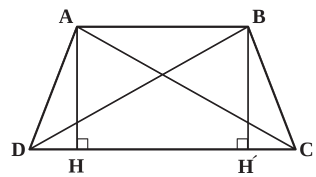
۷. به کمک قضیهٔ نیم‌سازها و عکس قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC},\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB},MB=MC$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}\Rightarrow PQ\parallel BC$$

۸.



فرض	AC=BD, AB‖CD
حکم	AD=BC

اثبات: از A و B عمودهای AH و BH´ را بر CD رسم می‌کنیم.

$$\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ, AB\parallel HH', AH\parallel BH'$$

$$\Rightarrow \underset{\text{مستطیل}}{ABHH'}\Rightarrow AH=BH'$$

$$BD=AC, BH'=AH\Rightarrow \Delta ACH\overset{\text{وتر و یک ضلع}}{\cong}\Delta BDH'$$

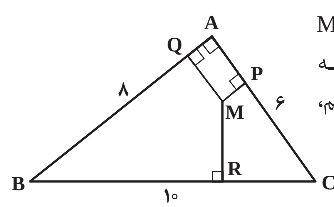
$$\Rightarrow DH'=CH'\Rightarrow DH+HH'=CH'+HH'$$

$$\Rightarrow DH=CH', AH=BH', \hat{H}=\hat{H}'$$

$$\Rightarrow \Delta ADH\underset{\text{ض‌زض}}{\cong}\Delta BCH'\Rightarrow AD=BC$$

۹. قضیهٔ کتاب درسی صفحهٔ ۶۰

۱۰. مثلث قائم‌الزاویه است. (چرا؟) حال اگر از نقطهٔ M (MP=۱ و MQ=۲) به رأس‌های مثلث وصل کنیم، خواهیم داشتم:



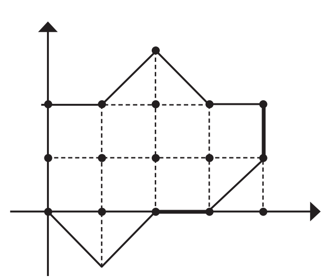
$$S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MAC}+S_{MBC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB.AC}{۲}=\frac{۱}{۲}MQ.AB+\frac{۱}{۲}MP.AC+\frac{۱}{۲}MR.BC$$

$$\Rightarrow ۶\times۸=۲\times۸+۱\times۶+۱۰MR\Rightarrow ۱۰MR=۲۶$$

$$\Rightarrow MR=۲/۶$$

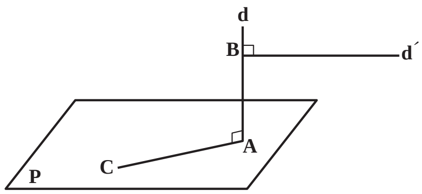
۱۱. به‌صورت مقابل می‌توان چندضلعی را در یک دستگاه مختصات قرار داد:



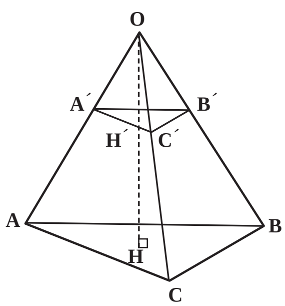
حال به کمک قضیهٔ پیک داریم:

$$S=i+\frac{b}{۲}-۱=۵+\frac{۱۱}{۲}-۱=۹/۵$$

۱۲. AC و d´ هر دو بر d (AB) عمودند. اگر AC و d´ و AB در یک صفحه باشند، داریم: AC‖d´ و اگر نباشند، d´ و AC متنافرند. بنابراین d´ و AC موازی یا متنافرند.



۱۳. سطح مقطع، مثلثی موازی با صفحهٔ مثلث ABC است. این مثلث با مثلث قاعده متشابه است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مربع نسبت تشابه آن‌هاست:



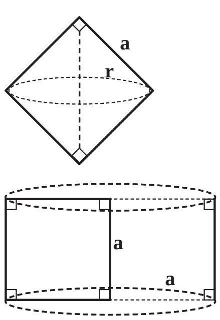
$$k^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{A'C'}{AC}=\frac{۱}{۳},$$

$$A'C'\parallel AC\Rightarrow \frac{A'C'}{AC}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OH'}{OH}=\frac{۱}{۳}$$

یعنی H´، OH را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کند:

HH'=۲OH´

۱۴. در مرحلهٔ اول از این دوران دو مخروط که قاعدهٔ آن‌ها مشترک است حاصل می‌شود و در مرحلهٔ دوم یک استوانه به‌دست می‌آید.



$$V_۱=(\frac{۱}{۳}\pi r^۲h)\times۲, r=h=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$\Rightarrow V_۱=\frac{۲}{۳}\pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a)^۳=\frac{\pi\sqrt{۲}a^۳}{۶}$$

$$V_۲=(\pi a^۲).a=\pi a^۳$$

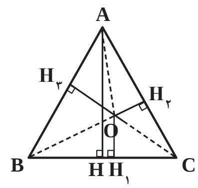
$$\Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}\Rightarrow V_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۶}V_۲$$

هندسهٔ ۲ (سوم ریاضی)

۱.

مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
مساحت باقی‌مانده	۱	$\frac{۳}{۴}$	$(\frac{۳}{۴})^۲$	$(\frac{۳}{۴})^۳$	...	$(\frac{۳}{۴})^n$

۲.

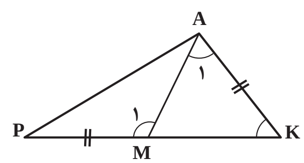


$$S_{ABC}=S_{OAC}+S_{OBC}+S_{OAB}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AH.a=\frac{۱}{۲}OH_۲.a+\frac{۱}{۲}OH_۱.a+\frac{۱}{۲}OH_۳.a$$
$$\Rightarrow AH.a=(OH_۱+OH_۲+OH_۳)a$$
$$\Rightarrow OH_۱+OH_۲+OH_۳=AH=\text{مقدار ثابت}$$

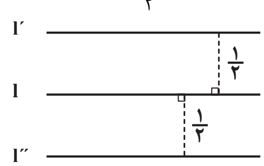
۳. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۲۵)

۴.

$$\left.\begin{array}{l} AM=AM \\ PM=AK \\ \hat{M}_۱=\hat{A}_۱+\hat{K}\Rightarrow \hat{M}_۱>\hat{A}_۱ \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{لولا}]{\text{قضیهٔ}} AP>MK$$



۵. دو خط راست موازی L در دو طرف آن و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از آن.



۶. الف) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی (گزینهٔ ۳)

ب) عمودمنصف‌های اضلاع (گزینهٔ ۲)

۷. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۶۰)

۸.

$$A\hat{O}C=\widehat{AC},\ A\hat{B}C=\frac{\widehat{AC}}{۲}\Rightarrow A\hat{B}C=\frac{A\hat{O}C}{۲}$$
$$\Rightarrow \alpha+۱۶=\frac{۳\alpha+۱۲}{۲}\Rightarrow ۳\alpha+۱۲=۲\alpha+۳۲$$
$$\Rightarrow \alpha=۲۰^\circ,\ A\hat{O}C=۷۲^\circ,\ A\hat{B}C=۳۶^\circ$$

۹. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۷۴)

۱۰.

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}$$
$$=۱۲=۵x-۸\Rightarrow x=۴$$

۱۱. الف) یک چندضلعی که رأس‌های آن روی محیط دایره‌ای باشند.

ب) تبدیل هندسی که فاصله‌ها را حفظ کند.

ج) دو خطی که در یک صفحه نباشند و نقطهٔ مشترکی ندارند.

۱۲.

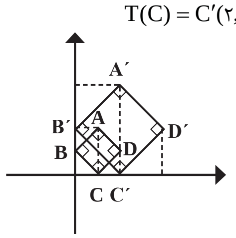
$$\text{بردار انتقال}=\vec{u}=(-۲,۱)-(۳,-۱)=(-۵,۲)$$
$$\Rightarrow T(x,y)=(x-۵,y+۲)$$

۱۳. الف)

$$T(x,y)=(۲x,۲y)$$
$$\Rightarrow T(A)=A'(۲,۴),T(B)=B'(۰,۲)$$
$$T(C)=C'(۲,۰),T(D)=D'(۴,۲)$$

ب) $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=k^۲=۴$

ج) $k>۱\Rightarrow$ انبساط



۱۴. دو خط موازی هستند، پس محور تقارن آن‌ها، خط راستی است که از وسط آن‌ها و موازی با آن‌ها (با همان شیب) رسم می‌شود:

$$D: x+y-۳=۰,\ \ D': x+y+۳=۰$$
$$A(۲,۱)\in D,\ \ A'(-۲,-۱)\in D'$$
$$M(۰,۰): AB\ \text{وسط}\Rightarrow y-۰=-۱(x-۰)$$
$$\Rightarrow y=-x\ \ \text{محور تقارن}$$

۱۵. نقطهٔ G، مرکز ثقل مثلث را به‌عنوان مرکز دوران با زاویهٔ $\alpha=۱۲۰^\circ$ در نظر بگیرید.

$$\left.\begin{array}{l} A\to B \\ D\to E \end{array}\right\}\Rightarrow AD\to BE$$

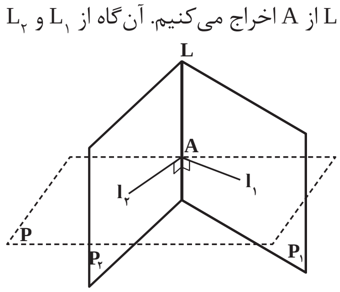
چون دوران ایزومتری است، پس: AD=AE و خط و تبدیل یافتهٔ آن با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند، پس: $E\hat{F}D=۱۲۰^\circ$.

۱۶. الف) درست   **ب)** نادرست   **ج)** نادرست

د) نادرست   **هـ)** درست

۱۷. نقطهٔ A روی فصل مشترک دو صفحه را در نظر می‌گیریم و از A خطی موازی L رسم می‌کنیم. طبق قضایای قبلی، این خط به تمامی در صفحهٔ P و به تمامی در صفحهٔ P′ واقع است، پس این خط همان فصل مشترک دو صفحه و با L موازی است.

۱۸. از L دو صفحهٔ دلخواه $P_۱$ و $P_۲$ را می‌گذرانیم. سپس در این صفحات خطوط $L_۱$ و $L_۲$ را عمود بر L از A اخراج می‌کنیم. آن‌گاه از $L_۱$ و $L_۲$ صفحهٔ P را می‌گذرانیم. L بر $L_۱$ و $L_۲$ عمود است، پس بر صفحهٔ گذرا از آن‌ها (P) عمود است و P صفحهٔ مطلوب ماست.



۱۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $AC^۲=AB^۲+BC^۲$. پس: $AC>AB$. بنابراین اگر C نقطه‌ای دلخواه روی P باشد، AB کوتاه‌ترین فاصلهٔ A تا نقاط روی P است.

جبر و احتمال

۱. الف) استدلال استنتاجی **ب)** استدلال استقرایی **ج)** استدلال بازگشتی

۲.

$$P(۱):۱^۳=(\frac{۱\times ۲}{۲})^۲ : ۱=۱$$

$$P(k):۱^۳+۲^۳+...+k^۳=(\frac{k(k+۱)}{۲})^۲$$

$$P(k+۱):\underbrace{۱^۳+۲^۳+...+k^۳}_{P(k)}+(k+۱)^۳=(\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲})^۲$$

$$(\frac{k(k+۱)}{۲})^۲+(k+۱)^۳=(k+۱)^۲\left[\frac{k^۲}{۴}+k+۱\right]$$

$$=\frac{(k+۱)^۲(k^۲+۴k+۴)}{۴}=\frac{(k+۱)^۲(k+۲)^۲}{۴}=\left[\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}\right]^۲$$

۳. الف) $(a-b)^۲\geq ۰\Rightarrow a^۲+b^۲-۲ab\geq ۰\Rightarrow ۲ab\leq a^۲+b^۲$

$\Rightarrow ab\leq \frac{a^۲+b^۲}{۲}$

ب) $\sqrt{۲}\in Q', -\sqrt{۲}\in Q', \sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\notin Q'$

۴. بـرای حـرف اول نام ۳۲ حالت و برای حرف اول نام خانوادگی هم ۳۲ حالت وجـود دارد. پس برای ترکیب آن‌ها طبق اصل ضرب، ۳۲×۳۲ یا ۱۰۲۴ حالت متمایز داریم و: ۱+۱۰۲۴×۳=۳۰۷۳. پس لااقل ۴ نفر هستند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها یکی است.

۵. الف) ۴ **ب)** ± ۲ **ج)** ۲۰

۶.

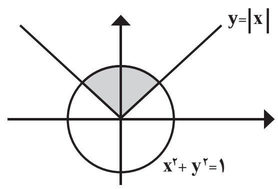
$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$

$$=[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$$

$$=[(A\cup B)\cap(\underbrace{B\cup B'}_{U})]\cap[(\underbrace{A\cup A'}_{U})\cap(A'\cup B')]$$

$$=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

۷.



۸.

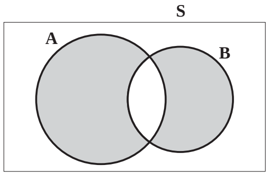
$$A=\{۱,۲\}\cup\{۳\}=\{۱,۳\}\cup\{۲\}=\{۲,۳\}\cup\{۱\}$$
$$=\{۱\}\cup\{۲\}\cup\{۳\}$$

۹. الف)

$$\left.\begin{cases}(a,b)R(c,d)\Rightarrow a=c\\(c,d)R(e,f)\Rightarrow c=e\end{cases}\right\}\Rightarrow a=e\Rightarrow(a,b)R(e,f)$$

ب) $(x,y)R(۲,۱)\Rightarrow x=۲\Rightarrow[(۲,۱)]=\{(x,y)|x=۲\}$

۱۰.



۱۱. الف) S={(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,پ),(پ,ر)}

$\Rightarrow n(S)=۸$

ب) S={(ر,۲),(ر,۴),(ر,۶),(پ,پ),(پ,ر)}

۱۲. $n(S)=۶\times۶=۳۶, A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۳۶}$

۱۳.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{۲۱+۶}{۵۵}=\frac{۲۷}{۵۵}$$

۱۴.

$$P(A)=\frac{\binom{۲۰}{۸}}{۲^{۲۰}}$$

۱۵.

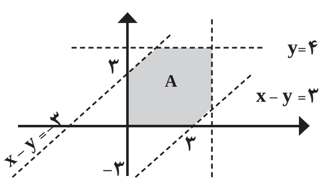
$$P(a)=P(c)=\frac{۱}{۲}P(b), P(a)+P(b)+P(c)=۱$$

$$\Rightarrow P(a)+۲P(a)+P(a)=۱\Rightarrow P(a)=P(b)=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow P(b \text{ یا } a)=P(a)+Pb)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶.

$$S=\{(x,y)|۰\leq x,y\leq ۴\},$$
$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S,|x-y|<۳\}$$
$$-۳<x-y<۳$$



$$P(A)=\frac{S_A}{S_S}=\frac{۴\times۴-۲(\frac{۱}{۲})}{۴\times۴}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۷.

A: بخش‌پذیری بر ۳ و B: بخش‌پذیری بر ۵ و A∩B: بخش‌پذیری بر ۳و۵

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{\left[\frac{۴۰}{۳}\right]}{۴۰}-\frac{\left[\frac{۴۰}{۱۵}\right]}{۴۰}=\frac{۱۳}{۴۰}-\frac{۲}{۴۰}=\frac{۱۱}{۴۰}$$

حسابان (سوم ریاضی)

۱.

$$P(۱)=۴,\ P(-۲)=۰\Rightarrow a+b+۲=۴,$$
$$-۸+۴a-۲+b=۰$$
$$\begin{cases}۴a+b=۱۰\\a+b=۲\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۸}{۳},b=-\frac{۲}{۳}$$

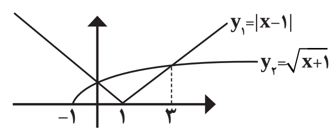
۲. $X=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow x=\dfrac{1}{X}-1$

$(\dfrac{1}{X}-1)^2-2(\dfrac{1}{X}-1)-1=0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{X^2}-\dfrac{2}{X}+1-\dfrac{2}{X}+2-1=0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{X^2}-\dfrac{4}{X}+2=0\Rightarrow 2X^2-4X+1=0$

۳. $|x-1|\le\sqrt{x+1}\Rightarrow 0\le x\le 3$



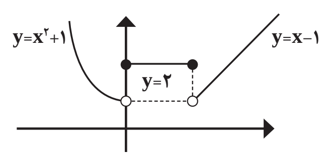
۴. **الف)** درست

ب) نادرست (طول نقطهٔ ماکزیمم ۲۰ است و نه عرض آن)

ج) درست $(y=\dfrac{7}{x}+3\Rightarrow x=\dfrac{7}{y-3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{7}{x-3})$

د) نادرست $(f(x)=|\sin x|)$

۵.



$R_f=(1,+\infty)$

۶. $D_f=R-\{0\},D_g=R-\{1\}$

$D_{fog}=\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}$

$=\{x|x\in R-\{1\},\dfrac{x+2}{x-1}\in R-\{0\}\}$

$\dfrac{x+2}{x-1}=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow x\ne -2$

$\Rightarrow D_{fog}=R-\{1,-2\}$

ب) $fog(x)=f(g(x))=f(\dfrac{x+2}{x-1})=\dfrac{1}{(\dfrac{x+2}{x-1})}=\dfrac{x-1}{x+2}$

ج) $(g-f)(2)=g(2)-f(2)=\dfrac{2+2}{2-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

۷. $D_f=R-\{0\},f(-x)=\dfrac{(-x)^2-\cos(-x)}{|-x|}$

$=\dfrac{x^2-\cos x}{|x|}=f(x)\Rightarrow$ f زوج است.

۸. $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha.\cos\alpha-\underbrace{\sin 2\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha}.\sin\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-(2\sin^2\alpha\cos\alpha)$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

۹. $\sin x(2\sin x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi\\ x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$

۱۰. $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow\cos(\sin^{-1}(\dfrac{3}{5}))=\dfrac{4}{5}$

۱۱. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1,$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{-x}=-1$

در نتیجه f در x=۰ حد ندارد، زیرا حد چپ و راست آن مساوی نیستند.

۱۲.

الف) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-x^2-x+4x+4}{2(x^2-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2(x+1)-x(x+1)+4(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+4)}{2(x-1)(x+1)}=\dfrac{1+1+4}{2(-1-1)}=-\dfrac{3}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2x\right]^2}{2\left[\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\times\dfrac{x}{2}\right]^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{\dfrac{x^2}{2}}=8$

۱۳. $D_f=(-\infty,1]\quad \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\sqrt{1-1}=0,\ f(1)=0$

بنابراین f در a=۱ پیوسته است.

۱۴. $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

۱۵. الف) $f'(x)=5(x^3-x^2-1)^4(3x^2-2x)$

ب) $g'(x)=\dfrac{(4x^3-\cos x)(1+\cos x)-(-\sin x)(x^4-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

ج) $h'(x)=(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})\tan^{-1}x+\dfrac{1}{1+x^2}(x-\sqrt{x}+5)$

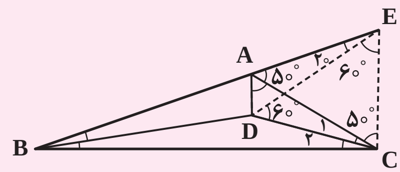
۱۶. $\left.\begin{array}{l}m=f'(x)=3x^2-2\\ y=x\Rightarrow m=1\end{array}\right\}\Rightarrow 3x^2-2=1$

$\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x=\pm1\quad A\left|\begin{array}{l}1\\-7\end{array}\right.,\quad B\left|\begin{array}{l}-1\\-5\end{array}\right.$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱.



AB را از طــرف A تــا نقطهٔ E امتــداد می‌دهیم، به‌طوری که داشــته باشــیم: BE=BC. E را به D و C وصل می‌کنیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$B\hat{E}C = B\hat{C}E = \frac{۱۸۰-۲۰}{۲} = ۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}E = ۵۰^\circ$$

همچنین BD نیم‌ساز زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین BEC و در نتیجــه ارتفاع، میانه و عمودمنصف EC اســت. لذا: DE=DC. یعنی مثلث DEC متساوی‌الساقین است و چون: $D\hat{C}E = ۶۰^\circ$، پس متساوی‌الاضلاع است؛ یعنی:

$$DE = DC = EC,\ \ D\hat{E}C = E\hat{D}C = ۶۰^\circ \Rightarrow D\hat{E}A = ۲۰^\circ$$

$$\Delta AEC : C\hat{A}E = ۱۸۰-(۵۰+۸۰) = ۵۰^\circ \Rightarrow AE = EC$$

و چــون: ED=EC، پس: DE=AE. یعنی مثلث EAD در رأس E متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$\alpha + ۵۰ = \frac{۱۸۰-۲۰}{۲} = ۸۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$ (گزینهٔ الف)

۲. با توجه به فرض y=۲-x و با جای‌گذاری در کسر فوق داریم:

$$m = \frac{x^۳ + ۲x(۲-x)^۲ + ۳(۲-x)^۳}{x^۲ + (۲-x)^۲}$$

و پس از ساده شدن:

$$m = \frac{۵x^۲ - ۱۴x + ۱۲}{x^۲ - ۲x + ۲}$$

و از آنجا:

$$۵x^۲ - ۱۴x + ۱۲ = mx^۲ - ۲mx + ۲m$$
$$\Rightarrow (۵-m)x^۲ + (۲m-۱۴)x + (۱۲-۲m) = ۰$$
$$\Delta = (۲m-۱۴)^۲ - ۴(۵-m)(۱۲-۲m) \geq ۰$$

و از حل این نامعادله نتیجه می‌شود:

$$-۴-\sqrt{۵} \leq m \leq -۴+\sqrt{۵}$$ (گزینهٔ د)

۳. می‌دانیــم که مجموع ارقام یک عدد، با خود آن عدد به پیمانهٔ ۹ هم‌نهشت است. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد را بر ۹ به‌دست می‌آوریم:

$$۱۳۹۶ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳۹۶^{۱۳۹۶} \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow n = ۹k+۱$$
$$\Rightarrow ۳^n = ۳^{۹k+۱} = (۳^۳)^{۳k} \times ۳ = (۲۷)^{۳k} \times ۳$$
$$\Rightarrow ۳^n \overset{۲۶}{\equiv} ۳$$ (گزینهٔ ج)

۴. اگر این عدد را با نماد $\overline{abcde}$ نمایش دهیم، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcde} = ۱۳۹۶e + r, ۰ \leq r < ۱۳۹۶$$

واضح است که اگر e≤۶، ۱۳۹۶e+r عددی چهاررقمی می‌شود. پس باید داشــته باشــیم: ۹≥e≥۷. اگر e=۷ باشد: ۹۷۷۲=۱۳۹۶×۷ و برای اینکه ۱۳۹۶e+r عددی پنج‌رقمی بشــود، باید داشته باشیم: r≥۲۲۸ و با توجه به رقم یکان این عدد، باید: r≥۲۳۵ و در نتیجه:

$$r \in \{۲۳۵, ۲۴۵, ..., ۱۳۹۵\}$$

که یعنی ۱۱۷ جواب برای r وجود دارد.

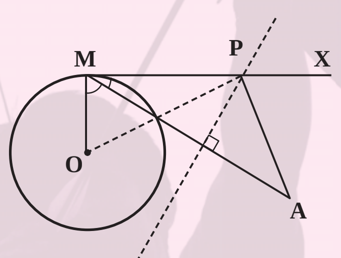
اگر e=۸ باشــد، داریم: ۱۱۱۶۸=۱۳۹۶×۸. با توجه به رقم یکان این عدد باید داشته باشیم: r≥۰ و در نتیجه:

$$r \in \{۰, ۱۰, ..., ۱۳۹۰\}$$

پس ۱۴۰ جواب هم از اینجا به‌دست می‌آید. اگر e=۹ هم باشد، به روشی مشابه ۱۴۰ جواب دیگر به‌دست می‌آید. بنابراین در مجموع ۳۹۷ عدد پنج‌رقمی به‌دست می‌آید (گزینهٔ د)

۵. اگر P نقطهٔ برخورد عمودمنصف AM و مماس Mx باشد، با توجه به ویژگی عمودمنصف و عمودبودن شــعاع OM بر مماس Mx و قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$OM^۲ + MP^۲ = OP^۲, MP = AP$$
$$\Rightarrow OM^۲ + AP^۲ = OP^۲ \Rightarrow OP^۲ - AP^۲ = OM^۲ = R^۲$$



یعنی P نقطه‌ای اســت که تفاضل مربعات فواصل آن از دو نقطهٔ ثابت A و O مقداری ثابت اســت و بنابراین مکان هندســی P خط راستی عمود بر OA است.

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

آخرین کلام با مخاطبان پرشور، معلمان، دانش‌آموزان و دیگر خوانندگان «مجلهٔ برهان متوسطهٔ۲» را در این سال تحصیلی در پی می‌آوریم. با این امید که ارتباط نیکویی که بین ما تاکنون برقرار بوده است، به قوت خود باقی بماند و شما عزیزان کماکان یار و یاور دوستان خود در مجله باشید.

- دوست گرامی آقای **کیوان عباس‌زاده**، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی از دانشگاه صنعتی شریف
ضمن سپاس از مقالات ارسالی‌تان در زمینهٔ ترکیبیات، به اطلاعتان می‌رسانیم که مقالات ارسالی به احتمال زیاد در شماره‌های اولیهٔ سال تحصیلی آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

- همکار گرامی جناب آقای **رضا زینی‌وند**، از شهرستان دره‌شهر، استان ایلام
مقاله‌تان با عنوان «حل مسئلهٔ منتی‌هال با روش قضیهٔ بیز» به دستمان رسید. ضمن سپاس از لطفتان باید به اطلاعتان برسانیم که زبان مقاله اندکی ثقیل است. همواره عنایت داشته باشید که مخاطبان مجلهٔ ما دانش‌آموزان هستند و باید با زبان ساده‌تر و صمیمی‌تری با آنان سخن گفت. اما با کمی تغییر امکان استفاده از مقاله‌تان برای دورهٔ آینده (سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶) وجود دارد. پس منتظر این تصحیح و ارسال مجدد مقاله می‌مانیم.

- همکار عزیز سرکار خانم **صدیقه علوی**، از شهر ساری
مقاله‌تان با عنوان «یافتن معادلات درجهٔ دوم با ریشه‌های معین» به دستمان رسید. به اطلاعتان می‌رسانیم که اولاً به نظر نمی‌رسد که موضوع چندان تازه‌ای در آن مطرح شده باشد و ثانیاً راه‌های کلاسیک و متعددی برای پاسخ به سؤال مطرح شده وجود دارد که در کتاب‌های متفاوت (از جمله کتاب‌های درسی) به آن‌ها پرداخته شده است.

- همکار گرامی آقای **مسلم نادری**، از ثلاث باباجانی، استان کرمانشاه
دو مقاله‌تان با عنوان‌های «عدد هفت» و «محاسبهٔ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت» به دست ما رسید. در مورد اولی باید بگوییم گردآوری از مطالب جسته و گریخته‌ای است که متأسفانه انسجام لازم را که در خور یک مقالهٔ مدون است، ندارد. در مورد دومی هم باید بگوییم که این دستور از دهه‌ها قبل در کتاب‌های متعدد ریاضی (از جمله کتاب مثلثات نظام قدیم آموزشی) بارها مطرح شده است و مطلب تازه‌ای نیست. با این حال از توجهتان به مجلهٔ برهان سپاس‌گزاریم و منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

ضمن سپاس از همهٔ بزرگوارانی که در این فاصلهٔ زمانی برای ما مطالبی ارسال کرده‌اند و امکان درج نامشان در مجله نبوده است، پاسخ‌گویی به این عزیزان را به سال آینده موکول می‌کنیم و همهٔ شما را تا دیداری دیگر به خدای منان می‌سپاریم.

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی
به صورت ماهنامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
رشد کودک، رشد نوآموز، رشد دانش‌آموز

مجله‌های دانش‌آموزی
به صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
رشد نوجوان، رشد برهان، رشد جوان، رشد برهان

مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):
رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی ◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:
به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان‌های خارجی ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش ◆ رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و ... تهیه و منتشر می‌شوند.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶.
◆ تلفن و نمابر: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸
◆ وبگاه: www.roshdmag.ir

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: باز هم جدول‌های عددی زیبا!

۱

۵	۴	۳	۳۶	۳۷	۳۰	۳۱
۶	۲	۱	۳۵	۳۸	۳۲	۲۹
۹	۷	۴۵	۳۹	۳۴	۳۳	۲۸
۸	۱۰	۴۶	۴۴	۴۰	۴۱	۲۷
۱۲	۱۱	۴۷	۴۳	۴۲	۲۱	۲۶
۱۳	۱۵	۴۸	۱۷	۲۰	۲۲	۲۵
۱۴	۴۹	۱۶	۱۹	۱۸	۲۴	۲۳

۲

۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳
۵۴	۱۷	۱۶	۵۹	۱۱	۱۰	۹	۶۴
۵۳	۱۹	۱۸	۱۵	۱۴	۱۲	۷	۸
۵۲	۵۰	۲۰	۴۸	۴۷	۱۳	۵	۶
۵۱	۲۱	۴۹	۴۶	۴۳	۴۲	۴۰	۴
۲۲	۲۳	۴۵	۴۴	۳۴	۴۱	۳	۳۹
۲۶	۲۵	۲۴	۳۱	۳۳	۳۵	۲	۳۸
۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۲	۳۶	۳۷	۱

۳

۵۸	۵۹	۶۰	۵	۷	۸	۱۷	۱۶	۱۵
۵۷	۶۲	۶۱	۴	۶	۹	۱	۱۸	۱۴
۶۳	۵۶	۵۰	۴۹	۳	۲	۱۰	۱۹	۱۳
۵۵	۶۴	۵۱	۵۲	۴۸	۲۹	۱۱	۱۲	۲۰
۶۵	۵۴	۵۳	۴۵	۴۷	۳۰	۲۸	۲۷	۲۱
۶۶	۶۷	۶۸	۴۴	۴۶	۳۲	۳۱	۲۶	۲۲
۴۱	۴۲	۴۳	۶۹	۳۴	۳۳	۲۵	۲۴	۲۳
۳۸	۴۰	۷۰	۳۵	۷۳	۷۴	۷۵	۸۰	۸۱
۳۹	۳۷	۳۶	۷۱	۷۲	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹

۴

		۲۵	۲۴	۲۲		
		۲۶	۲۳	۲۱		
۳۳	۲۹	۲۸	۲۷	۲۰	۱۷	۱۸
۳۰	۳۲	۶	۳	۱	۱۹	۱۶
۳۱	۵	۴	۷	۲	۱۴	۱۵
		۱۰	۸	۱۳		
		۹	۱۱	۱۲		

۵

۳۰	۳۱	۳۳	۳۵	۹	۸	۶	۴
۲۹	۳۲	۳۴	۱۰	۳۶	۷	۳	۵
۲۸	۲۷	۱۱			۳۷	۱	۲
۱۳	۱۲	۲۶			۳۸	۳۹	۴۳
۱۴	۱۵	۲۵			۴۰	۴۲	۴۴
۱۶	۱۷	۲۴			۴۱	۴۵	۵۲
۱۹	۱۸	۲۳			۴۶	۵۱	۵۰
۲۰	۲۱	۲۲			۴۷	۴۸	۴۹

ایستگاه دوم: چند معمای منطقی

۱. اولی راست می‌گفت! از جملهٔ ریاضی‌دان اول برمی‌آید که بیش از یک گل زرد نمی‌تواند در باغ گل باشد (زیرا در غیر این صورت با انتخاب دو گل زرد و یک گل آبی، جملهٔ او نقض می‌شود) و نیز بیش از یک گل آبی، نمی‌تواند در باغ گل باشد (به طریق مشابه استدلال کنید). از جملهٔ ریاضی‌دان دوم نیز برمی‌آید که بیش از یک گل قرمز نمی‌تواند در باغ گل باشد. (چرا؟) پس باغ گل‌ها (!) فقط شامل یک گل زرد، یک گل قرمز و یک گل آبی است(!) و در نتیجه جملهٔ دانش‌آموز اول درست است!

۲. کافی است بگویید: «من جایزهٔ هزار تومانی را نخواهم گرفت!» اگر من بگویم این جمله نادرست است، در این صورت باید طبق آنچه که گفته‌ام، جایزهٔ صدتومانی را به شما بدهم. ولی در این صورت جملهٔ شما درست می‌شود (زیرا جایزهٔ هزار تومانی را نگرفته‌اید). پس من نمی‌توانم بگویم جملهٔ شما نادرست است و باید بپذیرم که درست است. ولی در این صورت باید یکی از دو جایزهٔ هزار تومانی یا ده هزار تومانی را به شما بدهم و برای آنکه جمله‌تان درست باقی بماند، مجبورم جایزهٔ ده هزار تومانی را بدهم!

۳. نابینا با خود گفت: «کلاه من نمی‌تواند آبی باشد، زیرا در این صورت، وقتی بینای اول گفت من نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است، اگر کلاه من آبی بود، بینای دوم بلافاصله می‌فهمید که کلاهش آبی نیست و نمی‌گفت من هم نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است. پس کلاه من قرمز است.»

اشتراک رشد

نحوهٔ اشتراک:
پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شمارهٔ ۰۲۱-۸۸۴۹۰۲۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

◆ عنوان مجلات درخواستی:
◆ نام و نام خانوادگی:
◆ تاریخ تولد: ◆ میزان تحصیلات:
◆ تلفن:
◆ نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان:
خیابان:
پلاک: شمارهٔ پستی:
شمارهٔ فیش بانکی:
مبلغ پرداختی:
◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:
امضا:

◆ نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۱۱۵۵/۴۹۷۹
◆ تلفن بازرگانی: ۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸
◆ Email: Eshterak@roshdmag.ir

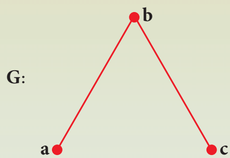
◆ هزینهٔ اشتراک سالانهٔ مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانهٔ مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

معمای سه‌گاف

«معمای ســه گاف این اســت: روزی روزگاری قایق‌رانی که در ساحل جنوبی رودخانه‌ای زندگی می‌کرد، گرگی داشــت و گوسفندی و گیاهی. می‌خواســت آن‌ها را ســالم ببرد طرف دیگر رودخانه. اما قایق تنها برای قایق‌ران جا داشــت و یکی از آن ســه گاف. معما این اســت که قایق‌ران چگونه با کمترین تعداد رفت و برگشت دارایی‌اش را زنده و سالم و بی‌کم و کاست ببرد آن طرف رودخانه... .

قایق‌ران ابتدا گوسفند را به ساحل شمالی رودخانه می‌برد و خالی باز می‌گردد. حالا مثلاً گرگ را با خود می‌برد و گوســفند را به ساحل جنوبی برمی‌گرداند. در این هنگام گیاه را به ساحل شمالی منتقل می‌کند و بدون نگرانی، تنها باز می‌گردد تا گوســفند را با خود ببرد. بدین‌ترتیب قایق‌ران با هفت رفت و برگشــت دارایی‌اش را منتقل می‌کند و به هدف می‌رســد. به‌نظر شما جوانان، اگر به‌جای سه‌گاف دارایی قایق‌ران، سه‌شین مثلاً شیر و شتر و شلغم باشد، آیا ماهیت معما تغییر می‌کند؟

معمای سه گاف را به‌صورت انتزاعی و مجرد مطرح می‌کنم تا نام کالا مهم نباشــد. ســه نقطهٔ متفاوت a ، b و c از صفحه را به‌ترتیب به گرگ، گوسفند و گیاه نسبت می‌دهیم. دو پاره‌خط ab و bc را هم رسم می‌کنیم تــا به‌ترتیب وجود رابطهٔ بین گرگ و گوســفند و بین گیاه و گوســفند را نمایش دهند. دو نقطهٔ a و c را با خط به‌هم وصل نمی‌کنیم تا نشان دهیم که گرگ و گیاه به‌هم آسیب نمی‌رسانند یا به هم ربط ندارند. این شکل را که با G نمایش داده‌ایم، نگار منتسب به معمای سه‌گاف می‌نامیم.



به‌جای اینکه گرگ و گوســفند و گیاه را بی‌خطر از یک‌سوی رودخانه به‌ســوی دیگــر آن انتقال دهیم، نقطه‌هــای نگار مزبور را بــا قایق چنان جابه‌جا می‌کنیم که پس از آغاز نخستین سفر و پیش از پایان کار انتقال، هیچ خطی دو نقطهٔ موجود در هر یک از دو ساحل رودخانه را به‌هم وصل نکند.

* منبع

کتاب «نمایشنامهٔ افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان ـ بی‌نهایت معما»، نگارش دکتر مهدی بهزاد و دکتر نغمهٔ ثمینی.

سفر به شِشتُمَد

احسان یارمحمدی

اشاره

«ششتمد» شهری در ۳۰ کیلومتری جنوب سبزوار واقع در استان خراسان‌رضوی است که آرامگاه ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، حکیم و ادیب نام‌دار ایرانی در سدهٔ ششم هجری *ظهیرالدین ابوالحسن علی‌بن ابوالقاسم زیدابن محمد بیهقی*[۱] معروف به *ابن‌فندق بیهقی* و *فرید خراسان* در این شهر قرار دارد. لذا ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات ایران و گردشگری در ایران‌زمین می‌توانند با مسافرت به ششتمد و بازدید از آرامگاه ابوالحسن زید بیهقی به اَدای احترام به این ریاضی‌دان ایرانی بپردازند.

یاقوت حموی تاریخ ولادت ابوالحسن زید بیهقی را سال ۴۹۹ هجری قمری بیان کرده است، اما از شواهد چنین به‌نظر می‌رسد که تاریخ زادروز او پیش از این بوده است. ابن‌فندق بیهقی در ششتمد متولد شد و روزگار جوانی را به کسب و تحصیل علم و شاگردی کردن بزرگان بیهق، نیشابور، مرو و سرخس گذراند. سپس به پژوهش، تألیف و تدریس آموخته‌های خود پرداخت و مدتی نیز در بیهق به‌کار قضاوت مشغول شد. فرید خراسان دیداری نیز با حکیم *خیام نیشابوری* داشت که شرح ملاقات مزبور را در کتاب «*تتمه صوان الحکمه*» آورده است.

مهم‌ترین اثر نگارشی فرید خراسان کتاب پارسی *تاریخ بیهق*[۲] است که موضوع آن دربارهٔ تاریخ و جغرافیای بیهق و ارائه شرح حال بزرگان علم، ادب و نیز خاندان‌ها و سادات آن منطقه است. همچنین ابوالحسن زید بیهقی به خواهش دوستان خود کتاب پارسی *جوامع احکام النجوم* را در سه جلد دربارهٔ ستاره‌شناسی نوشت تا آیندگان از این ستاره‌شناس و ریاضی‌دان ایران‌زمین کتابی را در این زمینه به یادگار در اختیار داشته باشند. سرانجام وی در سال ۵۶۵ هجری قمری در ششتمد درگذشت.

از آثار ابوالحسن زید بیهقی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تتمه صوان الحکمه یا تاریخ حکماءالاسلام
- لباب‌الانساب
- مشارب التجارب
- وشاح دیمه القصر
- الامانات فی‌شرح‌الاشارات
- الاناده فی‌کلمه شهاده
- اسئله‌القرآن مع‌الاجوبه
- اصول الفقه
- ازهار اشجارالشعار
- آداب السفر
- اعجازالقرآن
- الافاده فی اثبات‌الحشر و الاعاده
- اسرارالحکم

پی‌نوشت‌ها

۱. برای آگاهی ریاضی‌آموزان و خوانندگان بیان می‌کنیم که ظهیرالدین ابوالحسن علی‌بن ابوالقاسم زیدابن محمد بیهقی، و **ابوالفضل محمدبن حسین بیهقی** نویسنده و تاریخ‌نگار مشهور ایرانی در دورهٔ غزنویان، دو شخصیت متفاوت هستند.

۲. برای آگاهی ریاضی‌آموزان و خوانندگان بیان می‌کنیم که کتاب «تاریخ بیهق» اثری کاملاً متفاوت با کتاب «**تاریخ بیهقی**» یا «**تاریخ مسعودی**» است که توسط ابوالفضل بیهقی دربارهٔ تاریخ پادشاهی سلطان مسعود غزنوی نگاشته شده است.

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)