۱۲۶ـ به ازای یک مقدار x اعداد $x-۸$ و x و $x+۱۲$، به ترتیب سه جمله اوّل دنباله هندسی نزولی‌اند. حد مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

شرط دنباله هندسی بودن سه عدد متوالی a و b و c : $b^۲=ac$

$$x^۲=(۸-x)(۱۲+x) \Rightarrow x^۲=۹۶+۸x-۱۲x-x^۲$$

$$۲x^۲+۴x-۹۶=۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۴۸=۰ \Rightarrow (x+۸)(x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۸ \Rightarrow a,b,c=۱۶,-۸,۴ \Rightarrow \text{نزولی نیست} \\ x=۶ \Rightarrow a,b,c=۲,۶,۱۸ \text{ یا } ۱۸,۶,۲ \checkmark \Rightarrow q=\frac{۶}{۱۸}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\text{حد مجموع}=\frac{a}{۱-q}=\frac{۱۸}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱۸}{\frac{۲}{۳}}=۲۷$$

گزینه ۴

....

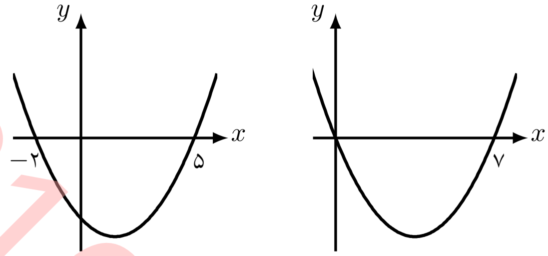
۱۲۷ـ نمودار تابع با ضابطه $y=x^۲-۳x-۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیر منفی باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

تابع، یک سهمی با دهانه رو به بالا است(ضریب $x^۲$ مثبت است).

$$y=x^۲-۳x-۱۰=(x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=-۲,۵$$

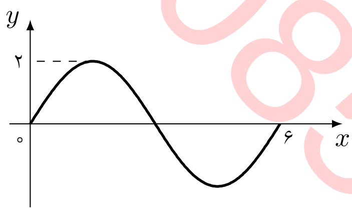
پس نمودار تابع در دو نقطه $x=-۲$ و $x=۵$ محور xها را قطع می‌کند.



طبق نمودار واضح است که باید ۲ واحد به سمت راست منتقل شود. گزینه ۳

....

۱۲۸ـ شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

طبق نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است. طبق ضابطه تابع، بیشترین مقدار تابع عبارت است از: $a=۱\times a$

(بیشترین مقدار $\sin(b\pi x)$ برابر ۱ است.)

بنابراین $a=۲$ ، همچنین دوره تناوب تابع طبق نمودار برابر ۶ است که خواهیم داشت:

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۶ \Rightarrow |۶b|=۲ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}, y'=ab\cos(b\pi x) \Rightarrow$$

$$y'_{(۰)}=ab\cos(۰)=ab, \text{ تابع در } x=۰ \text{ صعودی است. } \Rightarrow y'_{(۰)}>۰$$

$$ab>۰, a>۰ \Rightarrow b>۰ \Rightarrow b=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a+b=۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

گزینه ۳

....

۱۲۹ـ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایه واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B\times A$ کدام است؟

۱) $-۰/۹$ ۲) $-۰/۱$ ۳) $۰/۱$ ۴) $۰/۹$

$$C=B\times A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰ & -۹\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$|C|=(-۱۰)(۱)-(-۹)(۰)=-۱۰ \Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{|C|}\begin{bmatrix}۱ & ۹\\ ۰ & -۱۰\end{bmatrix}$$

$$C^{-۱}=-\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۱ & ۹\\ ۰ & -۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۹}{۱۰}\\ \frac{۰}{۱۰} & \frac{۱۰}{۱۰}\end{bmatrix}$$

گزینه ۲

....

۱۳۰ـ نمودار ساقه و برگ مقابل درصد نمرات قبولی یک کلاس است. اگر این نمرات به ۵ گروه دسته بندی شوند، در نمودار میله‌ای فراوانی نسبی، بلندی میله نظیر داده ۷۷/۵ کدام است؟

ساقه	برگ				
۶	۰	۲	۴	۷	۹
۷	۲	۳	۳	۵	۶
۸	۱	۴	۵	۵	۸
۹	۰	۱	۳	۳	۵

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

بر اساس نمودار ساقه و برگ، ۲۰ داده داریم که کوچک‌ترین آن‌ها ۶۰ و بزرگ‌ترین آن‌ها ۹۵ است.

$$\text{دامنه تغییرات}=۹۵-۶۰=۳۵ \Rightarrow \text{طول دسته}=\frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}}=\frac{۳۵}{۵}=۷$$

اکنون می‌توانیم جدول فراوانی را مشخص کنیم:

حدود دسته	$[۶۰,۶۷)$	$[۶۷,۷۴)$	$[۷۴,۸۱)$	$[۸۱,۸۸)$	$[۸۸,۹۵]$
مرکز دسته	۶۳/۵	۷۰/۵	۷۷/۵	۸۴/۵	۹۱/۵
فراوانی	۳	۵	۲	۴	۶
فراوانی نسبی	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۵}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۶}{۲۰}$

$$f_{۷۷/۵}=\frac{۲}{۲۰}=۰/۱$$

گزینه ۱

....

۱۳۱ـ میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

۱) ۹/۲۵ ۲) ۹/۳۶ ۳) ۹/۵۲ ۴) ۹/۶۳

$$\text{میانگین ۱۸ داده}=\bar{x}=۲۵=\frac{\sum_{\text{۱۸ داده}}}{۱۸} \Rightarrow \sum_{\text{۱۸ داده}}=۲۵\times ۱۸=۴۵۰$$

$$\text{انحراف معیار ۱۸ داده}=\sigma=۳ \Rightarrow \text{واریانس ۱۸ داده}=\sigma^۲=۳^۲=۹$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲_{\text{۱۸ داده}}}{۱۸}=۹ \Rightarrow \sum(x_i-\bar{x})^۲_{\text{۱۸ داده}}=۹\times ۱۸=۱۶۲$$

$$\text{میانگین ۲۱ داده}=\bar{x}'=\frac{\sum_{\text{۲۱ داده}}}{۲۱}=\frac{(\sum_{\text{۱۸ داده}})+۲۰+۲۷+۲۸}{۲۱}=$$

$$\frac{۴۵۰+۷۵}{۲۱}=\frac{۵۲۵}{۲۱}=۲۵=\bar{x} \Rightarrow \text{واریانس ۲۱ داده}=\sigma'^۲$$

$$=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲_{\text{۲۱ داده}}}{۲۱}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲_{\text{۱۸ داده}}+\sum(x_i-\bar{x})^۲_{\text{۳ داده}}}{۲۱}=$$

$$=\frac{۱۶۲+(۲۰-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۸-۲۵)^۲}{۲۱}=$$

$$\frac{۱۶۲+۵^۲+۲^۲+۳^۲}{۲۱}=\frac{۲۰۰}{۲۱}\simeq ۹/۵۲$$

گزینه ۳

۱۳۲ـ در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یك مهره آبی، خارج می‌شود؟

۱) $\frac{31}{42}$ ۲) $\frac{37}{42}$ ۳) $\frac{67}{84}$ ۴) $\frac{73}{84}$

اگر A پیشامد حداقل یک آبی باشد، A' یعنی متمم A عبارت‌است از «همه مهره‌ها غیر آبی باشند».

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{10}{\frac{9\times 8\times 7}{3!}}$$

$$= 1 - \frac{\cancel{10}^{5}\times\cancel{3}^{1}\times\cancel{2}^{1}\times 1}{\cancel{9}_{3}\times\cancel{8}_{2}\times 7} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

گزینه ۲

۱۳۳ـ اگر $\tan\alpha = 2$ و $\tan\beta = \frac{1}{3}$ باشد، $\tan(2\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 3

یادآوری

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\times 2}{1-2^2} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \tan(2\alpha-\beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{5}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -3$$

گزینه ۱

۱۳۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

نکته: وقتی $x\to 2^+$ یعنی $x>2$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{|x-2|}$$

$$\xRightarrow{x>2\to|x-2|=x-2} \lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \frac{0}{0} \overset{\text{هوپیتال}}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{-1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1}$$

$$\frac{-1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{-1}{(3)(4)} = -\frac{1}{12}$$

گزینه ۲

۱۳۵ـ تابع با ضابطه
$$f(x) = \begin{cases}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & \pi < x \leq 2\pi \\ a\cos\frac{2x}{3} & 0 \leq x \leq \pi\end{cases}$$
به ازای کدام مقدار a در $x=\pi$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

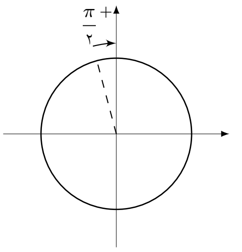
باید حد چپ و راست و مقدار تابع در $x=\pi$ برابر باشند.

$$a\cos\frac{2\pi}{3} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} \xRightarrow{\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1}$$

$$a\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{x-\pi}$$

$$-\frac{a}{2} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{x-\pi}$$

وقتی $x\to\pi^+$ پس $\frac{x}{2}\to\frac{\pi}{2}^+$ یعنی $\frac{x}{2}$ در ربع دوم قرار دارد.



$$\cos\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\cos\frac{x}{2}$$

$$-\frac{a}{2} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)}{x-\pi} = \frac{0}{0} \overset{\text{هوپیتال}}{=}$$

$$-\frac{a}{2} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{1}$$

$$-\frac{a}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

گزینه ۲

۱۳۶ـ در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع از نقطه $x=4$ تا $x=6{,}25$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$ چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{5}{72}$ ۴) $\frac{1}{12}$

آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[a,b]$: $\bar{f} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x=x_0$: $f'(x_0)$

$$\bar{f} = \frac{f(6{,}25)-f(4)}{6{,}25-4} = \frac{\sqrt{6{,}25}-\sqrt{4}}{6{,}25-4} = \frac{2{,}5-2}{2{,}25} = \frac{0{,}5}{2{,}25}$$

$$= \frac{50}{225} = \frac{2}{9}\ ,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$

گزینه ۱

۱۳۷ـ مشتق $y=\sin^3\sqrt{2x}$ ، به ازای $x=\frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{8\pi}$ ۲) $\frac{9}{4\pi}$ ۳) $\frac{27}{8\pi}$ ۴) $\frac{27}{4\pi}$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{3},\quad y = (\sin\sqrt{2x})^3 \Rightarrow$$

$$y' = 3\left((\sin\sqrt{2x})^2\right)\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)(\cos\sqrt{2x})$$

$$= 3\left((\sin\frac{\pi}{3})^2\right)\left(\frac{2}{2(\frac{\pi}{3})}\right)(\cos\frac{\pi}{3}) =$$

$$(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{3}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4\pi}$$

گزینه ۴

۱۳۸ـ شصت درصد از کارمندان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد از مردان و ۴۵ درصد از زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۳ نفر از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنان، تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۰٫۱۸۹ ۲) ۰٫۱۹۲ ۳) ۰٫۱۹۶ ۴) ۰٫۱۹۸

این مسئله، یک توزیع دوجمله‌ای است که در ۳ بار آزمایش، انتظار ۲ پیروزی دارد (پیروزی یعنی داشتن تحصیلات دانشگاهی!).

توزیع دو جمله ای

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

ابتدا احتمال پیروزی یعنی p را حساب می‌کنیم:

$p = P_{\text{مرد بودن}} \times P_{\text{تحصیلات دانشگاهی داشتن}} + P_{\text{زن بودن}} \times P_{\text{تحصیلات دانشگاهی داشتن}}$

$= \left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\right)\left(\frac{۲۰}{۱۰۰}\right) + \left(\frac{۴۰}{۱۰۰}\right)\left(\frac{۴۵}{۱۰۰}\right) = \frac{۱۲۰۰+۱۸۰۰}{۱۰۰۰۰}$

$\Rightarrow p = \frac{۳۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۳}{۱۰}, n=۳, k=۲ \Rightarrow$ **گزینه ۱**

$P(X=۲) = \binom{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^۲\left(۱-\frac{۳}{۱۰}\right)^۱ = ۳\left(\frac{۹}{۱۰۰}\right)\left(\frac{۷}{۱۰}\right) = \left(\frac{۱۸۹}{۱۰۰۰}\right)$

۱۳۹ـ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$، بر نیمساز ناحیه اوّل محورهای مختصات، مماس است؟

۱) -۴ ۲) $۴, -۱۲$ ۳) $-۴, ۱۲$ ۴) ۱۲

وقتی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بر هم مماس باشند، یعنی معادله $f(x) = g(x)$ ریشه مضاعف دارد.

ضابطه تابع نیمساز ربع اول و سوم $y = x$ است. اما در صورت سوال، فقط ناحیه اوّل مطرح شده، پس باید x مثبت باشد.

$۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ = x \Rightarrow ۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$

$\Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴(۲)(m+۶) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$

$\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴) = ۰ \Rightarrow m = -۴, ۱۲$

باید ببینیم با کدام m ریشه معادله مثبت می‌شود.(یعنی ناحیه اول)

$m = -۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \checkmark$

$m = ۱۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \times$

$\Rightarrow m = -۴, \cancel{۱۲}$ **گزینه ۱**

۱۴۰ـ فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = ۲^x$ و $y = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴$ از نقطه $A(۰,۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تابع اول را با پایه $\sqrt{۲}$ نمایش می‌دهیم.

$y_۱ = ۲^x = ((\sqrt{۲})^۲)^x = ((\sqrt{۲})^x)^۲$

$y_۲ = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴ = (\sqrt{۲})^۱(\sqrt{۲})^x + ۱ \Rightarrow y_۱ = y_۲ \xRightarrow{(\sqrt{۲})^x = X}$

$X^۲ = \sqrt{۲}X + ۴ \Rightarrow X^۲ - \sqrt{۲}X - ۴ = ۰, \Delta = (\sqrt{۲})^۲ - ۴(۱)(-۴)$

$= ۲ + ۱۶ = ۱۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow X = \frac{\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲}$

$X = (\sqrt{۲})^x = \begin{cases} \frac{۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲} \checkmark \\ \frac{-۲\sqrt{۲}}{۲} = -\sqrt{۲} \end{cases}$ غیر قابل قبول زیرا $(\sqrt{۲})^x$ باید مثبت باشد

$(\sqrt{۲})^x = ۲\sqrt{۲} = (\sqrt{۲})^۲(\sqrt{۲})^۱ = (\sqrt{۲})^۳ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = ۲^۳ = ۸$

نقطه تلاقی $B = (۳,۸) \Rightarrow AB = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۸-۴)^۲} = \sqrt{۹+۱۶}$

$= \sqrt{۲۵} = ۵$ **گزینه ۴**

۱۴۱ـ از تساوی $\log_x(۳x+۸) = ۲ - \log_x(x-۶)$ مقدار x لگاریتم در پایه ۴ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

دو یادآوری:

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x$

$\log_x(۳x+۸) + \log_x(x-۶) = ۲ \Rightarrow$

$\log_x[(۳x+۸)(x-۶)] = ۲ \Rightarrow (۳x+۸)(x-۶) = x^۲ \Rightarrow$

$۳x^۲ - ۱۸x + ۸x - ۴۸ = x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۰x - ۴۸ = ۰ \Rightarrow$

$x^۲ - ۵x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x-۸)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x = -۳, ۸$

$x = -۳$ قابل قبول نیست. زیرا x پایه لگاریتم است و نباید منفی باشد.

$\log_۴ x = \log_۴ ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۲}$ **گزینه ۳**

۱۴۲ـ جواب کلّی معادله مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right)} = ۱$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right) = \cos(\pi + \underbrace{\frac{\pi}{۲} + x}_{\theta}) = -\cos\theta =$

$-\cos(\frac{\pi}{۲} + x) = -(-\sin x) = \sin x \Rightarrow \frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۱$

$\Rightarrow \sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \times \\ ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \checkmark \end{cases}$ مخرج کسر را صفر می‌کند

گزینه ۴

۱۴۳ـ خط قائم بر منحنی $y = xe^{x^۲-۴}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه $(x_۰, y_۰)$:

$y - y_۰ = f'(x_۰)(x - x_۰)$

معادله خط قائم بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه $(x_۰, y_۰)$:

$y - y_۰ = -\frac{۱}{f'(x_۰)}(x - x_۰)$

$y_۰ = f(x_۰) = f(۲) = ۲(e^{۲^۲-۴}) = ۲(e^۰) = ۲$

$f'(x) = y = e^{x^۲-۴} + x(۲x)e^{x^۲-۴} = (۱ + ۲x^۲)e^{x^۲-۴}$

$f'(۲) = (۱+۸)e^۰ = ۹ \Rightarrow y - ۲ = -\frac{۱}{۹}(x-۲)$ **گزینه ۴**

$y = ۰ \Rightarrow -۲ = -\frac{۱}{۹}(x-۲) \Rightarrow x - ۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۲۰$

۱۴۴ـ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{۳}{x} - ۵ & ; x \geq ۱ \\ x^۲ + ax + b & ; x < ۱ \end{cases}$ در نقطه $x = ۱$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تابع باید در $x = ۱$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست برابر داشته باشد.

حد راست = حد چپ $\Rightarrow \frac{۳}{۱} - ۵ = ۱ + a + b \Rightarrow a + b = -۳$

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{۳}{x^۲} & ; x \geq ۱ \\ ۲x + a & ; x \leq ۱ \end{cases} \Rightarrow -\frac{۳}{۱} = ۲ + a \Rightarrow a = -۵ \Rightarrow b = ۲$

گزینه ۲

۱۴۵ـ در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

۱) $(-2,0)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(0,1)$

برای صعودی بودن باید $f'(x)>0$ و برای اینکه تقعر رو به پایین باشد باید $f''(x)<0$. پس $f'(x)$ و $f''(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x=x(x^2+\frac{3}{2}x-6)$$

$$f''(x)=3x^2+3x-6=3(x^2+x-2)$$

$$x(x^2+\frac{3}{2}x-6)=0\Rightarrow x=0,\ x^2+\frac{3}{2}x-6=0\xRightarrow{\times 2}$$

$$2x^2+3x-12=0\Rightarrow \Delta=3^2-4(2)(-12)=9+96=105$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{4}$$

$\boxed{\text{گزینه ۱}}$

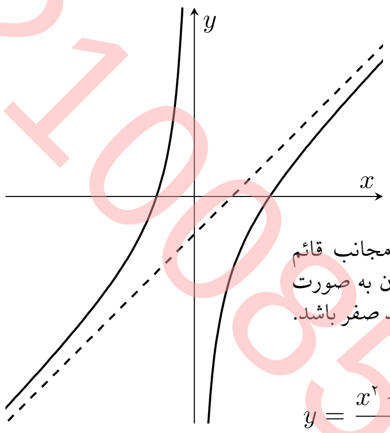
x		$\frac{-3-\sqrt{105}}{4}$		0		$\frac{-3+\sqrt{105}}{4}$	
x	$-$	0	$-$		$+$		$+$
$x^2+\frac{3}{2}x-6$	$+$		$-$	0	$-$	0	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow\left(\frac{-3-\sqrt{105}}{4},0\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{105}}{4},+\infty\right)\quad(*)$$

$$3(x^2+x-2)=0\Rightarrow 3(x+2)(x-1)=0\Rightarrow x=-2,1$$

بین دو ریشه منفی $\Rightarrow(-2,1)\quad(**)\Rightarrow(*)\cap(**)=(-2,0)$

۱۴۶ـ شکل روبرو نمودار تابع $y=\frac{x^2+ax-2}{x+b}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



۱) $b<0, a<0$

۲) $b>0, a=0$

۳) $b=0, a>0$

۴) $b=0, a<0$

نمودار تابع، فقط یک مجانب قائم دارد. یعنی محور yها که معادله آن به صورت $x=0$ است. پس ریشه مخرج باید صفر باشد. بنابراین: $b=0$

$$y=\frac{x^2+ax-2}{x+b}=\frac{x^2+ax-2}{x}\xRightarrow{\text{تفکیک می‌کنیم}}y=x+a-\frac{2}{x}$$

واضح است که خط $y=x+a$ مجانب مایل نمودار است که طبق شکل، عرض از مبدأ منفی دارد. یعنی $a<0$

$\boxed{\text{گزینه ۴}}$

۱۴۷ـ نقطه $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y-x=5$ است. مساحت این مربع،کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

فاصله وسط قطر مربع(مرکز تقارن) از هر ضلع، برابر نصف ضلع مربع است. پس باید فاصله A را از خط داده‌شده پیدا کنیم.

نکته

فاصله نقطه (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$-x+2y-5=0\Rightarrow d=\frac{|(-1)(3)+2(-1)-5|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}$$

$=\frac{10}{\sqrt{5}}=$ نصف ضلع $\Rightarrow$ ضلع $=\frac{20}{\sqrt{5}}\Rightarrow$ مساحت $=$ ضلع $\times$ ضلع

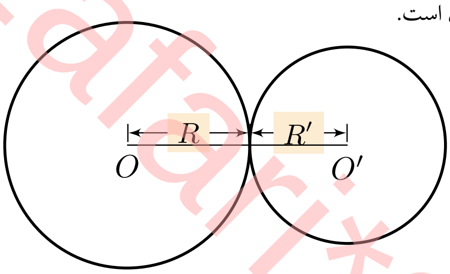
$$=\frac{20}{\sqrt{5}}\times\frac{20}{\sqrt{5}}=\frac{400}{5}=80$$

$\boxed{\text{گزینه ۴}}$

۱۴۸ـ شعاع دایره به مرکز $(-2,2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

وقتی دو دایره مماس خارج باشند فاصله بین دو مرکز آن‌ها برابر مجموع شعاع‌هایشان است.



معادله دایره استاندارد به مرکز (α,β) و شعاع R:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

معادله استاندارد دایره داده شده:

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0\Rightarrow x^2+y^2-2x+4y=-1$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+4x+4=-1+1+4$$

$$\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4\Rightarrow O=(1,-2), R=2$$

$$OO'=\sqrt{\left(-2-1\right)^2+\left(2-(-2)\right)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$R'=OO'-R=5-2=3$$

$\boxed{\text{گزینه ۲}}$

۱۴۹ـ قدر مطلق تفاضل فواصل نقطه متحرک $M(x,y)$، از دو نقطه ثابت $(2,-4)$ و $(2,6)$ همواره برابر ۶ واحد است. این متحرک با کدام عرض، خط به معادله $x=5$ را قطع می‌کند؟

۱) $1\pm\frac{15}{4}$ ۲) $1\pm 4\sqrt{2}$ ۳) $2\pm\frac{15}{4}$ ۴) $2\pm 3\sqrt{2}$

صورت سوال، دقیقا تعریف «هذلولی» است. دو نقطه ثابت، همان کانون‌های هذلولی هستند.و به دلیل یکسان بودن طول کانون‌ها، هذلولی قائم است.

معادله هذلولی قائم:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$ وسط دو کانون $=(\alpha,\beta)$: مرکز هذلولی

$$\Rightarrow(\alpha,\beta)=\frac{(2,-4)+(2,6)}{2}=(2,1), 2a=6\Rightarrow a=3$$

$$c=\frac{FF'}{2}=\frac{6-(-4)}{2}=5\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

$$b^2=c^2-a^2=25-9=16\Rightarrow\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$$

$$x=5\Rightarrow\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(5-2)^2}{16}=1\Rightarrow\frac{(y-1)^2}{9}=\frac{9}{16}+1$$

$$\frac{(y-1)^2}{9}=\frac{25}{16}\Rightarrow(y-1)^2=\frac{9\times 25}{16}\Rightarrow y-1=\pm\sqrt{\frac{9\times 25}{16}}$$

$$y-1=\pm\frac{3\times 5}{4}\Rightarrow y=1\pm\frac{15}{4}$$

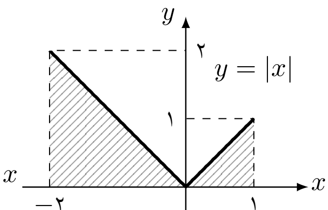
$\boxed{\text{گزینه ۱}}$

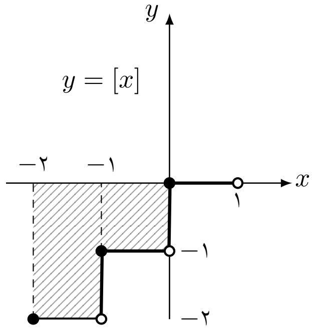
۱۵۰ـ مقدار انتگرال معیّن $\int_{-2}^{1}(|x|-[x])dx$ ، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

$$\int_{-2}^{1}(|x|-[x])dx=\int_{-2}^{1}|x|dx-\int_{-2}^{1}[x]dx$$

انتگرال، مساحت «علامت‌دار» محصورشده بین تابع و محور xها است. به این صورت که قسمت‌های پایین محور xها با علامت منفی و قسمت‌های بالای محور xها با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود. می‌توانیم تمودار دو تابع را رسم کنیم و دو انتگرال را جداگانه حساب کنیم و از هم کم کنیم.





مطابق نمودارها داریم:

$$\int_{-2}^{1}|x|dx=(\frac{1}{2})(2)(2)+(\frac{1}{2})(1)(1)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\int_{-2}^{1}[x]dx=-(1)(2)-(1)(1)+0=-3$$

گزینه ۴

$$\int_{-2}^{1}|x|dx-\int_{-2}^{1}[x]dx=\frac{5}{2}-(-3)=\frac{5}{2}+\frac{6}{2}=\frac{11}{2}=5/5$$

....

۱۵۱ـ اگر $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2dx=\frac{f(x)}{2x}+C$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^3-8x\sqrt{x}+2$ ۲) $x^3-4x\sqrt{x}+2$

۳) $x^3-8x\sqrt{x}-2$ ۴) $x^3-4x\sqrt{x}-2$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left((\sqrt{x})^2+(\frac{1}{x})^2-2(\sqrt{x})(\frac{1}{x})\right)dx$$

$$\int xdx+\int\frac{1}{x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$$

$$\int x^1dx+\int x^{-2}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^{-1}}{-1}-2\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-4\sqrt{x}+\cancel{C}=\frac{f(x)}{2x}+\cancel{C}$$

$$\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-4\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=2x\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}-4\sqrt{x}\right)$$

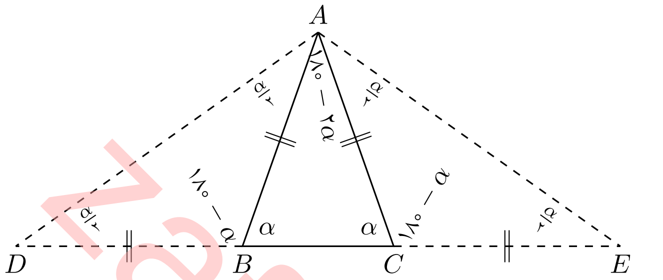
$$=x^3-2-8x\sqrt{x}$$

گزینه ۳

۱۵۲ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC قاعده BC را از دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچکترین زاویه خارجی،چند برابر کوچکترین زاویه داخلی آن است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

اگر زاویه‌های مجاور ساق‌ها را α فرض کنیم، طبق شکل خواهیم داشت:



زاویه‌های مثلث ADE عبارت‌اند از:

$$\text{زاویه‌های خارجی : }\begin{cases}180-\frac{\alpha}{2}\\180-\frac{\alpha}{2}\\\alpha\end{cases}\Rightarrow\text{ زاویه‌های داخلی : }\begin{cases}\frac{\alpha}{2}\\\frac{\alpha}{2}\\180-\alpha\end{cases}$$

α زاویه داخلی مثلث متساوی‌الساقین ABC است. پس باید از ۹۰ درجه کمتر باشد. در این صورت $\frac{\alpha}{2}$ از ۴۵ درجه کوچکتر است و $180-\frac{\alpha}{2}$ و $180-\alpha$ حتما منفرجه خواهد بود. یعنی $\frac{\alpha}{2}$ کوچکترین زاویه داخلی مثلث ADE و α کوچکترین زاویه خارجی است.

$$\frac{\text{کوچکترین زاویه خارجی}}{\text{کوچکترین زاویه داخلی}}=\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2$$

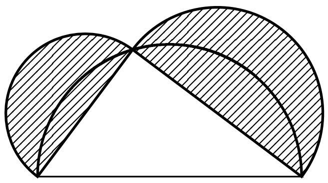
گزینه ۳

....

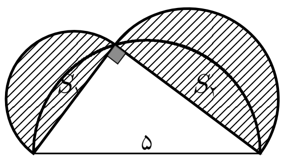
۱۵۳ـ در مثلث قائم‌الزاویه طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع مثلث رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیه سایه‌زده کدام است؟

۱) 2π ۲) ۶

۳) ۷ ۴) 3π



شکل را به صورت زیر نام‌گذاری می کنیم:



$$S_{\text{سایه‌زده}}=S_{\text{دو نیم‌دایره کوچک}}-(S_1+S_2)$$
$$=S_{\text{دو نیم‌دایره کوچک}}-(S_{\text{نیم‌دایره بزرگ}}-S_{\text{مثلث}})$$
$$=S_{\text{دو نیم‌دایره کوچک}}-S_{\text{نیم‌دایره بزرگ}}+S_{\text{مثلث}}$$

شعاع نیم‌دایره‌ها را R_1 و R_2 و R در نظر می‌گیریم

$$S_{\text{سایه‌زده}}=\frac{1}{2}\pi R_1^2+\frac{1}{2}\pi R_2^2-\frac{1}{2}\pi R^2+\frac{1}{2}(3)(4)$$

$$=\frac{1}{2}\pi(R_1^2+R_2^2-R^2)+6=\frac{1}{2}\pi\left((\frac{3}{2})^2+(\frac{4}{2})^2-(\frac{5}{2})^2\right)+6$$

$$=\frac{1}{2}\pi\overbrace{\left(\cancel{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}-\frac{25}{4}}\right)}^{0}+6=6$$

گزینه ۲

....

۱۵۴ـ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{1}{8}$ مجذور وتر آن است. کوچکترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

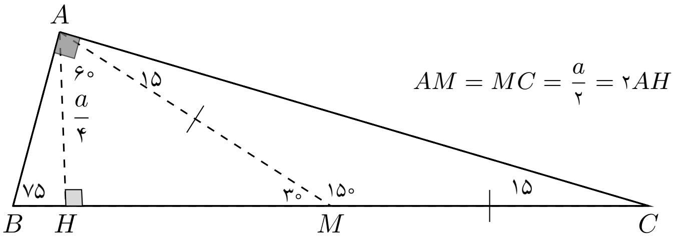
۱) ۱۵ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۳۰

اگر وتر مثلث را a و ارتفاع وارد بر وتر را h فرض کنیم:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{8}a^2\Rightarrow h=\frac{a}{4}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است

در مثلث قائم‌الزاویه AHM ضلع AH نصف وتر AM است. پس زاویه روبروی آن باید ۳۰ درجه باشد. مطابق شکل کوچکترین زاویه‌ی مثلث قائم‌الزاویه ABC، ۱۵ درجه است. **گزینه ۱**

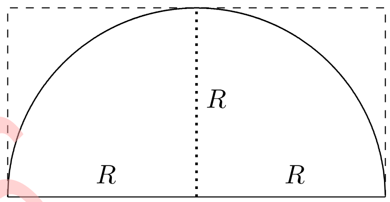


$$AM = MC = \frac{a}{۲} = ۲AH$$

۱۵۵ـ نیم‌کره‌ای به قطر ۱۲ واحد، در داخل کوچکترین استوانه ممکن جای گرفته است. حجم محدود به این نیم‌کره و استوانه، چند برابر π است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۵۴ ۴) ۷۲

کوچکترین استوانه ممکن، یعنی استوانه‌ای که قاعده آن منطبق بر کف نیم‌کره(دایره عظیمه) و ارتفاع آن برابر شعاع نیم‌کره است. یعنی از بالا، مماس بر قاعده بالایی استوانه خواهد بود.



$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^۲ h$$

$$V_{\text{محدود به نیم‌کره و استوانه}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{نیم‌کره}} = \pi R^۲ h - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right) = \pi R^۲(R) - \frac{۲}{۳}\pi R^۳ = \pi R^۳ - \frac{۲}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۳}\pi R^۳$$

$$\frac{۱}{۳}\pi(۶^۳) = \frac{۱}{۳}\pi(۶)(۶)(۶) = \pi(۲)(۶)(۶) = ۷۲\pi$$

گزینه ۴