ISSN:1735 - 4943
فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
دورهٔ نوزدهم / شمارهٔ ۴ / تابستان ۱۳۹۳ / ۴۸ صفحه / ۸۰۰۰ ریال www.roshdmag.ir

رشد برهان ریاضی

متوسطه اول

۷۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

- جام جهانی فوتبال، با طعم حل مسئله
- از چند تیتر اقتصادی تا ۳۷۸ تریلیون تومان
- بازی ناعادلانه
- یک تغییر کوچک در شبیه‌ساز پرتاب سکه

دورهٔ نوزدهم / شماره ٤ / تابستان ۱۳۹۳ / ٤٨ صفحه

۷۰

رشد برهان ریاضی متوسطه اول

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی ـ اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

توضیح جلد: مربوط به مقاله‌های «تولد آقای شبّده‌چی» و « جام جهانی فوتبال با طعم حل مسئله»

مدیر مسئول : محمد ناصری **سردبیر:** سپیده چمن‌آرا **مدیر داخلی :** حسین نامی ساعی
اعضای هیئت تحریریه: آمنه ابراهیم‌زاده طاری، سارا ارشادمنش، بهزاد اسلامی مسلّم، امیر حسین اصغری، حمیدرضا امیری، زهره پندی، لیلا خسروشاهی، خسرو داودی، حسین نامی ساعی. **ویراستار:** بهروز راستانی
طراح گرافیک : علی دانشور **تصویرگر:** بهنام خیامی
نشانی دفتر مجله : تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶، صندوق پستی ۶۵۸۵ ـ ۱۵۸۷۵
تلفن : ۹ـ۸۸۳۱۱۶۱ ۸ ـ۰۲۱ داخلی:۳۷۴ **نمابر :** ۸۸۳۰۱۴۷۸
وبگاه : www.roshdmag.ir **پیام‌نگار:** borhanr@roshdmag.ir
وبلاگ اختصاصی: http: // weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee
تلفن پیام‌گیر نشریات رشد : ۸۸۳۰۱۴۸۲
کد مدیر مسئول : ۱۰۲ **کد دفتر مجله :** ۱۱۳ **کد مشترکین :** ۱۰۲
نشانی امور مشترکین : تهران، صندوق پستی: ۱۱۱ / ۱۶۵۹۵
تلفن امور مشترکین : ۷۷۳۳۶۶۵۶ **چاپ :** شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان : ۱۶۵۰۰ نسخه

فهرست

قابل توجه نویسندگان و مترجمان:

◀ مقاله‌هایی که برای درج در مجله می‌فرستید، باید با اهداف این مجله مرتبط باشد و قبلاً در جای دیگری چاپ نشده باشد. اهداف مجله عبارتند از: ● گسترش فرهنگ ریاضی؛ ● افزایش دانش عمومی و تقویت مهارت‌های دانش‌آموزان در راستای برنامهٔ درسی؛ ● توسعهٔ تفکر و خلاقیت؛ ● توجه به استدلال ریاضی و منطق حاکم بر آن؛ ● توجه به فرهنگ و تمدن ایرانی و اسلامی در بستر فرهنگ ریاضی جهانی؛ ● توجه به کاربرد ریاضی در زندگی و علوم و فن‌آوری ؛ ● تقویت باورها و ارزش‌های دینی، اخلاقی و علمی. ◀ مقاله‌های ترجمه شده باید با متن اصلی همخوانی داشته باشد و متن اصلی نیز همراه آن باشد. چنان‌چه مقاله ر ا خلاصه می‌کنید، این موضوع را قید بفرمایید. ◀ مقاله یک خط در میان، در یک روی کاغذ و با خط خوانا نوشته یا تایپ شود. مقاله‌ها می‌توانند با نرم‌افزار word و بر روی CD یا فلاپی و یا از طریق رایانامه مجله ارسال شوند. ◀ نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت لازم مبذول شود. ◀ محل قرار دادن جدول‌ها، شکل‌ها و عکس‌ها در متن مشخص شود. ◀ مقاله باید دارای چکیده باشد و در آن هدف‌ها و پیام نوشتار در چند سطر تنظیم شود. ◀ کلمات حاوی مفاهیم نمایه (کلیدواژه‌ها) از متن استخراج و روی صفحه‌ای جداگانه نوشته شوند. ◀ مقاله باید دارای تیتر اصلی، تیترهای فرعی در متن و سوتیتر باشد. ◀ مجله در رد، قبول، ویرایش و تلخیص مقاله‌های رسیده آزاد است. ◀ مقالات دریافتی بازگردانده نمی‌شوند. ◀ آرای مندرج در مقاله ضرورتاً مبین رأی و نظر مسئولان مجله نیست.

بحث‌های داغ، تابستان داغ‌تر

سپیده چمن‌آرا

دوستان نوجوان من؛

این روزها بحث جام جهانی بسیار داغ است. هر جا می‌رویم سخن از فوتبال است و گل‌های زده و گل‌های خورده و جدول تیم‌ها و امتیازات آنها و این که کدام تیم در جدول بالا می‌آید و کدام تیم حذف می‌شود و ... "جام جهانی فوتبال با طعم حل مسئله" به شما نشان می‌دهد که چگونه از استراتژی‌های حل مسئله که تا کنون آموخته اید استفاده کنید تا بتوانید به سؤالاتی که در رابطه با امتیازات تیم ها برایتان مطرح می‌شود پاسخ درست بدهید.

از سوی دیگر، بحث روزهای داغ تابستان است و این که چگونه از اوقات فراغت استفاده کنیم. شاید پیش از این هم درباره این موضوع با هم سخن گفته باشیم. ولی این بار از زاویه‌ای دیگر به آن می‌نگرم. شاید بعضی‌ها فکر کنند که برای پر کردن اوقات فراغت، حتماً باید به کلاسی بروند. اما هیچ فکر کرده‌اید که "فکر کردن" و در واقع فکر را ورزش دادن نیز می‌تواند یکی از برنامه‌های اوقات فراغت باشد؟ ستون‌های "ریاضیات و بازی" و "ریاضیات و سرگرمی" که از ستون‌های ثابت این دو سال مجلهٔ برهان بوده‌اند، با هدف تهیهٔ خوراک مناسب برای فکر شما نوشته و آماده شده‌اند. در ستون "ریاضیات و بازی"، همیشه پس از معرفی یک بازی، چند مسئله درباره آن بازی نیز مطرح شده است تا شما به آن بازی از زاویه‌های دیگری نیز بنگرید و زمینه‌ای برای تفکر شما فراهم شود. آقای شعبده‌چی هم که شعبده‌هایی را به شما معرفی می‌کند که با کمی تفکر درباره آنها، می‌توانید به راز آن پی ببرید. اگر دوست داشتید که بخشی از اوقات فراغتتان در تابستان را با فکرورزی و تفکر بگذرانید و به شماره‌های قبلی ما دسترسی نداشتید، سری به وب‌گاه ما بزنید. آرشیو شماره‌های قبل را آنجا پیدا می‌کنید. راستی، در وب‌گاه مجله، لینک‌هایی از وب‌گاه‌هایی که بازی‌های فکری مناسب برای شما دارند نیز گذاشته شده است. امیدوارم تابستان خوبی در پیش داشته باشید.

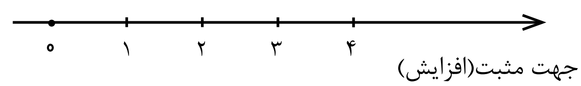
یک جایی روی محور

خسرو داوودی، سپیده چمن‌آرا، زهره پندی

کلیدواژه‌ها: عدد، محور اعداد، نمایش اعداد روی محور، کسر، تقریب، احتمال تجربی

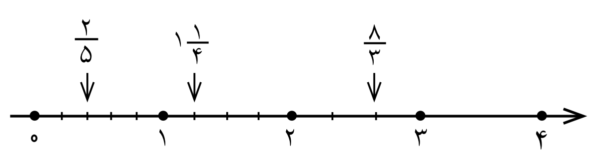
ـ این چیه؟

ـ بله، درست است! یک خط راست. می‌دانید که اگر من برای این خط راست، یک مبدأ انتخاب کنم (یک نقطه به عنوان جایی برای عدد صفر) و طولی را هم به عنوان واحد در نظر بگیریم، و جهتی را هم به عنوان جهت مثبت (یعنی جهت بزرگ‌تر شدنِ اعداد)، آن وقت به این خط می‌گوییم: محور اعداد!

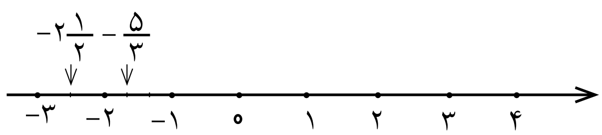


به این ترتیب، هر نقطه روی محور، یک عدد را مشخص می‌کند و هر عددهم، با نقطه‌ای روی محور نمایش داده می‌شود. مثلاً عددهای ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را در محور بالا کاملاً مشخص کرده‌ایم. خب ولی اعداد که فقط عددهای طبیعی ـ یا به قول خیلی‌ها، عددهای کامل ـ نیستند! $\frac{۸}{۳}$ هم عدد است، $\frac{۲}{۵}$ هم همین‌طور، $۱\frac{۱}{۴}$ هم همین‌طور. اگر بخواهیم جای این اعداد را روی محور اعداد مشخص کنیم، باید چه‌کار کنیم؟

می‌دانید که این اعداد کسری، در نقطه‌هایی بین عددهای طبیعی قرار می‌گیرند:



به همین ترتیب، نقاط زیادی بین نقاط اعداد طبیعی، با یک عدد کسری مشخص خواهند شد. تازه داشت یادم می‌رفت که از سمت چپ خط ما ـ یعنی محور اعداد ما ـ برای نمایش اعداد کوچک‌تر از صفر، یعنی عددهای منفی استفاده می‌شود.



نمایش کسرها روی محور

یک سؤال الآن به ذهنم رسید: اگر بخواهیم نقطهٔ نمایش کسر $\frac{۱۳۷}{۲۳۵}$ را روی محور اعداد پیدا کنیم، باید چه‌کار کنیم؟

خب، بگذارید اول کمی مرور کنیم که برای نمایش کسرِ مثلاً $\frac{۲}{۵}$ (که مثل کسرِ $\frac{۱۳۷}{۲۳۵}$، از واحد، یعنی عدد یک کوچک‌تر است) چه‌کار می‌کنیم: پاره‌خط بین ۰ و ۱ را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (چون مخرج کسر ۵ است) و بعد از صفر، ۲ تا قسمت می‌شماریم و به راست حرکت می‌کنیم (چون $\frac{۲}{۵}$، به اندازهٔ ۲ تا $\frac{۱}{۵}$ از صفر بیشتر است). پس برای کسر $\frac{۱۳۷}{۲۳۵}$، پاره‌خط بین ۰ و ۱ را باید به ۲۳۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم ـ دقت کنید: ۲۳۵ قسمت! ـ بعد از صفر،

۱۳۷ قسمت بشماریم و به سمت راست بیاییم. ولی به نظر شما، می‌توانیم این پاره‌خط را به ۲۳۵ قسمت مساوی کنیم؟ من که نمی‌توانم! بگذارید ببینم راه دیگری هست.

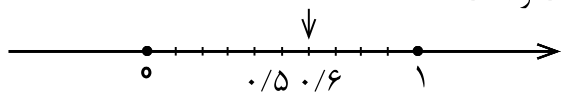
در کلاس ششم دبستان یاد گرفتیم که با تقسیم صورت کسر بر مخرج کسر، می‌توان آن را به صورتِ اعشاری نشان داد:

$$\frac{۱۳۷}{۲۳۵} \simeq ۰/۵۸۲۹۷۸۷...$$

البته بقیهٔ رقم‌های اعشاریِ آن را ننوشتیم. حالا حداقل می‌توانیم بفهمیم که عددِ کسری $\frac{۱۳۷}{۲۳۵}$، نزدیک به عددِ ۰/۵ است (و از آن بزرگ‌تر است). حتی می‌توانیم آن را با تقریب کمتر از ۰/۱ گرد کنیم، در این صورت

$$\frac{۱۳۷}{۲۳۵} \simeq ۰/۶ = \frac{۶}{۱۰}$$

یعنی عدد موردنظر ما، به $\frac{۶}{۱۰}$ خیلی نزدیک‌تر است. به این ترتیب می‌توانیم کسر $\frac{۱۳۷}{۲۳۵}$ را به صورت تقریبی نمایش دهیم: تقسیم کردنِ پاره‌خط بین ۰ و ۱ به ده قسمت، خیلی راحت‌تر است.



اگر دوست دارید، شما هم می‌توانید با ماشین‌حساب نخست نمایش اعشاریِ کسرهای زیر را به دست آورید، بعد با تقریب کمتر از ۰/۱ آن‌ها را گرد کنید تا نقطهٔ نمایش آن‌ها را به صورت تقریبی روی محور اعداد بیابید:

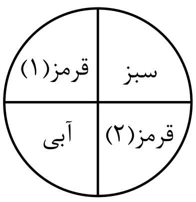
$$\frac{۲۷۵۹}{۴۳۸۵} \quad \text{و} \quad \frac{۹۸۷}{۱۳۹۲} \quad \text{و} \quad \frac{۴۷۹}{۷۵۳}$$

راستی، می‌توانید حدس بزنید چرا همهٔ مثال‌ها را از کسرهای کمتر از واحد انتخاب کردیم؟ خب اگر چیزی به ذهنتان نمی‌رسد، ادامهٔ مطلب را بخوانید.

احتمال تجربی

در یک آزمایش تصادفی قابل تکرار با جمع‌آوری نتایج آزمایش‌های تکراری، می‌توانیم احتمال تجربی رخ دادن هریک از حالت‌های آزمایش را پیدا کنیم.

مثلاً یک صفحه مانند شکل روبه‌رو با عقربه‌ای چرخان داشتیم. عقربه را می‌چرخاندیم و هر بار به طور تصادفی عقربه روی یکی از رنگ‌ها می‌ایستاد.



این وسیله را سر یک کلاس ۳۰ نفره بردیم. هر کدام از بچه‌ها ۱۰ بار عقربه را چرخاند و نتایج چرخاندن عقربه را در جدولی یادداشت کرد. جدول ۱ نمونه‌ای از جدول پرشده توسط یکی از آن‌هاست.

آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
رنگ	قرمز ۱	سبز	قرمز ۲	زرد	قرمز ۱	قرمز ۲	آبی	آبی	سبز	آبی

جدول ۱. جدول پرشده توسط یکی از دانش‌آموزان

سپس هر گروه پنج نفره، نتایج آزمایش‌های گروهش را در یک جدول جمع‌بندی کرد.

جدول ۲ نمونه‌ای از جدول پرشده در یکی از گروه‌هاست.

رنگ	تعداد	نسبت به کل آزمایش‌ها
قرمز (۱)	۱۳	$\frac{۱۳}{۵۰}=۰/۲۶$
قرمز (۲)	۱۱	$\frac{۱۱}{۵۰}=۰/۲۲$
آبی	۹	$\frac{۹}{۵۰}=۰/۱۸$
سبز	۱۷	$\frac{۱۷}{۵۰}=۰/۳۴$

جدول ۲. جدول پرشده در یک گروه

به نسبت ایستادن عقربه روی هر قسمت به کل آزمایش‌ها (۵۰ آزمایش) خوب نگاه کنید (جدول ۲)

پس از آن گروه‌ها نتایج جمع‌بندی شده را اعلام کردند و ما همهٔ نتایج را در جدولی روی تخته ثبت کردیم.

رنگ	تعداد	نسبت به کل آزمایش‌ها
قرمز (۱)	۷۲=۱۳+۱۱+۱۰+۱۱+۱۶+۱۱	۰/۲۴
قرمز (۲)	۷۷=۱۱+۱۴+۱۲+۱۲+۱۲+۱۶	۰/۲۶
آبی	۸۳=۹+۱۳+۱۸+۲۰+۱۳+۱۰	۰/۲۸
سبز	۶۸=۱۷+۱۲+۱۰+۷+۹+۱۳	۰/۲۳

جدول ۳. نتایج نهایی

به نسبت ایستادن عقربه روی هر قسمت به کل آزمایش‌ها (۳۰۰ آزمایش) خوب نگاه کنید! این اعداد با تقریب کمتر از ۰/۰۱ گرد شده‌اند. به نظر می‌رسد این نسبت‌ها یا به عبارت دیگر احتمال تجربی ایستادن عقربه روی هریک از قسمت‌ها، در ۳۰۰ آزمایش به هم نزدیک شده‌اند. راستی حالا می‌توانید بگویید چرا مثال‌هایی که در ابتدای این مقاله برای نمایش کسرها روی محور اعداد آورده‌ایم، همگی مثال‌هایی از کسرهای بین صفر و یک بودند؟

بازی ناعـــادلانه!
شانس و احتمال (۴)

زهره پندی، بهزاد اسلامی مسلّم، محدثه رجائی

کلیدواژه‌ها: شانس و احتمال، احتمال ریاضی، پرتاب سکه

اشاره

در مقالهٔ «شـانس و احتمال ۳» دیدیم که سارا و ستاره به بحث‌های خود دربارهٔ احتمال ادامه دادند. آن‌ها فهمیدند کـه معنای جمله‌هایـی مثل این جمله چیسـت: «در پرتاب تـاس، احتمـال اینکه ٦ بیاید برابر اسـت بـا $\frac{1}{6}$.» کمی بعد، دربارهٔ بازی‌های شانسـی صحبت کردند. آن‌ها بحث کردند که آیا قوانین آن بازی‌ها عادلانه اسـت یا نه. منظورشان از عادلانـه نبودن این بود که قوانین بازی ممکن اسـت باعث شـود که احتمال بردن یکی از بازیکنان بیشـتر از دیگری باشد. اکنون ادامهٔ ماجرا را بخوانید:

سـتاره و سارا مشـغول بحث بودند. دوستشان **نرگس** که لبخند شـیطنت‌آمیزی بر لب داشـت، با دو تا سکه در دست به سـتاره و سارا نزدیک شـد و گفت: «بچه‌ها بیایید بازی! هر مرتبه، هردوی سـکه‌ها را پرتاب می‌کنیم. اگر هردو رو آمدند، سـتاره یک امتیاز می‌گیرد. اگر هردو پشـت آمدند، سارا یک امتیـاز می‌گیرد. و اگر یکی رو و دیگری پشـت آمد، من یک امتیـاز می‌گیرم. بعد از ۴۰۰ بار تکرار این بازی، هرکسـی که امتیازش بالاتر باشد، برنده است.»

سـتاره و سارا با هم مشورت کردند. ستاره گفت: «سارا! به نظرت در این بازی شـرکت بکنیم یا نه؟ نکند که قوانینش به نفع نرگس باشد؟!»

اما سـارا با خونسـردی و اطمینان پاسـخ داد: «نه، نگران نباش. مثل تاس اسـت دیگرا! با این تفـاوت که نتیجهٔ پرتاب یک تاس شـش حالت دارد، اما نتیجهٔ پرتاب دو سکه فقط سه حالت دارد:

۱. هردو پشت

۲. هردو رو

۳. یکی پشت و دیگری رو.»

سـتاره پرسـید: «یعنی می‌خواهی احتمال هریک از سـه اتفاقی را که گفتی حساب کنی؟»

سارا جواب داد: «بله. این دستور را در یادداشت‌های کلاس ریاضی‌مان داشتیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب برای رخ دادن آن}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن برای رخ دادن آن}}$$

در این بازی، تعداد حالت‌های ممکن برای پرتاب دو سکه برابر است با ۳. تعداد حالات مطلوب (یعنی آن‌هایی که من می‌برم) برابر است با ۱. نتیجه می‌گیرم که در هر مرتبه پرتاب، احتمال اینکه من امتیاز بگیرم برابر است با $\frac{۱}{۳}$.»

ستاره گفت: «خب، پس در هر مرتبه پرتاب، احتمال امتیاز گرفتن من هم $\frac{۱}{۳}$ است، و احتمال امتیاز گرفتن نرگس هم $\frac{۱}{۳}$ است.»

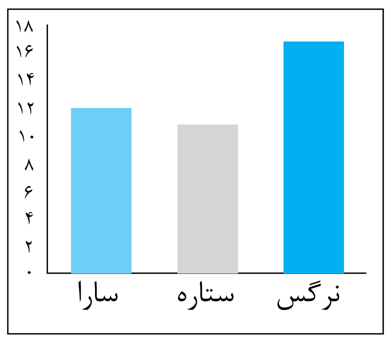
سارا گفت: «به همین دلیل می‌گویم که قوانین بازی به نفع هیچ‌یک از ما نیست. خیالت راحت باشد. قوانین بازی عادلانه است.»

ستاره به نرگس گفت: «قبول! بیا بازی کنیم. خوب امتیازها را هم ثبت کنیم و نمودارشان را هم بکشیم.»

بازی شروع شد. در ۴۰ بار بازی، این نتیجه به دست آمد:

- سارا: ۱۲ امتیاز
- ستاره: ۱۱ امتیاز
- نرگس: ۱۷ امتیاز (نمودار ۱)

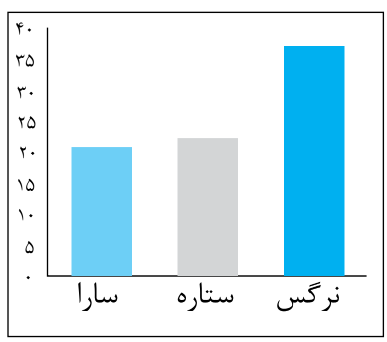
نمودار ۱



بازی را ۴۰ بار دیگر تکرار کردند در کل ۸۰ بار، امتیازها به این صورت شد:

- سارا: ۲۱ امتیاز
- ستاره: ۲۲ امتیاز
- نرگس: ۳۷ امتیاز (نمودار ۲)

نمودار ۲

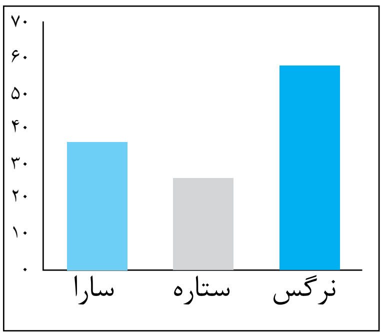


ستاره باز هم نگران بود، اما سارا به او گفت: «نگران نباش! مثل همانِ بازی است که در آن تاس می‌انداختیم. در ابتدای بازی اصلاً عجیب نیست که بین امتیازها اختلاف وجود داشته باشد. تعداد دفعات بازی که بیشتر شود، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که امتیازهایمان به هم نزدیک شود.»

با ۴۰ مرتبه بازی دیگر، امتیازهای کل ۱۲۰ مرتبه بازی چنین شد:

- سارا: ۳۶ امتیاز
- ستاره: ۲۶ امتیاز
- نرگس: ۵۸ امتیاز (نمودار ۳)

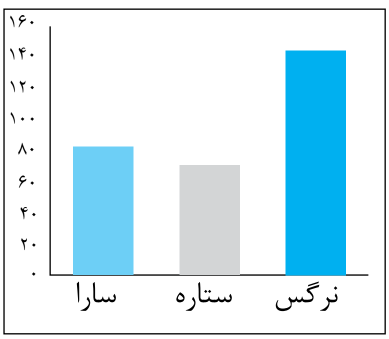
نمودار ۳



بازی ادامه یافت و نتیجه کل ۳۰۰ مرتبه بازی این بود:

- سارا: ۸۵ امتیاز
- ستاره: ۷۰ امتیاز
- نرگس: ۱۴۵ امتیاز (نمودار ۴)

نمودار ۴



هنوز ۱۰۰ مرتبهٔ دیگر باید بازی می‌کردند. سارا به نرگس گفت: «من و ستاره چند حرف درگوشی با هم داریم!» و شروع کرد به پچ‌پچ با ستاره: «من هم کم‌کم دارم نگران می‌شوم! وقتی تاس می‌انداختیم، معمولاً این‌طور نبود که یکی از ستون‌های نمودار، از دو ستون دیگر این همه بلندتر باشد.»

ستاره گفت: «اما خودت هم خوب می‌دانی که چنین اتفاقی غیرممکن نیست! حتی بدتر از آن هم ممکن بود بشود. قبل از آمدن نرگس داشتیم صحبت همین را می‌کردیم که ممکن است در ۳۰۰ بار تاس ریختن فقط ۶ بیاید. پس ممکن

اســت در ایــن بازی هم، در همــهٔ ۳۰۰ بازی که دو تا ســکه را پرتاب کردیم، یک ســکه رو و دیگری پشــت بیاید و امتیاز نرگس ۳۰۰ شود!»

ســارا گفت: «حق با توست. نمی‌توانیم با دیدن این نتایج و نمودارها مطمئن شویم که قوانین بازی به نفع نرگس هستند، اما این نمودارها مرا نگران می‌کنند. بیا بیشتر فکر کنیم. وقتی تــاس می ریختیم، همــهٔ عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در نظر ما یکسان بودند. پس وقتی دفعه‌های زیادی تاس می‌ریختیم، انتظار داشتیم همهٔ عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تقریباً به تعداد یکسانی بیایند.»

ستاره پرسید: «ممکن است این بازی تفاوت داشته باشد؟ آیا دلیلی داری که فکر کنیم **هردو پشــت**، **هردو رو** و **یکی پشت و دیگری رو** با هم فرق دارند؟»

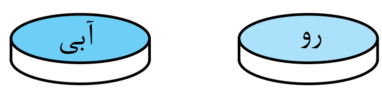
ســارا جواب داد: «منظورت این است که طوری فرق کنند که انتظار داشته باشیم، یکی از این سه حالت بیشتر از دوتای دیگر رخ دهد؟»

ســتاره جواب داد: «منظورم همین اســت کــه گفتی. من حدس می‌زنم اینکه یکی از ســکه‌ها رو بیاید و دیگری پشــت بیاید با دو وضعیت دیگر فرق دارد. اما نمی‌دانم چه فرقی!»

سارا گفت: «شاید فرقش این است که یک بار ممکن است ایــن رو بیاید و آن پشــت بیاید، و بار دیگــر آن رو بیاید و این پشت بیاید!»

ستاره با چشــمانی گردشده گفت: «من که هیچ چیزی از حرف‌هایت نفهمیدم!»

ســارا گفت: «بیا به جای اینکه با دو تا سکهٔ معمولی بازی کنیم، از یک سکهٔ معمولی همراه با یک سکهٔ رنگ‌شده استفاده کنیم. یعنی پشت یکی از سکه‌ها را قرمز کنیم و رویش را آبی. حالا بازی این‌طور می‌شود» و نوشت:

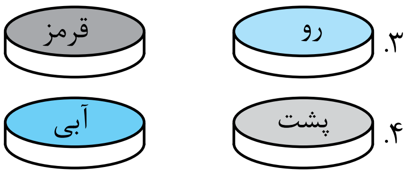
۱. 

و ادامه داد: «در این حالت تو یک امتیاز می‌گیری.

۲. 

در ایــن حالت من یک امتیاز می‌گیرم. حالا نرگس در چه صورت امتیاز می‌گیرد؟»

ســتاره گفت: «بگذار ببینم ... فهمیدم! نرگس بر خلاف ما، نــه در یک صورت، بلکه در دو صــورت امتیاز می‌گیرد» و این دو حالت را نوشت:



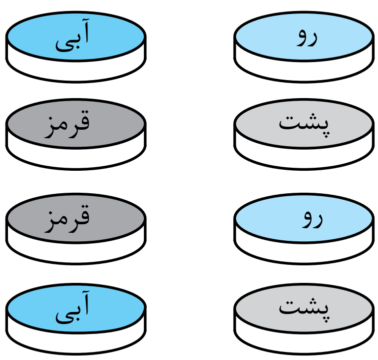
سارا گفت: «به نظر می‌رسد که سه حالتِ

رو، رو

پشت، پشت

یکی پشت و یکی رو

با هم از نظر محتمل بودن فرق دارند. اما اگر چهار حالتِ



را در نظــر بگیریم، هیــچ دلیلی نداریم که انتظار داشــته باشــیم یکی از این چهار حالت از حالتی دیگر بیشتر رخ دهد. بیا با نرگس صحبت کنیم.»

سارا به نرگس گفت: «نرگس! قوانین بازی عادلانه نیست.»

نرگس پاســخ داد: «حالا که داریــد می‌بازید این حرف را می‌زنیــد؟! خودتان هم خوب می‌دانید کــه در این بازی هیچ نتیجــه‌ای غیرممکــن نبود. ممکن بود تو تا حــالا ۳۰۰ امتیاز گرفته باشی یا اینکه ستاره ۲۰۰ امتیاز گرفته باشد و تو ۱۰۰ امتیاز و من ۰ امتیاز!»

ستاره گفت: «نه! دلیل حرفمان این نیست که در این بازی امتیازمان خیلی کمتر از تو اســت. حتی اگر امتیازمان بالا هم بود، همین حرف را می‌زدیم! دلیلمان این اســت که اگر تعداد خیلی زیادی بازی کنیم، انتظار داریم بیشتر تو ببری تا هریک از ما.»

نرگس گفت: «آخر چرا؟ مگر یادتان نیست؟ در کلاس ریاضی یاد گرفتیم احتمال رخ دادن اتفاقی مشخص را با دستور

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب برای رخ دادن آن}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن برای رخ دادن آن}}$$

حساب کنیم. خب احتمال امتیاز گرفتن هریک از ما برابر است با $\frac{1}{3}$. پس قوانین عادلانه هستند.»

سارا گفت: «نه! احتمال برد تو $\frac{1}{3}$ نیست. این دستور به این شکلی که گفتی ناقص است. در این دستور باید تعداد حالت‌ها را حساب کنیم، اما این حالت‌ها نباید هیچ فرقی با هم داشته باشند؛ یعنی باید طوری باشند که انتظار نداشته باشیم یکی از آن‌ها از دیگری بیشتر رخ دهد. اما در این بازی، حالت **یک سکه رو و دیگری پشت** در واقع دو حالت است: **اولی رو و دومی پشت** و **اولی پشت و دومی رو**. پس انتظار داریم این اتفاق هم از اتفاق **هردو پشت** و هم از اتفاق **هردو رو** بیشتر رخ دهد.»

و ستاره ادامه داد: «پس احتمال برد من $\frac{1}{4}$ است. احتمال برد سارا هم $\frac{1}{4}$ است. اما احتمال برد تو $\frac{2}{4}$ است!»

نرگس لبخندی زد و گفت: «راستش را بخواهید، از اول هم می‌دانستم که قوانین عادلانه نیست. خواستم سربه‌سرتان بگذارم! من هم به مسائل مربوط به پرتاب سکه و تاس و در کل به مبحث شانس علاقه‌مند هستم و به همین دلیل قبلاً به این مسئله فکر کرده بودم. راستی! در کتابی خوانده‌ام که یکی از ریاضی‌دان‌های قرن ۱۸ به نام **دالامبِر** اشتباهی مشابه شما مرتکب شده است. شاید شما هم بعدها ریاضی‌دانی مانند دالامبر بشوید؛ شاید هم بسیار بهتر از او!»

دالامبر ــ ریاضی‌دان قرن ۱۸

مسابقۀ خزانه‌داری

آمنه ابراهیم‌زاده طاری

کلیدواژه‌ها: معمای تشخیص سکۀ تقلبی، راه‌حل‌های الگوریتمی

پادشـــاه به تازگی خزانه‌دارش را برکنار کرده بود، چون در حساب و کتاب خزانۀ ســـلطنتی از او اشتباه‌هایی سر زده بود. حالا خزانه‌دار ســـابق، مشغول یادگیری ریاضیات بود و پادشاه هم دنبال خزانه‌دار دیگری می‌گشـــت. افـــراد زیادی داوطلب بودنـــد تا خزانـــه‌دار دربار بشـــوند، برای همین قـــرار بود برای انتخاب خزانه‌دار جدید چند مسابقه انجام شود.

اولین مسابقه، مسابقۀ تشخیص سکه بود؛ شرکت‌کننده‌ها باید یک سکۀ تقلبی را از بین ۸ سکه تشخیص می‌دادند. برای این مسابقه به هر کدام از داوطلب‌ها ۸ سکۀ طلا و یک ترازوی دوکفه‌ای داده شـــد. ســـکۀ تقلبی ظاهری شـــبیه بقیۀ سکه‌ها داشـــت، ولـــی وزنش اندکی کم‌تر از بقیۀ ســـکه‌ها بـــود. برنده کسی بود که کمتر از دیگران از ترازو استفاده می‌کرد. مسابقه شروع شد. شرکت‌کننده‌ها قبل از هر کاری سعی کردند بدون اســـتفاده از ترازو و با دست‌هایشان ســـکۀ تقلبی را پیدا کنند، ولی اختلاف وزن سکۀ تقلبی با سکه‌های سالم آن‌قدر نبود که بتوانند موضوع را بدون ترازو تشخیص بدهند.

چند دقیقه بعد از شروع مسابقه، یکی از شرکت‌کننده‌ها از مسابقه حذف شد. او گفته بود: «جواب مسابقه را پیدا کرده‌ام! برای پیدا کردن ســـکۀ تقلبی، لازم نیســـت بیشتر از شش بار از ترازو اســـتفاده کنیم.» و بعد، پادشـــاه از او پرسید: «چه‌طور توانستی با شش بار وزن کردن، سکه را پیدا کنی؟» و او جواب داد:

- سکۀ اول را در یک کفه و سکۀ دوم را در کفۀ دیگر ترازو گذاشـــتم، ترازو در حالت تعادل قرار گرفت. یعنی هیچ‌کدام از این دو سکه تقلبی نیست.

● بعد سکهٔ سوم را به جای سکهٔ دوم گذاشتم. باز هم ترازو به حالت تعادل قرار گرفت. یعنی سکهٔ سوم هم‌وزن سکهٔ اول است. پس آن هم سالم است.

● بعد سکهٔ شمارهٔ ۴ را به جای سکهٔ شمارهٔ ۳ گذاشتم و باز هم ترازو به حالت تعادل قرار گرفت. همین کار را ادامه دادم تابه سکهٔ هفتم رسیدم. هر بار ترازو در حالت تعادل قرار گرفت. یعنی سکه‌های دوم تا هفتم هم‌وزن سکهٔ اول‌اند، پس هیچ‌کدام از سکه‌های اول تا هفتم، تقلبی نیستند. تا اینجا من

۶ بار از ترازو استفاده کرده‌ام. ولی لازم نیست سکهٔ هشتم را وزن کنم. چون می‌دانم این هفت سکه سالم‌اند. پس حتماً سکهٔ هشتم سکهٔ تقلبی است.»

حرف مرد که تمام شد، شرکت‌کنندهٔ دیگری گفت: «من راه بهتری سراغ دارم. من می‌توانم با ۳ بار وزن کردن، سکهٔ تقلبی را پیدا کنم!» ولی حرف او تمام نشده بود که دو نفر از دو طرف اتاق فریاد زدند: «با ۲ بار هم می‌شود!» پادشاه رویش را به طرف یکی از این دو نفر چرخاند و از او خواست بگوید چه‌طور می‌تواند این کار را بکند. توضیح این شخص چنین بود:

● اول سکه‌های اول تا چهارم را در کفهٔ سمت راست، و سکه‌های پنجم تا هشتم را در کفهٔ سمت چپ ترازو گذاشتم. کفهٔ چپ سنگین‌تر بود. پس یکی از سکه‌های اول تا چهارم تقلبی است.

● بعد کفه‌های ترازو را خالی کردم و سکهٔ اول را در یک کفه و سکهٔ دوم را در کفهٔ دیگر گذاشتم. سکهٔ دوم سبک‌تر بود. پس سکهٔ دوم تقلبی است.

حالا نوبت شرکت‌کنندهٔ دیگر بود تا راهش را برای یافتن سکهٔ تقلبی توضیح دهد. او راهش را این‌طور توضیح داد:

● اول سکه‌های اول، دوم و سوم را در کفهٔ سمت راست، و سکه‌های چهارم، پنجم و ششم را در کفهٔ سمت چپ ترازو گذاشتم. کفهٔ راست سنگین‌تر بود. پس سکهٔ تقلبی در کفهٔ سمت چپ بود. یعنی یکی از سکه‌های چهارم تا ششم تقلبی است.

● بعد سکهٔ چهارم را در یک کفه و سکهٔ پنجم را در کفهٔ دیگر گذاشتم. ترازو به حالت تعادل قرار گرفت؛ پس هیچ‌کدام از این دو سکه تقلبی نیستند. یعنی سکهٔ ششم، سکهٔ تقلبی است.

پادشاه از دو مردی که توانسته بودند با دو بار وزن کردن، سکهٔ تقلبی را پیدا کنند، خواست تا از اتاق بیرون بروند و چند دقیقه بعد برگردند. در این فاصله، یکی از خدمهٔ دربار، به دستور پادشاه، جای سکه‌های هریک از دو شرکت‌کننده را تغییر داد. وقتی دو نفر وارد اتاق شدند، پادشاه از آن‌ها خواست تا دوباره با روشی که توضیح دادند، سکهٔ تقلبی را پیدا کنند. این بار نتیجه کمی متفاوت بود؛ یکی از آن دو نفر برای پیدا کردن سکهٔ تقلبی مجبور شد سه بار از ترازو استفاده کند، در حالی‌که نفر دیگر باز هم توانست با دو بار وزن کردن، سکهٔ تقلبی را پیدا کند.

به نظر شما کدام‌یک از آن‌ها باز هم توانسته با دو بار وزن کردن سکه‌ها، سکهٔ تقلبی را پیدا کند؟

روش حیرت‌انگیز ضرب اعداد بدون ماشین‌حساب

فریبا معهود

کلیدواژه‌ها: ضرب اعداد

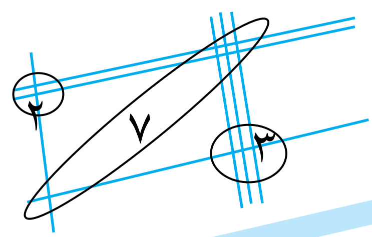
تصمیم دارم شما دوستان را با شیوهٔ فوق‌العاده‌ای برای انجام عمل ضرب در ریاضیات آشنا کنم.

پس از یاد گرفتن این شیوه قادر خواهید بود تمام اعداد را، چه بزرگ و چه کوچک، چه تک‌رقمی و چه چندرقمی، به راحتی در یکدیگر ضرب کنید و پاسخ آن‌ها را به راحتی و بدون استفاده از ماشین‌حساب پیدا کنید. برای این کار هم فقط کافی است چند خط ناقابل رسم کنید و تمام!

توضیح این روش با جملات بسیار دشوار است، بنابراین اجازه بدهید کار خود را با تصویر شروع کنیم.

اولین مثالی که برای شما در نظر گرفته‌ام، بسیار ساده است. عدد ۲۱ را در ۱۳ ضرب کرده‌ایم. مراحل انجام ضرب به صورت زیر بوده است:

۲۱×۱۳ = ۲۷۳



۲۷۳

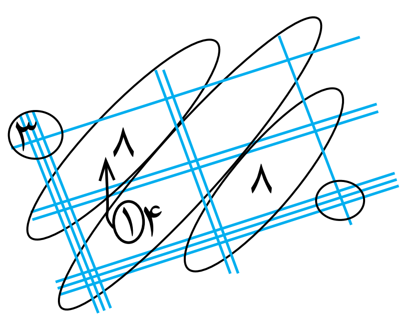
اول، عدد ۲۱ از ۲ و ۱ تشکیل شده است. پس ابتدا ۲ خط در بالا و ۱ خط در پایین آن به صورت افقی رسم می‌کنیم.

دوم، عدد ۱۳ از ۱ و ۳ تشکیل شده است. پس ابتدا ۱ خط و سپس ۳ خط به نحوی رسم می‌کنیم که خط‌هایی را که قبلاً به صورت افقی رسم کرده بودیم، قطع کنند.

سوم، به ترتیب از چپ به راست ابتدا در رأس مستطیل سپس در قطر آن و بعد در رأس سمت راست، تعداد نقطه‌هایی را که خط‌ها در آن‌ها یکدیگر را قطع کرده‌اند، می‌شماریم و ارقام به دست آمده را به همان ترتیب از چپ به راست به عنوان صدگان، دهگان و یکان عدد قرار می‌دهیم تا به پاسخ برسیم.

روش کار بسیار ساده است، ولی اجازه بدهید با دو رقم بزرگ‌تر آن را تکرار کنیم. این بار قصد داریم عدد ۱۲۳ را در ۳۲۱ ضرب کنیم:

۱۲۳×۳۲۱ = ۳۹۴۸۳

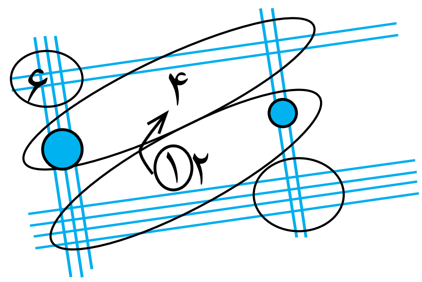


۳[۸+۱]۴۸۳

این بار با بالا رفتن ارقام کار کمی سخت‌تر شد. روش دقیقاً مثل قبل است، با این تفاوت که این بار به جز قطر مستطیل، دو قسمت دیگر هم می‌باید شمرده شوند که برایتان دور آن‌ها خط کشیده‌ام. اما یک نکته وجود دارد: اگر تعداد نقطه‌هایی که می‌شمارید دورقمی شود، همان‌طور که می‌بینید، باید دهگان آن را به رقم قبلی بسپارید؛ دقیقاً مثل جمع عادی.

تا اینجا اعدادی که در هم ضرب کردیم، دارای ارقام برابر بودند. یعنی هردو سه رقمی یا هردو دو رقمی بودند. اگر این‌طور نباشد چه می‌شود؟ اجازه بدهید این حالت را هم با یک مثال با هم بررسی کنیم:

۲۰۴×۳۲ = ۶۵۲۸

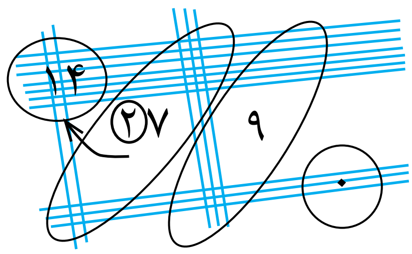


۶[۴+۱]۲۸

خب، در این مثال دو نکته وجود داشت: اول این‌که اگر تعداد ارقام دو عددی که در هم ضرب می‌کنیم برابر نباشد، چه کار کنیم. دوم این‌که اگر در عددمان رقم ۰ وجود داشته باشد، ضرب به چه شکل صورت می‌پذیرد. اگر توجه کرده باشید، دو دایره در شکل وجود دارد. اگر در این عدد، رقم صفر وجود نداشت، در آن دو نقطه هم خطوط با یکدیگر برخورد می‌کردند و دو تا از ارقام پاسخ را در اختیار ما می‌گذاشتند. به هر حال نکتهٔ مهم این است که جای خالی آن‌ها را نباید فراموش کنید، وگرنه محاسبات غلط از آب در می‌آیند.

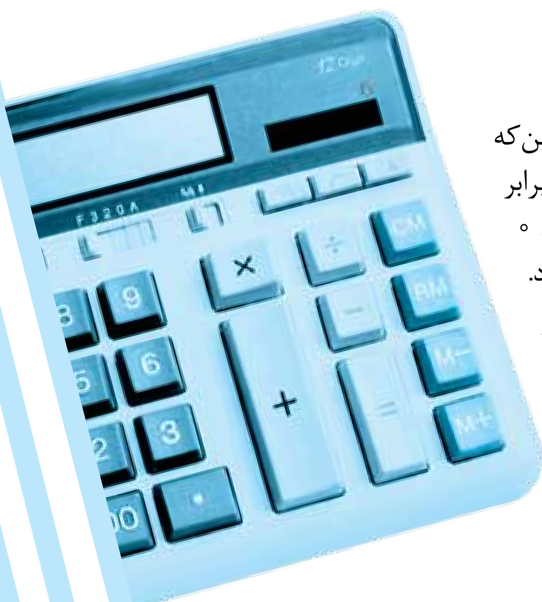
یک مثال دیگر در مود **اعداد صفردار** را با هم بررسی می‌کنیم:

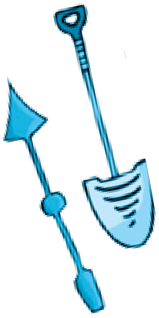
۷۳×۲۳۰ = ۱۶۷۹۰



[۱۴+۲]۷۹۰

فکر می‌کنم مثال‌ها برای آموزش این روش به قدر کافی گویا بوده‌اند و شما هم دانش‌آموزان دقیق و متفکری هستید و با دیدن این مثال‌ها، روش را یاد گرفته‌اید.





بپرس، به گنج برس و ریاضی یاد بگیر!

آمنه ابراهیم‌زاده طاری، بهزاد اسلامی مسلّم

کلیدواژه‌ها: دایره، هندسهٔ تاکسی

اشاره

در همین شمارهٔ مجلهٔ برهان با بازی «بپرس و به گنج برس» آشنا می‌شوید. بحث‌های ریاضی جالبی دربارهٔ این بازی وجود دارد که می‌خواهیم یکی از آن‌ها را بررسی کنیم. توصیه می‌کنیم پیش از ادامهٔ این مطلب، نخست با بازی آشنا شوید.

دایره تاکسی‌ای!

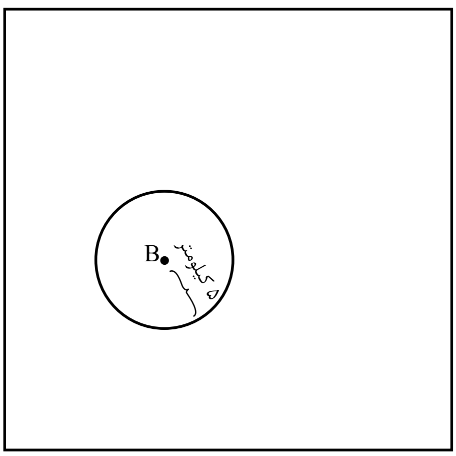
تصور کنید مشغول «بازی بپرس و به گنج برس» هستید و دنبال گنج می‌گردید. در اولین پرسش، یکی از چهارراه‌های شهر را علامت می‌زنید و حریفتان به شما می‌گوید فاصلهٔ تاکسی‌ای این چهارراه تا گنج ۵ کیلومتر است. با این اطلاعات، گنج در کدام چهارراه‌ها ممکن است باشد؟ قبل از جواب دادن به این سؤال، بیایید کمی شرایط مسئله را تغییر بدهیم:

فرض کنید بازی این‌طور بود که:

اولاً گنج می‌توانست هرجایی از شهر ـ و نه فقط در چهارراه‌ها ـ پنهان شده باشد.

ثانیاً، حریفتان هر بار در جواب به سؤال شما، به جای اینکه فاصلهٔ تاکسی‌ای آن نقطه تا گنج را بگوید، فاصلهٔ معمولی را اعلام می‌کردند.

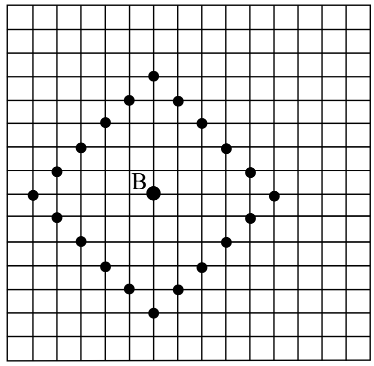
با این شرایط فرض کنید شما نقطهٔ B را علامت می‌زدید و می‌پرسیدید فاصلهٔ معمولی B تا گنج چه‌قدر است. ضمناً حریفتان می‌گفت گنج در ۵ کیلومتری این نقطه قرار دارد. در این صورت با این اطلاعات می‌فهمیدید که گنج ممکن است در هریک از نقاط روی محیط دایره‌ای قرار داشته باشد؛ دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۵ کیلومتر (شکل ۱).



شکل ۱

برگردیم به سؤال اول مقاله دربارهٔ بازی «بپرس و به گنج برس»: گنج ممکن است در هریک از نقطه‌هایی باشد که فاصلهٔ تاکسی‌ای آن از نقطهٔ A برابر ۵ کیلومتر است. اما این نقطه‌ها با هم چه شکلی درست می‌کنند؟ نقطهٔ بزرگ در شکل ۲ همان B است. نقطه‌های کوچک، همهٔ چهارراه‌هایی هستند

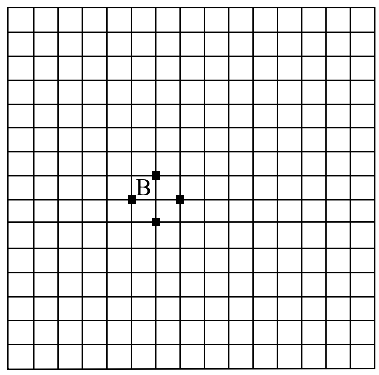
که فاصلهٔ تاکسی‌ای آن‌ها از B برابر ۵ کیلومتر است. (شکل ۲)



شکل ۲

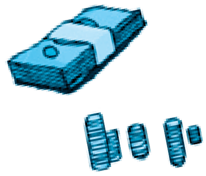
حالا همان‌طور که دایره معمولی را تعریف می‌کنیم، دایرهٔ تاکسی‌ای را هم تعریف می‌کنیم:

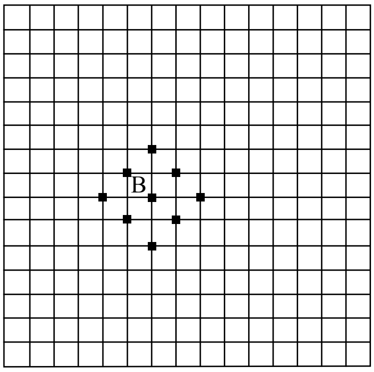
دایرهٔ تاکسی‌ای به شعاع ۱ و به مرکز B، یعنی همهٔ چهارراه‌هایی از شهر که فاصلهٔ تاکسی‌ای آن‌ها از B برابر ۱ باشد (شکل ۳).



شکل ۳

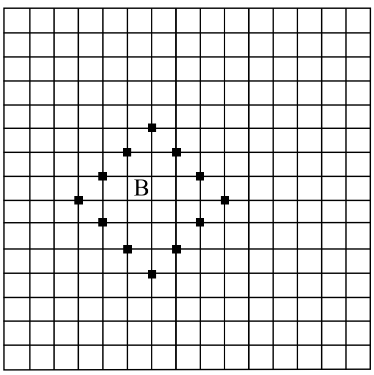
دایرهٔ تاکسی‌ای به شعاع ۲ و مرکز B، یعنی همهٔ چهارراه‌هایی از شهر که فاصلهٔ تاکسی‌ای آن‌ها از B برابر ۲ باشد. (شکل ۴).





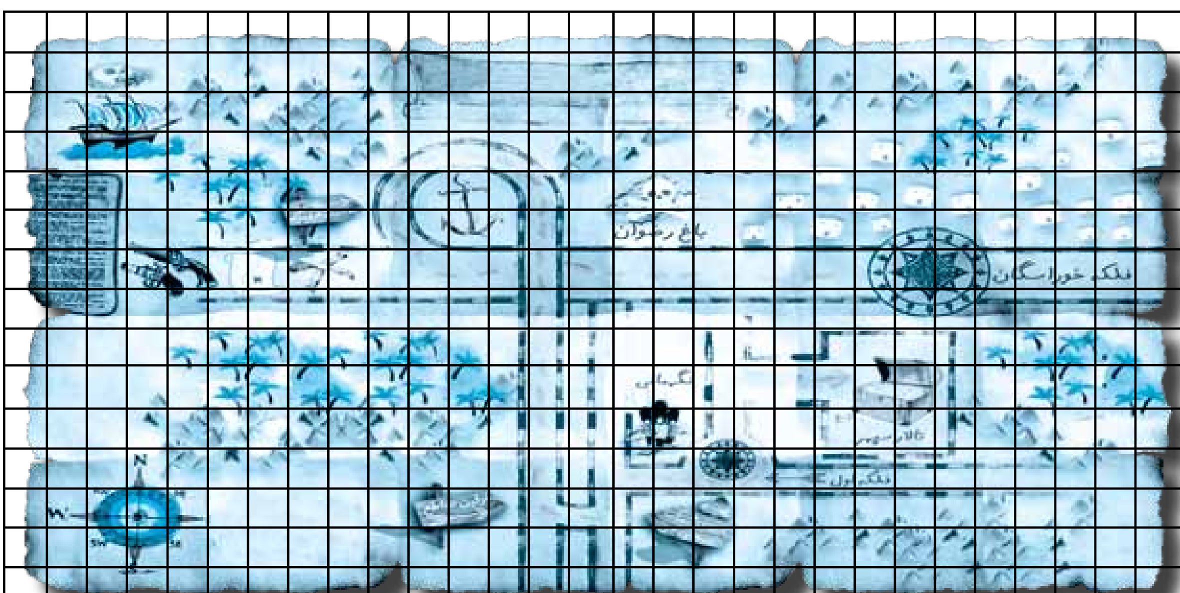
شکل ۴

دایرهٔ تاکسی‌ای به شعاع ۳ و مرکز B یعنی همهٔ چهارراه‌هایی از شهر که فاصلهٔ تاکسی‌ای‌شان از B برابر ۳ باشد. (شکل ۵).



شکل ۵

و به همین ترتیب.



وضعیت دو دایرهٔ تاکسی‌ای نسبت به یکدیگر

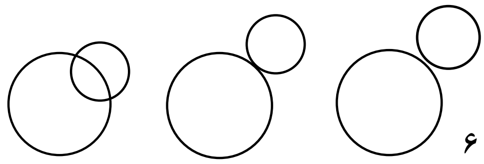
در هندسهٔ معمولی، دو دایرهٔ متفاوت ممکن است:

√ هیچ نقطهٔ‌مشترکی نداشته باشند؛

√ در یک نقطه مشترک باشند؛

√ دو نقطهٔ مشترک داشته باشند؛

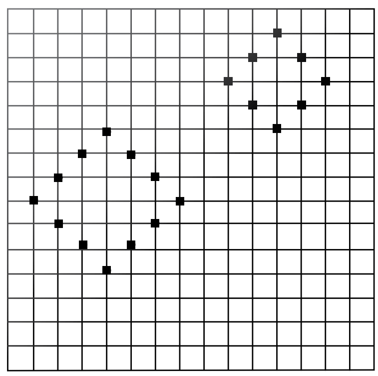
در شکل ۶ این سه حالت مشخص شده است.



شکل ۶

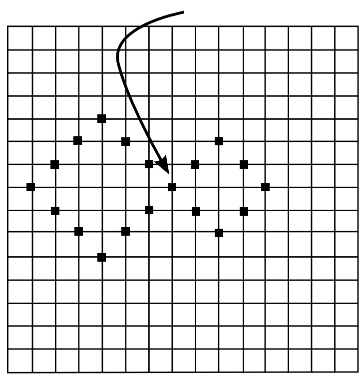
دو دایرهٔ تاکسی‌ای چه‌طور؟ آن‌ها یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

دو دایـرهٔ تاکســی‌ای ممکن اســت هیچ نقطهٔ مشــترکی نداشته باشند (شکل ۷).



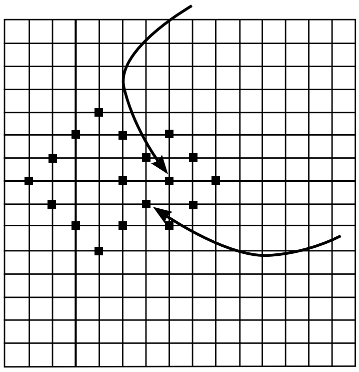
شکل ۷

دو دایرهٔ تاکســی‌ای ممکن است یک نقطهٔ مشترک داشته باشند. (شکل ۸).



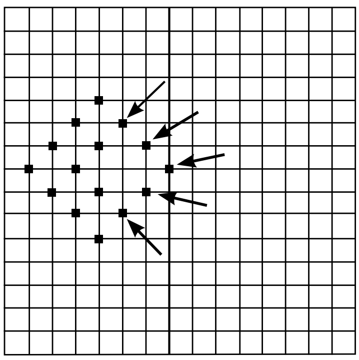
شکل ۸

دو دایرهٔ تاکسی‌ای ممکن اســت دو نقطهٔ مشترک داشته باشند. (شکل ۹)



شکل ۹

دو دایره تاکســی‌ای (برخلاف دایره‌هــای معمولی) ممکن است بیش از دو نقطهٔ مشترک داشته باشند! (شکل ۱۰).

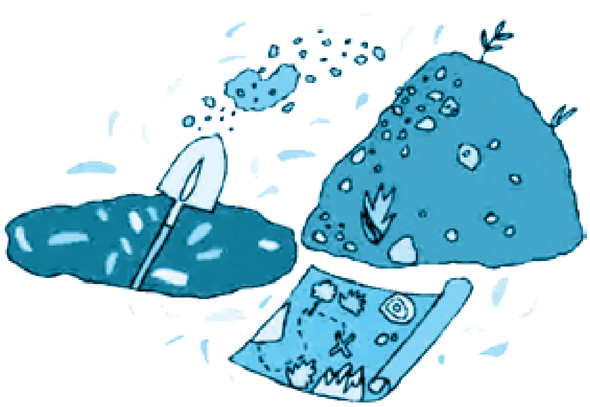


شکل ۱۰

آنچــه در اینجا یاد گرفتید، علاوه بر این‌که به خودی خود جالب و بامزه است، می‌تواند در بازی «بپرس و به گنج برس» هم به کارتان بیاید!

اگر به موضوع فاصلهٔ تاکسی‌ای و ویژگی‌های آن علاقه‌مند شــده‌اید، می‌توانید از کتاب «هندسهٔ تاکسی: ماجراجویی در هندســهٔ نا اقلیدسی» اســتفاده کنید. البته ممکن است برای خواندنش لازم باشد از معلمتان کمی کمک بگیرید. انتشارات «دانش‌پژوهــان جوان» در ســال ۱۳۹۰ ترجمهٔ این کتاب را منتشر کرده است.

می‌توانید در اینترنت، عبارت «Taxicab Geometry» را جست‌وجو کنید تا وب‌گاه‌هایی دربارهٔ این موضوع بیابید.



دربارهٔ اقتصاد

از چند تیتر اقتصادی تا ۳۷۸ تریلیون تومان!

حسین نامی ساعی

کلیدواژه‌ها: اقتصاد، سهام، بورس، اوراق بهادار، صادرات، واردات، سرمایه‌گذاری، نفت

صفحهٔ اقتصادی روزنامه‌ای را می‌خواندم که چند تیتر نظرم را جلب کرد:

«فروش ۳۰۰ میلیون سهم دولتی در بورس در آبان ماه ۱۳۹۲»

«کاهش ۱۲/۷ درصدی صادرات طی ۸ ماه اول سال ۹۲»

«حجم سرمایه‌گذاری خارجی در حوزهٔ خودرو یک میلیارد دلار است»

«تقاضا برای نفت ایران به ۳/۵ میلیون بشکه در روز می‌رسد.»

رسید کاغذی و برگ به خریداران سهام داده می‌شود. به این برگ‌های کاغذی اوراق بهادار می‌گویند. به شرکت‌هایی هم که سرمایهٔ آن‌ها از فروش اوراق بهادار تشکیل شده است، «شرکت سهامی» می‌گویند.

اوراق بهادار یعنی برگ‌هایی که قیمت دارند، با ارزش‌اند و گران‌بهایند؛ کاغذهای نرخ‌دار.

در این چند تیتر اصطلاحات اقتصادی دیده می‌شود که معمولاً در اخبار اقتصادی به کار می‌روند؛ مانند **سهم، بورس، صادرات، سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاری خارجی، تقاضا، بشکهٔ نفت.**

خُب، این اصطلاحات یعنی چه؟

سهام جمع کلمهٔ **سهم** است، یعنی مبلغی از سرمایهٔ یک کارخانه یا شرکت یا سازمان و غیره که به صورت یک

بورس یعنی جایی که خرید و فروش اوراق بهادار انجام می‌گیرد و یا جایی که دلالان و بازرگانان برای معامله و داد و ستد جمع می‌شوند.

صادرات یعنی کالاهایی که از کشور ما به کشورهای دیگر فرستاده می‌شود. در مقابل صادرات، اصطلاح **واردات** را داریم و آن یعنی کالاهایی که از کشورهای دیگر وارد کشور ما می‌شوند.

ســرمایه یعنی پول یا کالایی که اساس کسب و تجارت را تشــکیل می‌دهد و در اصل پولی است که به بهای چیزی داده شــده که هروقت بیشتر از آن فروخته شود، مبلغ اضافی سود خواهد بود. در اصل یعنی دارایی و ثروت و آنچه که کســی از اصل و نقد و مایه دارد.

ســرمایه‌گذاری یعنی پــول یا کالایی که توســط فرد یا گروهی نزد فرد یا گروه دیگری به قصد بردن ســود و منفعت سپرده شود.

ســرمایه‌گذاری خارجی ســرمایه‌ای اســت که توســط سرمایه‌گذارانی از کشورهایی دیگر در کشور ما سرمایه‌گذاری می‌شود.

تقاضــا اصطلاحی اســت در مقابل **عرضــه**. تقاضا یعنی درخواســت کردن و در اقتصــاد یعنی افراد یــا گروه‌هایی که درخواســت کالایی را می‌کنند. **عرضه‌کنندگان** یعنی کسانی که کالاهای مورد درخواست تقاضاکنندگان را ارائه می‌دهند و یا ارائه‌کنندگان کالاهای مورد نیاز درخواست‌کنندگان.

بشکه ظرفی است چوبی یا فلزی و بزرگ به شکل استوانهٔ شــکم‌دار که برای عرضه و صادرات نفت به کشــورهایی دیگر از آن اســتفاده می‌شود و در واقع واحد فروش و صادرات نفت است.

خــب حالا که کمــی با این اصطلاحات آشــنا شــدید، به تیترهای بالا سری می‌زنیم تا ببینیم که چه می‌گویند!

در متــن تیتر فروش ۳۰۰ میلیون ســهم دولتی در بورس طــی یک ماه آمده بود: «به نقل از یک ســازمان خصوصی، در آبان ماه ســال ۹۲، ۳۰۰ میلیون ســهم به ارزش ۹۳۴ میلیارد ریال از طریق اوراق بهادار فروخته شده است.»

یعنی به صورت میانگین هر سهم ارزشی معادل

$$۳۱۱۳/۳۳ = \frac{۹۳۴۰۰۰۰۰۰۰۰۰}{۳۰۰۰۰۰۰۰۰}$$

ریال یا حدوداً ۳۱۱ تومان در بازار بورس داشته است.

در متن تیتر کاهش ۱۲/۷ درصدی صادرات طی ۸ ماه اول ســال ۱۳۹۲ آمده بــود: «۲۴ میلیارد و ۶۰۵ میلیون دلار کالا در ۸ ماههٔ اول ســال ۹۲ به خارج از کشور صادر شده که این میزان نســبت به مدت مشابه سال ۹۱ به میزان ۱۲/۷ کاهش داشته است.»

یک ســؤال، با توجه به توضیحات این خبر، حســاب کنید میزان صادرات در ۸ ماه اول ســال ۹۱ چه میزان بوده اســت؟

برای پاسخ، اگر ۱۰۰ را از ۱۲/۷ کم کنیم، می‌شود:

۱۰۰−۱۲/۷=۸۷/۳

پــس ۲۴۶۰۵۰۰۰۰۰۰ دلار یا ۲۴ میلیارد و ۶۰۵ میلیون دلار. در واقع ۸۷/۳ درصد صاردات کالا نســبت به مدت مشابه آن، یعنــی صــادرات کالا در ۸ ماه اول ســال ۹۱ بوده اســت.

بنابراین در سال ۹۱:

$$\frac{۲۴۶۰۵۰۰۰۰۰۰۰\times ۱۰۰}{۸۷/۳} = ۲۸۱۸۴۴۲۱۵۳۵$$

۲۸ میلیارد و ۱۸۴ میلیون و ۴۲۱ هزار و ۵۳۵ دلار کالا صادر شده است.

تیتر بعدی این بود که حجم سرمایه‌گذاری خارجی در حوزهٔ خودرو یک میلیارد دلار است. یک میلیارد دلار سرمایه‌گذاری خارجیان در بازار خودرو ایران با حساب میانگین هر دلار ۳۰۰۰ تومان می‌شود:

۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰×۳۰۰۰=۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۳ تریلیون تومان!!

یک سؤال دیگر، با ۳ تریلیون تومان چند تا پراید و پژو می‌شود تولید کرد؟! از سایپا و ایران‌خودرو بپرسید!

فرض کنید اگر تولید هر خودرو و پراید برای سایپا حداکثرِ حداکثر ۱۰ میلیون تومان آب بخورد، آن‌وقت می‌توان با ۳ تریلیون تومان ۳۰۰ هزار عدد پراید تولید کرد!

۳۰۰۰۰۰=۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰/۱۰۰۰۰۰۰۰

یک موضوع دیگر این‌که؛ اگر سایپا از تولید هر پراید دستِ‌کم دست‌کم ۵ میلیون تومان سود ببرد، ۳۰۰ هزار تا ۵ میلیون تومان می‌شود:

۳۰۰۰۰۰×۵۰۰۰۰۰۰=۱۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱ تریلیون و ۵۰۰ میلیارد تومان!

فکر کنید که با این ۱/۵ تریلیون تومان چه کارهایی می‌توان کرد؟

آخرین تیتر اقتصادی هم این بود: «تقاضا برای نفت ایران به ۳/۵ میلیون بشکه در روز می‌رسد.»

خب یک سؤال دیگر: اگر میانگین ارزش هر بشکه نفت ایران ۱۰۰ دلار باشد روزانه، در ماه، و در سال، چند دلار و چند تومان از فروش نفت حاصل می‌شود؟

پاسخ این سوال بسیار ساده است: ۳/۵ میلیون را در ۱۰۰ دلار ضرب کنید:

۳/۵×۱۰۰=۳۵۰

سی‌صد و پنجاه میلیون دلار در روز، و این مبلغ با در نظر داشتن میانگین هر دلار ۳۰۰۰ تومان برابر است با:

۳۵۰۰۰۰۰۰۰×۳۰۰۰=۱۰۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۱ تریلیون و ۵۰ میلیارد تومان در هر روز!

و یا:

۱۰۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰×۳۰=۳۱۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۳۱ تریلیون و ۵۰۰ میلیارد تومان در هر ماه. و در سال:

۳۱۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰×۱۲=۳۷۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

۳۷۸ تریلیون تومان در سال!

که بخش مهمی از بودجهٔ اقتصادی را تشکیل می‌دهد.

بچه‌ها دیگر خسته شدیم تا همین جا بس است!

زهره پندی

ریاضی‌ورزی در محیط نرم‌افزار Excel

یک تغییر کوچک در شبیه‌ساز پرتاب سکه

کلیدواژه‌ها: اکسل، راهنمای استفاده از نرم‌افزار، پرتاب سکه، شبیه‌ساز پرتاب سکه

برای آنکه بتوانید از محیط Excel برای انجام این پروژه و دیگر پروژه‌هایتان استفاده کنید، لازم است مجموعه نرم‌افزارهای Microsoft Office را روی رایانهٔ خود نصب کنید. این مجموعه، شامل تعدادی نرم‌افزار کاربردی است که یکی از آن‌ها Microsoft Excel Office است.

(برای آشنایی بیشتر با این نرم‌افزار به مقالاتی که در شمارهٔ ۶۸ و ۶۹ این دوره و ۶۴ و ۶۵ و ۶۶ دورهٔ قبل همین مجله با عنوان «آمادگی برای به‌کارگیری Excel در انجام پروژه‌های ریاضی» آمده است، مراجعه کنید.)

در شمارهٔ قبل همراه هم در محیط این نرم‌افزار یک شبیه‌ساز پرتاب سکه ساختیم و با استفاده از آن در آخرین فعالیت، نتیجهٔ صد بار پرتاب یک سکه را با یک عدد که نشان‌دهندهٔ تعداد رو آمدن‌ها بود، نشان دادیم.

آن فایل را ذخیره کردیم تا این بار هم از آن استفاده کنیم.

ما این فایل را با نام «Random Generator 1» به معنی «مولد تصادفی ۱» نام‌گذاری کرده‌ایم. برای دسترسی به آن می‌توانید به وبلاگ مجله به آدرس زیر مراجعه کنید:

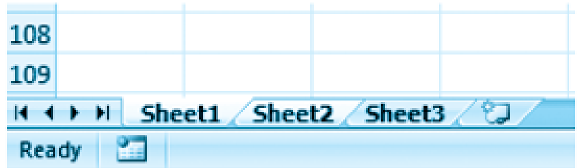
http://weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee

فایل مربوط به پروژهٔ قبل را باز کنید. ده بار دکمهٔ F9 صفحه کلید را بزنید و هر بار نتیجهٔ صد آزمایش جدید را ببینید و در ستون مربوط به شبیه‌ساز اول در جدول زیر یادداشت کنید.

شبیه‌ساز اول	شبیه‌ساز دوم	شبیه‌ساز سوم	شبیه‌ساز چهارم	شبیه‌ساز پنجم	شبیه‌ساز ششم

■ یک تغییر کوچک

با کلیک روی «sheet2» در پایین صفحه، به صفحهٔ دوم همان فایل بروید.



در خانهٔ A1 در این صفحه، مانند صفحهٔ قبل عبارت (=RANDO) را بنویسید.
اما در خانهٔ B۱ عبارت (=ROUND (A1 * 0 ,7 ,0 را بنویسید و دکمهٔ Enter را بزنید.

fx =ROUND(A1*0.7,0)

	A	B	C
1	0.764095	1	
2			
3			
4			
5			

چه عددی در هریک از این خانه‌ها می‌بینید؟
چند بار دکمهٔ F۹ صفحه کلید را بزنید و نتیجه را مشاهده کنید.
باز هم با هر بار فشردن کلید F۹، در خانهٔ B1 عدد ۰ (پشت آمدن سکه) یا ۱ (رو آمدن سکه) قرار می‌گیرد. این بار هم با یک تغییر کوچک، یک شبیه‌ساز پرتاب سکه ساخته‌ایم. (چه تغییری؟)
خانه‌های A1 و B1 را در بگیرید و تا سطر صدم پایین بکشید. بدین ترتیب در هریک از خانه‌های ستون B یکی از عددهای ۰ یا ۱ نمایش داده می‌شود.

91	0.792946	1	
92	0.364674	0	
93	0.377606	0	
94	0.434685	0	
95	0.229809	0	
96	0.844644	1	
97	0.728353	1	
98	0.666466	0	
99	0.500079	0	
100	0.360485	0	
101			
102			

کلید F۹ صفحه کلید را بزنید و ستون B را نگاه کنید. با استفاده از عملگر SUM در خانهٔ B۱۰۱ حاصل جمع اعداد خانه‌های B۱ تا B۱۰۰ را قرار دهید.

91	0.792946	1	
92	0.364674	0	
93	0.377606	0	
94	0.434685	0	
95	0.229809	0	
96	0.844644	1	
97	0.728353	1	
98	0.666466	0	
99	0.500079	0	
100	0.360485	0	
101		=SUM(B1:B100)	
102			

باز هم ده بار کلید F۹ صفحه کلید را بزنید و عدد خانهٔ B101 را که نتیجهٔ صد بار پرتاب سکهٔ جدید (شبیه‌ساز دوم) است، در جدول یادداشت کنید. آیا تفاوتی میان نتایج این شبیه‌ساز و شبیه‌ساز قبلی مشاهده می‌کنید؟
فکر می‌کنید در کدام شبیه‌ساز، سکه‌ای سالم شبیه‌سازی شده است؟ چرا؟

■ بررسی تغییر!

چه تغییری صورت گرفته است؟
ستون B در صفحهٔ دوم با یک تغییر کوچک، مشابه ستون B در صفحهٔ اول شکل گرفته است. تنها عبارت‌های نوشته‌شده در خانه‌های B1 در این دو صفحه با هم متفاوت‌اند. پس عبارت نوشته شده در خانهٔ B1 در صفحهٔ اول یعنی

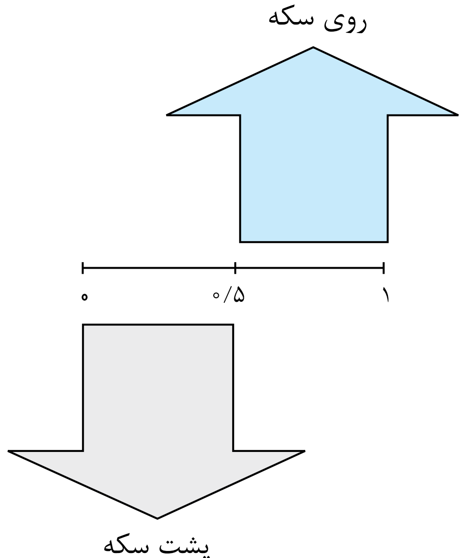
=ROUND (A1,0)

و عبارت نوشته شده در خانهٔ B1 در صفحهٔ دوم، یعنی

=ROUND (A1 * 0 ,7 ,0)

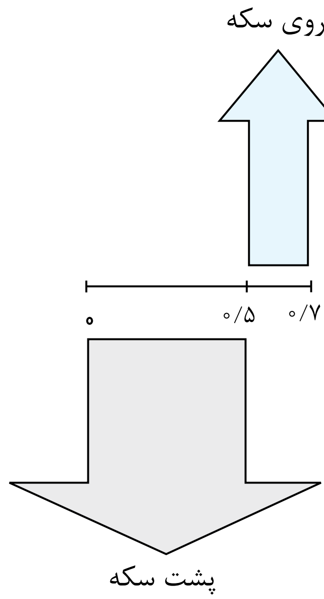
را با هم مقایسه می‌کنیم.

در خانهٔ B1 صفحهٔ اول، گردشدهٔ عدد مربوط به خانهٔ A1 با تقریب کمتر از یک (یعنی بدون رقم اعشار) قرار گرفته است:



اما در خانهٔ B1 صفحهٔ دوم، گرد شدهٔ حاصل $A1 \times 0/7$ با تقریب کمتر از یک قرار گرفته است. $A1 \times 0/7$ یعنی عدد مربوط به خانهٔ A1 ضرب در هفت دهم؛ پس حاصل آن عددی تصادفی بین صفر و هفت‌دهم است! چرا؟

این عدد با تقریب کمتر از یک گرد می‌شود! فکر می‌کنید احتمال ۰ شدن (به پشت افتادن سکه) با ۱ شدن (رو آمدن سکه) در این شبیه‌ساز با هم برابر است؟ احتمال کدام پیشامد بیشتر است؟



آیا نتایج مربوط به ۱۰۰ بار پرتاب این سکهٔ شبیه‌سازی شده هم نظر شما را تأیید می‌کند؟

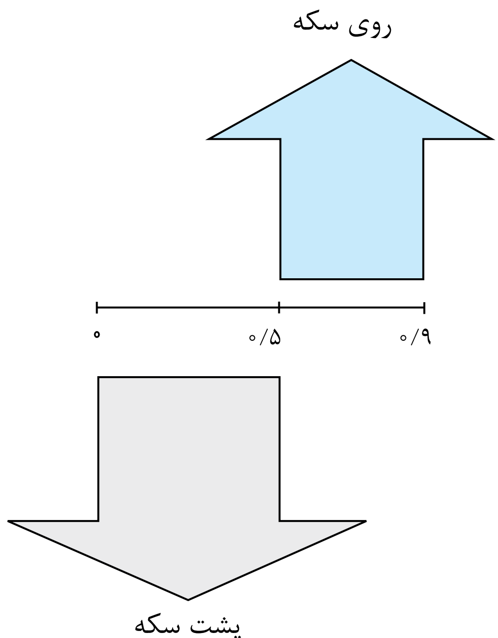
■ تغییر از همان نوع!

حالا به «sheet 3» بروید. باز هم در خانهٔ A1 در این صفحه مانند صفحهٔ قبل عبارت =RAND( ) را بنویسید.

اما در خانهٔ B1 عبارت =ROUND (A1 * 0.9 ,0) را وارد کنید و دکمهٔ Enter را بزنید. هدو خانه را تا سطر صدم به پایین بکشید و حاصل جمع عددهای ستون B1 را هم در سطر صد و یکم ستون B محاسبه کنید.

این بار یک شبیه‌ساز سکهٔ دیگر ساخته‌ایم.

ده بار دکمهٔ F9 صفحهٔ کلید را بزنید و نتایج مربوط به صد بار پرتاب این سکه (شبیه ساز سوم) را هم در جدول یادداشت کنید.



به همین ترتیب چند شبیه‌ساز دیگر هم در صفحه‌های بعدی همین فایل بسازید. (با گرفتن دکمهٔ shift و فشردن

دکمهٔ F۱۱ صفحه کلید می‌توانید صفحات جدیدی ایجاد کنید.)

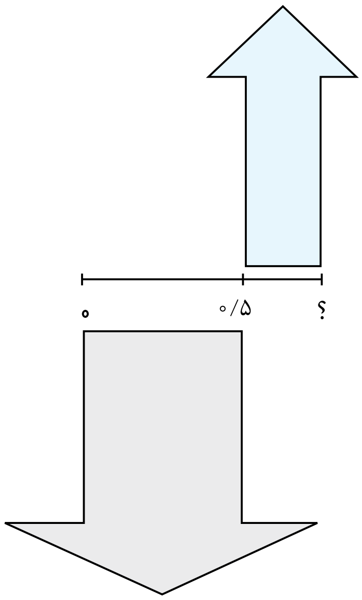
همهٔ شبیه‌سازها را مثل هم بسازید. تنها تفاوت در خانهٔ B1 مربوط به هر صفحه است.

در خانهٔ B1 صفحهٔ چهارم عبارت =ROUND (A * 0.8,0) و درخانهٔ B1 صفحهٔ پنجم عبارت =ROUND (A * 0.6,0) را وارد کنید. در خانهٔ B1 صفحهٔ ششم هم عبارت =ROUND (A * 0 . 5 ,0) را بنویسید.

در هر صفحه، ده بار دکمهٔ F۹ را بزنید و نتایج را در جدول بنویسید. خوب به نتایج به دست آمده نگاه کنید! کدام‌یک از شبیه‌سازهای دوم تا ششم سکه‌ای سالم‌تر از بقیه را شبیه‌سازی کرده است؟ چه دلیلی برای پاسختان دارید؟

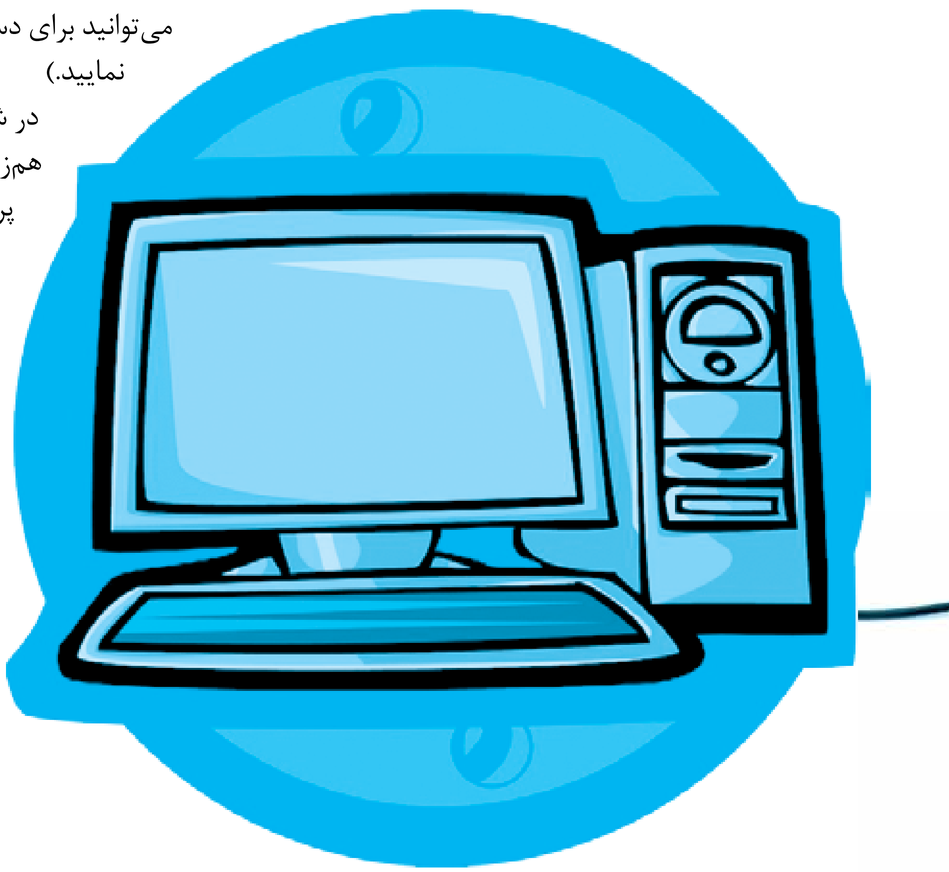
سکهٔ شبیه‌سازی شده در صفحهٔ ششم چه جور سکه‌ای است؟

آیا می‌توانید شبیه‌ساز سکه‌ای را طراحی کنید که در آن احتمال به پشت افتادن (⓪ آمدن)، دو برابرِ به رو افتادن (① آمدن) باشد؟



(ما این شبیه‌ساز را در صفحهٔ هفتم ساخته و فایل نهایی را با نام «Random Generator2» نام‌گذاری کرده‌ایم. شما می‌توانید برای دسترسی به این فایل به وبلاگ مجله مراجعه نمایید.)

در شمارهٔ بعدی مجله، به بررسی نتایج پرتاب هم‌زمان دو سکه در محیط Excel خواهیم پرداخت.



ارتباطات بی‌سیم به کمک روش‌های دودی!

(بخش سوم)

ابوالفضل طاهری

کلیدواژه‌ها: ارتباطات بی‌سیم، چوب‌های رنگی، حروف الفبا، کدگذاری

صبح زود، همینگ جوان فریادکنان به سمت خانهٔ رئیس قبیله می‌دوید: «یافتم! یافتم!»

رئیس آمد و همینگ شروع به سخنرانی کرد: «ببینید! شما ۳۲ حرف در زبان خود دارید. من می‌توانم هر حرف را با پنج چوب رنگی نمایش دهم. اگر پنج جواب را پشت سر هم آتش بزنیم، به ترتیب پنج رنگ نمایش داده می‌شود که هر کدام می‌تواند آبی یا قرمز باشد. چون برای هر کدام از چوب‌ها دو حالت رنگی می‌توانیم انتخاب کنیم، پس در مجموعِ ۳۲= ۲×۲×۲×۲×۲ حرف را می‌توانیم نمایش دهیم. مثلاً اگر تنها بخواهیم از دو چوب استفاده کنیم، ۴=۲×۲ حالت داریم:

آبی، آبی

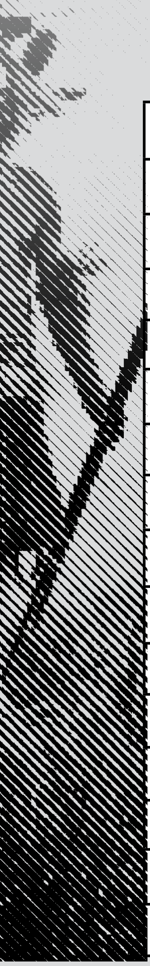
آبی، قرمز

قرمز، آبی

قرمز، قرمز

رئیس قبیله همینگ را بسیار تحسین کرد و جدول الفبای خودشان را در اختیار همینگ ما قرار داد تا از این به بعد بتواند با اعضای قبیله به کمک چوب‌های کارخانهٔ خودشان ارتباط برقرار کند.

ا	آبی، آبی، آبی، آبی، آبی	ب	آبی، آبی، آبی، آبی، قرمز
پ	آبی، آبی، آبی، قرمز، آبی	ت	آبی، آبی، آبی، قرمز، قرمز
ث	آبی، آبی، قرمز، آبی، آبی	ج	آبی، آبی، قرمز، آبی، قرمز
چ	آبی، آبی، قرمز، قرمز، آبی	ح	آبی، آبی، قرمز، قرمز، قرمز
خ	آبی، قرمز، آبی، آبی، آبی	د	آبی، قرمز، آبی، آبی، قرمز
ذ	آبی، قرمز، آبی، قرمز، آبی	ر	آبی، قرمز، آبی، قرمز، قرمز
ز	آبی، قرمز، قرمز، آبی، آبی	ژ	ابی، قرمز، قرمز، آبی، قرمز
س	آبی، قرمز، قرمز، قرمز، آبی	ش	آبی، قرمز، قرمز، قرمز، قرمز
ص	قرمز، آبی، آبی، آبی، آبی	ض	قرمز، آبی، آبی، آبی، قرمز
ط	قرمز، آبی، آبی، قرمز، آبی	ظ	قرمز، آبی، آبی، قرمز، قرمز
ع	قرمز، آبی، قرمز، آبی، آبی	غ	قرمز، آبی، قرمز، آبی، قرمز
ف	قرمز، آبی، قرمز، قرمز، آبی	ق	قرمز، آبی، قرمز، قرمز، قرمز
ک	قرمز، قرمز، آبی، آبی، آبی	گ	قرمز، قرمز، آبی، آبی، قرمز
ل	قرمز، قرمز، آبی، قرمز، آبی	م	قرمز، قرمز، آبی، قرمز، قرمز
ن	قرمز، قرمز، قرمز، آبی، آبی	و	قرمز، قرمز، قرمز، آبی، قرمز
ه	قرمز، قرمز، قرمز، قرمز، آبی	ی	قرمز، قرمز، قرمز، قرمز، قرمز



همینگ جدول را که دید بسیار شگفت‌زده شد! چگونه این جدول با این نظم و ترتیب تهیه شده است؟! به نظر شما نظم و ترتیبی در این جدول دیده می‌شود؟! همینگ با همین حال به خانه برگشت. او مدت‌ها چشم به جدول دوخته بود تا زمانی که احساس گرسنگی کرد و پرسید چگونه باید غذا تهیه کند. به او گفتند کافی است که نام غذای موردنظر خود را به کمک چوب‌های مناسب نمایش دهد. یعنی چوب‌های مناسب را برای حروف غذا به کمک جدول حروف الفبا انتخاب کند و آن‌ها را به ترتیب آتش بزند.

همینگ آن شب خورش قیمه می‌خواست. اما چگونه باید سفارش غذا می‌داد؟! چوب‌ها را به چه ترتیبی آتش می‌زد تا برایش قیمه بیاورند؟! کمی اندیشید و دست به کار شد. شما فکر می‌کنید که همینگ چگونه چوب‌ها را انتخاب کرد؟!

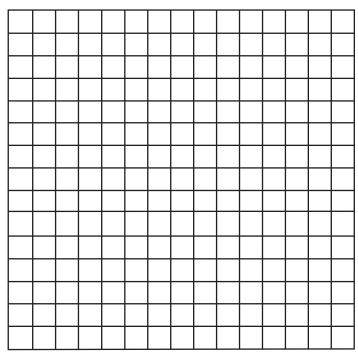
برای اینکه بتوانید برای خود غذا سفارش دهید، در شمارهٔ بعدی همراه ما باشید!

بازی بپرس و به گنج برس

آمنه ابراهیم‌زاده طاری، بهزاد اسلامی مسلّم

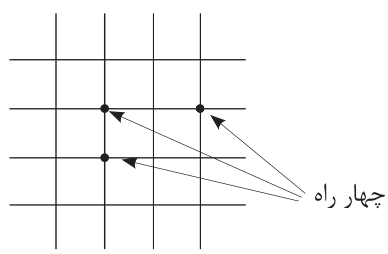
کلیدواژه‌ها: بازی دونفره، هندسهٔ تاکسی

شکل ۱ نقشهٔ شهری است که بازی نقشهٔ گنج در آن انجام می‌شود. نقشهٔ این شهر خیلی منظم است: خیابان‌های آن خطوط افقی یا عمودی هستند؛ همان خط‌هایی که در نقشه رسم شده‌اند.



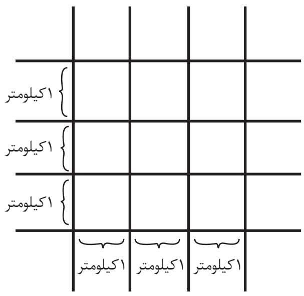
شکل ۱

مانند هر شهر دیگری، تقاطع خیابان‌ها در این شهر «چهارراه» نامیده می‌شوند. (شکل ۲).



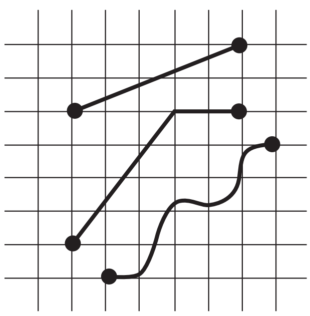
شکل ۲

همان‌طور که گفتیم، نقشهٔ این شهر خیلی منظم است: فاصلهٔ هر خیابان افقی تا خیابان افقی بعدی دقیقاً ۱ کیلومتر است. همین‌طور، فاصلهٔ هر خیابان عمودی تا خیابان عمودی بعدی هم دقیقاً ۱ کیلومتر است. پس وقتی در خیابانی حرکت کنیم، از چهارراهی به چهارراه بعد دقیقاً ۱ کیلومتر فاصله است. (شکل ۳).



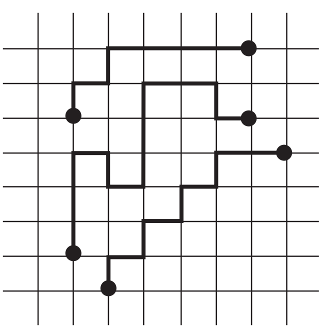
شکل ۳

اگر شخصی با اتومبیل در این شهر حرکت کند، فقط از خیابان‌ها می‌تواند عبور کند. پس هیچ‌یک از حرکت‌های شکل ۴ امکان‌پذیر نیست.



شکل ۴

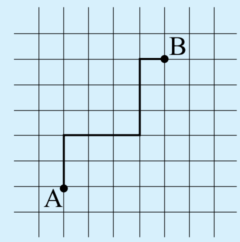
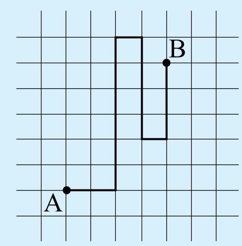
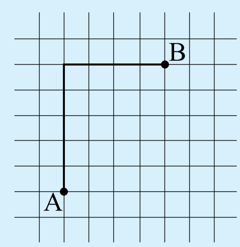
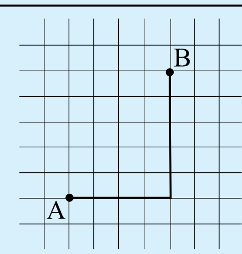
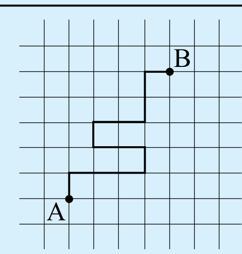
اما حرکت‌های شکل ۵ امکان‌پذیرند.



شکل ۵

فاصلهٔ تاکسی‌ای!

دو چهارراه مثل A و B در این شهر در نظر بگیرید. (شکل ۶) می‌خواهیم با خودرو از A به B برویم. همان‌طور که گفتیم، حتماً باید از خیابان‌ها عبور کنیم. از A به B مسیرهای زیادی وجود دارند، اما بعضی از آن‌ها کمترین طول ممکن را دارند. به این مسیرها بین A و B در شکل ۶ توجه کنید.

مسیر ۱		۹ کیلومتر
مسیر ۲		۱۷ کیلومتر
مسیر ۳		۹ کیلومتر
مسیر ۴		۹ کیلومتر
مسیر ۵		۱۳ کیلومتر

شکل ۶

طول هر یک از مسیرهای ۱، ۳ و ۴ برابر ۹ کیلومتر است و هیچ مسیری با طول کمتر از ۹ کیلومتر است و هیچ مسیری با طول کمتر از ۹ کیلومتر بین A و B وجود ندارد.

کمترین طول مسیر بین دو نقطه را «فاصلهٔ تاکسی‌ای بین آن دو نقطه» می‌نامند.

مثلاً در شکل‌های بالا فاصلهٔ تاکسی‌ای بین A و B برابر است با ۹ کیلومتر.

و اما بازی

و اما بازی! بازی نقشهٔ گنج، دو نفره است. نفر اول گنجی را در یکی از چهارراه‌های شهر پنهان می‌کند. نفر دوم باید جای گنج را روی نقشهٔ شهر پیدا کند.

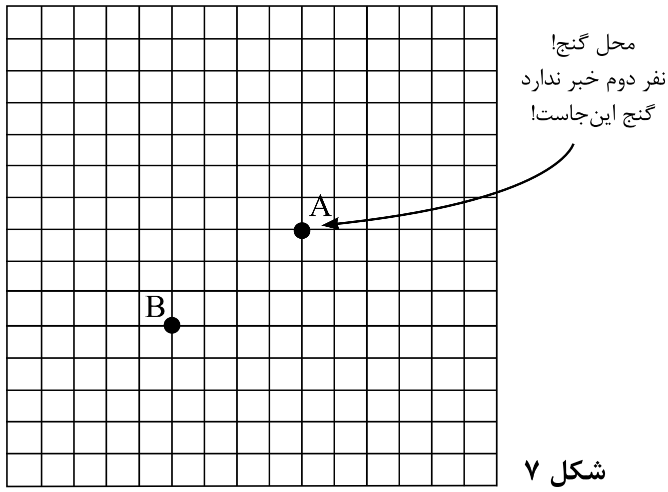
برای این کار، نفر دوم یکی از چهارراه‌های شهر را علامت می‌زند. سپس از نفر اول می‌پرسد که «فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا این چهارراه چند کیلومتر است؟» نفر اول باید به این سؤال پاسخ درست بدهد.

نفر دوم دوباره چهارراهی را علامت می‌زند و از نفر اول می‌پرسد که «فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا این یکی چهارراه چند کیلومتر است؟» و نفر اول باز هم پاسخ درست می‌دهد. بازی تا وقتی ادامه می‌یابد که نفر دوم گنج را پیدا کند. تعداد سؤال‌های نفر دوم، امتیاز نفر اول است!

ضمناً هر بار که نفر دوم محل گنج را اشتباه حدس بزند، یک امتیاز به نفر اول اضافه می‌شود و نفر دوم دوباره می‌تواند برای یافتن گنج تلاش کند.

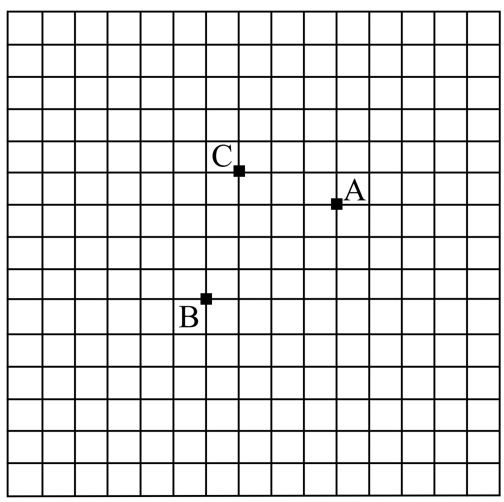
در ادامهٔ بازی، نفر اول و نفر دوم جایشان را عوض می‌کنند: نفر دوم گنج را پنهان می‌کند و نفر اول سؤال می‌پرسد، و بقیهٔ بازی مثل قبل است.

بگذارید نمونه‌ای از بازی را بررسی کنیم:
نفر اول گنج را در نقشهٔ شکل ۷ در چهارراه A پنهان کرده است. البته نفر دوم از جای گنج خبر ندارد. حالا نفر دوم چهارراه B را علامت می‌زند و می‌پرسد «فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا چهارراه B چند کیلومتر است؟»



شکل ۷

پاسخ نفر اول چیست؟ بله. پاسخ می‌دهد: «۷ کیلومتر.»
حالا نفر دوم دوباره چهارراهی را انتخاب می‌کند (در شکل ۸، چهارراه C) و می‌پرسد: «فاصلهٔ تاکسی‌ای این چهارراه تا محل گنج چند کیلومتر است؟»



شکل ۸

این‌دفعه پاسخ نفر اول این است: «۴ کیلومتر.»
فرض کنید نفر دوم سه سؤال دیگر هم بپرسد و یک بار جای گنج را اشتباه حدس بزند و در حدس بعدی گنج را پیدا کند. در این صورت امتیاز نفر اول برابر است با ۶.

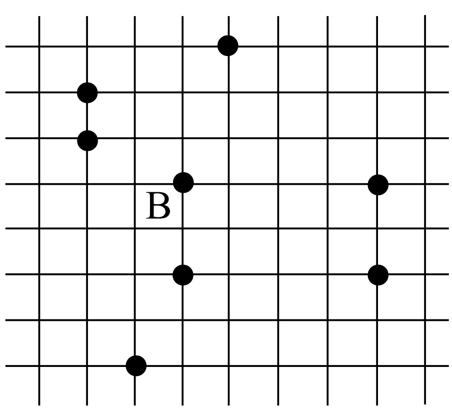
بازی «بپرس و به گنج برس!» با رایانه

آنچه در این نوشته بیان کردیم، فقط یکی از مراحل بازی است. مراحل بعدی هم جالب‌اند. برای بازی کردن این مرحله و بقیهٔ مراحل، به نشانی اینترنتی زیر بروید:
http://nrich.maths.org/6288

مسئله‌ها

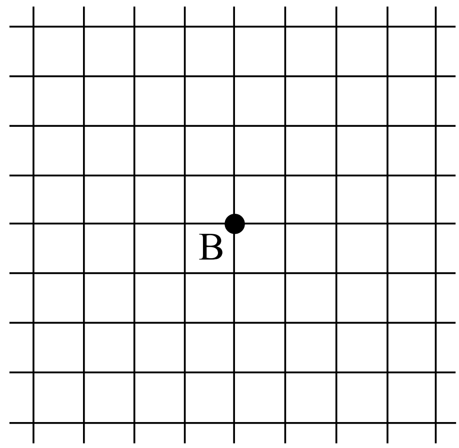
در هریک از این مسئله‌ها، نفر اول گنج را در یکی از چهارراه‌ها پنهان کرده است. البته فقط بخشی از نقشه نشان داده شده است.

۱. نفر دوم چهارراه B را علامت می‌زند و می‌پرسد: «فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا چهارراه B چند کیلومتر است؟» نفر اول پاسخ می‌دهد: «۴ کیلومتر.» در شکل بعضی از چهارراه‌ها را مشخص کرده‌ایم. بگویید با همین مقدار اطلاعات، گنج در کدام‌ها ممکن است باشد و در کدام‌ها غیرممکن است باشد.



شکل ۹

۲. نفر دوم چهارراه B را علامت می‌زند و می‌پرسد«فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا چهارراه B چند کیلومتر است؟» نفر اول پاسخ می‌دهد: «۳ کیلومتر.» با همین مقدار اطلاعات، گنج در کدام چهارراه‌ها ممکن است باشد؟ همهٔ آن چهارراه‌ها را در شکل علامت بزنید.

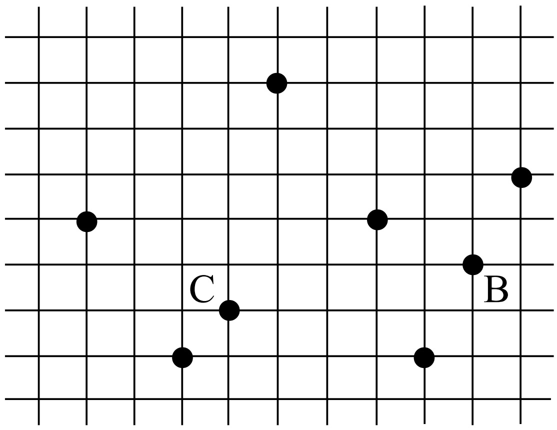


شکل ۱۰

۳. به شکل ۱۱ توجه کنید. نفردوم چهارراه B را علامت می‌زند و می‌پرسد«فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا چهارراه B چند کیلومتر است؟» نفر اول پاسخ می‌دهد: «۳ کیلومتر.»

سپس نفر دوم چهارراه C را علامت می‌زند و می‌پرسد: «فاصلهٔ تاکسی‌ای گنج تا چهارراه C چند کیلومتر است؟» نفر اول پاسخ می‌دهد: «۵ کیلومتر.»

بعضی از چهارراه‌ها را مشخص کرده‌ایم. بگویید گنج در کدام‌ها ممکن است باشد و در کدام‌ها غیرممکن است باشد.



شکل ۱۱

منبع

http://nrich.maths.org/6288

لیلا خسروشاهی

مانا در جست‌وجوی حقیقت

باز هم ادعاهایی مشروط

کلیدواژه‌ها: جملهٔ شرطی، آموزش ریاضی، عکس جملهٔ شرطی، درستی جملات

بخش چهارم

دو جملهٔ زیر را به دقت بخوانید. آیا این جملات معنای متفاوتی دارند؟

جملهٔ اول: «زوایای دو مثلث مساوی، دوبه‌دو با هم مساوی‌اند.»

جملهٔ دوم:« دو مثلث با زوایای دوبه‌دو مساوی، با هم مساوی‌اند.»

یک

جملاتی از این دست، در کتاب‌های ریاضی، فراوان‌اند. **مانا** که از ظاهر شبیه به هم این دو جمله خوشش آمده بود، تلاش می‌کرد که معنی هریک از آن‌ها را بفهمد. او خیلی زود به یاد «جملات شرطی» افتاد. در شمارهٔ قبل دیدیم که جملات شرطی، جملاتی هستند که از دو بخش تشکیل شده‌اند: یک شرط اولیه و یک ادعا. مانا در دو جملهٔ بالا، شرط اولیه و ادعا را پیدا کرد.

جملهٔ اول (زوایای دو مثلث مساوی، دوبه‌دو با هم مساوی‌اند) ادعا کرده است که زوایا دوبه‌دو مساوی‌اند، البته با این شرط که دو مثلث با هم برابر باشند.

جملهٔ دوم (دو مثلث با زوایای دوبه‌دو مساوی، با هم مساوی‌اند) ادعا کرده است که دو مثلث با هم مساوی‌اند؛ البته با این شرط که زوایای آن‌ها دوبه‌دو با هم برابر باشند.

بنابراین، مانا جملات را طوری بازنویسی کرد که معنی آن‌ها تغییر نکند و شرط اولیه و ادعا از هم جدا شوند:

جملهٔ‌اول: اگر دو مثلث با هم مساوی باشند، زوایای دو مثلث دوبه‌دو با هم مساوی‌اند.

جملهٔ دوم: اگر زوایای دو مثلث دوبه‌دو با هم مساوی باشند، دو مثلث با هم مساوی‌اند.

گاهی در زبان ریاضی، جملات شرطی را طوری می‌نویسند که دو بخش شرط اولیه و ادعا از هم جدا باشند. در ضمن از

کلمات «اگر» و «آن‌گاه» در ابتدای دو بخش استفاده می‌کنند.

- **اگر** شـرط اولیه برقرار باشـد، **آن‌گاه** ادعا نیز برقرار است.
- **اگر** دو مثلث با هم مسـاوی باشند، **آن‌گاه** زوایای دو مثلث دوبه‌دو با هم مساوی‌اند.

با این حال در بسـیاری از موارد، شـرط اولیه و ادعا از هم به طور کامل جدا نمی‌شوند و باید برای جداسازی آن‌ها تلاش کرد؛ مثل کاری که مانا انجام داد.

جملاتی کـه در ادامه می‌بینید، همگی جملاتی شـرطی هسـتند. سـعی کنید در هر مورد شـرط اولیه و ادعا را از هم جدا کنید و جمله را به صورت «اگر ..... آن‌گاه ....» بیان کنید. (پاسخ این سؤال را می‌توانید در صفحهٔ ۳۷ ببینید).

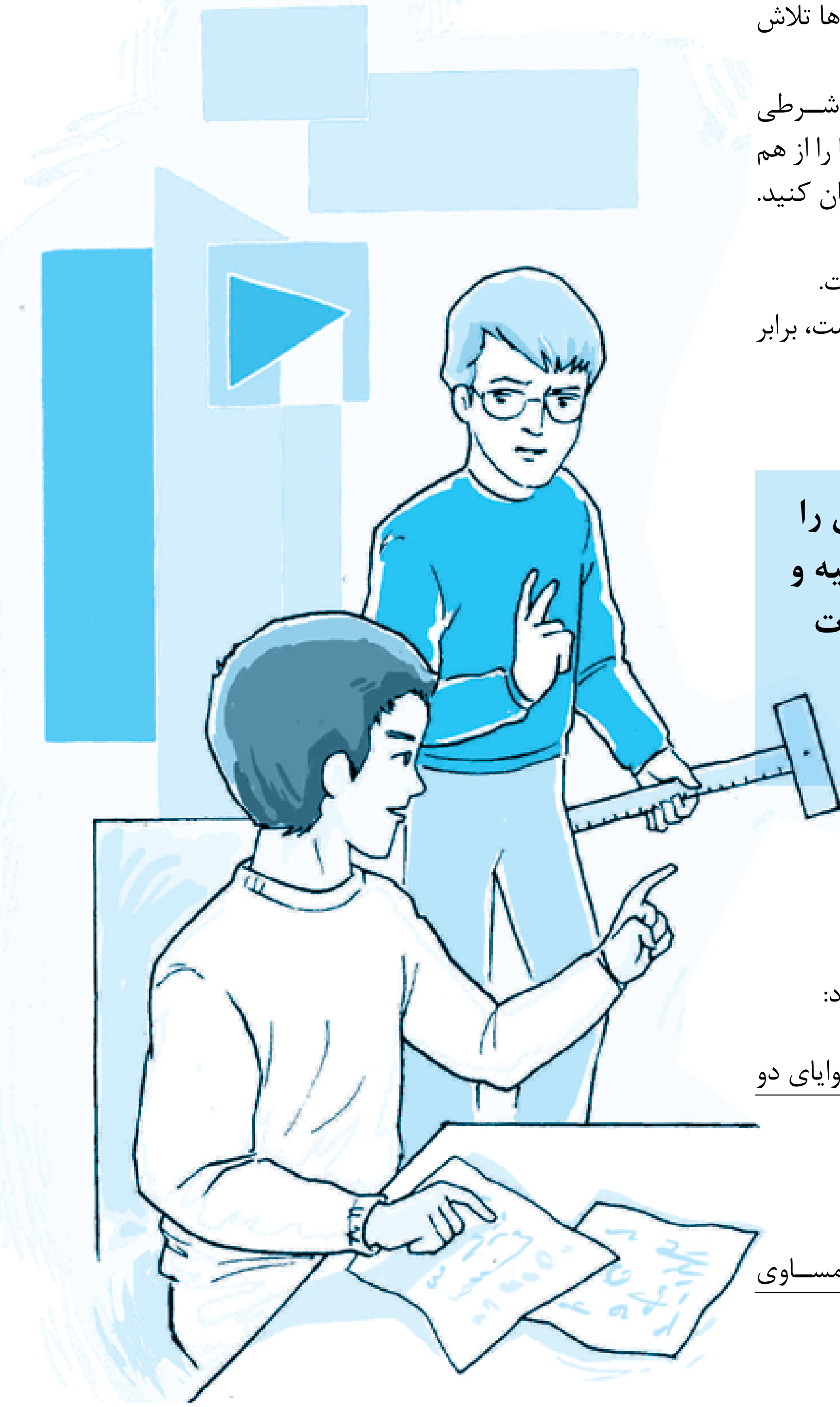
الف) هر متوازی‌الاضلاع با دو قطر برابر، لوزی است.

ب) ک.م.م دو عدد طبیعی که ب.م.م آن‌ها یک است، برابر با حاصل‌ضرب آن دو عدد است.

ج) قطرهای مستطیل با هم برابرند.

گاهی در زبان ریاضی، جملات شرطی را طوری می‌نویسند که دو بخش شرط اولیه و ادعا از هم جدا باشند. در ضمن از کلمات «اگر» و «آن‌گاه» در ابتدای دو بخش استفاده می‌کنند

اگر به جای شرط اولیه و ادعای یک جملهٔ شرطی را با هم عوض کنیم، به یک جملهٔ شرطی جدید می‌رسیم که به آن عکسِ جملهٔ شرطی قبلی می‌گوییم



دو

برگردیم به دو جمله‌ای که مانا بازنویسی کرده بود:

جملهٔ‌اول: اگر $\underbrace{\text{دو مثلث با هم مساوی باشند}}_{\text{شرط اولیه}}$، $\underbrace{\text{زوایای دو مثلث دوبه‌دو با هم مساوی‌اند}}_{\text{ادعا}}$.

جملـهٔ دوم: اگـر $\underbrace{\text{زوایای دو مثلث دوبه‌دو با هم مساوی باشند}}_{\text{شرط اولیه}}$، $\underbrace{\text{دو مثلث با هم مساوی‌اند}}_{\text{ادعا}}$.

با کمی دقـت می‌بینیم کـه در ایـن دو جمله، جای شـرط اولیه و ادعا عوض شـده اسـت. اگر به جای شرط اولیـه و ادعای یک جملهٔ شـرطی را با هـم عوض کنیم، به یک جملهٔ شـرطی جدید می‌رسـیم کـه به آن **عکسِ جملـهٔ شـرطی** قبلـی می‌گوییـم. بنابرایـن، جملهٔ دوم عکـس جملهٔ اول اسـت و به همین شـکل جملهٔ اول نیز عکـس جملـهٔ دوم.

حالا شـما عکس هریک از جملات شرطی زیر را بنویسید (پاسخ‌ها را می‌توانید در صفحهٔ ۳۷ ببینید).

د) عددی که بر ۱۰ بخش‌پذیر باشـد، بر ۲ هم بخش‌پذیر خواهد بود.

هـ) اگر دو مستطیل مساحت‌های برابر داشته باشند، طول و عرضشان نیز با هم برابر است.

و) اگر دو کسـر با هـم برابر باشـند، حاصل‌ضرب صورت هریک در مخرج دیگری با هم برابر است.

ز) اگر حاصل‌جمع دو عدد زوج باشـد، یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است

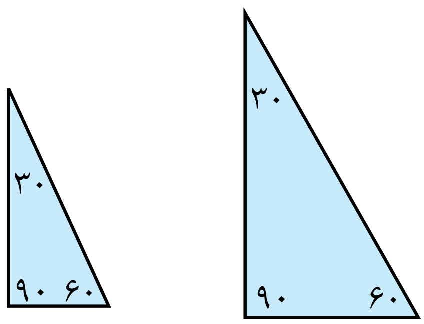
سه

مانا که می‌دانست در جملهٔ اول و دوم شرط و ادعا جابه‌جا شـده‌اند، می‌خواست دربارهٔ درسـتی و نادرستی هریک از دو جمله هم مطمئن شود. بنابراین دست به کار شد.

جملـهٔ اول در مـورد دو مثلـث برابـر ادعـا می‌کنـد که زاویه‌هـای برابـر دارند. در شـمارهٔ قبل دیدیم کـه مانا برای بررسـی درستی جملهٔ شرطیِ روی جعبه، مجبور شد بسیاری از کارت‌های جعبه را یکی یکی بررسـی کند. اما در مورد این جمله چنین کاری امکان‌پذیر نیسـت. در ریاضی در بسـیاری از مـوارد، مثال‌های موجود برای یک جمله نامحدود هسـتند و هرچه‌قدر هم بررسـی شـوند، به پایان نمی‌رسـند. بنابراین برای اثبات درسـتی همهٔ جملات شـرطی نمی‌توان از بررسی مثال‌ها اسـتفاده کرد. مانا مطمئن بود که این جمله درسـت اسـت. در واقع او پیش خـود فکر کرد که وقتی شـرط اولیه برقرار اسـت، یعنی دو مثلث با هم برابرند، این دو مثلث بر هم قابل انطباق‌اند. بنابراین چون زاویه‌های دو مثلث دوبه‌دو با هم منطبق می‌شـوند، با هم برابرند و بنابراین ادعا درسـت است. برای اثبات درستی جملات شرطی باید از شرط اولیه استفاده کرد و دلیلی قانع‌کننده برای درستی ادعا آورد.

برای اثبات درستی جملات شرطی باید از شرط اولیه استفاده کرد و دلیلی قانع‌کننده برای درستی ادعا آورد

جملهٔ دوم به سادگی جملهٔ اول نبود: «اگر زوایای دو مثلث دوبه‌دو با هم مسـاوی باشند، دو مثلث با هم مساوی‌اند.» مانا فکر کرد که اگر این جمله درسـت نباشـد، حتماً مثال نقض دارد. در شـمارهٔ قبل دیدیم که بـرای نقض کردن یک جملهٔ شـرطی، باید به دنبال مثالی باشیم که شرط اولیه را دارد، اما ادعا در مورد آن برقرار نیسـت. بنابراین مانا کوشـید دو مثلث را طوری پیدا کند که زوایایشـان برابر باشند، اما مثلث‌ها برابر نباشند. مثل این‌که کار خیلی سختی هم نبود. مانا خیلی زود مثـال زیر را پیدا کرد؛ دو مثلث با زوایای ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه که با هم برابر نیستند.



البته این جملهٔ شرطی، مثال‌های نقض فراوان دیگری هم دارد. شما هم می‌توانید چند تا از آن‌ها را پیدا کنید.

چهار

گاهی ممکن اسـت با عوض کردن جای شـرط و ادعا در یک جملهٔ شرطی درست، باز هم به یک جملهٔ شرطی درست برسـیم. همچنین ممکن است یک جملهٔ شرطی و عکس آن، هردو نادرست باشند. این بار نوبت شماست.

ح) سـراغ چهـار جملهٔ تمرین قبـل بروید. و درسـتی یا نادرسـتی هریک از این جملات و عکس آن‌ها را بررسی کنید. (پاسخ را می‌توانید در صفحهٔ ۳۷ ببینید.)

نغمه حاجی صادقی

راهبردی برای حل مسائل منطقی

کلیدواژه‌ها: مسئله‌های منطقی، حل مسئله، ماتریس، منطق

هریک از ما روزانه به حل چندین مسئله می‌پردازیم. زیرا به طور مداوم با موقعیت‌هایی روبه‌رو می‌شویم که در آن‌ها چیزی بین ما و خواسته‌هایمان قرار می‌گیرد و باید آن چیز را از سر راه برداریم. پس به نظر می‌رسد نیاز ما در جامعهٔ امروز این است که بسیار بیندیشیم، اطلاعات را تجزیه و تحلیل کنیم و به طور منطقی استدلال کنیم.

دسته‌ای از مسائل روزمره در زندگی ما، همچون مسئله‌های ریاضی، از مجموعه مسائل منطقی هستند. این مسئله‌ها بیشتر حالتی معماگونه دارند، اما حقه و کلکی در آن‌ها نیست. بنابراین، برای حل آن‌ها به جمع‌آوری اطلاعات از میان جمله‌های مسئله نیاز داریم. ممکن است از یک جمله به تنهایی، و گاهی از همراهی دو جمله با هم و رابطهٔ بین آن‌ها، اطلاعات زیادی به دست آوریم. در اینجا نمونه‌هایی از این مسئله‌ها را برای شما آورده‌ایم. روشی که برای حل این مسئله‌ها پیشنهاد می‌شود، روش منطق ماتریسی است. در این روش برای نگهداشتن تمام اطلاعات مسئله از جدولی به نام ماتریس استفاده می‌شود. ماتریس این امکان را به ما می‌دهد که اطلاعات جمله‌های مسئله را کنار هم بگذاریم و از آن‌ها اطلاعات دیگری را نتیجه بگیریم. با خواندن جمله‌های مسئله، در صورتی‌که اطلاعات آن‌ها پاسخ قطعی بله یا خیر بدهد، در خانهٔ مربوط به آن‌ها × (خیر) یا ✓ (بلی) قرار می‌دهیم. همچنین باید در نظر داشته باشیم، زمانی که خانه‌ای را با ✓ مشخص می‌کنیم، باید در سایر خانه‌های سطر و ستون آن × را قرار دهیم. برای اینکه کارکرد ماتریس را متوجه شویم، مسئلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم.

۱. مریم، مینا، مهری و مهسا، چهار دانش‌آموزند که هریک فقط از یک وسیله برای نقاشی استفاده می‌کنند. مهری عاشق رنگ‌های روشن است، اما از ماژیک استفاده نمی‌کند. مهسا و مهری هیچ‌وقت به رنگ دست نمی‌زنند. مریم از قلم‌موهای خود به خوبی مواظبت می‌کند و مدادهای مشکی برای مینا کسالت‌آورند. مشخص کنید هر دانش‌آموز چه وسیله‌ای استفاده می‌کند.

حل: اولین مرحله، خواندن تمام اطلاعات مسئله و نوشتن نام بچه‌ها (مریم، مینا، مهری و مهسا) در خانه‌های کناری و نام وسایل نقاشی (ماژیک، مداد مشکی، آب‌رنگ و مدادشمعی) در خانه‌های بالایی ماتریس است. این اطلاعات همه از میان جملات مسئله استخراج می‌شوند.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آب‌رنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم				
مینا				
مهری				
مهسا				

اکنـون بـا اسـتفاده از این ماتریـس به ثبـت اطلاعاتی می‌پردازیم که از بررسـی و تجزیه تحلیل جمله‌ها به دست می‌آوریم.

از جملهٔ «مهری عاشـق رنگ روشن اسـت، اما از ماژیک اسـتفاده نمی‌کند»، در می‌یابیم که مهری از ماژیک استفاده نمی‌کنـد. بنابراین در خانه‌ای که مهری و ماژیک تلاقی دارند، × را می‌زنیم. همچنین از این جمله نتیجه می‌گیریم که مهری به اسـتفاده از مداد مشـکی تمایلی ندارد. پس در خانهٔ محل تلاقی مهری و مداد مشکی هم × می‌گذاریم.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آبرنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم				
مینا				
مهری			×	×
مهسا				

از جملـهٔ «مهسـا و مهـری هیچ‌وقـت بـه رنگ دسـت نمی‌زننـد»، نتیجه می‌گیریم که مهسـا و مهـری از آبرنگ استفاده نمی‌کنند. بنابراین در محل تلاقی خانهٔ مهسا و مهری با آبرنگ × می‌گذاریم.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آبرنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم				
مینا				
مهری		×	×	×
مهسا		×		

اکنون با مشاهدهٔ ماتریس متوجه می‌شویم، در سطر مهری خانه‌های تمام وسـایل نقاشـی موردنظر به جز یکی پر شـده اسـت که این یعنی مهری از مدادشمعی اسـتفاده می‌کند و علامت ✓ در محل تلاقی مهری و مدادشـمعی زده می‌شود. پس در خانهٔ محل تلاقی مریم، مینا و مهسـا با مدادشمعی × می‌گذاریم چون هریک فقط از یک وسیله استفاده می‌کنند.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آبرنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم	×			
مینا	×			
مهری	✓	×	×	×
مهسا	×			

از جملـهٔ «مریـم از قلم‌موهـای خود به خوبـی مواظبت می‌کند»، می‌فهمیم مریم از آبرنگ اسـتفاده می‌کند، چون تنها وسـیله‌ای که به قلم‌مو نیاز دارد، آبرنگ اسـت. پس در خانهٔ محل تلاقی مریم و آبرنگ ✓ می‌گذاریم و در خانه‌های باقی‌ماندهٔ سـطر مریم و خانه‌های باقی‌ماندهٔ ستون آبرنگ × قرار می‌دهیم.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آبرنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم	×	✓	×	×
مینا	×	×		
مهری	✓	×	×	×
مهسا	×	×		

بـا اسـتفاده از جملـهٔ «مدادهـای مشـکی بـرای مینا کسـالت‌آورند»، در می‌یابیم که مینا از مداد مشـکی استفاده نمی‌کند. بنابراین در خانهٔ مربوط به مداد مشکی و مینا علامت × می‌گذاریم. با این کار تنها خانهٔ ماژیک در سـطر مینا خالی می‌ماند، در نتیجه مینا باید از ماژیک اسـتفاده کند و در خانهٔ برخـورد مینا و ماژیک ✓ می‌گذاریم. همچنین از مشـاهدهٔ ماتریس می‌فهمیم که مهسـا از ماژیک استفاده نمی‌کند و در محل تلاقی مهسا و ماژیک × می‌گذاریم.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آبرنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم	×	✓	×	×
مینا	×	×	×	✓
مهری	✓	×	×	×
مهسا	×	×		×

حالا ملاحظه می‌کنیم که تنها یک خانهٔ خالی مانده و آن محل تلاقی مهسا و مداد مشکی است. این یعنی باید در آن خانه ✓بگذاریم. اکنون ماتریس کامل و پاسخ مسئله پیدا شده است.

نام دانش‌آموز	مدادشمعی	آبرنگ	مداد مشکی	ماژیک
مریم	×	✓	×	×
مینا	×	×	×	✓
مهری	✓	×	×	×
مهسا	×	×	✓	×

در بعضی از مسئله‌ها دو یا بیش از دو موضوع برای بررسی وجود دارد که در این صورت هردو موضوع را در ماتریس می‌نویسیم. جدول زیر، برای مسئله ۲ رسم شده است.

برنامه   زمان

۲. بابک، طاها و رضا می‌توانند فقط یکی از برنامه‌های تلویزیون را ببینند. برنامه‌ها در ساعت‌های ۴:۰۰، ۵:۰۰، ۷:۰۰ و ۹:۰۰ بعدازظهر پخش می‌شوند. بابک دوست دارد آگهی‌های تجاری را تماشا کند. کاوه به کارتون علاقه ندارد، اما دوستش به این برنامه علاقه دارد. برنامهٔ مورد علاقهٔ بابک بعد از برنامه‌هایی است که رضا و کاوه تماشا می‌کنند. رضا عاشق کارتون‌هایی است که درست پیش از برنامهٔ مورد علاقهٔ کاوه نمایش داده می‌شوند. ساعت ۵ برنامهٔ اخبار پخش می‌شود، اما این برنامه‌ای نیست که طاها تماشا می‌کند. فیلم هم ساعت ۹ پخش می‌شود. برنامه و زمانی را که هریک از آن‌ها می‌بینند مشخص کنید.

اگر به دقت جملات مسئله را بخوانید و اطلاعات موردنیاز را گام به گام از آنها استخراج کنید، به پاسخ زیر می‌رسید:

نام	برنامه	زمان
بابک	آگهی تجاری	۷
کاوه	اخبار	۵
طاها	فیلم	۹
رضا	کارتون	۴

اکنون می‌توانید نمونهٔ مسئله‌هایی را که برگرفته از مسابقات ریاضی کانگورو در سال‌های گذشته‌اند، حل کنید.

۳. هر کدام از این پسرها، محمود، مازیار، پوریا و رضا فقط یکی از این حیوانات را نگه می‌دارند: گربه، خروس، ماهی

و قناری. پوســت حیوان مازیار، مودار است. حیوان رضا چهار پــا دارد. پوریا پرنده دارد. محمود و مازیار از گربه خوششــان نمی‌آید. کدام‌یک از جملات زیر درست نیست؟

الف. رضا یک خروس دارد.
ب. پوریا یک قناری دارد.
پ. محمود یک ماهی دارد.
ت. رضا یک گربه دارد.
ث. مازیار یک خروس دارد.

	گربه	خروس	ماهی	قناری
محمود				
مازیار				
پوریا				
رضا				

۴. آرش، بابــک، شــاهین و دانیال چهــار رتبهٔ اول (۱، ۲، ۳، ۴) مســابقات شطرنج را به دســت آورده‌اند. مجموع شــماره‌های مربوط به رتبهٔ آرش، بابــک و دانیال برابر ۶ و مجموع شــماره‌های مربوط به رتبهٔ بابک و شاهین هم برابر ۶ اســت. همچنین می‌دانیم که بابک در این مسابقات بهتر از آرش عمل کرده اســت. کدام‌یک از پسرها رتبهٔ اول را به دســت‌آورده‌اســت؟

الف. آرش ب. بابک پ. شاهین
ت. دانیال ث. نمی‌توان تعیین کرد.

	۱	۲	۳	۴
آرش				
بابک				
شاهین				
دانیال				

۵. سه جعبه روی میز است. یکی سفید، یکی قرمز و یکی ســبز. داخل یکی از آن‌ها شــکلات و داخل یکی دیگر از آن‌ها ســیب است. سومین جعبه خالی اســت. در صورتی‌که بدانیم شکلات یا در جعبهٔ سفید و یا در جعبهٔ قرمز است و سیب در جعبهٔ ســفید و سبز نیســت، جعبه‌ای که شکلات در آن است چه رنگی است؟

الف. سفید ب. قرمز پ. سبز
ت. هیچ‌کدام از آن‌ها ث. نمی‌توان تعیین کرد.

	شکلات	سیب	خالی
سفید			
قرمز			
سبز			

۶. ســه دوســت، ســامان، رامین و فرهاد هریک یکی از این شــغل‌ها را دارند: پزشــک، مهندس و نوازنده. شغل آن‌ها

متفاوت است. پزشک نه خواهر دارد و نه برادر. او کوچک‌ترین فرد در میان این سه دوست است. فرهاد از مهندس بزرگ‌تر است و با خواهر سامان ازدواج کرده است. بدین ترتیب اسامی دکتر، مهندس و نوازنده به ترتیب عبارت‌اند از:

الف. فرهاد، رامین، سامان　　ب. فرهاد، سامان، رامین
پ. رامین، سامان، فرهاد　　ت. رامین، فرهاد، سامان
ث. سامان، فرهاد، رامین

۷. آرمان، بهنام، کامران و دانیال هریک در یکی از این ورزش‌ها شرکت می‌کنند: کاراته، فوتبال، والیبال، جودو. آرمان ورزش‌هایی را که با توپ هستند، دوست ندارد. بهنام جودو تمرین می‌کند و گاهی بازی فوتبال دوستش را تماشا می‌کند. کدام عبارت زیر درست است؟

الف. آرمان والیبال بازی می‌کند.
ب. بهنام فوتبال بازی می‌کند.
پ. کامران والیبال بازی می‌کند.
ت. دانیال کاراته تمرین می‌کند.
ث. آرمان جودو تمرین می‌کند.

منابع:

۱. کتاب کاوش‌های منطقی، مورلی میت و ساندرا ایدز، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور.
۲. کتاب کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات.
۳. کتاب ریاضیات کانگورو، انتشارات فاطمی.

پاسخ مسئله‌های منطقی

۳. الف　۴. ت　۵. الف
۶. پ　۷. پ

پاسخ‌های «مانا در جست‌وجوی حقیقت»

الف) اگر در متوازی‌الاضلاعی قطرها با هم برابر باشند، آن‌گاه آن متوازی‌الاضلاع، لوزی است.

ب) اگر ب.م.م دو عدد طبیعی برابر با یک باشد، آن‌گاه ک.م.م آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب آن دو عدد است.

ج) اگر یک چهارضلعی، مستطیل باشد، آن‌گاه قطرهای آن چهارضلعی با هم برابرند.

د) **جملهٔ شرطی:** اگر عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ۲ هم بخش‌پذیر خواهد بود.

عکس: اگر عددی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ۱۰ هم بخش‌پذیر خواهد بود.

هـ) **جملهٔ شرطی:** اگر مساحت دو مستطیل با هم برابر باشند، آن‌گاه طول دو مستطیل با هم و عرض‌هایشان با هم برابرابر است.

عکس: اگر طول دو مستطیل با هم و عرضشان با هم برابر باشد، آن‌گاه مساحت‌های دو مستطیل با هم برابر است.

و) **جملهٔ شرطی:** اگر دو کسر با هم برابر باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب صورت هریک در مخرج دیگری با هم برابر است.

عکس: اگر حاصل‌ضرب هریک از دو کسر در مخرج دیگری با هم برابر باشد، آن‌گاه دو کسر با هم برابرند.

ز) **جملهٔ شرطی:** اگر حاصل‌جمع دو عدد زوج باشد، آن‌گاه یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرداست.

عکس: اگر از دو عدد یکی فرد و دیگری زوج باشد، آن‌گاه مجموع آن‌ها زوج است.

ح) جملهٔ‌شرطی «د» درست و عکس آن نادرست است.
جملهٔ شرطی «هـ» نادرست و عکس آن درست است.
جملهٔ شرطی «و» درست و عکس آن نیز درست است.
جملهٔ‌شرطی «ز» نادرست و عکس آن نیز نادرست است.

تولد آقا

بهزاد اسلامی مسلّم

کلیدواژه‌ها: شعبدهٔ ریاضی، روز تولد، مبناهای عددی

روز تولد آقای شـــبده‌چی بود و دوســـتان، اقوام و شـــاگردانش در منـــزل او بودند. آقای شـــبده‌چی گفت: «امروز می‌خواهم برای این‌که سرگرمتان کنم، شعبده‌ای اجرا کنم. این شعبده به مناسبتی که برایش دور هم جمع شده‌ایم، ربط دارد؛ یعنی تولد!»

آقای شبده‌چی ادامه داد: «من روز تولدتان را به شکلی جادویی متوجه می‌شوم! یعنی با چند سؤال خیلی بی‌ربط، متوجه می‌شوم که روز تولدتان چندم ماه است. البته ماه تولدتان را هم می‌توانم بگویم، اما فعلاً به آن کار ندارم. برای شعبده، به جدولی احتیاج داریم» و جدولی مانند این جدول رسم کرد:

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم	ستون چهارم	ستون پنجم
۱	۲	۴	۸	۱۶
۳	۳	۵	۹	۱۷
۵	۶	۶	۱۰	۱۸
۷	۷	۷	۱۱	۱۹
۹	۱۰	۱۲	۱۲	۲۰
۱۱	۱۱	۱۳	۱۳	۲۱
۱۳	۱۴	۱۴	۱۴	۲۲
۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۲۳
۱۷	۱۸	۲۰	۲۴	۲۴
۱۹	۱۹	۲۱	۲۵	۲۵
۲۱	۲۲	۲۲	۲۶	۲۶
۲۳	۲۳	۲۳	۲۷	۲۷
۲۵	۲۶	۲۸	۲۸	۲۸
۲۷	۲۷	۲۹	۲۹	۲۹
۲۹	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
۳۱	۳۱	۳۱	۳۱	۳۱

ـــای شبّـــده‌چـــی

آقای شـــبده‌چی گفت: «همان‌طور کـــه می‌بینید، در ایـــن جدول، عددهای ۱ تا ۳۱ با ترتیـــب عجیب و غریبی آمده‌انـــد. چـــه کســـی داوطلب اســـت کـــه روز تولدش را بگویـــم؟»

یکی از دوســـتان آقای شـــبده‌چی داوطلب شـــد، اما آقای شـــبده‌چی گفت: «حســـن آقا، از قبل می‌دانم تو چندم ماه به دنیا آمده‌ای! تازه به جدول هم نیاز نیست!

لطفاً یک نفر دیگر داوطلب شـــود که روز تولدش را از قبل ندانم.»

زهرا خانم ـ همسر حسن آقا ـ داوطلب شد. آقای شبده‌چی پرســـید: «خب زهرا خانم! پنج تا ســـؤال می‌پرســـم که جواب هریک بله یا نه است. به این جدول نگاه کنید. روز تولدتان در ستون اول هست؟»

زهرا خانم پاسخ داد: «بله.»

شبده‌چی: «در ستون دوم هست؟»

زهرا خانم: «بله.»

شبده‌چی: «در ستون سوم هست؟»

زهرا خانم: «نه.»

شبده‌چی: «در ستون چهارم هست؟»

زهرا خانم: «بله.»

شبده‌چی: «در ستون پنجم هست؟»

زهرا خانم: «نه.»

شبده‌چی فوراً گفت: «روز تولد شما یازدهم است.»

شبده‌چی درســـت گفته بود! همسر حســـن آقا متولد ۱۱ فروردین بود.

شخص دیگری داوطلب شد. شبده‌چی از او پرسید که روز تولدش در کدام‌یک از ستون‌ها هست. او پاسخ داد:

«ستون‌های اول، سوم و چهارم.»

شـــبده‌چی سریع گفت: «سیزدهم!» و باز هم درست گفته بود!

حســـن آقا که به نظرش رســـیده بود که راز شـــعبده را فهمیده اســـت، گفت: «شـــبده‌چی جان این که کاری ندارد! ایشـــان گفت روز تولدش در ســـتون‌های اول، سوم و چهارم اســـت. خب نـــگاه می‌کنی می‌بینی چه عـــددی فقط در این ســـه ســـتون هســـت. تنها عددی که فقط در این سه ستون اســـت،۱۳اســـت.»

شـــبده‌چی گفـــت: «خب مـــن بـــدون نگاه کـــردن به جدول هـــم می‌توانـــم همیـــن کار را بکنم! بیا! چشـــمانم هم بســـته اســـت! یک نفر بگوید کـــه روز تولدش در کدام ستون‌هاســـت.»

یکی از مهمان‌ها گفت: «دوم، ســـوم، چهـــارم و پنجم». و شبده‌چی بدون آن‌که چشمانش را باز کند، گفت: «۳۰!»

اما حســـن آقا قانع نشـــده بود: «خب لابـــد جدول را حفظ کرده‌ای!»

شـــبده‌چی گفت: «حســـن آقا! بیا در گوشت راز شعبده را بگویم، تا خودت بتوانی آن را اجرا کنی.»

حســـن آقا تا حالا هیچ شـــعبده‌ای را اجرا نکرده بود. جلو رفت و شبده‌چی راز شـــعبده را در گوشش زمزمه کرد. حسن آقا خیلـــی خوش‌حال بود کـــه می‌تواند شـــعبده را اجرا کند. بـــه یک نفر گفت: «لطفـــاً به بقیه اعلام کنید که من شـــما را نمی‌شناسم و روز تولدتان را هم نمی‌دانم.»

او گفت: «بله، اولین بار است که افتخار هم‌نشینی با حسن آقا دست داده است.»

حسن آقا از او پرسید: «روز تولدتان در کدام ستون‌هاست؟»

او پاسخ داد: «ستون‌های اول، دوم، چهارم و پنجم.»

حسن آقا سریع گفت: «۲۷!»، و پاسخش درست بود. آقای شـــبده‌چی دستی به شانهٔ حسن آقا زد و گفت: «حسن آقا! تو می‌توانی شعبده‌باز ریاضی بسیار خوبی شوی!»

راز شعبده

به عددهای سر ستون‌ها توجه کنید:

ستون پنجم	ستون چهارم	ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
۱۶	۸	۴	۲	۱

- سرِ ستون اول: ۱
- سرِ ستون دوم: ۲
- سرِ ستون سوم: ۴
- سرِ ستون چهارم: ۸
- سرِ ستون پنجم: ۱۶

آقای شبده‌چی برای فهمیدن روز تولد هر شخص، عددهای سرِ بعضی از ستون‌ها را با هم جمع می‌کرد. کدام ستون‌ها را؟ آن ستون‌هایی را که شخص اعلام می‌کرد عدد روز تولدش در آن‌ها آمده است.

مثلاً وقتی زهرا خانم گفت عدد روز تولدش در ستون‌های اول، دوم و چهارم اســت، شــبده‌چی عددهای سرِ ستون‌های اول، دوم و چهارم را با هم جمع کرد:

۱+۲+۸=۱۱

یا وقتی شخص دیگری گفت عدد روز تولدش در ستون‌های اول، دوم، چهارم و پنجم است، حسن آقا که دیگر راز شعبده را می‌دانســت، عددهای سرِ ستون‌های اول، دوم، چهارم و پنجم را با هم جمع کرد:

۱+۲+۸+۱۶=۲۷

آیــا هریک از عددهای ۱ تــا ۳۱ را می‌توان با این روش به دســت آورد؟ یعنی آیا با انتخاب یک یا چند تا از سرِ ستون‌ها (از هریــک حداکثر یک بار) و جمع کردن آن‌ها، می‌توانیم هر عددی از ۱ تا ۳۱ را ایجاد کنیم؟ بله!

۱=۱
۲=۲
۱+۲=۳
۴=۴
۱+۴=۵
۲+۴=۶
۱+۲+۴=۷
۸=۸
۱+۸=۹
۲+۸=۱۰
۱+۲+۸=۱۱
۴+۸=۱۲
۱+۴+۸=۱۳
۲+۴+۸=۱۴
۱+۲+۴+۸=۱۵
۱۶=۱۶
۱+۱۶=۱۷
۲+۱۶=۱۸
۱+۲+۱۶=۱۹
۴+۱۶=۲۰
۱+۴+۱۶=۲۱
۱+۴+۱۶=۲۲
۱+۲+۴+۱۶=۲۳
۸+۱۶=۲۴
۱+۸+۱۶=۲۵
۲+۸+۱۶=۲۶
۱+۲+۸+۱۶=۲۷
۴+۸+۱۶=۲۸
۱+۴+۸+۱۶=۲۹
۲+۴+۸+۱۶=۳۰
۱+۲+۴+۸+۱۶=۳۱

همان‌طور که می‌بینید، لازم نشد از هیچ‌یک از سرِ ستون‌ها بیش از ۱ بار استفاده کنیم.

پس جــدول را می‌توانیم به این شــکل طراحی کنیم: هر عددی را در بعضی از ســتون‌ها می‌نویسیم و در بقیهٔ ستون‌ها نمی‌نویســیم. عددی مشخص را در کدام ستون‌ها می‌نویسی؟ آن عدد را به صورت جمع سرِ ستون‌ها می‌نویسیم. سپس عدد موردنظر را در آن ســتون‌هایی می‌نویسیم که از عدد سرشان استفاده کرده‌ایم.

مثلاً

۱+۲+۱۶=۱۹

پسِ ۱۹ را فقط در ستون‌های اول، دوم و چهارم می‌نویسیم.

یا مثلاً

۸=۸

پس ۸ را فقط در ستون چهارم می‌نویسیم.

*****

این ساعت مچی آقای شبده‌چی است:

تصویر آن را روی جلد همین شماره نیز می‌بینید.

ساعت مچی شبده‌چی عقربه ندارد و زمان را به صورت عددی (مثلاً ۹:۲۸) هم نشان نمی‌دهد. زمان را به همان روشی نشان می‌دهد که آقای شبده‌چی روز تولد را پیدا می‌کرد!

زمان در ساعت مچی آقای شبده‌چی به این شکل معلوم می‌شود: صفحهٔ ساعت دو ردیف دارد. در ردیف بالا عدد ساعت مشخص می‌شود و در ردیف پایین عدد دقیقه. روشن یا خاموش بودن چراغ بالای عددها درست مثل آن است که در شعبده بگوییم عدد روز تولدمان در کدام ستون‌ها هست.

برای مثال، در شکل بالا زمان ۳:۲۵ نشان داده شده است.

اما ساعت مچی با شعبده‌ای که دیدیم تفاوت کوچکی دارد: در شعبده عددهای ۱ تا ۳۱ را لازم داریم، اما ساعت مچی باید بتواند تا عدد ۵۹ را هم نشان دهد. پس برای مشخص کردن دقیقه، عددهای ۱، ۲، ۴، ۸، و ۱۶ کافی نیستند. چه عددی باید اضافه شود؟ بله! ۳۲. مثلاً برای مشخص کردن ۵۰ عددهای ۲، ۱۶ و ۳۲ لازم‌اند:

۲+۱۶+۳۲=۵۰

*****

دربارهٔ عددهای بالاتر از ۳۱ هم صحبت کردیم. حالا آقای شبده‌چی می‌خواهد سن افراد را هم با شعبده بگوید. چه‌کار باید بکند؟ جدول او فقط اعداد ۱ تا ۳۱ را مشخص می‌کرد. اگر به آن ستونی با سرِ ستون ۳۲ اضافه کنیم (مانند ساعت مچی)، عددهای ۱ تا ۶۳ را می‌توانیم مشخص کنیم. اگر شخصی با سن بیشتر داشته باشیم، چه‌طور؟ ستونی با سرِ ستون ۶۴ را هم لازم داریم! آیا می‌توانید عددهای ستون‌ها با سرِ ستون ۳۲ و ۶۴ را مشخص کنید؟

راستی، هم ساعت مچی و هم جدول آقای شبده‌چی، عدد ۰ را هم می‌توانند مشخص کنند. اگر گفتید چه‌طور؟

*****

شاید توجه کرده باشید که سرِ ستون‌ها، برابر ۲ به توان عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ هستند:

$۲^{۰}=۱$

$۲^{۱}=۲$

$۲^{۲}=۴$

$۲^{۳}=۸$

$۲^{۴}=۱۶$

$۲^{۵}=۳۲$

$۲^{۶}=۶۴$

اگر از این عددها استفاده کنیم (هریک حداکثر یک بار)، می‌توانیم عددهای از ۰ تا ۱۲۷ را درست کنیم.

آیا می‌خواهید دربارهٔ این بحث بیشتر بدانید؟ پس مطالبی را با موضوع «مبناهای عددی» یا «عددنویسی در مبناهای مختلف» مطالعه کنید.

جام جهانی فوتبال با طعم حــــل مسئـــــله

جعفر اسدی گرمارودی

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، جام جهانی فوتبال، نحوهٔ امتیازگیری، جدول امتیازات فوتبال

همان‌طور که می‌دانید، در ماه‌های خرداد و تیر ۱۳۹۳، جام جهانی فوتبال ۲۰۱۴ در کشور برزیل برگزار می‌شود و تیم ملی فوتبال کشورمان نیز در این رویداد ورزشی بزرگ حضور خواهد داشت. به این بهانه با ارائهٔ اطلاعاتی و مسئله‌ای، سعی می‌کنیم نگاهی متفاوت به دوستانی که این مسابقات را پیگیری می‌کنند ارائه دهیم تا هیجان پیروزی‌ها و شکست‌ها در جام جهانی را با این طعم نیز تجربه کنند.

کشور برگزار کنندهٔ جام جهانی فوتبال با مسائل مختلفی درگیر خواهد بود و یکی از مواردی که کمیتهٔ برگزاری مسابقات باید پیش‌بینی درستی از آن داشته باشد، جدول دقیق و برنامه‌ریزی شده برای انجام بازی‌ها خواهد بود. البته با توجه به مشخص بودن نوع برگزاری جام جهانی، یعنی گروهی بودن و سپس تک حذفی بودن، با تشکیل جدولی منظم و با استفاده از تفکر نظام‌دار این برنامه‌ریزی قابل انجام خواهد بود. ۳۲ تیم در هشت گروه چهار تیمی قرار دارند که در هر گروه بعد از انجام بازی‌های دوره‌ای، دو تیم به مرحلهٔ یک شانزدهم صعود می‌کنند. بعد از آن مسابقات به صورت تک حذفی برگزار می‌شود تا در پایان قهرمان جام جهانی مشخص شود.

از نحوهٔ برگزاری مسابقات که بگذریم، می‌خواهیم دربارهٔ نحوهٔ امتیازگیری تیم‌ها در جام جهانی بحث کنیم و مسئله‌ای را بررسی و حل کنیم. اگر به اخبار ورزشی در تلویزیون و روزنامه‌ها دقت کرده باشید، جدولی مانند جدول ۱ را باید دیده باشید.

رتبه	نام کشور	تعداد بازی	تعداد برد	تعداد مساوی	تعداد باخت	امتیاز
۱ ۲	ایران	۳	۳	-	-	۹

جدول ۱

بـه کمک این جدول، امتیازهای چهار تیم گروه محاسـبه و رتبه‌بندی می‌شـوند. اگر تیمی در مسـابقه‌اش **برنده** شود، **۳** امتیاز، اگر **مسـاوی** کند **۱** امتیـاز و اگر **ببازد صفر** امتیاز می‌گیـرد. مثلاً اگر مانند جدول ۱، تیم ایران ۳ بازی را که در پیش دارد، ببرد ۹ امتیاز کسـب می‌کند. حالا به مسـئلهٔ زیر توجه کنید.

- تیم فوتبال ایران در سـه بازی خود در جام جهانی ۳ گل زده و ۱ گل خورده است. فکر می‌کنید امتیاز تیم ایران در این بازی‌ها چند است؟

برای به دست آوردن امتیاز ایران خوب است بدانیم، ایران چند برد، چند مسـاوی و چند باخت داشـته است. اتفاق‌های متفاوت را در جدول ۲ بررسی می‌کنیم.

امتیاز تیم ایران	تعداد باخت‌ها	تعداد مساوی‌ها	تعداد بردها
۹	۰	۰	۳
۷	۰	۱	۲
۶	۱	۰	۲
۵	۰	۲	۱
۴	۱	۱	۱
۳	۲	۰	۱
۳	۰	۳	۰
۲	۱	۲	۰
۱	۲	۱	۰
۰	۳	۰	۰

جدول ۲. بررسی رخ دادن اتفاق‌های متفاوت برای تیم ایران

سجاد جعفری

عــدد ۸ در جدول بالا در ســتون امتیازهای ممکن برای تیم ایران دیده نمی‌شود. یعنی ممکن نیست در سه بازی، تیم ایران یا هر تیم دیگری امتیاز ۸ بیاورد. در واقع با ترکیب‌های سه تایی از عددهای صفر و یک و سه، مجموع ۸ به دست نمی‌آید.

اعداد ۹، ۰، ۱، ۲ و ۳ هم نمی‌توانند امتیاز تیم ایران باشند؛ هرچنــد که با توجه به جــدول، ممکن اســت امتیاز تیم‌های دیگری باشــند. دلیل این موضوع، نتیجــهٔ ۳ گل زده و ۱ گل خورده (یعنی تفاضل گل ۲+) در بازی‌هاست:

امتیاز ۹: یعنی ۳ برد.

در این حالت، تیم ایران در هریک از سه بازی حداقل یک گل بیشــتر از تیم حریف زده است. پس در کل تفاضل گل او حداقل ۳+ است؛ نه ۲+.

امتیاز ۰ یعنی ۳ باخت.

پس در کل تفاضل گل او حداقل ۳+ اســت؛ نه ۲+. با ســه شکســت تفاضل گل منفی اســت، چون تعــداد گل‌های زده، کمتر از تعداد گل‌های خورده است.

امتیاز ۳: یعنی ۳ مساوی یا ۲ باخت و ۱ برد.

با ســه مســاوی تفاضل گل صفر است و در دو باخت ایران باید حداقل دو گل خورده باشد.

امتیاز ۲: چرا امکان‌پذیر نیست؟

امتیاز ۱: چرا امکان‌پذیر نیست؟

هر کدام از امتیازهای ۴، ۵، ۶ و ۷ ممکن اســت امتیاز تیم ایران باشند.

امتیاز ٤: از یک برد، یک مساوی و یک باخت به دست می‌آید. کافی است برد ۰ ـ ۳ و شکست ۱ ـ ۰ و مساوی ۰ ـ ۰ اتفاق افتاده باشــد

امتیاز ٥: چگونه ممکن است؟

امتیاز ٦: چگونه ممکن است؟

امتیاز ٧: چگونه ممکن است؟

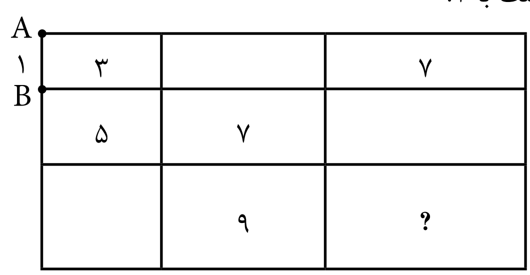
بنابرایــن برای اینکه بفهمیم تیم ایران کدام‌یک از امتیازهای ۴ تا ۷ را کسب کرده است، باید اطلاعات بیشتری داشته باشیم.

پاسخِ کی می‌تونه حَل کنه؟

(بخش سوم)

بهزاد اسلامی مسلّم

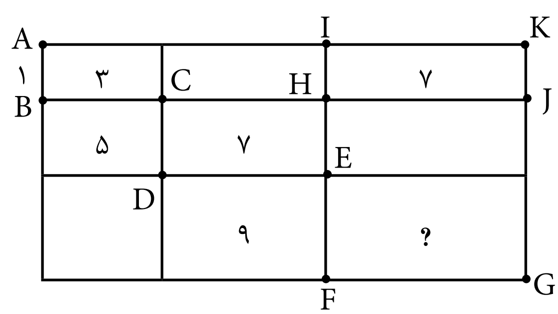
۱. در جدول زیر، همهٔ خانه‌ها مستطیل هستند. عددهای داخل هر مستطیل، مساحت آن است. طول پاره‌خط AB برابر است با ۱.



مساحت مستطیلی که با علامت «؟» مشخص شده است، چه‌قدر است؟

جواب: ۱۵.

راه‌حل: می‌خواهیم طول‌های EF و FG را حساب کنیم. طول پاره‌خط‌ها را یکی‌یکی مشخص می‌کنیم تا به این دو پاره‌خط برسیم. برای راحتی کار، نقطه‌هایی از شکل را نام‌گذاری می‌کنیم:



در شکل مستطیلی داریم که مساحتش ۳ است، و طول یکی از اضلاعش برابر است با ۱. پس ضلع دیگرش برابر است با ۳=۱÷۳. پس BC=۳.

در شکل مستطیلی داریم که مساحتش ۵ است. BC یکی از ضلع‌های این مستطیل است. حساب کردیم که BC=۳، پس طول ضلع دیگر را می‌توانیم حساب کنیم: $CD=۵\div۳=\frac{۵}{۳}$. مساحت مستطیل CDEH برابر ۷ است. CD یکی از ضلع‌های این مستطیل است. حساب کردیم که $CD=\frac{۵}{۳}$، پس طول ضلع دیگر را می‌توانیم حساب کنیم: $DE=۷\div\frac{۵}{۳}=\frac{۲۱}{۵}$.

به همین ترتیب، طول بقیهٔ پاره‌خط‌های مورد نیاز را حساب می‌کنیم: $EF=۹\div\frac{۲۱}{۵}=\frac{۴۵}{۲۱}=\frac{۱۵}{۷}$. اگر طول FG را هم پیدا کنیم، می‌توانیم مساحت «؟» را به دست آوریم. برای این کار از مستطیل IHJK استفاده می‌کنیم که مساحتش برابر است با ۷. در این مستطیل IH=۱، زیرا: IH=AB. پس HJ=۷÷۱=۷ و FG=۷، زیرا: FG=HJ. بنابراین مساحت «؟» برابر است با: $EF\times FG=\frac{۱۵}{۷}\times۷=۱۵$.

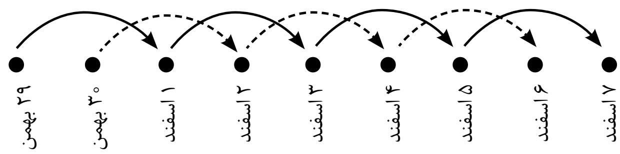
۲. یک شکارچی که هیچ‌کس به یاد ندارد دروغی گفته باشد، سال‌هاست که هر روز به کنار دریاچه می‌رود و مرغابی شکار می‌کند. او از روز اول اسفند تا ششم اسفند، هر روز به همسرش گفت:

«تعداد مرغابی‌هایی که امروز شـــکار کردم، از مرغابی‌های پریروز بیشـــتر بـــود، اما از مرغابی‌های همیـــن روز در هفته‌ی پیش، کمتر بود.»

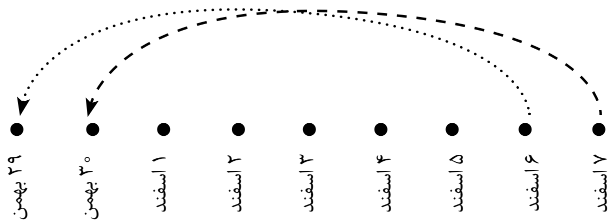
همسرش صبح روز هفتم اسفند به او گفت:

«مـــن مطمئن‌ام که امـــروز وقتی از شـــکار برگردی، دیگر حرفی را که روزهای قبل گفتی، نخواهی گفت!» همســـرش از کجا به درستی چیزی که گفت، مطمئن بود؟

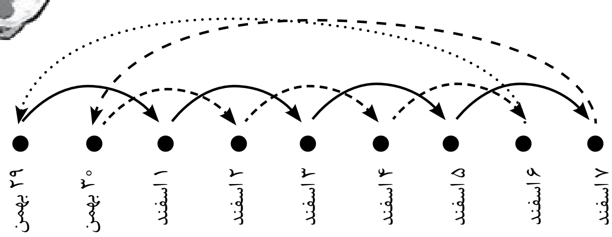
راه‌حـــل: بیایید ببینیـــم اگر روز هفتم اســـفند هم همان حـــرف را بزند، چه مشـــکلی پیش می‌آید. اگر مشـــکلی پیش بیاید به این معناســـت که در روز هفتم اسفند غیرممکن بوده اســـت همان حرف را بزند. شکارچی هر روز گفته است «تعداد مرغابی‌هایـــی که امروز شـــکار کرده‌ام، از تعـــداد مرغابی‌های پریروز بیشتر بود.» در شکل زیر علامت ⟵ به معنای افزایش شکار مرغابی‌هاست.



شـــکارچی حرف دیگری هم زده اســـت. او هـــر روز گفته است: «تعداد مرغابی‌هایی که امروز شکار کردم، از مرغابی‌های همین روز در هفتهٔ پیش، کمتر بود.» (شکل زیر)



دو شـــکل بالا را با هم ترکیب می‌کنیم تا شکل زیر حاصل شود.



حالا از ۲۹ بهمن شروع می‌کنیم و با حرکت می‌کنیم. سپس از ۷ اسفند به ۳۰ بهمن می‌رویم. سپس از ۳۰ بهمن با ها حرکت می‌کنیم و به ۶ اسفند می‌رسیم. سپس با از ۶ اسفند به ۲۹ بهمن باز می‌گردیم. چون فقط در جهت ⟶ ها حرکت کرده‌ایم، پس در روز انتهای حرکت باید تعداد مرغابی‌های شکار شده از تعداد آن‌ها در روز ابتدای حرکت بیشتر باشد. اما با این حرکت، از ۲۹ بهمن به ۲۹ بهمن رسیده‌ایم! پس تعداد مرغابی‌ها در روز ابتدا و روز انتهای حرکت برابر است. یعنی اگر شکارچی روز هفتم اسفند هم حرف هر روزش را گفته باشد، مشکل پیش می‌آید؛ به عبارت دیگر به تناقض می‌رسیم. پس شکارچی روز هفتم آن حرف را نزده است.

۳. سطلی پر از سنگ‌ریزه در دست لیلا بود. شخصی به او گفت: «من توانایی عجیبی دارم: هر سطلی پر از سنگ‌ریزه به من نشان بدهی، با یک نگاه به سطل می‌توانم بگویم چند سنگ‌ریزه در آن است. مثلاً در این سطل هزار و پانصد و بیست و چهار عدد سنگ‌ریزه هست!» ۲۰ ثانیه بعد، لیلا مطمئن شد که او آن توانایی را که گفته بود، ندارد! البته لیلا نمی‌دانست در آن سطل چند سنگ‌ریزه هست، اما با روشی که همان موقع به ذهنش رسید، از دروغگو بودن آن شخص مطمئن شد، چه روشی ممکن است به ذهن لیلا رسیده باشد؟

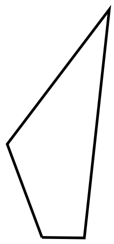
راه‌حل: لیلا به آن شخص پشت کرد، و طوری که او نبیند، چهار تا از سنگ‌ریزه‌ها را از سطل برداشت و در جیبش گذاشت. سپس به طرف آن شخص برگشت و گفت: «حالا بگو چند تا سنگ‌ریزه در سطل هست؟»

اگر شخص واقعاً آن توانایی را که گفته بود می‌داشت، باید پاسخ می‌داد: «۱۵۲۰»، زیرا قبلاً گفته بود «در این سطل «۱۵۲۴» تا سنگ‌ریزه هست» و لیلا هم دور از چشم او، چهار تا از سنگ‌ریزه‌ها را برداشته بود. اما آن شخص به سؤال لیلا پاسخی غلط داد؛ مثل «۱۴۳۹»، و به این ترتیب لیلا فهمید که ادعایش راست نبوده است.

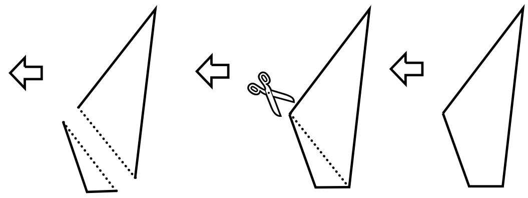
۴. دو شکل متفاوت رسم کنید که هم محیط‌های برابر داشته باشد و هم مساحت‌هایشان برابر باشد.

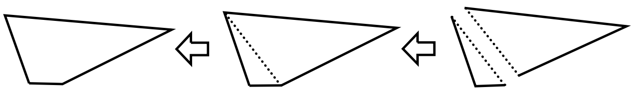
راه‌حل ۱. یک چهارضلعی که مربع نیست و لوزی هم

نیست، در نظر می‌گیریم؛ مثلاً شکل رو به‌رو:

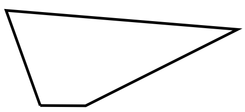


سپس این کارها را انجام می‌دهیم:

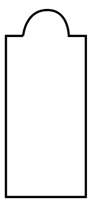




و به این شکل می‌رسیم:

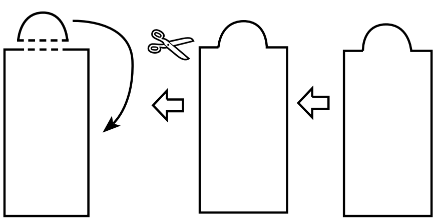


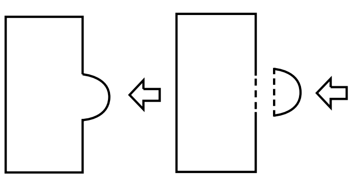
این دو شکل با هم متفاوت‌اند، اما هم مساحت‌هایشان با هم برابر است و هم محیط‌هایشان.



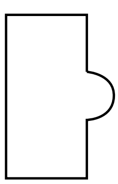
راه‌حل ۲. شکل رو به رو را در نظر بگیرید:

این کارها را انجام می‌دهیم:





و به این شکل می‌رسیم:



این دو شکل با هم متفاوت‌اند، اما هم مساحت‌هایشان با هم برابر است و هم محیط‌هایشان.